Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física
Exame de Qualificação - Mecânica Quântica (01/09/17)

1) Considere o problema unidimensional de uma partícula de massa m submetida a um potencial dado por

$$\begin{aligned} V(x) &= \infty, \quad x < 0, \\ &= -V_0, \quad 0 \leq x \leq a, \\ &= 0, \quad x > a. \end{aligned}$$

Para o caso $-V_0 < E < 0$, obtenha a correspondente equação de autoenergia transcendental.

2) Dadas as equações de autovalor $J_z|1\rangle = \hbar|1\rangle$, $J_z|0\rangle = 0$ e $J_z|{-1}\rangle = -\hbar|{-1}\rangle$, suponha que o momento angular de uma partícula esteja no estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle.$$

(a) Obtenha a evolução temporal desde estado, $|\psi(t)\rangle = U(t,0)|\psi\rangle$, a partir da hamiltoniana $H = \omega_0 J_z$.

(b) Supondo que os autovalores de J_y são os mesmos de J_z, calcule as probabilidades de obtermos esses autovalores, i.e., calcule $|_y\langle \pm 1, 0|\psi(t)\rangle|^2$, quando J_y é medido.

(c) Obtenha agora o valor esperado de J_y nos cenários de Schrödinger, $\langle\psi(t)|J_y|\psi(t)\rangle$, e de Heisenberg, $\langle\psi|J_y(t)|\psi\rangle$.

Dados: $J_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}(|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle{-1}| + |{-1}\rangle\langle 0|)$,
$J_y = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}}(-|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle{-1}| + |{-1}\rangle\langle 0|)$.

3) Considere que, para um dado sistema, temos os autovalores de energia $E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}(2n+1)^2$, com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, e as autofunções de energia $u_n(x) = A\, e^{(2n+1)i\pi x/a}$, tal que $u_n(x+a) = -u_n(x)$. Calcule o elemento matricial $\langle n|V|k\rangle$, para n e $k = 1, 0, -1$, levando em conta que $V = \cos\left(\frac{2\pi X}{a}\right)$, onde X é o operador coordenada.

Sugestão: use a completeza $1 = \int_0^a dx|x\rangle\langle x|$, a equação de autovalor $X|x\rangle = x|x\rangle$ e o fato de que $u_n(x) = \langle x|n\rangle$.

4) Considere um sistema de três níveis, dado pelo hamiltoniana $H = H_0 + \lambda V$, onde

$$H_0 = E_1^{(0)}|1^{(0)}\rangle\langle 1^{(0)}| + E_0^{(0)}|0^{(0)}\rangle\langle 0^{(0)}| + E_0^{(0)}|-1^{(0)}\rangle\langle -1^{(0)}|$$

e

$$V = \frac{1}{2}|1^{(0)}\rangle\langle 0^{(0)}| + \frac{1}{2}|0^{(0)}\rangle\langle 1^{(0)}| + \frac{1}{2}|0^{(0)}\rangle\langle -1^{(0)}| + \frac{1}{2}|-1^{(0)}\rangle\langle 0^{(0)}|.$$

Calcule as energias E_1, E_0 e E_{-1}, até segunda ordem em λ, sabendo que

$$\begin{aligned}\Delta_n &= E_n - E_n^{(0)} \\ &= \lambda V_{nn} + \lambda^2 \sum_{k \neq n} \frac{|V_{nk}|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} + \cdots,\end{aligned}$$

onde $V_{nk} = \langle n^{(0)}|V|k^{(0)}\rangle$.

Sugestão: caso o espectro seja degenerado, use a equação secular $\det(\lambda P_0 V P_0 - \Delta^{(1)}) = 0$, a fim de obter o deslocamento de energia de primeira ordem em λ. Em segunda, após calcular os seus autoestados, rescreva H nesta nova base, através da equação de similaridade $H' = U^\dagger H U$. Finalmente, faça a reconsideração $H' = \tilde{H}_0 + \lambda \tilde{V}$, onde agora $\tilde{H}_0$ não possui mais degenerescência.

Dados: $P_0 = \sum_{m \in D} |m^{(0)}\rangle\langle m^{(0)}|$.