Mecânica Estatística - Exame de Qualificação
Agosto de 2006 - IF/UFAL

1) TERMODINÂMICA (2,5 pontos)

Em uma faixa de temperaturas próximas a temperatura absoluta T, a força de tensão F aplicada a uma barra plástica está relacionada ao seu comprimento L pela expressão:

$$F = aT^2(L - L_0)$$

onde a e L_0 são constantes positivas, sendo L_0 o comprimento da barra quando nenhuma tensão é aplicada. Quando $L=L_0$, a capacidade calorífica C_L da barra (medida a comprimento constante) é dada pela relação $C_L=bT$, onde b é uma constante positiva.

a) A Entropia $S(T,L)$ da barra é uma função de T e L. Escreva a relação fundamental da termodinâmica, ou seja dS em termos de dE e dL, e mostre que $\partial S/\partial T|_L=C_L/T$. Usando que a diferencial $d(E-TS)$ é exata mostre que $\partial S/\partial L|_T=\partial F/\partial T|_L$ **.(1 ponto)**
b) Conhecendo $S(T_0,L_0)$, encontre $S(T,L)$ em qualquer temperatura T e comprimento L. (Sugestão: calcule inicialmente a mudança de entropia com a temperatura mantendo o comprimento constante e igual a L_0 onde a capacidade calorífica é conhecida e em seguida a mudança de entropia com o comprimento num processo isotérmico).**(1 ponto)**
c) Mostre que quando a barra tem comprimento L, sua capacidade calorífica será dada por (**0,5 ponto**)

$$C_L = bT + aT(L - L_0)^2$$

2) ENSEMBLE MICROCANÔNICO (2,5 pontos)

Considere um sistema isolado constituído de um grande número N de partículas localizadas e fracamente interagentes de spin ½. Cada partícula tem um momento magnético μ o qual pode apontar paralelamente ou antiparalelamente a um campo magnético aplicado H. A energia deste sistema é então $E=-(n_1-n_2)\mu H$, onde $n_1(n_2)$ é o número de partículas com momento magnético alinhado paralelamente (antiparalelamente) ao campo H.

a) Considere a energia do sistema na faixa compreendida entre E e $E+\delta E$, onde δE é pequeno comparado a E mas microscopicamente grande tal que $\delta E>>\mu H$. Qual o número de estados $\Omega(E)$ acessíveis ao sistema nesta faixa de energias? (**1,0 ponto**)
b) Escreva uma expressão para $ln\Omega(E)$ como função de E. Simplifique esta expressão aplicando a formula de Stirling ($lnx! = xlnx-x$, para $x>>1$).(**0,5 ponto**)
c) Usando a expressão do item anterior e a definição $\beta=\partial ln\Omega/\partial E$, encontre uma relação entre a temperatura absoluta T e a energia E deste sistema. (**0,5 ponto**)

d) Calcule a capacidade calorífica deste sistema. Determine $C(T=0)$ e $C(T\rightarrow\infty)$. Justifique fisicamente estes valores limites. (**0,5 ponto**)

3 – ENSEMBLE CANÔNICO (2,5 pontos)

Uma balança de mola muito sensível consiste em uma mola de quartzo suspensa de um suporte fixo. A constante da mola é α, ou seja, a força restauradora da mola é $-\alpha x$ quando a mola é distendida de um comprimento x. A balança está a uma temperatura T e colocada numa região onde a aceleração da gravidade é g. Uma massa M é suspensa pela mola.

a) Escreva uma expressão para a energia total do sistema, incluindo a energia cinética e as energias potenciais gravitacional e elástica (use que o nível de referência para a energia potencial gravitacional corresponde à posição de equilíbrio da mola). Mostre que a probabilidade da mola ter uma distensão compreendida entre x e $x+dx$ é dada por:

$$P(x)dx = Ce^{-\beta(\alpha x^2/2 - Mgx)}dx$$

onde $\beta=1/kT$. (**1,0 ponto**)

b) Calcule o alongamento médio $<x>$ da mola usando a distribuição do item anterior (**1.0 ponto**).

c) Mostre que a magnitude das flutuações térmicas do objeto em torno de sua posição de equilíbrio é dada por $<x^2>-<x>^2=kT/\alpha$. **(0.5 ponto)**

4) ESTATÍSTICA QUÂNTICA (2,5 pontos)

Para excitações coletivas em um sólido, a freqüência ω de uma onda é relacionada ao vetor de onda $\boldsymbol{k}$ por $\omega_{\boldsymbol{k}}=Ak^{\sigma}$, onde A é uma constante e σ é uma constante que depende da natureza das excitações ($\sigma=1$ para vibrações da rede e $\sigma=2$ para ondas de magnetização).

a) Use que, para um meio contínuo, o número de modos com vetor de onda entre $\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{k}+d^3\boldsymbol{k}$ é dado por $f(\boldsymbol{k})d^3\boldsymbol{k}=[3V/(2\pi)^3]d^3\boldsymbol{k}$ para determinar $\sigma(\omega)d\omega$, ou seja, o número de modos com freqüência entre ω e $\omega+d\omega$. (**1,0 ponto**)

b) Imponha que o número total de modos é $3N$ (N é o número de átomos do sólido) e determine a máxima freqüência destas excitações. (**1,0 ponto**)

c) Excitações coletivas tais como fônons e mágnons são bosônicas. A energia total contida nestas excitações pode ser escrita, portanto, como sendo: $<E>=\int f(\varepsilon)\varepsilon(\omega)\sigma(\omega)d\omega$,onde $\varepsilon(\omega)=\hbar\omega$ e $f(\varepsilon)=1/(e^{\beta\varepsilon}-1)$ é a distribuição de Planck (típica de sistemas bosônicos cujo número de partículas não é conservado). Mostre que no limite de baixas temperaturas a capacidade calorífica devido a estas excitações coletivas é dada por $C\sim T^{3/\sigma.}$ **(0,5 ponto)**