Exame de Qualificação - Mecânica Quântica
26/08/20
Nome: ____________________________
Semestre 2020.2
26/08/20
Limite de tempo: 4 horas e 30 minutos Professor Italo Nunes de Oliveira

---

1) Considere um oscilador harmônico unidmensional de Hamiltoniano H e estados estacionários $|\varphi_n\rangle$, tal que

$$H|\varphi_n\rangle = \hbar\omega\,(n+1/2)\,|\varphi_n\rangle, \tag{1}$$

com $n = 0,1,2,3\ldots$. O operador $U(k)$ é definido como:

$$U(k) = e^{ikX}, \tag{2}$$

onde X é o operador posição.
(a) O operador $U(k)$ é unitário? Mostre que

$$\sum_{n'} |\langle\varphi_n|U(k)|\varphi_{n'}\rangle|^2 = 1. \tag{3}$$

(b) Os operadores de aniquilação e criação, a e $a^\dagger$, são definidos como

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(X + \frac{iP_x}{m\omega}\right) \tag{4}$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(X - \frac{iP_x}{m\omega}\right). \tag{5}$$

onde P_x é a componente x do operador momento linear. Sabendo que

$$a|\varphi_n\rangle = \sqrt{n}|\varphi_{n-1}\rangle \tag{6}$$

e

$$a^\dagger|\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\varphi_{n+1}\rangle, \tag{7}$$

mostre que

$$\langle\varphi_0|U(k)|\varphi_0\rangle = \exp\left[-k^2\langle\varphi_0|X^2|\varphi_0\rangle/2\right]. \tag{8}$$

Dica: Use a identidade

$$e^{At} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(At)^\ell}{\ell!}. \tag{9}$$

onde A é um operador e t é um escalar.

---

2) Considere um sistema de momento angular $\mathbf{J}$, com $j=1$. A base do espaço de estados é formada pelos autovetores dos J^2 e J_z: $\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$, com $J^2|j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2|j,m\rangle$ e $J_z|j,m\rangle = m\hbar|j,m\rangle$. O Hamiltoniano do sistema é definido como:

$$H_0 = \omega_0 J_z + \frac{\omega_1}{\hbar}J_z^2. \tag{10}$$

Aqui $\omega_1 \geq \omega_0$.
a) Quais são os níveis de energia do sistema? Para que razão ω_1/ω_0 há estados degenerados?

b) Um campo magnético $\mathbf{B}_0$ é aplicado ao longo da direção x, de forma que uma perturbação age no sistema, dada por

$$W = -\gamma B_0 J_x, \tag{11}$$

onde γ é a razão giromagnética ($\gamma < 0$). Use a definição dos operadores $J_\pm = J_x \pm iJ_y$ para escrever a matriz de representação da pertubação W. Dica: $J_\pm|j,m\rangle = \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}|j,m\pm 1\rangle$.
c) Suponha que $\omega_1 = \omega_0$. Para $|\gamma B_0| \ll \omega_0$, calcule as correções em primeira ordem para as energias do sistema. Calcule as correções de ordem zero para os estados.
d) Suponha que $\omega_1 = 2\omega_0$. Para $|\gamma B_0| \ll \omega_0$, calcule as correções em primeira e segunda ordem para as energias do sistema.

---

3) Considere um sistema de 2 níveis, $|\varphi_1\rangle$ e $|\varphi_2\rangle$, acoplados por uma perturbação W. Vamos supor que, na ausência da pertubação, o estado $|\varphi_1\rangle$ é instável, com um tempo de vida τ_1. Suponha que as energias do sistema não perturbado são:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= E_1 - i\hbar\gamma/2 && (12)\\ \varepsilon_2 &= E_2, && (13) \end{aligned}$$

onde $\gamma = 1/\tau_1$. Neste caso, o sistema possui um "Hamiltoniano" H_0 não Hermitiano. (a) Sabendo que $W|\varphi_2\rangle = W_{12}|\varphi_1\rangle$ e $W|\varphi_1\rangle = W_{12}^*|\varphi_2\rangle$, calcule as novas energias do sistema a partir da diagonalização direta de $H = H_0 + W$, com $|W_{12}| \ll (E_2 - E_1)$. Interprete o resultado obtido.
(b) Suponha que $E_2 = E_1$. Mostre que o "Hamiltoniano" H pode ser escrito como

$$H = \left(E_1 - i\frac{\hbar\gamma}{4}\right)\mathbf{I} + K, \tag{14}$$

onde I é a identidade e o operador K é dado por

$$(K) = \begin{pmatrix} -i\frac{\hbar\gamma}{4} & W_{12} \\ W_{12}^* & i\frac{\hbar\gamma}{4} \end{pmatrix} \tag{15}$$

c) Diagonalize a matriz de K e mostre que as energias do sistema são

$$\begin{aligned} \varepsilon_1' &= E_1 - i\frac{\hbar\gamma}{4} + k_1 && (16)\\ \varepsilon_2' &= E_1 - i\frac{\hbar\gamma}{4} - k_1, && (17) \end{aligned}$$

com $k_1 = \sqrt{|W_{12}|^2 - (\hbar\gamma/4)^2}$.
d) Mostre que os autovetores não normalizados de H e K são dados por:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= W_{12}|\varphi_1\rangle + \left(k_1 + i\frac{\hbar\gamma}{4}\right)|\varphi_2\rangle && (18)\\ |\psi_2\rangle &= W_{12}|\varphi_1\rangle - \left(k_1 - i\frac{\hbar\gamma}{4}\right)|\varphi_2\rangle && (19) \end{aligned}$$

e) Supondo que, em $t = 0$, o estado do sistema é $|\Psi(0)\rangle = |\varphi_2\rangle$, calcule $|\Psi(t)\rangle$. Determine a probabilidade de $P_{12}(t) = |\langle\varphi_1|\Psi(t)\rangle|^2$. Analise os casos em que k_1 é puramente real ou puramente imaginário.