2007.1

EXAME DE QUALIFICAÇÃO 2007.01 (12/02/2007)
PROVA DE MECÂNICA QUÂNTICA

Cada questão vale 2.5 pontos. Duração da prova: 5 horas.

Nome:

1. Considere um sistema físico cujo espaço tridimensional de estados pode ser representado por um conjunto de kets $|u_1>$, $|u_2>$, $|u_3>$. Utilizando a base destes três vetores nesta ordem, os operadores H e B podem ser escritos como:

$$H = h\omega\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = b\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Os operadores H e B são hermitianos? Justifique.
b) Calcule o comutador dos dois operadores.
c) Encontre os autovalores e autovetores e diagonalize o operador B
d) Encontre uma base comum para B e H

2. Um Hamiltoniano independente do tempo H representando um determinado sistema quântico possui autovetores $|n\rangle$ com autovalores não degenerados $h\omega_n$, ou seja:

$$H|n\rangle = h\omega_n|n\rangle$$

Considere um observável A, que satisfaz o seguinte problema de autovalores não degenerado definido no mesmo espaço de Hilbert:

$$A|m\rangle = a_m|m\rangle$$

O sistema está inicialmente em um determinado autoestado $|k\rangle$ do Hamiltoniano.

a) Qual é o valor médio do observável A?

b) Qual a probabilidade da medida do observável A produzir um particular autovalor a_i?

c) Se a medida produziu o autovalor a_i, qual é a probabilidade de que uma segunda medida do observável A, realizada em um tempo t após a primeira medida, produza o mesmo autovalor a_i?

d) Em um instante t_0 é ligado um potencial constante V_0. Determine os novos autoestados e autovalores, em função dos autoestados e autovalores originais, para um instante t em que todos os efeitos transitórios tenham decaído.

3. Escreva explicitamente as matrizes (apenas uma para cada operador) que representam os operadores de momento angular L^2, L_Z, $L_\pm$, L_X, L_Y utilizando os auto-estados (todos!) simultâneos de L^2, L_Z para um sistema com momento angular orbital igual a $\sqrt{2}h$

4. O operador evolução de um oscilador harmônico unidimensional pode ser escrito como $U(t,0) = e^{-iHt/\hbar}$ com $H = \hbar\omega\left(a^{+}a + \frac{1}{2}\right)$

a) Considere os operadores:

$\tilde{a}(t) = U^{+}(t,0)\,a\,U(t,0)$

$\tilde{a}^{+}(t) = U^{+}(t,0)\,a^{+}\,U(t,0)$

Através do cálculo de sua ação nos autokets $|\varphi_n\rangle$ do Hamiltoniano, encontre a expressão para $\tilde{a}(t)$ e $\tilde{a}^{+}(t)$ em termos de a e a^{+};

b) Mostre que $U^{+}\left(\pi/2\omega, 0\right)|x\rangle$ é um autoket do operador momento linear P e encontre o seu autovalor;

Formulário

1) Para um momento angular genérico J, as seguintes relações são válidas:

$$J_z|k,j,m\rangle = m\hbar|k,j,m\rangle$$
$$J_{\pm}|k,j,m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,|k,j,m\pm 1\rangle$$

2) Para um oscilador harmônico valem as seguintes relações:

$$a^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$
$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$