EXAME DE QUALIFICAÇÃO
ELETROMAGNETISMO
Evandro A. Gouveia
13/02/2006

Duração 5:00 Horas

1. ***(3,0 pontos)*** Considere uma esfera dielétrica classe A (ver nota de rodapé)[1] com permissividade elétrica relativa ε_r e raio *R*. A esfera está inicialmente descarregada e, então, coloca-se uma densidade de cargas livres uniforme ρ_f. Determine o potencial eletrostático no centro da esfera.

2. ***(2,0 pontos)*** Uma casca esférica condutora e fina, de raio *R*, é serrada em seu equador. Os dois hemisférios são novamente unidos por uma cola finíssima de material isolante. O hemisfério superior é submetido a um potencial constante V_S e o inferior a outro potencial constante V_I. Despreze efeitos devido à presença da cola isolante e usando a expansão em polinômios de Legendre, determine o potencial eletrostático $V(r)$ fora da esfera ($r \geq R$).

   Obs*: Sua resposta deve recuperar o resultado para uma casca esférica carregada a um potencial constante V_o quando $V_I = V_S = V_o$.*

3. ***(3,0 pontos)*** Um fio infinito de raio *a* carrega uma densidade de corrente uniforme $\mathbf{J} = J_0\,\hat{\mathbf{k}}$. Ele é circundado por uma casca cilíndrica concêntrica (também infinita) de material magnetizável com: raios *b* e *c* (c > *b*, *b*>*a*), susceptibilidade magnética χ_m e permeabilidade μ, ambas constantes. O material obedece uma relação linear entre o vetor indução magnética **B** e o vetor campo magnético **H.**

   a) Calcule o fluxo por unidade de comprimento Φ', do vetor indução **B**, dentro da casca.
   b) Ache as densidades de correntes equivalentes (correntes de magnetização).
   c) Ache **B** a distâncias $\rho >$ c. Como este valor seria afetado se a casca cilindríca fosse removida?

4. ***(2,0 pontos)*** Num bom condutor, a razão entre as densidades máximas de energia elétrica u_E para a magnética u_H é muito pequena, ou seja:

$$\frac{u_E}{u_H} \equiv \frac{\varepsilon\omega}{\sigma} << 1$$

---

[1] Um dielétrico Classe A é isotrópico, homogêneo e obedece uma relação linear $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$ em que a permissividade elétrica relativa ε_r independe das coordenadas.

onde ε é a permissividade elétrica, σ é a condutividade elétrica e ω é a frequência angular da onda eletromagnética incidente sobre o condutor. Por isso, um condutor pode ser aquecido se ele for colocado num campo magnético oscilatório.

Considere uma folha de material bom condutor cuja espessura é muito maior do que o coeficiente de penetração ("skin depth") δ . Este último é função da frequencia e é dado por:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}$$

onde μ é a pemeabilidade magnética do condutor. Por outro lado, o campo elétrico está adiantado do campo magnético de $\pi/4$ radianos e o número de onda k é complexo:

$$k = \frac{1}{\delta}(1 - j)$$

onde $j = \sqrt{-1}$.

Esta folha está exposta a um campo magnético paralelo à mesma $H_0 e^{j\omega t}$ (notação complexa). Mostre que a potência média (temporal) dissipada por metro quadrado é:

$$\boxed{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}H_0^2}$$

FORMULÁRIO
(Sistema de Unidades Internacional)

1. Vetor Indução Magnética **B,** Polarização **P**, Magnetização **M**, momento magnético **m**, Potencial Elétrico V, vetor deslocamento elétrico **D** e vetor campo elétrico **E**

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\left[\int_{\tau'} \frac{\left(\mathbf{J}_f + \nabla'\times\mathbf{M}\right)\times\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3} d\tau' + \int_{S'} \frac{\left(\boldsymbol{\lambda}_f + \mathbf{M}\times\hat{\mathbf{n}}'\right)\times\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3} da' + \int_C \frac{I\, d\mathbf{l}'\times\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3}\right]$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int_\tau \mathbf{r}\times\mathbf{J}_f\, d\tau + \frac{1}{2}\int_S \mathbf{r}\times\boldsymbol{\lambda}_f\, da + \frac{1}{2}\oint_C I\mathbf{r}\times d\mathbf{l}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\int_{\tau'} \frac{\rho_f - \nabla'\cdot\mathbf{P}}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|} d\tau' + \int_{S'} \frac{\sigma_f + \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}'}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|} da'\right]$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_o\mathbf{E} + \mathbf{P}$$

onde $\hat{\mathbf{n}}'$ é um vetor unitário normal ao elemento de área, I é a corrente elétrica num fio fino, $\mathbf{J}_f$ e $\boldsymbol{\lambda}_f$ são as densidades de corrente volumétrica e superficial devido às cargas livres, respectivamente, ρ_f e σ_f são as densidades de cargas livres volumétrica e superficial, respectivamente, $\mu_o = 4\pi\times10^{-7}\, NA^{-2}$ é a permeabilidade do vácuo e ε_o é a permissividade do vácuo.

2. Potencial Vetor de um dipolo magnético **m e** Potencial Elétrico de um dipolo elétrico **p**

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right) = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_o r^3}$$

3. Integrais úteis com polinômios de Legendre de ordem n $P_n(x)$ e função delta de Cronecker $\delta_{nl} = \begin{cases} 1, \text{se } n = l \\ 0, \text{se } n \neq l \end{cases}$.

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_l(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nl}$$

$$\int_0^1 P_n(x)dx = \begin{cases} 1 \; se \; n = 0 \\ 0 \; se \; n = 2,4,6\ldots \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \dfrac{(n-2)!!}{(n+1)!!} \; se \; n = 1,3,5\ldots \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} dx \frac{1-x^2}{\left(1+a^2-2ax\right)^{3/2}} = \frac{4}{3} \quad 0 \le a < 1$$

4. Relações úteis

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{a}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{a}) - \nabla^2\mathbf{a}$$
$$\nabla\times(f\,\mathbf{a}) = \nabla f\times\mathbf{a} + f\,\nabla\times\mathbf{a}$$
$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$
$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$$

5. Miscelâneas

5.1 Solução da eq. de Laplace em coordenadas Esféricas com independência azimutal

$$f(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right)P_l(\cos\theta)$$

5.2 Solução da eq. de Laplace em coordenadas Cilíndricas no plano x - y

$$f(\rho,\varphi) = a_0 + b_0 \ln\rho + \sum_{\substack{l=1 \\ m=0}}^{\infty}\left(A_l\rho^l + B_l\rho^{-l}\right)\left(C_m e^{im\varphi} + D_m e^{-im\varphi}\right)$$