Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física
Exame de Qualificação - Mecânica Quântica (14/02/20)

1) Considere uma partícula de massa m confinada em uma região tridimensional, sujeita ao potencial

$$\begin{aligned} V(x,y,z) &= \infty,\ x<0,\ y<0 \text{ e } z<0, \\ &= 0,\ 0<x<a,\ 0<y<b \text{ e } 0<z<c, \\ &= \infty,\ x>0,\ y>0 \text{ e } z>0. \end{aligned}$$

Dada a equação de Schrödinger

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+V(x,y,z)\right]\psi(x,y,z)=E\psi(x,y,z),$$

(a) calcule as autofunções $\psi_{n_1n_2n_3}(x)$ e (b) os autovalores de energia $E_{n_1n_2n_3}$.

2) Um sistema físico é caracterizado pelo operador

$$A = 2|u_1\rangle\langle u_1| - i|u_1\rangle\langle u_2| + i|u_2\rangle\langle u_1| + 2|u_2\rangle\langle u_2|.$$

(a) A é um operador hermitiano? (b) Encontre a representação matricial de A. (c) Encontre os autovalores (λ_1 e λ_2) e os autovetores ($|t_1\rangle$ e $|t_2\rangle$) de A. (d) Calcule $(AB)^\dagger$ e (e) mostre que os autovalores de um operador hermitiano são sempre reais e seus autoestados são sempre ortogonais.

3) Suponha que o spin de uma partícula esteja no estado

$$|\psi\rangle = -\sin\frac{\theta}{2}|+\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|-\rangle.$$

(a) Obtenha a evolução temporal, $|\psi(t)\rangle = U(t,0)|\psi\rangle$, a partir da hamiltoniana $H=\omega_0 S_z$, onde $\omega_0 = \frac{|e|B_z}{m_e c}$.

(b) Calcule as probabilidades de obtermos os autovalores $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$, quando realizamos a medida de S_y, assim como o seu valor esperado $\langle\psi(t)|S_y|\psi(t)\rangle$.

(c) Obtenha este mesmo valor esperado no cenário de Heisenberg, $\langle\psi|S_y(t)|\psi\rangle$, usando $\frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A(t),H]$, $[S_i,S_j]=i\hbar\epsilon_{ijk}S_k$, $S_x(0)=S_x$, $S_y(0)=S_y$, assim como

$$S_x = \frac{\hbar}{2}|+\rangle\langle -| + \frac{\hbar}{2}|-\rangle\langle +| \ \text{ e } \ S_y = -\frac{i\hbar}{2}|+\rangle\langle -| + \frac{i\hbar}{2}|-\rangle\langle +|.$$

4) Um oscilador harmônico simples adimensional, $H = \left(N + \frac{1}{2}\right)$, $N = a^\dagger a$, $a = \sqrt{\frac{1}{2}}\,(x + ip)$, é sujeito à uma perturbação

$$\lambda V = \lambda x^3,$$

onde λ é uma constante real. Calcule Δ_n até ordem de λ^2, sabendo que

$$\begin{aligned}\Delta_n &= E_n - E_n^{(0)} \\ &= \lambda V_{nn} + \lambda^2 \sum_{k \neq n} \frac{|V_{nk}|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} + \cdots,\end{aligned}$$

onde $V_{nk} = \langle n^{(0)} | V | k^{(0)} \rangle$.