

**EXAME DE QUALIFICAÇÃO
ELETROMAGNETISMO**

Evandro A. Gouveia

08/04/2010

Prova sem Consulta

Duração 5:00 Horas

1. Um fio infinito de raio a carrega uma densidade de corrente constante J_o na direção do eixo z . Ele é circundado por uma casca cilíndrica concêntrica (também infinita) de material magnetizável (linear e isotrópico) de raios b e c ($c > b > a$), com susceptibilidade magnética χ_m e permeabilidade μ , ambas constantes.
 - (a) Calcule o fluxo Φ'^1 , por unidade de comprimento, do vetor indução \mathbf{B} , dentro da casca.
 - (b) Ache as densidades de correntes equivalentes na casca: $\mathbf{J}_{eq} = \nabla \times \mathbf{M}$ e $\mathbf{K}_{eq} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$
 - (c) Ache \mathbf{B} a distâncias $\rho > c$. Como este valor seria afetado se a casca cilíndrica fosse removida?

2. Considere uma esfera de volume V e um sistema de eixos centrados na mesma. Um pequeno momento de dipolo magnético \mathbf{m} foi colocado dentro da esfera. Ele está orientado ao longo da direção do eixo z e sobre este eixo, a uma distância D da origem. Mostre que a indução magnética média na esfera é:

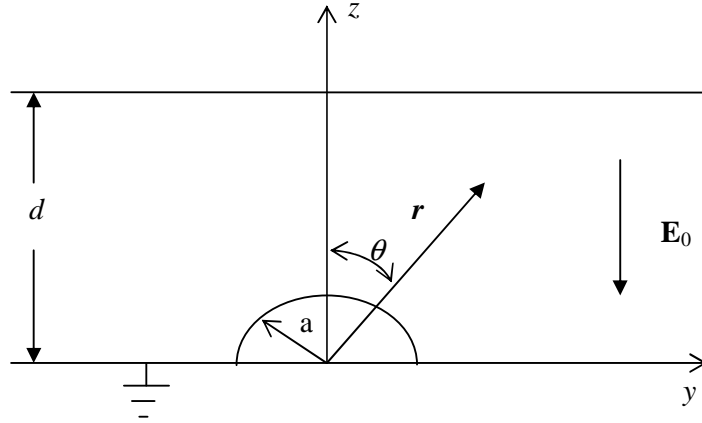
$$\langle \mathbf{B} \rangle_V \equiv \frac{1}{V} \int_V \mathbf{B} d\tau = \frac{2\mu_o \mathbf{m}}{3V}$$

onde μ_o é a susceptibilidade magnética no vácuo.

Sugestão: Transforme a integral de volume numa integral de superfície.

3. Considere um capacitor ideal de placas planas e paralelas. A separação entre as placas é d . Uma das placas possui uma pequena deformação em forma de bolha (um hemisfério) com raio $a \ll d$. Esta placa está aterrada e situada no plano x - y . A outra placa (está em $z = +d$) tem um potencial tal que longe da região da bolha o campo elétrico é uniforme e vale $\mathbf{E} = -E_o \hat{\mathbf{k}}$, conforme figura abaixo:

¹ Fluxo de um vetor \mathbf{a} através de uma superfície S é: $\Phi_a = \int_S \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$



- (a) Use a solução da eq. de Laplace em coordenadas esféricas, para determinar a densidade superficial de carga na bolha $\sigma_b(a, \theta)$ e no plano x - y $\sigma_p(\rho, \pi/2)$, onde $\rho \geq a$ é a distância do ponto, sobre o plano x - y , ao eixo z e θ é o ângulo entre o vetor posição dum ponto na bolha e o eixo z .
- (b) Calcule a carga total na bolha.

4. Uma onda plana incide com ângulo θ_i (ângulo entre o vetor de propagação e a normal à interface, conforme figura abaixo²) de um meio com índice de refração n_1 para outro cujo índice de refração n_2 é menor e expresso pela relação:

$$n_2 = \frac{n_1}{1+a}$$

A interface é plana e $a > 1$. Sabendo-se que as amplitudes dos campos elétrico e magnético estão relacionadas por:

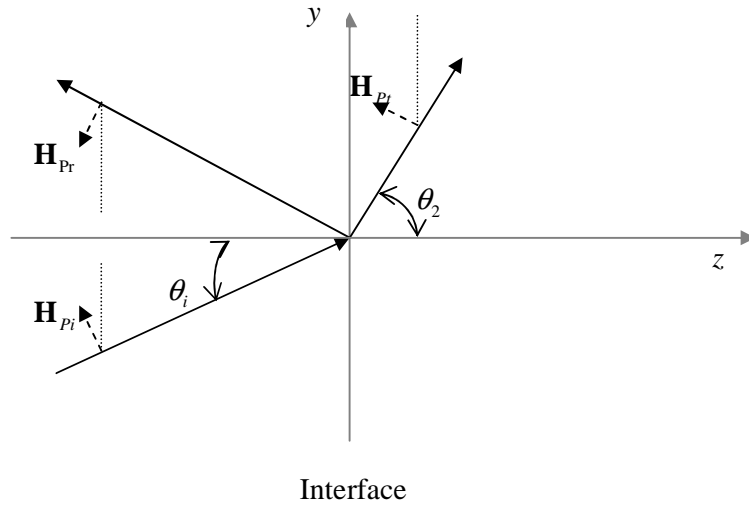
$$E_N = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_P$$

onde n é o índice de refração, use as condições de contorno e a lei de Snell para mostrar que o coeficiente de reflexão R_N , para a componente normal (ao plano de incidência) do campo elétrico, é dado por³:

$$R_N \equiv \left| \frac{\mathbf{E}_{Nr}}{\mathbf{E}_{Ni}} \right|^2 = \left(\frac{1+a - \sqrt{1-a(a+2)\tan^2\theta_i}}{1+a + \sqrt{1-a(a+2)\tan^2\theta_i}} \right)^2$$

² As setas tracejadas representam o campo magnético, enquanto as cheias representam o sentido de propagação.

³ Os índices significam: onda refletida (r), onda incident (i), onda transmitida (t), componente normal (N) e componente paralela (P) ao plano de incidência. As setas tracejadas representam o campo magnético, enquanto as cheias representam o sentido de propagação.



FORMULÁRIO (Sistema de Unidades Internacional)

OBS.: letras em **negrito** são vetores e com acento circunflexo são vetores unitários (versores)

1. Potencial Vetor \mathbf{A} , Magnetização \mathbf{M} , Vetor Indução Magnética \mathbf{B} , Campo Elétrico \mathbf{E} , Vetor deslocamento \mathbf{D} , Campo Magnético \mathbf{H} , Polarização \mathbf{P} , momento magnético \mathbf{m} , Potencial Elétrico V , Harmônicos esféricos $Y_{lm}(\theta, \phi)$ e polinômios de Legendre $P_l(\cos \theta)$.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_{\tau'} \frac{(\mathbf{J}_f + \nabla' \times \mathbf{M})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' + \int_{s'} \frac{(\mathbf{K}_f + \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' + \int_{c'} \frac{I d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{\tau'} \frac{(\rho_f - \nabla' \cdot \mathbf{P})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' + \int_{s'} \frac{(\sigma_f + \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' + \int_{c'} \frac{\lambda_f}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dl' \right]$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V$$

Equações de Maxwell:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases}$$

Meio magnético linear e isotrópico:

$$\begin{cases} \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{cases}$$

onde $\hat{\mathbf{n}}'$ é um vetor unitário normal ao elemento de área, \mathbf{J}_f e \mathbf{K}_f são as densidades de correntes devido às cargas livres, ρ_f , σ_f e λ_f são as densidades de cargas livres, χ_m é a susceptibilidade magnética, $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7} \text{ NA}^{-2}$ é a permeabilidade do vácuo e ϵ_o é a permissividade do vácuo.

2. Potencial Vetor de um dipolo magnético \mathbf{m} e Potencial Elétrico de um dipolo elétrico \mathbf{p}

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

3. Integrais úteis

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nl}$$

$$\int_0^1 P_n(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n = 2, 4, 6, \dots \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(n-2)!!}{(n+1)!!} & \text{se } n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 dx \frac{1-x^2}{(1+a^2-2ax)^{3/2}} = \frac{4}{3} \quad 0 \leq a < 1$$

4. Relações úteis

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

$$\int_{\tau} d\tau (\nabla \times \mathbf{a}) = \oint_S da' (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{a})$$

$$\int_{\tau} d\tau \nabla f = \oint_S f \hat{\mathbf{n}}' da'$$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

5. Solução Geral da equação de Laplace em coordenadas esféricas

$$V(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

6. Solução da equação de Laplace em coordenadas esféricas com simetria azimutal

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta)$$

7. Leis de Gauss e Ampère:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}' da' = \int_{\tau} \rho_f d\tau$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}' da'$$