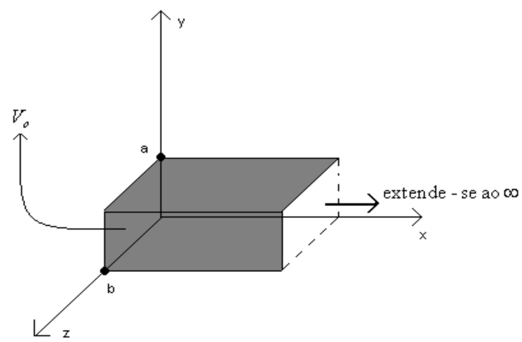
Exame de Qualificação ao Doutorado
Instituto de Física – UFAL

Prova de Eletromagnetismo - Prof. Iram Marcelo Gléria - Setembro de 2014

Questão 1: ***Equação de Laplace.***

a) Uma caixa metálica retangular semi-infinita de lados a e b está aterrada, porém a "tampa" do "fundo" $x = 0$ é mantida a um potencial V_0 constante. Determine o potencial eletrostático dentro da caixa.



b) Uma casca esférica de raio R possui a seguinte densidade superficial de cargas: $\sigma(\theta) = \frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$.
Determine o potencial elétrico dentro e fora da casca esférica (note que o problema tem simetria azimutal).

Questão 2: ***Energia potencial eletrostática***.
a) Considere a interação entre duas cargas pontuais q_1 e q_2. Suponha que a partícula q_1 esteja parada na origem de um sistema de coordenadas e q_2 seja trazida de um ponto inicial r_0(distância até a carga 1) até um ponto r. Sabemos que o trabalho realizado nesse movimento é dado por:

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \qquad (2.1)$$

a partir da qual obtemos a expressão para a energia potencial do par de cargas pontuais, considerando o zero no infinito:

$$U(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \qquad (2.2)$$

Discuta a seguinte "inconsistência" na obtenção de (2.2): a lei de Coulomb só vale quando uma carga está **parada** em relação à outra. Entretanto, para obter a equação (2.1) foi necessário *mover* a carga 2 em relação à carga 1, logo a lei de Coulomb que usamos para obter (2.1) não se aplica! O que você acha? As expressões (2.1) e (2.2) estão erradas e valem apenas como aproximações? Nesse caso, como são corrigidas? Se entretanto as equações (2.1) e (2.2) expressam corretamente o trabalho e a energia potencial, justifique o aparente "paradoxo" colocado.
b) A partir da equação (2.1) a energia potencial eletrostática para uma configuração de n cargas é dada por:

$$U = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n}\frac{q_i q_j}{\left|\vec{r}_j - \vec{r}_i\right|} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V(\vec{r}_i) \qquad (2.3)$$

onde V denota o potencial devido a todas as cargas exceto q_i. Generalize a equação (2.3) para uma distribuição contínua de cargas e **demonstre** que:

$$U = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})V(\vec{r})d^3\vec{r} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\substack{todo\,o\\espaço}} E^2 d^3\vec{r} \tag{2.4}$$

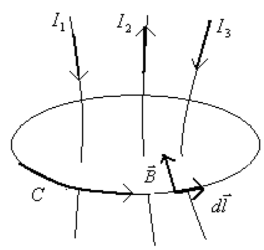
Resolva mais esta "inconsistência": A equação (2.4) claramente implica que a energia de uma distribuição de cargas estacionárias é sempre positiva. Por outro lado, a equação (2.3), *que foi utilizada* para se obter (2.4), pode ser positiva ou negativa! Qual equação é a correta? Se ambas são corretas, qual a diferença entre elas? (dica: há uma diferença no potencial *V(r)* para cada caso).

c) Onde está armazenada a energia eletrostática? Nas cargas, como sugere (2.3), ou no campo elétrico, como sugere (2.4)? No contexto da eletrostática, faz diferença uma ou outra opção? E no contexto da teoria da radiação?

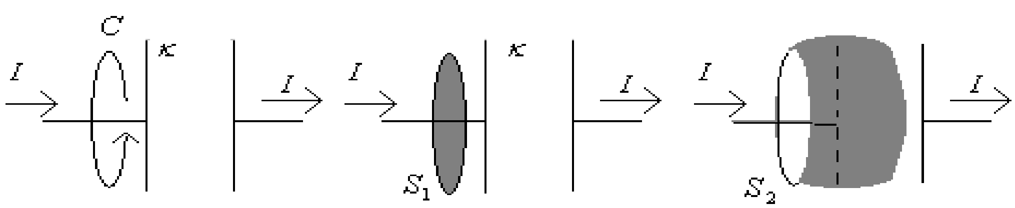
Questão 3: ***Equações de Maxwell***

a) A lei circuital de Ampère afirma que a circulação é igual ao fluxo de corrente elétrica:

$$\oint_C \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j}.d\vec{S} = \mu_0 I,$$
$$I = \sum I_i$$



Considere um capacitor de placas planas paralelas preenchido com um dielétrico κ sendo carregado por uma corrente *I*. Aplique a lei circuital de Ampére em S_1e S_2 (veja figura) e mostre que a lei circuital de Ampère fornece resultados contraditórios para este caso (a circulação sobre *C* em S_1 é diferente de S_2). Explique por que não podemos utilizar a lei de Ampère nesse caso. Em seguida enuncie a *lei de Ampére-Maxwell*, que é a forma correta de calcular a circulação no caso apresentado, e explique o significado físico da *corrente de deslocamento*. Para quais tipos de corrente se aplica a *Lei de Ampère* e em quais se aplica a *Lei de Ampère-Maxwell?*



b) Partindo das leis de Gauss, Ampère e Faraday, enuncie o conjunto das equações de Maxwell para os casos estático e dinâmico, na sua forma integral, explicitando as assimetrias entre os fenômenos elétricos e magnéticos e explicando o significado físico de cada uma das equações e seus termos.

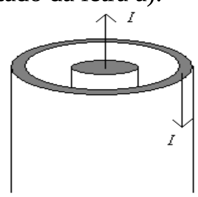
c) Aplique os teoremas de Gauss e Stokes e obtenha as equações de Maxwell na forma diferencial. Obtenha as equações de onda no espaço sem cargas ou corrente.

Questão 4: ***Potencial vetor magnético.***

a) Sabendo que o vetor indução magnética e o potencial vetor magnético relacionam-se através de $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ demonstre que: $\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$

b) Um cabo coaxial consiste de um cilindro condutor sólido interno de raio *a*, e uma casca cilíndrica condutora externa de raios *b* e *c*, concêntrica com o cilindro interno. Cada um dos condutores transporta uma corrente total de intensidade I , uniformemente distribuída e de sentidos opostos. Determine o potencial vetor magnético em cada uma das regiões $r < a,\ a < r < b,\ b < r < c,\ r > c$.

Dica: utilize a lei circuital de Ampère e o resultado da letra a).



<u>Relações úteis</u>:

Coordenadas cilíndricas:

$$x = r\cos\phi,\ \ y = r\sin\phi,\ \ z$$
$$\hat{r} = \hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi,$$
$$\hat{\phi} = -\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi.$$

Coordenadas esféricas:

$$x = r\sin\theta\cos\phi,\ \ y = r\sin\theta\sin\phi,\ \ z = r\cos\theta$$
$$\hat{r} = \hat{x}\sin\theta\cos\phi + \hat{y}\sin\theta\sin\phi + \hat{z}\cos\theta,$$
$$\hat{\theta} = \hat{x}\cos\theta\cos\phi + \hat{y}\cos\theta\sin\phi - \hat{z}\sin\theta,$$
$$\hat{\phi} = -\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi.$$

Propriedades da função delta:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 4\pi\delta(\vec{r}),\ \ \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\hat{r}}{r^2},$$
$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta^3(\vec{r}),\ \ \vec{\nabla} \cdot (r^n\hat{r}) = (n+2)r^{n-1}, n \neq -2.$$

Polinômios de Legendre

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l,$$
$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$$

Integrais úteis

1) $$\int_0^a sen\frac{n\pi\nu}{a}\, sen\frac{n'\pi\nu}{a}\, d\nu = \begin{cases} 0 \text{ se } n \neq n', \\ \dfrac{a}{2} \text{ se } n = n'. \end{cases}$$

2) $$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_{l'}(x)dx = \int_0^{\pi} P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \begin{cases} 0 \text{ se } l \neq l', \\ \dfrac{2}{2l+1} \text{ se } l = l'. \end{cases}$$