Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física
Exame de Qualificação - Mecânica Quântica

1) Considere uma partícula de massa m confinada em uma região unidimensional, sujeita ao potencial

$$\begin{aligned} V(x) &= \infty, && x < -a, \\ &= -V_0\delta(x), && x > -a. \end{aligned}$$

1) (a) Encontre a equação transcendental para os autovalores de energia E ($E < 0$). (b) Mostre que, para $a \gg 1$, o autovalor de energia é dado convencionalmente por $E = -\frac{mV_0^2}{2\hbar^2}$.

2) Dada a equação de autovalor $N|n\rangle = n|n\rangle$, mostre que, se o operador N for hermitiano, $N^\dagger = N$, (a) os seus autovalores n são sempre reais (b) e os seus autoestados $|n\rangle$ são sempre ortogonais. (c) Agora, mostre que, se $[N, M] = 0$, N e M são operadores compatíveis, ou seja, $|n\rangle$ são autoestados simultâneos a N e M.

3) Considere uma partícula sem spin, representada pelo estado

$$|\psi\rangle = A_\Omega \left(-\frac{1}{2}(1-i)\sqrt{\frac{8\pi}{3}}|1,1\rangle + 2\sqrt{\frac{4\pi}{3}}|1,0\rangle + \frac{1}{2}(1+i)\sqrt{\frac{8\pi}{3}}|1,-1\rangle \right).$$

(a) Após encontrar A_Ω, calcule as probabilidades de obtermos os autovalores $+\hbar$, 0 e $-\hbar$, quando realizamos a medida de L_z, assim como o seu valor esperado $\langle\psi|L_z|\psi\rangle$.

(b) Calcule os autovalores $m\hbar$ e os autoestados $|l,m\rangle_y$ do operador L_y.

(c) Agora, calcule as probabilidades de obtermos esses autovalores, quando realizamos a medida de L_y, assim como o seu valor esperado $\langle\psi|L_y|\psi\rangle$.

(d) Rescreva $|\psi\rangle$ no espaço de funções de onda, usando as relações $\langle\vec{x}|\psi\rangle = \psi(x,y,z) = \psi(r,\theta,\phi)$, $\langle\vec{x}|l,m\rangle = R(r)Y_l^m(\theta,\phi)$, assim como

$$Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \quad Y_1^{\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi}, \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta.$$

4) Um oscilador harmônico simples (em uma dimensão) é sujeito à uma perturbação

$$\lambda H_1 = \lambda x,$$

onde λ é uma constante real. (a) Calcule o autoestado perturbado $|n\rangle$, até segunda ordem em λ, sabendo que a hamiltoniana do sistema é $H = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$, $N = a^\dagger a$, $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right)$ e que

$$\begin{aligned} |n\rangle &= |n^{(0)}\rangle + \lambda \sum_{k\neq n} |k^{(0)}\rangle \frac{V_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} - \lambda^2 \sum_{k\neq n} |k^{(0)}\rangle \frac{V_{nn}V_{kn}}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})^2} \\ &\quad + \lambda^2 \sum_{k\neq n}\sum_{l\neq n} |k^{(0)}\rangle \frac{V_{kl}V_{ln}}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})(E_n^{(0)} - E_l^{(0)})} + \cdots, \end{aligned}$$

onde $V_{nk} = \langle n^{(0)}|V|k^{(0)}\rangle$. (b) Considerando que a normalização de $|n\rangle$ seja dada por $|n\rangle_N = Z_n^{1/2}|n\rangle$, onde

$$Z_n = 1 - \lambda^2 \sum_{k\neq n} \frac{|V_{kn}|^2}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})^2} + \cdots,$$

calcule Z_n e mostre que ${}_N\langle n|n\rangle_N = 1$, também até segunda ordem em λ.