Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física
Exame de Qualificação - Mecânica Quântica (14/09/18)

1) Considere uma partícula sujeita a um potencial, dado por

$$\begin{aligned} V(x) &= 0, \;\; 0 \le x \le a \\ &= \infty, \;\; x < 0 \text{ e } x > a \end{aligned}$$

(a) Obtenha os autovalores de energia e (b) as autofunções de energia normalizadas.

2) Considere a hamiltoniana de um sistema de dois níveis, dada por

$$H = E_0 I + WA + WA^\dagger,$$

onde E_0 e W são constante, $I = \sum_{n=1}^{2} |n\rangle\langle n|$ e $A = \sum_{n=1}^{2} |n\rangle\langle n+1|$.

Assumindo condições de contorno periódicas, $|3\rangle = |1\rangle$, (a) encontre as representações matriciais de I, A, $A^\dagger$ e H. (b) A é um operador hermitiano? (c) A e H possuem os mesmos autoestados?

(d) Calcule os autovalores (E_1, E_2) e os autoestados $(|E_1\rangle, |E_2\rangle)$ de H.

3) Suponha que o spin de uma partícula esteja no estado

$$|\psi\rangle = -\sin\frac{\theta}{2}|+\rangle + \cos\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|-\rangle.$$

(a) Calcule as probabilidades de obtermos os autovalores $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$, quando realizamos a medida de S_y, assim como o seu valor esperado $\langle\psi|S_y|\psi\rangle$.

(b) Obtenha a evolução temporal, $|\psi(t)\rangle = U(t,0)|\psi\rangle$, a partir da hamiltoniana $H = \omega_0 S_z$, onde $\omega_0 = \frac{|e|B_z}{m_e c}$, assim como a evolução temporal do valor esperado é $\langle\psi(t)|S_y|\psi(t)\rangle$.

(c) Encontre o operador unitário S, tal que $S|\pm\rangle = |S_y\pm\rangle$, e rescreva o estado $|\psi\rangle$ em função dessa base nova $\{|S_y\pm\rangle\}$.

Agora, (d) encontre as probabilidades $|\langle\pm S_y|\psi\rangle|^2$ e o valor esperado $\langle\psi|S_y|\psi\rangle$, com $|\psi\rangle$ e S_y escritos em função de $\{|S_y\pm\rangle\}$.

Dados:

$|S_x\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$, $|S_y\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle$,
$S_x = \frac{\hbar}{2}|+\rangle\langle-| + \frac{\hbar}{2}|-\rangle\langle+|$ e $S_y = -\frac{i\hbar}{2}|+\rangle\langle-| + \frac{i\hbar}{2}|-\rangle\langle+|$,
$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$,
$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin B \sin A$

4) Um oscilador harmônico simples adimensional, $H = \left(N + \frac{1}{2}\right)$, $N = a^\dagger a$, $a = \sqrt{\frac{1}{2}}\,(x + ip)$, é sujeito à uma perturbação

$$\lambda V = bx,$$

onde b é uma constante real. (a) Calcule o autoestado perturbado $|n\rangle$, até segunda ordem em λ,

$$\begin{aligned} |n\rangle &= |n^{(0)}\rangle + \lambda \sum_{k\neq n} |k^{(0)}\rangle \frac{V_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} - \lambda^2 \sum_{k\neq n} |k^{(0)}\rangle \frac{V_{nn}V_{kn}}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})^2} \\ &\quad + \lambda^2 \sum_{k\neq n}\sum_{l\neq n} |k^{(0)}\rangle \frac{V_{kl}V_{ln}}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})(E_n^{(0)} - E_l^{(0)})} + \cdots, \end{aligned}$$

onde $V_{nk} = \langle n^{(0)}|V|k^{(0)}\rangle$. (b) Considerando que a normalização de $|n\rangle$ seja dada por $|n\rangle_N = Z_n^{1/2}|n\rangle$, onde

$$Z_n = 1 - \lambda^2 \sum_{k\neq n} \frac{|V_{kn}|^2}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})^2} + \cdots,$$

calcule Z_n e mostre que ${}_N\langle n|n\rangle_N = 1$, também até segunda ordem em λ.