Instituto de Física
Universidade Federal de Alagoas
Exame de Qualificação do Doutorado
Programa de Pós-graduação em Física da Matéria Condensada

Prova de Mecânica Estatística

Nome:____

Problema 1: Máquina de Carnot usando um corpo negro

(25%) A radiação eletromagnética de um corpo negro (cavidade vazia) de volume V em equilíbrio térmico com as paredes a uma temperatura T, se comporta como um gás de fótons. A densidade de energia interna do gás é $u = \sigma T^4$ (σ é uma constante positiva) e a pressão $p = u/3$.
(a) Faça o diagrama pressão-volume do ciclo de Carnot explicando cada etapa do ciclo.
(b) Calcule a eficiência desta máquina de Carnot.

Problema 2: Função de partição do gás ideal

(25%) Considere um gás ideal com N partículas em um volume V cujo hamiltoniano é dado por

$$H(p_n) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{p_n^2}{2m}.$$

onde p_n é a componente do momento de uma partícula e m a massa da partícula. A função de partição do ensemble canônico é

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{N!h^{3N}} \int d^{3N}q d^{3N}p \exp(-\beta H).$$

onde T é temperatura, h é a constante de Planck e q_n é uma coordenada generalizada.
(a) Mostre que a função de partição é dada por

$$Z(T, V, N) = \frac{V^N}{N!} \left(\frac{2\pi m k T}{h^2}\right)^{3N/2}.$$

(b) Encontre a temperatura para a qual a entropia do gás seja $5Nk/2$.

Problema 3: Oscilador harmônico clássico

(25%) Calcule a energia livre de Helmholtz de um conjunto de N osciladores harmônicos indistiguíveis de frequência ω contidos em um volume V. O hamiltoniano deste sistema é dado por

$$H(q_n, p_n) = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{p_n^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q_n^2}{2}\right).$$

onde $\mathbf{p}_n$ e $\mathbf{q}_n$ são os vetores do momento e da posição do n-ésimo oscilador.
(a) Mostre que o potencial de Helmholtz é dada por

$$F(T,V,N) = -NkT \ln\left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)$$

(b) Obtenha a pressão exercida pelos osciladores nas paredes que compõem o volume V.

Problema 4: Modelo de Ising

(25%) Considere uma rede periódica unidimensional que consiste de N sítios igualmente espaçados submetida a um campo magnético externo B. Cada sítio contém uma partícula com spin $s_i = \pm 1$ ($i = 1, 2$), que corresponde ao estado $|s_i\rangle$. Os primeiros vizinhos de cada sítio tem a mesma energia de interação $-\epsilon$. A energia total do sistema é

$$E = -\epsilon \sum_{i=1}^{N} s_i s_{i+1} - \mu B \sum_{i=1}^{N} s_i,$$

onde μ é o momento magnético de um sítio.
(a) Mostre que a função de partição é dada por

$$Z_N(T,B) = \sum_{s_1,\ldots,s_N=\pm1} \exp\left[\beta \sum_{i=1}^{N}\left(\epsilon s_i s_{i+1} + \frac{\mu B}{2}(s_i + s_{i+1})\right)\right], \quad \beta = 1/kT.$$

(b) Introduzindo a matriz

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} e^{\beta(\epsilon+\mu B)} & e^{-\beta\epsilon} \\ e^{-\beta\epsilon} & e^{\beta(\epsilon-\mu B)} \end{bmatrix},$$

mostre que

$$Z_N = \mathrm{Tr}\left[\mathbf{P}^N\right] = \lambda_+^N + \lambda_-^N,$$

onde $\lambda_\pm$ são os auto-valores de $\mathbf{P}$. Obtenha explicitamente estes alto-valores.
(c) Mostre que no limite termodinâmico ($N \to \infty$) a energia livre por sítio $f = -(kT/N)\ln Z_N$ se torna $f = -kT \ln \lambda^+$.