EXAME DE QUALIFICAÇÃO

ELETROMAGNETISMO

Evandro A. Gouveia

16/12/2004

Duração 5:00 Horas

1. Considere duas linhas de carga infinitas, separadas por uma distância R com densidades lineares constantes, iguais e opostas: λ e $-\lambda$. Tome o eixo z na mesma direção das linhas de carga. A posição (x,y) de cada linha é $(0,+R/2)$ e $(0,-R/2)$, respectivamente.
   (a) Determine as superfícies equipotenciais.
   (b) Mostre que a capacitância por unidade de comprimento C', para uma casca cilíndrica condutora infinita de raio a inscrita noutra casca cilíndrica condutora infinita de raio b, cuja separação entre seus centros é $d < b - a$, é dada por:

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon_o}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{a^2+b^2-d^2}{2ab}\right)}$$

   onde ε_0 é a permissividade do vácuo. O caso de cascas concêntricas é $d = 0$.

2. Considere um capacitor ideal de placas planas e paralelas. A separação entre as placas é d. Uma das placas possui uma pequena deformação em forma de bolha (*um hemisfério*) com raio $a << d$. Esta placa está aterrada e situada no plano x-y. A outra placa tem um potencial tal que longe da região da bolha o campo elétrico é uniforme e vale $\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{z}}$.
   (a) Use a solução da eq. de Laplace em coordenadas esféricas, independente do ângulo azimutal, para determinar a densidade superficial de carga na bolha $\sigma_b(\theta)$ e no plano x-y $\sigma_p(\rho)$, onde $\rho \geq a$ é a distância do ponto, sobre o plano, ao eixo z e θ é o ângulo entre o vetor posição dum ponto na bolha e o eixo z.
   (b) Calcule a carga total na *bolha*.

3. Uma esfera condutora de raio R foi carregada até um potencial V e posta a girar em torno do eixo z com velocidade angular constante ω.
   (a) Mostre que a densidade superficial de corrente elétrica é $\mathbf{K} = \omega\varepsilon_o V \operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$
   (b) Determine o vetor indução magnética $\mathbf{B}$ no centro da esfera.
   (c) Determine a magnetização **M.**

4. Considere uma linha coaxial longa com raio interno a e externo b. O isolante é o ar. Propaga-se uma onda TEM nesta linha e a amplitude máxima do campo elétrico é E_m. A corrente elétrica na linha é $I(z,t) = I_m \exp[\, i(kz-\omega t)]$, onde z está ao longo da linha e I_m é real.
   (a) Ache o potencial elétrico máximo ao qual está submetida esta linha.
   (b) Mostre que a impedância característica da linha é $60\ln(b/a)$.
   (c) Mostre que a potência elétrica média que a linha suporta é $30\, I_m^2 \ln(b/a)$

FORMULÁRIO
(Sistema de Unidades Internacional)

1. Vetor Indução Magnética **B,** Polarização **P**, momento magnético **m** e Potencial Elétrico Φ

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\left[\int_{\tau'} \frac{\mathbf{J}_f \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d\tau' + \int_{S'} \frac{\boldsymbol{\lambda}_f \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} da' + \int_{C} \frac{Id\mathbf{l} \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right]$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int_{\tau} \mathbf{r}\times\mathbf{J}_f \, d\tau + \frac{1}{2}\int_{S} \mathbf{r}\times\boldsymbol{\lambda}_f \, da + \frac{1}{2}\oint_{C} I\mathbf{r}\times d\mathbf{l}$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\int_{\tau'} \frac{\rho_f - \vec{\nabla}' \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\tau' + \int_{S'} \frac{\sigma_f + \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} da'\right]$$

onde $\hat{\mathbf{n}}'$ é um vetor unitário normal ao elemento de área, I é a corrente elétrica num fio fino, $\mathbf{J}_f$ e $\boldsymbol{\lambda}_f$ são as densidades de corrente volumétrica e superficial devido às cargas livres, respectivamente, ρ_f e σ_f são as densidades de cargas livres volumétrica e superficial, respectivamente, χ_m é a susceptibilidade magnética , $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}\, NA^{-2}$ é a permeabilidade do vácuo e ε_o é a permissividade do vácuo.

2. Potencial Vetor de um dipolo magnético **m e** Potencial Elétrico de um dipolo elétrico **p**

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_o r^3}$$

3. Integrais úteis

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_l(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nl}$$

$$\int_0^1 P_n(x)dx = \begin{cases} 1 \; se \; n = 0 \\ 0 \; se \; n = 2,4,6... \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \dfrac{(n-2)!!}{(n+1)!!} \; se \; n = 1,3,5... \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} dx \frac{1-x^2}{\left(1+a^2-2ax\right)^{3/2}} = \frac{4}{3} \quad 0 \le a < 1$$

4. Relações úteis

$$\nabla \times \left(\nabla \times \mathbf{a}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{a}\right) - \nabla^2 \mathbf{a}$$
$$\nabla \times \left(f\,\mathbf{a}\right) = \nabla f \times \mathbf{a} + f\,\nabla \times \mathbf{a}$$
$$\left(\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \left(\mathbf{b} \times \mathbf{c}\right)$$
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$
$$\cosh^{-1}\left(x \ge 1\right) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$
$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$
$$\cosh\left(x \pm y\right) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

5. Miscelâneas

5.1 Solução da eq. de Laplace em coordenadas Esféricas com independência azimutal

$$f\left(r,\theta\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right) P_l\left(\cos\theta\right)$$

5.2 Solução da eq. de Laplace em coordenadas Cilíndricas no plano x - y

$$f\left(\rho,\varphi\right) = a_0 + b_0 \ln\rho + \sum_{\substack{l=1 \\ m=0}}^{\infty} \left(A_l \rho^l + B_l \rho^{-l}\right)\left(C_m e^{im\varphi} + D_m e^{-im\varphi}\right)$$