Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física
Exame de Qualificação - Mecânica Quântica

1) Considere o problema unidimensional de uma partícula de massa m em um potencial delta, $V(x) = -V_0\delta(x)$. (a) Calcule o coeficiente de reflexão R ($E > 0$) e (b) a energia de ligação E ($E < 0$).

2) Considere a hamiltoniana de um sistema de três níveis, dada por

$$H = I + A + A^\dagger,$$

onde $I = \sum_{n=1}^{3} |n\rangle\langle n|$ e $A = \sum_{n=1}^{3} |n\rangle\langle n+1|$.

Assumindo condições de contorno periódicas, i.e. $|4\rangle = |1\rangle$, (a) encontre as representações matriciais de I, A, $A^\dagger$ e H. (b) A é um operador hermitiano? (c) A e H possuem os mesmos autoestados?

(d) Calcule os autovalores (E_1, E_2, E_3) e os autoestados $(|E_1\rangle, |E_2\rangle, |E_3\rangle)$ de H.

3) Suponha que o spin de uma partícula esteja no estado

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)e^{-i\varphi/2}|+\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\varphi/2}|-\rangle.$$

(a) Calcule as probabilidades de obtermos os autovalores $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$, quando realizamos a medida de S_y, assim como o seu valor esperado $\langle\psi|S_y|\psi\rangle$.

(b) Obtenha a evolução temporal, $|\psi(t)\rangle = U(t,0)|\psi\rangle$, a partir da hamiltoniana $H = \omega_0 S_z$, onde $\omega_0 = \frac{|e|B_z}{m_e c}$, assim como a evolução temporal do valor esperado é $\langle\psi(t)|S_y|\psi(t)\rangle$.

(c) Encontre o operador unitário S, tal que $S|\pm\rangle = |S_y\pm\rangle$, e rescreva o estado $|\psi\rangle$ em função dessa base nova $\{|S_y\pm\rangle\}$.

Agora, (d) encontre as probabilidades $|\langle\pm S_y|\psi\rangle|^2$ e o valor esperado $\langle\psi|S_y|\psi\rangle$, com $|\psi\rangle$ e S_y escritos em função de $\{|S_y\pm\rangle\}$.

Dados:

$|S_x\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$, $|S_y\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle$,
$S_x = \frac{\hbar}{2}|+\rangle\langle-| + \frac{\hbar}{2}|-\rangle\langle+|$ e $S_y = -\frac{i\hbar}{2}|+\rangle\langle-| + \frac{i\hbar}{2}|-\rangle\langle+|$,

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A,$
$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin B \sin A$

4) Um oscilador harmônico simples (em uma dimensão) é sujeito à uma perturbação

$$\lambda H_1 = \lambda x^3,$$

onde λ é uma constante real. Calcule $|n\rangle$, até primeira ordem em λ, sabendo que a hamiltoniana do sistema é $H = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$, $N = a^\dagger a$, $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right)$ e que

$$|n\rangle \quad = \quad |n^{(0)}\rangle + \lambda \sum_{k \neq n} |k^{(0)}\rangle \frac{V_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} + \cdots,$$

onde $V_{nk} = \langle n^{(0)}|V|k^{(0)}\rangle$.