Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física
Exame de Qualificação - Mecânica Quântica

1) Considere uma partícula de massa m confinada em uma região unidimensional, sujeita ao potencial

$$\begin{aligned} V(x) &= \infty, \ x < 0, \\ &= 0, \ 0 < x < a, \\ &= \infty, \ x > a. \end{aligned}$$

Dada a equação de Schrödinger $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)$, onde $\psi(x,t) = \sum_n c_n\varphi_n(x)e^{-iE_nt/\hbar}$, (a) calcule as autofunções $\varphi_n(x)$ e (b) os autovalores de energia E_n.

Levando em conta que a função de onda $\psi(x,t)$, em $t=0$, possui a expressão $\psi(x,t=0) = \sqrt{\frac{8}{5a}}\left[1+\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$, (c) calcule os coeficientes da expansão c_n, assim como (d) a energia média do sistema $\langle\psi|H|\psi\rangle$, considerando $|\psi\rangle = \sum_n c_n|n\rangle$ e $H|n\rangle = E_n|n\rangle$.

2) Considere a hamiltoniana de um sistema de dois níveis, dada por

$$H = E_0 I + WA + WA^\dagger,$$

onde E_0 e W são constante, $I = \sum_{n=1}^2 |n\rangle\langle n|$ e $A = \sum_{n=1}^2 |n\rangle\langle n+1|$.

Assumindo condições de contorno periódicas, $|3\rangle = |1\rangle$, (a) encontre as representações matriciais de I, A, $A^\dagger$ e H. (b) A é um operador hermitiano? (c) A e H possuem os mesmos autoestados?

(d) Calcule os autovalores (E_1, E_2) e os autoestados $(|E_1\rangle, |E_2\rangle)$ de H.

3) Suponha que o spin de uma partícula esteja no estado

$$|\psi\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\varphi}|-\rangle.$$

(a) Calcule as probabilidades de obtermos os autovalores $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$, quando realizamos a medida de S_y, assim como o seu valor esperado $\langle\psi|S_y|\psi\rangle$.

(b) Obtenha a evolução temporal, $|\psi(t)\rangle = U(t,0)|\psi\rangle$, a partir da hamiltoniana $H = \omega_0 S_z$, onde $\omega_0 = \frac{|e|B_z}{m_e c}$, assim como a evolução temporal do valor esperado é $\langle\psi(t)|S_y|\psi(t)\rangle$.

(c) Encontre o operador unitário S, tal que $S|\pm\rangle = |S_y\pm\rangle$, e rescreva o estado $|\psi\rangle$ em função dessa base nova $\{|S_y\pm\rangle\}$.

Agora, (d) encontre as probabilidades $|\langle\pm S_y|\psi\rangle|^2$ e o valor esperado $\langle\psi|S_y|\psi\rangle$, com $|\psi\rangle$ e S_y escritos em função de $\{|S_y\pm\rangle\}$.

Dados:

$|S_x\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$, $|S_y\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle$,
$S_x = \frac{\hbar}{2}|+\rangle\langle-| + \frac{\hbar}{2}|-\rangle\langle+|$ e $S_y = -\frac{i\hbar}{2}|+\rangle\langle-| + \frac{i\hbar}{2}|-\rangle\langle+|$,
$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$,
$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin B \sin A$

4) Um oscilador harmônico simples (em uma dimensão) é sujeito à uma perturbação

$$\lambda H_1 = \lambda x,$$

onde λ é uma constante real. Calcule Δ_n até ordem de λ^2, sabendo que a hamiltoniana do sistema é $H = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$, $N = a^\dagger a$, $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right)$ e que

$$\begin{aligned} \Delta_n &= E_n - E_n^{(0)} \\ &= \lambda V_{nn} + \lambda^2 \sum_{k \neq n} \frac{|V_{nk}|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} + \cdots, \end{aligned}$$

onde $V_{nk} = \langle n^{(0)}|V|k^{(0)}\rangle$.