Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física
Exame de Qualificação - Mecânica Quântica (02/03/18)

1) Uma partícula de massa m, confinada na região $-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$, é sujeita a um potencial poço infinito. A partícula também experimenta um potencial função delta, localizado no centro do poço. A equação de Schrödinger que descreve esse sistema, dentro do poço, é dada por

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \lambda\delta(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}.$$

Encontre a equação transcendental para os autovalores de energia E.

Sugestão: Para calcular o comportamento de $\psi(x)$ em $x = 0$, integre a equação de Schrödinger no intervalo $(-\epsilon, +\epsilon)$ e considere o limite $\epsilon \to 0$.

2) (a) Mostre que os autovalores de um operador hermitiano, $B = B^\dagger$, são sempre reais e (b) que seus autoestados são sempre ortogonais.

(c) Note que, classicamente, podemos escrever a hamiltoniana do oscilador harmônico como

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 = \hbar\omega\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right)\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right),$$

tal que, ao definirmos $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right)$, temos $H = \hbar\omega \; a^\star a$. Leve em conta agora que x e p são operadores (e por conseguinte, a e $a^\dagger$), e em seguida rescreva H em termos de a e $a^\dagger$, tal que $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$.

(d) Obtenha finalmente os autovalores de energia de H.

3) Suponha que o spin de uma partícula esteja no estado

$$|\psi\rangle = -\sin\frac{\theta}{2}|+\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|-\rangle.$$

(a) Calcule as probabilidades de obtermos os autovalores $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$, quando realizamos a medida de S_y, assim como o seu valor esperado $\langle\psi|S_y|\psi\rangle$.

(b) Obtenha a evolução temporal, $|\psi(t)\rangle = U(t,0)|\psi\rangle$, a partir da hamiltoniana $H = \omega_0 S_z$, onde $\omega_0 = \frac{|e|B_z}{m_e c}$, como também calcule a evolução temporal do valor esperado $\langle\psi(t)|S_y|\psi(t)\rangle$.

(c) Encontre o operador unitário S, tal que $S|\pm\rangle = |\pm\rangle_y$, e rescreva o estado $|\psi\rangle$ em função dessa base nova $\{|\pm\rangle_y\}$.

Agora, (d) encontre as probabilidades $|{}_y\langle\pm|\psi\rangle|^2$ e o valor esperado $\langle\psi|S_y|\psi\rangle$, com $|\psi\rangle$ e S_y escritos em função de $\{|\pm\rangle_y\}$.

Dados:

$|S_x\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$, $|S_y\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle$,
$S_x = \frac{\hbar}{2}|+\rangle\langle-| + \frac{\hbar}{2}|-\rangle\langle+|$ e $S_y = -\frac{i\hbar}{2}|+\rangle\langle-| + \frac{i\hbar}{2}|-\rangle\langle+|$,
$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$,
$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin B \sin A$

4) Um oscilador harmônico simples (em uma dimensão) é sujeito à uma perturbação

$$\lambda H_1 = \lambda x^3,$$

onde b é uma constante real. Calcule Δ_n até ordem de λ^2, sabendo que a hamiltoniana do sistema é $H = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$, $N = a^\dagger a$, $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right)$ e que

$$\begin{aligned}\Delta_n &= E_n - E_n^{(0)} \\ &= \lambda V_{nn} + \lambda^2 \sum_{k\neq n} \frac{|V_{nk}|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} + \cdots,\end{aligned}$$

onde $V_{nk} = \langle n^{(0)}|V|k^{(0)}\rangle$.