Programa de Pós-Graduação em Física
Semestre 2021.2
Exame de Qualificação de Mecânica Quântica
Data: 11/08/21
Limite de tempo: 5:00 horas
Professor: Italo Nunes de Oliveira
Nome: ____________________________

---

1) Considere uma partícula de massa m sujeita ao potencial

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{se } -a/2 \leq \; x \; \leq a/2; \\ \infty & \text{se } x < -a/2 \text{ ou } x > a/2. \end{cases} \tag{1}$$

a) Encontre os estados estacionários $\varphi_n(x)$ e autoenergias E_n do sistema.
b) Considere que a partícula está num estado $\varphi_m(x)$. Determine $\langle P_x \rangle$, $\langle P_x^2 \rangle$ e $\langle \Delta P_x^2 \rangle$.

---

2) Um oscilador harmônico unidimensional é composto por uma partícula de massa m que está sob a ação de um potencial $V(X) = \frac{m\omega^2}{2} X^2$.
a) Os autoestados do Hamiltoniano satisfazem a relação $H_0|n\rangle = \hbar\omega(n+1/2)|n\rangle$, com $n = 0,1,2,3....$ Uma perturbação atua sobre o sistema, dada por

$$W = \sigma\hbar\omega\hat{X}^3 \quad , \tag{2}$$

onde $\sigma << 1$, com

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X \tag{3}$$

e

$$\hat{P}_x = \sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}} P_x \quad . \tag{4}$$

Usando as definições $a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} + i\hat{P}_x\right)$, $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} - i\hat{P}_x\right)$, e $N = a^\dagger a$, mostre que

$$W = \frac{\sigma\hbar\omega}{2^{3/2}}\left[a^{\dagger 3} + a^3 + 3Na^\dagger + 3(N+1)a\right] \tag{5}$$

b) Sabendo que $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ e $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$, calcule os elementos de matriz não nulos de W.
c) Usando o resultado anterior e teoria de perturbação independente do tempo, calcule as correções em primeira e segunda ordem nos estados e nos níveis de energia de $H = H_0 + W$.

---

3) Considere o sistema composto por dois spins $1/2$, $\mathbf{S}_1$ e $\mathbf{S}_2$. Os vetores que forma a base do espaço de estados são $\{|+,+\rangle, |+,-\rangle, |-,+\rangle, |-,-\rangle\}$. No instante $t = 0$, o sistema está no estado

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{2}|+,+\rangle + \frac{1}{2}|+,-\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-,-\rangle \tag{6}$$

a) No instante $t = 0$, S_{1z} é medido. Qual a probabilidade de encontrar o valor $-\hbar/2$? Qual o estado do sistema logo após a medida? Responda as mesmas questões para uma medida de S_{1z} com resultado $+\hbar/2$.
b) Quando o sistema está no estado $|\Psi(0)\rangle$, os operadores S_{1z} e S_{2z} são medidos simultaneamente. Qual a probabilidade de medir valores opostos para estes dois operadores? E resultados idênticos?
c) Considere que um campo magnético é aplicado, com $\mathbf{B} = \frac{B_0}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}})$. Usando a base do espaço de estados, calcule a matriz de representação de $H = \gamma(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{B} + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{B})$. Quais são os autovalores de H?

4) Considere o Hamiltoniano para uma partícula de momento angular orbital $\ell = 1$

$$H = \omega_1 \frac{L_x^2 - L_y^2}{\hbar} + \omega_0 L_z. \tag{7}$$

(a) Determine os autovalores e os autovetores de H. (b) Considere que o sistema está no estado $|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1\rangle - |1,-1\rangle$. Determine $|\Psi(t)\rangle$ para $t > 0$. c) Qual a probabilidade de uma medida de L_z resultar em $m = 0$ no instante $t > 0$? d) Calcule $\frac{d\langle L_x \rangle}{dt}$ no estado $|\Psi(t)\rangle$.