UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA
EXAME DE QUALIFICAÇÃO PARA O DOUTORADO - 2006

<u>PROVA DE MECÂNICA QUÂNTICA</u>

1- Considere uma partícula de massa m e carga elétrica e que se move em uma dimensão. Supondo que a partícula está confinada a uma região de comprimento a, a expressão geral para a função de onda desta partícula é dada por:

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x) \exp(-iE_n t/\hbar),$$

onde c_n são coeficientes complexos, $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$, $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ e n é um inteiro. Em um dado instante de tempo, onde a partícula encontra-se em um auto-estado de energia E_k, um campo elétrico uniforme é ligado. Determine a probabilidade de encontrar a partícula em um auto-estado de energia E_l, com $l \neq k$, após um instante de tempo t. Expresse sua resposta até primeira ordem em e^2.

2- O Hamiltoniano do problema do oscilador harmônico unidimensional é dado por $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$, onde m é a massa da partícula e ω é a freqüência angular do oscilador. As autofunções, soluções da equação de Schroedinger, são dadas por

$$\psi_n(\xi) = N_n H_n(\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right), \text{ com } \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$$

e as autoenergias são dadas por $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$. $H_n(\xi)$ são polinômios de Hermite que satisfazem as relações de recorrência $\xi H_n(\xi) = nH_{n-1}(\xi) + (1/2)H_{n+1}(\xi)$ e $(d/d\xi)H_n(\xi) = 2nH_{n-1}(\xi)$. A constante de normalização N_n é dada por $N_0 = \pi^{1/4}$ e $N_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} N_n$.

A) Mostre que os elementos de matriz do operador posição podem ser escritos como

$$\langle m|x|n\rangle = \sqrt{\frac{n\hbar}{2m\omega}}\delta_{m,n-1} + \sqrt{\frac{(n+1)\hbar}{2m\omega}}\delta_{m,n+1},$$

onde $|n\rangle$ corresponde ao autoestado de energia associado à autofunção $\psi_n(\xi)$.

B) Alternativamente, podemos descrever o problema do oscilador harmônico usando os operadores adimensionais a e a^+, definidos por

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{i}{m\omega}p\right) \text{ e } a^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{i}{m\omega}p\right).$$

Nesta descrição, o Hamiltoniano pode ser escrito como $H = \hbar\omega(a^+a + 1/2)$. Calcule a ação dos operadores a e a^+ no autoestado de energia $|n\rangle$.

C) Deduza uma expressão para os operadores a e a^+ em termos de ξ e $(d/d\xi)$.

3- Uma partícula de carga $-e$ e massa m sofre a influência de dois núcleos localizados nas posições $z = a$ e $z = -a$, com carga Ze. Suponha que a partícula é sem spin e não relativística.

A) Escreva o Hamiltoniano e a equação de Schroedinger em coordenadas esféricas para a função de onda $\Psi(r, \theta, \phi)$ do sistema.

B) Defina o operador momento angular ao longo da direção z e mostre que seus autovalores são bons números quânticos para descrever os auto-estados de energia do sistema. Quais são os possíveis autovalores do operador momento angular na direção z?

C) Defina o operador momento angular total e mostre que os autovalores de L^2 não são bons números quânticos para os auto-estados de energia.

4- Considere um sistema de dois spins distintos, onde qualquer estado do sistema pode ser descrito como uma combinação linear dos quatro estados ortonormais $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\downarrow\rangle$, onde as setas se referem as direções do spin na direção z. Suponha que o Hamiltoniano do sistema é dado por $H = \lambda P_{12}$, onde P_{12} é o operador que troca o primeiro spin com o segundo spin e $\lambda > 0$.

A) Encontre os autoestados normalizados e os autovalores do Hamiltoniano.

B) Suponha que em $t = 0$ o sistema encontra-se no estado $|\uparrow\downarrow\rangle$. Determine a probabilidade da medida da componente z do primeiro spin ser $+\hbar/2$, em função do tempo t e λ.

C) Suponha novamente, que em $t = 0$ o sistema encontra-se no estado $|\uparrow\downarrow\rangle$. Determine a probabilidade da medida da componente x do primeiro spin ser $+\hbar/2$, em função do tempo t e λ.

D) Agora suponha que os spins são férmions idênticos. Quais são os autoestados de energia?