Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física
Exame de Qualificação - Mecânica Quântica

1) Uma partícula de massa m, confinada na região $0 < x < L$, é sujeita a um potencial poço infinito. A partícula também experimenta um potencial função delta, localizado no centro do poço. A equação de Schrödinger que descreve esse sistema, dentro do poço, é dada por

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \lambda\delta(x - L/2)\psi(x) = E\psi(x), \quad 0 < x < L.$$

Encontre a equação transcendental para os autovalores de energia E.

Sugestão: Para calcular o comportamento de $\psi(x)$ em $x = L/2$, integre a equação de Schrödinger no intervalo $(L/2 - \epsilon, L/2 + \epsilon)$ e considere o limite $\epsilon \to 0$.

2) (a) Mostre que os autovalores de um operador hermitiano, $A = A^\dagger$, são sempre reais e (b) que seus autoestados são sempre ortogonais.

(c) Reescreve a hamiltoniana do oscilador harmônico, $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$, em termos dos operadores $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right)$, $a^\dagger$ e $N = a^\dagger a$; e em seguida, (d) obtenha os autovalores de energia.

3) Suponha que o spin de uma partícula esteja no estado

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-\rangle.$$

(a) Calcule as probabilidades de obtermos os autovalores $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$, quando realizamos a medida de S_y, assim como o seu valor esperado $\langle\psi|S_y|\psi\rangle$.

(b) Obtenha a evolução temporal, $|\psi(t)\rangle = U(t,0)|\psi\rangle$, a partir da hamiltoniana $H = \omega_0 S_z$, onde $\omega_0 = \frac{|e|B_z}{m_e c}$, como também mostre que a evolução temporal do valor esperado é $\langle\psi(t)|S_y|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar}{2}\sin\theta\sin\omega_0 t$.

(c) Encontre o operador unitário S, tal que $S|\pm\rangle = |\pm\rangle_y$, e rescreva o estado $|\psi\rangle$ em função dessa base nova $\{|\pm\rangle_y\}$.

Agora, (d) encontre as probabilidades $|_y\langle\pm|\psi\rangle|^2$ e o valor esperado $\langle\psi|S_y|\psi\rangle$, com $|\psi\rangle$ e S_y escritos em função de $\{|\pm\rangle_y\}$.

Dados: $|\pm\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle$ e $S_y = -\frac{i\hbar}{2}|+\rangle\langle -| + \frac{i\hbar}{2}|-\rangle\langle +|$

4) Dada a hamiltoniana para um sistema de dois níveis,

$$H = E_1^{(0)}|1^{(0)}\rangle\langle 1^{(0)}| + E_2^{(0)}|2^{(0)}\rangle\langle 2^{(0)}| + \lambda V_{12}|1^{(0)}\rangle\langle 2^{(0)}| + \lambda V_{21}|2^{(0)}\rangle\langle 1^{(0)}|,$$

onde λ é real,

(a) mostre que $V_{21} = V_{12}^*$, para que $H = H^\dagger$.

(b) Calcule os autovalores (E_1, E_2) e os autoestados $(|1\rangle, |2\rangle)$.

(c) Assumindo que $\lambda|V_{12}| \ll |E_1^{(0)} - E_2^{(0)}|$, calcule E_1 e E_2 até $\mathcal{O}(\lambda^2)$, a partir do resultado do item anterior.

(d) Mostre que esses resultados para E_1 e E_2 podem ser obtidos, usando a teoria de perturbação independente do tempo, através da expressão

$$\begin{aligned}\Delta_n &= E_n - E_n^{(0)} \\ &= \lambda V_{nn} + \lambda^2 \sum_{k\neq n} \frac{|V_{nk}|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} + \cdots,\end{aligned}$$

onde $V_{nk} = \langle n^{(0)}|V|k^{(0)}\rangle$.