Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física
Exame de Qualificação - Mecânica Quântica

1) Considere o problema unidimensional de uma partícula de massa m em um potencial barreira,

$$\begin{aligned} V(x) &= 0, \quad x < 0, \\ &= V_0, \quad 0 \leq x \leq a, \\ &= 0, \quad x > a. \end{aligned}$$

Para o caso $E < V_0$, mostre que o coeficiente de transmissão é dado por

$$T = \frac{4E(V_0 - E)}{4E(V_0 - E) + V_0^2 \sinh^2(\sqrt{2m(V_0 - E)}a/\hbar)}.$$

2) (a) Sabendo que $A|a'\rangle = a'|a'\rangle$, mostre que se $[A, B] = 0$, A e B são compatíveis, ou seja, $|a'\rangle$ é um autoestado simultâneo de A e B. (b) Reescreve a hamiltoniana do oscilador harmônico, $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$, em termos dos operadores $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right)$, $a^\dagger$ e $N = a^\dagger a$. (c) Calcule o elemento matricial $\langle 0|x|1\rangle$, usando os operadores a e $a^\dagger$. (d) calcule também $\langle 0|x|1\rangle$, no espaço de funções de onda, sabendo que a autofunção do estado fundamental do oscilador harmônico é

$$\psi_0(x') = \langle x'|0\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{x_0}} e^{-x'^2/2x_0^2},$$

com $x_0^2 = \frac{\hbar}{m\omega}$, assim como

$$\langle x'|1\rangle = \langle x'|a^\dagger|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}x_0}\left(x' - x_0^2 \frac{d}{dx'}\right)\langle x'|0\rangle.$$

Dados:

$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ax^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$,
$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2 e^{-ax^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}$

3) Suponha que o spin de uma partícula esteja no estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\varphi}|-\rangle.$$

(a) Obtenha a evolução temporal, $|\psi(t)\rangle = U(t,0)|\psi\rangle$, a partir da hamiltoniana $H = \omega_0 S_z$, onde $\omega_0 = \frac{|e|B_z}{m_e c}$.

(b) Calcule as probabilidades de obtermos os autovalores $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$, quando realizamos a medida de S_y, assim como o seu valor esperado $\langle\psi(t)|S_y|\psi(t)\rangle$.

(c) Obtenha este mesmo valor esperado no cenário de Heisenberg, $\langle\psi|S_y(t)|\psi\rangle$, usando $\frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A(t), H]$, $[S^i, S^j] = i\hbar\epsilon^{ijk}S^k$, $S_x(0) = S_x$, $S_y(0) = S_y$, assim como

$$S_x = \frac{\hbar}{2}|+\rangle\langle-| + \frac{\hbar}{2}|-\rangle\langle+| \text{ e } S_y = -\frac{i\hbar}{2}|+\rangle\langle-| + \frac{i\hbar}{2}|-\rangle\langle+|.$$

4) Um oscilador harmônico simples (em uma dimensão) é sujeito à uma perturbação

$$\lambda H_1 = \lambda x,$$

onde λ é uma constante real. (a) Calcule o autoestado perturbado $|n\rangle$, até segunda ordem em λ, sabendo que a hamiltoniana do sistema é $H = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$, $N = a^\dagger a$, $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right)$ e que

$$\begin{aligned} |n\rangle &= |n^{(0)}\rangle + \lambda \sum_{k\neq n} |k^{(0)}\rangle \frac{V_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} - \lambda^2 \sum_{k\neq n} |k^{(0)}\rangle \frac{V_{nn}V_{kn}}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})^2} \\ &\quad + \lambda^2 \sum_{k\neq n}\sum_{l\neq n} |k^{(0)}\rangle \frac{V_{kl}V_{ln}}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})(E_n^{(0)} - E_l^{(0)})} + \cdots, \end{aligned}$$

onde $V_{nk} = \langle n^{(0)}|V|k^{(0)}\rangle$. (b) Considerando que a normalização de $|n\rangle$ seja dada por $|n\rangle_N = Z_n^{1/2}|n\rangle$, onde

$$Z_n = 1 - \lambda^2 \sum_{k\neq n} \frac{|V_{kn}|^2}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})^2} + \cdots,$$

calcule Z_n e mostre que ${}_N\langle n|n\rangle_N = 1$, também até segunda ordem em λ.