Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física
Exame de Qualificação - Mecânica Quântica

1) Considere o problema unidimensional de uma partícula de massa m em um potencial

$$\begin{aligned} V(x) &= \infty, \;\; x < 0 \\ &= 0, \;\; 0 \leq x \leq a \\ &= V_0, \;\; x > a \end{aligned}$$

Para o caso $E < V_0$, obtenha a correspondente equação de autoenergia transcendental.

2) (a) Mostre que os autovalores de um operador hermitiano, $A = A^\dagger$, são sempre reais e que seus autoestados são sempre ortogonais.

(b) Sabendo que $A|a'\rangle = a'|a'\rangle$, mostre que se $[A, B] = 0$, A e B são compatíveis, ou seja, $|a'\rangle$ é um autoestado simultâneo de A e B.

(c) Encontre a autofunção de energia normalizada do oscilador harmônico, $\psi_0(x') = \langle x'|0\rangle$, usando o operador de aniquilação, $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right)$.

3) Suponha que o spin de uma partícula esteja no estado

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)e^{-i\varphi/2}|+\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\varphi/2}|-\rangle.$$

(a) Rescreva o estado $|\psi\rangle$ em função da base $\{|\pm\rangle_x\}$, usando o operador unitário S, tal que $S|\pm\rangle = |\pm\rangle_x$, e encontre a probabilidade $|_x\langle+|\psi'\rangle|^2$ e o valor esperado $\langle\psi'|S_x'|\psi'\rangle$.

(b) Obtenha a evolução temporal, $|\psi(t)\rangle = U(t, 0)|\psi\rangle$, a partir da hamiltoniana $H = \omega_0 S_z$, onde $\omega_0 = \frac{|e|B_z}{m_e c}$, como também mostre que a evolução temporal do valor esperado é $\langle\psi(t)|S_x|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar}{2}\sin\theta\cos(\varphi + \omega_0 t)$.

(c) Obtenha este mesmo valor esperado no cenário de Heisenberg, $\langle\psi|S_x(t)|\psi\rangle$, usando $\frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A(t), H]$, $S_x(0) = S_x$ e $S_y(0) = S_y$.

4) Sabendo que

$$H_0 = E_2^{(0)}|2^{(0)}\rangle\langle 2^{(0)}| + E_2^{(0)}|3^{(0)}\rangle\langle 3^{(0)}|,$$

considere a hamiltoniana para um sistema de três níveis, $H = H_0 + \lambda V$. Encontre a matriz de perturbação V, tal que

(a) Calcule os autovalores (E_1, E_2, E_3) e os autoestados $(|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle)$.

(b) Assumindo que $\lambda|V_{13}| \ll |E_1^{(0)} - E_3^{(0)}|$, calcule E_1 e E_3 até $\mathcal{O}(\lambda^2)$, a partir do resultado do item anterior.

(c) Mostre que esses resultados para E_1, E_2 e E_3 podem ser obtidos, usando a teoria de perturbação independente do tempo, através da expressão

$$\begin{aligned} \Delta_n &= E_n - E_n^{(0)} \\ &= \lambda V_{nn} + \lambda^2 \sum_{k \neq n} \frac{|V_{nk}|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} + \cdots, \end{aligned}$$

onde $V_{nk} = \langle n^{(0)}|V|k^{(0)}\rangle$.

Dados:

$|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$, $|\pm\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle$,
$S_x = \frac{\hbar}{2}|+\rangle\langle-| + \frac{\hbar}{2}|-\rangle\langle+|$ e $S_y = -\frac{i\hbar}{2}|+\rangle\langle-| + \frac{i\hbar}{2}|-\rangle\langle+|$,
$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$,
$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin B \sin A$,
$[S_x, S_y] = i\hbar S_z$, $[S_x, S_z] = -i\hbar S_y$, $[S_y, S_z] = i\hbar S_x$,
$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x'^2/x_0^2} = x_0\sqrt{\pi}$