Universidade Federal de Alagoas
Programa de Pós-Graduação do Instituto de Física
Exame de Qualificação de Doutorado - Eletromagnetismo
Professor: Paulo Brandão
12/08/2020

Nome:______________________________

2020.2

1. **Equação de Poisson num material não-homogêneo**

   Mostre que a equação diferencial satisfeita pelo potencial eletrostático $\Phi(\vec{r})$ num material *não-homogêneo* e *linear* (a polarização $\vec{P}$ é linearmente proporcional ao campo elétrico $\vec{E}$) é dada por

$$\nabla^2\Phi(\vec{r}) + \vec{\nabla}[\ln\varepsilon(\vec{r})]\cdot\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_f(\vec{r})}{\varepsilon(\vec{r})}, \tag{1}$$

   onde $\varepsilon(\vec{r})$ [F/m] é a permissividade elétrica que varia com a posição $\vec{r}$ e $\rho_f(\vec{r})$ é a densidade volumétrica de cargas livres presente no material.

2. **Uma transformação que deixa as equações de Maxwell invariantes**

   (a) Mostre que as equações de Maxwell (dependentes do tempo) no vácuo, e sem a presença de fontes, são invariantes sob as transformações

$$\vec{E}' = a\vec{E} + bc\vec{B} \qquad \vec{B}' = -\frac{b}{c}\vec{E} + a\vec{B}, \tag{2}$$

   onde a e b são constantes e c é a velocidade da luz.
   (b) Sob quais condições a densidade de energia $u = (\varepsilon_0/2)\vec{E}\cdot\vec{E} + (1/2\mu_0)\vec{B}\cdot\vec{B}$ [J/m^3] é invariante com relação à transformação (2)?

3. **Energia total de uma casca esférica carregada que gira**

   Uma casca esférica de raio R uniformemente carregada com carga q gira com uma velocidade angular ω. Os campos dentro e fora da esfera são dados por

$$r < R: \quad \vec{E} = 0, \quad \vec{B} = \frac{3}{2}\mu_0\sigma R\omega\hat{z} \tag{3}$$

$$r > R: \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}, \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\hat{r}\cos\theta + \hat{\theta}\sin\theta), \tag{4}$$

   onde $\sigma = q/(4\pi R^2)$ é a densidade superficial de cargas e $m = (3/4)\pi\sigma\omega R^4$ o momento de dipolo magnético da distribuição. O sistema de coordenadas utilizado para escrever as equações (3) e (4) é o esférico. Calcule a energia total (Joules) contida no campo eletromagnético deste sistema e mostre que, para uma velocidade angular ω fixa, o sistema possui menor energia quando $R = 3c/\sqrt{2}\omega$, onde c é a velocidade da luz.

4. **Um modelo eletrostático para o átomo**

   Podemos modelar a densidade de cargas presente num átomo através de

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & \text{se } r \in [0, a] \\ -\frac{\rho_0}{b-a}r + \frac{b\rho_0}{b-a} & \text{se } r \in [a, b] \end{cases}$$

   onde ρ_0, a e b são constantes positivas com $b > a$. (a) Faça um gráfico da densidade de cargas. (b) Calcule o campo elétrico fora desta distribuição ($r > b$).