

Exame de Qualificação ao Doutorado
Departamento de Física – UFAL

Prova de Eletromagnetismo - Prof. Iram Marcelo Gléria - Janeiro de 2007

(2,5 pontos) Questão 1: Lei de Gauss, Funções Delta de Dirac

(1,5 pontos) Parte 1 O modelo de Thomson, conhecido por “pudim de ameixas”, supunha que o átomo era formado por uma carga positiva distribuída de forma homogênea num volume esférico de raio R (densidade de cargas ρ) e que nessa “massa” os elétrons pontuais e de carga $-e$ estariam incrustados. Considere o modelo de Thomson para o *átomo de hidrogênio*:

- Mostre que o elétron, para o átomo de hidrogênio, encontra-se necessariamente no **centro** do átomo.
- Qual o valor do campo elétrico, dentro e fora de um átomo de hidrogênio de raio R .
- Se o elétron é deslocado de r do centro, calcule a força que age sobre ele. Mostre que, se o mesmo for solto, realiza um MHS em torno da origem e calcule seu período em função de e , que é o valor absoluto da carga do elétron, do raio R e da massa do elétron m_e .

(1,0 ponto) Parte 2 Dadas as seguintes distribuições lineares e superficiais de carga, exprima-as como distribuições volumétricas ρ de carga, com auxílio das funções Deltas de Dirac. Comprove seus resultados mostrando que a integral $\int \rho dV$ é igual a carga total Q . **USE COORDENADAS ESFÉRICAS**

- Casca esférica condutora de raio R , contendo uma carga Q distribuída uniformemente sobre ela.
- Disco de raio R com uma carga Q distribuída uniformemente em sua superfície, no plano xy .

Respostas:

Parte 1: a) O elétron deve estar no centro do átomo para que haja equilíbrio, pois nesse local as forças elétricas se anulam pela simetria esférica.

b) Como o átomo é neutro, para $r > R$ traçamos uma gaussiana de raio r e deduzimos que o campo elétrico é nulo nessa região. Para $r < R$ consideramos as contribuições devido à carga negativa e a positiva.

Para a carga positiva:

$$\oint_S \vec{E}_+ \cdot \hat{r} dA = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV \Rightarrow$$
$$\oint_S E_+ \hat{r} \cdot \hat{r} dA = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow$$
$$\vec{E}_+ = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} = \left(e / \frac{4\pi R^3}{3} \right) \frac{r}{3\epsilon_0} \hat{r} = \frac{er}{4\pi\epsilon_0 R^3} \hat{r}$$

Para a carga negativa

$$\vec{E}_- = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 - \frac{r^3}{R^3} \right) \hat{r}$$

c) A força que age sobre o elétron é

$$\vec{F} = -e\vec{E}_+ \Rightarrow$$

$$= -\left(e^2 r / 4\pi\epsilon_0 R^3\right) \hat{r}$$

Que é uma força restauradora com “constante de mola” $k = \left(e^2 / 4\pi\epsilon_0 R^3\right)$, assim seu período é dado por

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi \sqrt{m_e / k} = \frac{2\pi R}{e} \sqrt{4\pi\epsilon_0 R m_e}$$

Parte 2: a) a carga se situa à uma distancia R da origem, logo:

$$\rho = \frac{Q}{4\pi R^2} \delta(r - R) \Rightarrow$$

$$\int \rho dV = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{Q}{4\pi R^2} \delta(r - R) r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = Q$$

b) O disco se encontra em $\theta = \pi/2$ e a densidade superficial de cargas vale $\frac{Q}{\pi R^2}$. Assim teremos

$$\rho = \frac{Q}{\pi R^2 r} \delta(\cos\theta - \cos\pi/2) \Rightarrow$$

Onde temos que dividir por r para termos corretamente a dimensão de densidade volumétrica de cargas

$$\int \rho dV = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{Q}{\pi R^2} \delta(\cos\theta) r \sin\theta dr d\theta d\varphi = Q$$

(2,5 pontos) Questão 2: Método das Imagens

Considere uma carga pontual q dentro de uma casca esférica condutora aterrada de raio a . Determine:

- (1,00) O potencial dentro da esfera
- (0,75) A densidade de cargas induzida na superfície
- (0,75) A força na carga q

Resposta: a) Por razões de simetria, a carga imagem q' deve estar localizada na linha que conecta q e a origem Pelo princípio da superposição:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{y}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{y}'|}$$

Onde $\vec{r} = r\vec{n}$ é o vetor que liga a origem ao ponto de observação, $\vec{y} = y\vec{n}'$ liga a carga à origem e $\vec{y}' = y'\vec{n}'$ a carga imagem à origem. Usando o princípio da superposição:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r|\vec{n} - y\vec{n}'/r|} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y'|\vec{n}' - r\vec{n}/y'|}$$

Como o potencial se anula na superfície da esfera (para quaisquer orientações relativas de $\vec{r} = r\vec{n}$ e $\vec{y} = y\vec{n}'$) obtemos:

$$q' = -aq/y, y' = a^2/y$$

Assim

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{y^2 + r^2 - 2yr\cos\theta}} - \frac{a/y}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(a^2/y)^2 + r^2 - 2(a^2/y)r\cos\theta}}$$

b) Usamos

$$\sigma = \epsilon_0 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} \right)_{r=a} \Rightarrow$$

$$\sigma = -\frac{q}{4\pi a^2} \left(\frac{a}{y} \right) \frac{1 - (a/y)^2}{\left(1 + (a/y)^2 - 2(a/y)\cos\theta \right)^{3/2}}$$

c) A força em q é devido ao campo de q' , então:

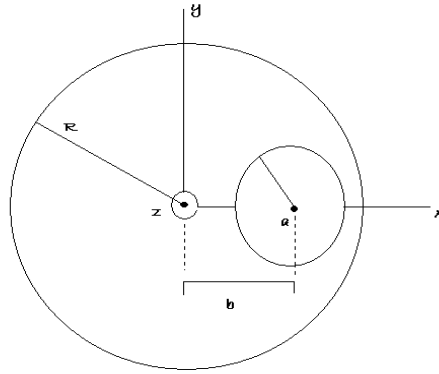
$$\vec{F} = q\vec{E}',$$

$$|\vec{E}'| = q' / \left(4\pi\epsilon_0 (y' - y)^2 \right) \Rightarrow$$

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \left(\frac{a}{y} \right) \left(1 - \left(\frac{a}{y} \right)^2 \right)^{-2}$$

(2,5 pontos) Questão 3: Lei de Ampère

Um fio condutor reto, muito longo, cuja seção reta circular tem raio R , é percorrido por uma corrente I na direção do eixo z positivo (para FORA do plano do papel). No interior do condutor existe um furo cilíndrico de raio $a < R$ cujo eixo é paralelo ao eixo do condutor e fica a uma distância b do mesmo. Suponha que o eixo do condutor é o eixo z e a reta que liga os centros do furo e do cilindro é o eixo x . Determine \vec{B} dentro do buraco.



Resposta: usando o princípio da superposição substituímos o sistema por um equivalente onde temos uma densidade de corrente \vec{J} em todo o cilindro mais uma densidade $\vec{J}' = -\vec{J}$ no buraco. Teremos então que

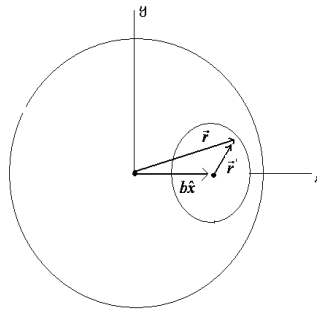
$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{S} \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 J \pi r^2$$

$$B = \mu_0 J r / 2 = \vec{B} = B \hat{z} \times \vec{r}$$

E similarmente $\vec{B}' = \mu_0 J r' / 2 = \vec{B}' = B' (-\hat{z} \times \vec{r}')$

Desse modo temos $\vec{B}_T = \vec{B} + \vec{B}' = \mu_0 J \hat{z} \times (\vec{r} - \vec{r}') / 2$

$$\vec{B}_T = \mu_0 J \hat{z} \times (b \hat{x}) / 2 = \mu_0 J b \hat{y} / 2$$



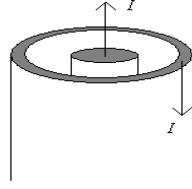
(2,5 pontos) Questão 4: Potencial vetor magnético.

a) (0,25) Sabendo que o vetor indução magnética e o potencial vetor magnético relacionam-se através de

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \text{ demonstre que: } \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

b) (2,25) Um cabo coaxial consiste de um cilindro condutor sólido interno de raio a , e uma casca cilíndrica condutora externa de raios b e c , concêntrica com o cilindro interno. Cada um dos condutores transporta uma corrente total de intensidade I , uniformemente distribuída e de sentidos opostos. Determine o potencial vetor magnético em cada uma das regiões $r < a$, $a < r < b$, $b < r < c$, $r > c$.

Dica: utilize a lei circuital de Ampère e o resultado da letra a).



Resolução: a) Usando o teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{f} \cdot d\vec{S} \text{ e a relação } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \text{ obtemos: } \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

b) Utilizamos a lei de Ampère para obter o valor de \vec{B} em cada uma das regiões especificada:

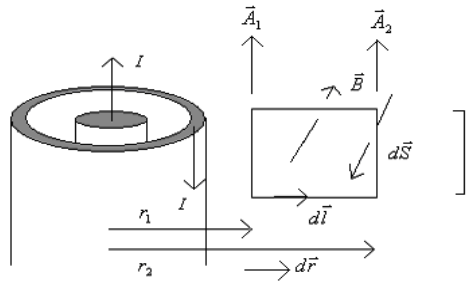
$$r < a : B \cdot 2\pi r = \frac{\mu_0 I r^2}{a^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2},$$

$$a < r < b : B \cdot 2\pi r = \frac{\mu_0 I a^2}{a^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

$$b < r < c : B \cdot 2\pi r = \mu_0 I - \frac{\mu_0 I (r^2 - b^2)}{c^2 - b^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I (c^2 - r^2)}{2\pi r (c^2 - b^2)},$$

$$r > c : B \cdot 2\pi r = \mu_0 (I - I) \Rightarrow B = 0.$$

Em seguida utilizamos $\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$ em uma região tal qual especificada na figura abaixo:



Onde $d\vec{r}$ e $d\vec{S}$ relacionam-se de acordo com a regra da mão direita. Para a região $r < a$ obtemos:

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} (-dr l) = (A_2 - A_1) l \Rightarrow$$

$$-\left(\frac{\mu_0 I r_2^2}{4\pi a^2} - \frac{\mu_0 I r_1^2}{4\pi a^2} \right) = A_2 - A_1 \Rightarrow$$

$$A = -\frac{\mu_0 I r^2}{4\pi a^2}, \vec{A} = -\frac{\mu_0 I r^2}{4\pi a^2} \vec{k}$$

Para a região $a < r < b$ obtemos:

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (-dr) = (A_2 - A_1)l \Rightarrow -\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r_2 - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r_1\right) = A_2 - A_1 \Rightarrow$$

$$A = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r + cte$$

onde a constante foi introduzida de modo a garantir a continuidade em $r = a$:

$$-\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln a + cte = -\frac{\mu_0 I a^2}{4\pi a^2} \Rightarrow cte = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln a \Rightarrow$$

$$A = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{a} - \frac{\mu_0 I}{4\pi},$$

$$\vec{A} = \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{a} - \frac{\mu_0 I}{4\pi}\right) \vec{k}$$

E procedendo de maneira similar obtemos:

$$b < r < c : \vec{A} = \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{a} - \frac{\mu_0 I}{4\pi} + \frac{\mu_0 I(r^2 - b^2)}{4\pi(c^2 - b^2)}\right) \vec{k},$$

$$r > c : \vec{A} = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a}{c}\right) \vec{k}$$

Relações úteis:

Coordenadas cilíndricas:

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad z$$

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi,$$

$$\hat{\phi} = -\hat{x} \sin \phi + \hat{y} \cos \phi.$$

Coordenadas esféricas:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

$$\hat{r} = \hat{x} \sin \theta \cos \phi + \hat{y} \sin \theta \sin \phi + \hat{z} \cos \theta,$$

$$\hat{\theta} = \hat{x} \cos \theta \cos \phi + \hat{y} \cos \theta \sin \phi - \hat{z} \sin \theta,$$

$$\hat{\phi} = -\hat{x} \sin \phi + \hat{y} \cos \phi.$$

Propriedades da função delta:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 4\pi \delta(\vec{r}), \quad \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\hat{r}}{r^2},$$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi \delta^3(\vec{r}), \quad \vec{\nabla} \cdot (r^n \hat{r}) = (n+2)r^{n-1}, \quad n \neq -2.$$

Polinômios de Legendre

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l,$$

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$$

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{se } l \neq l', \\ \frac{2}{2l+1} & \text{se } l = l'. \end{cases}$$