**Exame de Qualificação ao Doutorado**
**Departamento de Física – UFAL**

## Prova de Eletromagnetismo - Prof. Iram Marcelo Gléria - Janeiro de 2007

**(2,5 pontos) Questão 1:** ***Lei de Gauss , Funções Delta de Dirac***

**(1,5 pontos) Parte 1** O modelo de Thomson, conhecido por "pudim de ameixas", supunha que o átomo era formado por uma carga positiva distribuída de forma homogênea num volume esférico de raio $R$ (densidade de cargas $\rho$ ) e que nessa "massa" os elétrons pontuais e de carga $-e$ estariam incrustados. Considere o modelo de Thomson para o *átomo de hidrogênio*:
a) Mostre que o elétron, para o átomo de hidrogênio, encontra-se necessariamente no **centro** do átomo.
b) Qual o valor do campo elétrico, dentro e fora de um átomo de hidrogênio de raio $R$.
c) Se o elétron é deslocado de $r$ do centro, calcule a força que age sobre ele. Mostre que, se o mesmo for solto, realiza um MHS em torno da origem e calcule seu período em função de $e$, que é o valor absoluto da carga do elétron, do raio $R$ e da massa do elétron $m_e$.

**(1,0 ponto) Parte 2** Dadas as seguintes distribuições lineares e superficiais de carga, exprima-as como distribuições volumétricas $\rho$ de carga, com auxílio das funções Deltas de Dirac. Comprove seus resultados mostrando que a integral $\int \rho dV$ é igual a carga total $Q$. **USE COORDENADAS ESFÉRICAS**

a) Casca esférica condutora de raio $R$, contendo uma carga $Q$ distribuída uniformemente sobre ela.
b) Disco de raio $R$ com uma carga $Q$ distribuída uniformemente em sua superfície, no plano xy.

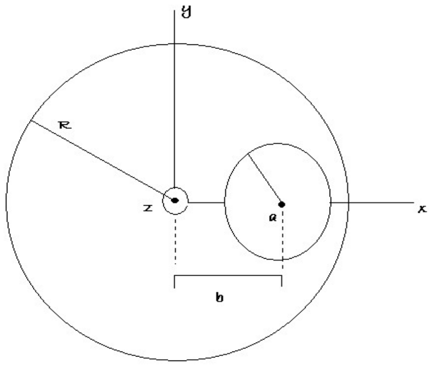
---

**(2,5 pontos) Questão 2:** ***Método das Imagens***

Considere uma carga pontual $q$ dentro de uma casca esférica condutora aterrada de raio $a$. Determine:
a) (1,00) O potencial dentro da esfera
b) (0,75) A densidade de cargas induzida na superfície
c) (0,75) A força na carga $q$

---

**(2,5 pontos) Questão 3:** ***Lei de Ampère***
Um fio condutor reto, muito longo, cuja seção reta circular tem raio $R$, é percorrido por uma corrente $I$ na direção do eixo $z$ positivo (para FORA do plano do papel). No interior do condutor existe um furo cilíndrico de raio $a < R$ cujo eixo é paralelo ao eixo do condutor e fica a uma distância $b$ do mesmo. Suponha que o eixo do condutor é o eixo $z$ e a reta que liga os centros do furo e do cilindro é o eixo $x$. Determine $\vec{B}$ dentro do buraco.

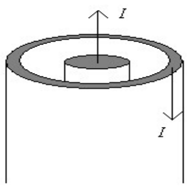


**(2,5 pontos) Questão 4:** ***Potencial vetor magnético.***

**a) (0,25)** Sabendo que o vetor indução magnética e o potencial vetor magnético relacionam-se através de $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ demonstre que: $\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$

**b) (2,25)** Um cabo coaxial consiste de um cilindro condutor sólido interno de raio $a$, e uma casca cilíndrica condutora externa de raios $b$ e $c$, concêntrica com o cilindro interno. Cada um dos condutores transporta uma corrente total de intensidade $I$ , uniformemente distribuída e de sentidos opostos. Determine o potencial vetor magnético em cada uma das regiões $r < a,\ a < r < b,\ b < r < c,\ r > c$ .

Dica: utilize a lei circuital de Ampère e o resultado da letra a).




**Relações úteis:**

**Coordenadas cilíndricas:**

$x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi,\ z$

$\hat{r} = \hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi,$

$\hat{\phi} = -\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi.$

**Coordenadas esféricas:**

$x = r\sin\theta\cos\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\theta$

$\hat{r} = \hat{x}\sin\theta\cos\phi + \hat{y}\sin\theta\sin\phi + \hat{z}\cos\theta,$

$\hat{\theta} = \hat{x}\cos\theta\cos\phi + \hat{y}\cos\theta\sin\phi - \hat{z}\sin\theta,$

$\hat{\phi} = -\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi.$

**Propriedades da função delta:**

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 4\pi\delta(\vec{r}),\ \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\hat{r}}{r^2},$$

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta^3(\vec{r}),\ \vec{\nabla} \cdot (r^n\hat{r}) = (n+2)r^{n-1}, n \neq -2.$$

**Polinômios de Legendre**

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l,$$

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$$

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_{l'}(x)dx = \int_0^{\pi} P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \begin{cases} 0 \text{ se } l \neq l', \\ \dfrac{2}{2l+1} \text{ se } l = l'. \end{cases}$$