Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física
Exame de Qualificação - Mecânica Quântica

1) Considere o problema unidimensional de uma partícula de massa m em um potencial barreira,

$$\begin{aligned} V(x) &= 0, \quad x < 0, \\ &= V_0, \quad 0 \leq x \leq a, \\ &= 0, \quad x > a. \end{aligned}$$

Para o caso $E < V_0$, mostre que

$$\lim_{E \to V_0} T = \left(1 + \frac{mV_0 a^2}{2\hbar^2}\right)^{-1},$$

onde T é o coeficiente de transmissão.

2) (a) Sabendo que $A|a'\rangle = a'|a'\rangle$, mostre que se $[A, B] = 0$, A e B são compatíveis, ou seja, $|a'\rangle$ é um autoestado simultâneo de A e B. (b) Reescreve a hamiltoniana do oscilador harmônico, $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$, em termos dos operadores $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right)$, $a^\dagger$ e $N = a^\dagger a$. (c) Calcule o elemento matricial $\langle 0|x|1\rangle$, usando os operadores a e $a^\dagger$. (d) calcule também $\langle 0|x|1\rangle$, no espaço de funções de onda, sabendo que a autofunção do estado fundamental do oscilador harmônico é

$$\psi_0(x') = \langle x'|0\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{x_0}} e^{-x'^2/2x_0^2},$$

com $x_0^2 = \frac{\hbar}{m\omega}$, assim como

$$\langle x'|1\rangle = \langle x'|a^\dagger|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}x_0}\left(x' - x_0^2 \frac{d}{dx'}\right)\langle x'|0\rangle.$$

Dados:

$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ax^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$,
$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2 e^{-ax^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}$

3) Escrito na base do operador L_z,

$$|1,1\rangle_z \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |1,0\rangle_z \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1,-1\rangle_z \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

o operador L_y possui a seguinte representação matricial:

$$L_y \doteq \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

(a) Calcule os autovalores e os autoestados ($|1,1\rangle_y$, $|1,0\rangle_y$ e $|1,-1\rangle_y$) desse operador. (b) Suponha que uma partícula está no estado

$$|\psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{6}}|1,1\rangle_z - \frac{1}{\sqrt{6}}|1,0\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{6}}|1,-1\rangle_z.$$

Se o operador L_y é medido, quais são as probabilidades de encontrarmos os seus autovalores. (c) Encontre operador unitário S, tal que $S|1,1\rangle_z = |1,1\rangle_y$, e assim por diante. (d) Rescreva o estado $|\psi\rangle$ em função da base $\{|1,1\rangle_y, |1,0\rangle_y, |1,-1\rangle_y\}$ e encontre o valor esperado $\langle\psi'|L'_y|\psi'\rangle$.

4) Considere um sistema de três níveis, dado pelo hamiltoniana $H = H_0 + \lambda V$, onde

$$H_0 = E_2^{(0)}|2^{(0)}\rangle\langle 2^{(0)}| + E_2^{(0)}|3^{(0)}\rangle\langle 3^{(0)}|.$$

Encontre a matriz de perturbação V, sabendo que os autoestados de H, para a ordem mais baixa em λ, são $|1\rangle = |1^{(0)}\rangle$, $|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2^{(0)}\rangle + |3^{(0)}\rangle)$ e $|3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2^{(0)}\rangle - |3^{(0)}\rangle)$, e que os correspondentes autovalores são

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{\lambda^2}{E_2^{(0)}} + \mathcal{O}(\lambda^3), \\ E_2 &= E_2^{(0)} + \lambda + \frac{\lambda^2}{E_2^{(0)}} + \mathcal{O}(\lambda^3), \\ E_3 &= E_2^{(0)} - \lambda + \mathcal{O}(\lambda^3). \end{aligned}$$

Sugestão: escolha componentes de V reais; rescreve V na base não degenerada, $V' = S^\dagger V S$; e compare com

$$\Delta_n = E_n - E_n^{(0)} = \lambda V'_{nn} + \lambda^2 \sum_{k \neq n} \frac{|V'_{nk}|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} + \cdots,$$

onde $V'_{nk} = \langle n^{(0)}|V'|k^{(0)}\rangle$.