Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física
Exame de Qualificação - Mecânica Quântica

1) Considere o problema unidimensional de uma partícula de massa m em um potencial

$$\begin{aligned} V(x) &= -V_0, \;\; |x| < \frac{a}{2} \\ &= 0, \;\; |x| > \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Para o caso $-V_0 \leq E < 0$, obtenha as correspondentes equações de auto-energia transcendentais, $k_2 \tan(\frac{k_2 a}{2}) = \rho_1$ e $k_2 \cot(\frac{k_2 a}{2}) = -\rho_1$, onde $\rho_1 = \sqrt{2m|E|/\hbar^2}$ e $k_2 = \sqrt{2m(V_0 - |E|)/\hbar^2}$.

2) (a) Sabendo que $A|a'\rangle = a'|a'\rangle$, mostre que se $[A, B] = 0$, A e B são compatíveis, ou seja, $|a'\rangle$ é um autoestado simultâneo de A e B.

(b) Reescreva a hamiltoniana do oscilador harmônico, $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$, em termos dos operadores $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right)$, $a^\dagger$ e $N = a^\dagger a$; e em seguida, (c) obtenha os autovalores de energia.

3) Suponha que o spin de uma partícula esteja no estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\varphi/2}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\varphi/2}|-\rangle.$$

(a) Calcule as probabilidades de obtermos os autovalores $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$, quando realizamos a medida de S_y, assim como o seu valor esperado $\langle\psi|S_y|\psi\rangle$.

(b) Rescreva o estado $|\psi\rangle$ em função da base $\{|\pm\rangle_y\}$, usando o operador unitário S, tal que $S|\pm\rangle = |\pm\rangle_y$, e encontre as probabilidades $|_y\langle\pm|\psi\rangle|^2$ e o valor esperado $\langle\psi|S_y|\psi\rangle$.

(c) Obtenha a evolução temporal, $|\psi(t)\rangle = U(t, 0)|\psi\rangle$, a partir da hamiltoniana $H = \omega_0 S_z$, onde $\omega_0 = \frac{|e|B_z}{m_e c}$, como também mostre que a evolução temporal do valor esperado é $\langle\psi(t)|S_y|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar}{2}\sin(\omega_0 t + \varphi)$.

(d) Obtenha este mesmo valor esperado no cenário de Heisenberg, $\langle\psi|S_y(t)|\psi\rangle$, usando $\frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A(t), H]$, $S_x(0) = S_x$ e $S_y(0) = S_y$.

Dados: $|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$, $|\pm\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle$,
$S_x = \frac{\hbar}{2}|+\rangle\langle-| + \frac{\hbar}{2}|-\rangle\langle+|$ e $S_y = -\frac{i\hbar}{2}|+\rangle\langle-| + \frac{i\hbar}{2}|-\rangle\langle+|$,
$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$,
$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin B \sin A$,
$[S_x, S_y] = i\hbar S_z$, $[S_x, S_z] = -i\hbar S_y$, $[S_y, S_z] = i\hbar S_x$.

4) Dada a hamiltoniana para um sistema de três níveis,

$$\begin{aligned} H &= E_1^{(0)}|1^{(0)}\rangle\langle 1^{(0)}| + E_2^{(0)}|2^{(0)}\rangle\langle 2^{(0)}| + E_3^{(0)}|3^{(0)}\rangle\langle 3^{(0)}| \\ &\quad + \lambda V_{13}|1^{(0)}\rangle\langle 3^{(0)}| + \lambda V_{31}|3^{(0)}\rangle\langle 1^{(0)}|, \end{aligned}$$

onde λ é real e $V_{31} = V_{13}^*$.

(a) Calcule os autovalores (E_1, E_2, E_3) e os autoestados $(|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle)$.

(b) Assumindo que $\lambda|V_{13}| \ll |E_1^{(0)} - E_3^{(0)}|$, calcule E_1 e E_3 até $\mathcal{O}(\lambda^2)$, a partir do resultado do item anterior.

(c) Mostre que esses resultados para E_1, E_2 e E_3 podem ser obtidos, usando a teoria de perturbação independente do tempo, através da expressão

$$\begin{aligned} \Delta_n &= E_n - E_n^{(0)} \\ &= \lambda V_{nn} + \lambda^2 \sum_{k \neq n} \frac{|V_{nk}|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} + \cdots, \end{aligned}$$

onde $V_{nk} = \langle n^{(0)}|V|k^{(0)}\rangle$.