Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física
Exame de Qualificação - Mecânica Quântica

1) Considere o problema unidimensional de uma partícula de massa m em um potencial

$$\begin{aligned} V(x) &= 0, \quad x < 0, \\ &= V_0, \quad x > 0, \end{aligned}$$

onde V_0 é uma constante positiva. Considerando que a partícula esteja vindo de $x = -\infty$, encontre os coeficientes de reflexão R e transmissão T, para (a) $E < V_0$ e (b) $E > V_0$.

2) Dada a hamiltoniana de um sistema de quatro níveis,

$$H = \sum_{n=1}^{4} E_0 |n\rangle\langle n| + \sum_{n=1}^{4} W|n\rangle\langle n+1| + \sum_{n=1}^{4} W|n+1\rangle\langle n|,$$

onde E_0 e W são constante, sabendo que $\langle n|n'\rangle = \delta_{n,n'}$ e assumindo condições de contorno periódicas, $|4+j\rangle = |j\rangle$, calcule (a) os autovalores (E_1, E_2, E_3, E_4) e os (b) autoestados $(|E_1\rangle, |E_2\rangle, |E_3\rangle, |E_4\rangle)$.

Dica: rescreve a hamiltoniana como $H = E_0 I + WA + WA^\dagger$, onde $I = \sum_{n=1}^{4} |n\rangle\langle n|$ e $A = \sum_{n=1}^{4} |n\rangle\langle n+1|$, e mostre que H e A possuem os mesmos autoestados.

3) Suponha que o spin de uma partícula esteja no estado

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-\rangle.$$

(a) Calcule as probabilidades de obtermos os autovalores $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$, quando realizamos a medida de S_x, assim como o seu valor esperado $\langle\psi|S_x|\psi\rangle$.

(b) Obtenha a evolução temporal, $|\psi(t)\rangle = U(t,0)|\psi\rangle$, a partir da hamiltoniana $H = \omega_0 S_z$, onde $\omega_0 = \frac{|e|B_z}{m_e c}$, como também mostre que a evolução temporal do valor esperado é $\langle\psi(t)|S_x|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar}{2}\sin\theta\cos\omega_0 t$.

(c) Encontre o operador unitário S, tal que $S|\pm\rangle = |\pm\rangle_x$, e rescreva o estado $|\psi\rangle$ em função dessa base nova $\{|\pm\rangle_x\}$.

Agora, (d) encontre as probabilidades $|_x\langle\pm|\psi\rangle|^2$ e o valor esperado $\langle\psi|S_x|\psi\rangle$, com $|\psi\rangle$ e S_x escritos em função de $\{|\pm\rangle_x\}$.

Dados: $|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$, $|\pm\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle$,
$S_x = \frac{\hbar}{2}|+\rangle\langle-| + \frac{\hbar}{2}|-\rangle\langle+|$ e $S_y = -\frac{i\hbar}{2}|+\rangle\langle-| + \frac{i\hbar}{2}|-\rangle\langle+|$,
$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$,
$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin B \sin A$,
$[S_x, S_y] = i\hbar S_z$, $[S_x, S_z] = -i\hbar S_y$, $[S_y, S_z] = i\hbar S_x$

4) Um oscilador harmônico simples (em uma dimensão) é sujeito à uma perturbação

$$\lambda H_1 = \lambda x^3,$$

onde b é uma constante real. Calcule Δ_n até ordem de λ^2, sabendo que a hamiltoniana do sistema é $H = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$, $N = a^\dagger a$, $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right)$ e que

$$\begin{aligned}\Delta_n &= E_n - E_n^{(0)} \\ &= \lambda V_{nn} + \lambda^2 \sum_{k\neq n} \frac{|V_{nk}|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} + \cdots,\end{aligned}$$

onde $V_{nk} = \langle n^{(0)}|V|k^{(0)}\rangle$.