2008.2

5.5

Exame de Qualificação - Agosto 2008 - IF/UFAL
Mecânica Quàntica

Questão 1

A função de onda para uma partícula, restrita a mover-se ao longo do eixo x, satisfaz a equação de Schroedinger dependente do tempo, escrita como:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Phi(x,t)$$

onde $V(x)$ é a energia potencial.

a) De acordo com a interpretação probabilística da função de onda, $|\Psi(x,t)|^2dx$ representa a probabilidade de encontrar a partícula entre x e $x + dx$ no instante t. Mostre que, se $P(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,0)|^2dx = 1$, então $P(t) = 1$ para todo t quando $V(x)$ é real(conservação da probabilidade $dP(t)/dt = 0$). Sugestão: escreva uma equação para a evolução temporal de $|\Psi(x,t)|^2$ a partir da equação de Schroedinger e integra-a em todo o eixo x. (1,0 ponto)

b) Em situações envolvendo partículas instáveis que se desintegram espontaneamente, a probabilidade $P(t)$ deve decair com o tempo. Este fenômeno pode ser descrito incorporando ao potencial uma parte imaginária $V(x) = V_0(x) - i\Gamma$, onde V_0 é o potencial real e Γ uma constante também real. Mostre que, para esse potencial, $P(t)$ decresce exponencialmente e determine o tempo de vida médio da partícula em função de Γ. (1,5 ponto)

Questão 2

Considere uma partícula de spin $S = 1/2$. Sejam $|+\rangle$ e $|-\rangle$ os autovetores de S_z com autovalores $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$, respectivamente. Os operadores associados às componenes x e y do spin da partícula são tais que $S_x|+\rangle = (\hbar/2)|-\rangle$; $S_x|-\rangle = (\hbar/2)|+\rangle$; $S_y|+\rangle = (i\hbar/2)|-\rangle$; $S_y|-\rangle = (-i\hbar/2)|+\rangle$.

a) Para uma partícula que encontra-se no estado $|\Psi\rangle = (3/5)i|+\rangle + (4/5)|-\rangle$, determine o valor esperado de S_x, S_y e S_z. (1,0 ponto)

b) Esta partícula encontra-se na presença de um campo magnético uniforme B que aponta na direção z. O Hamiltoniano, neste caso, é escrito como $H = -\gamma BS_z$, onde γ é o fator giromagnético. Considerando que o estado anterior $|\Psi\rangle$ tenha sido preparado no instante $t = 0$, determine os valores médios de S_x, S_y e S_z em função do tempo. (0,5 ponto)

c) Suponha agora que esta partícula está na presença de um campo magnético oscilante $B = B_0cos(\omega t)$ que atua na direção z. Neste caso, o Hamiltoniano depende explicitamente do tempo, sendo dado por $H = -\gamma B_0\cos(\omega t)S_z$. Considerando que em $t = 0$ a partícula encontra-se no estado $|+ : x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$, determine a probabilidade de uma medida de

S_x fornecer o valor $-\hbar/2$ num instante t qualquer (lembre que $|- : x\rangle = (1/\sqrt{2}(|+\rangle - |-\rangle)$. (Sugestão: no caso de Hamiltoniano dependente do tempo, é necessário resolver a equação de Schroedinger dependente do tempo. Escreva o estado do sistema como $|\Psi(t)\rangle = C_+(t)|+\rangle + C_-(t)|-\rangle$, com $C_+(0) = C_-(0) = 1/\sqrt{2}$ e resolva as equações correspondentes para estes coeficientes para encontrar o estado do sistema num instante t qualquer.) (1,0 ponto)

Questão 3

Seja um oscilador harmônico unidimensional cujo Hamiltoniano é descrito por $H = p^2/2m + (m\omega^2/2)x^2$. Considere os operadores não Hermitianos $a = \sqrt{m\omega/2\hbar}(x + ip/m\omega)$ e $a^\dagger = \sqrt{m\omega/2\hbar}(x - ip/m\omega)$.

a) Mostre que o comutador $[a, a^\dagger] = 1$ (0,25 ponto)

b) Mostre que o Hamiltoniano pode ser escrito como $H = \hbar\omega(N + 1/2)$, com $N = a^\dagger a$. (0,25 ponto)

c) Determine os comutadores $[N, a]$ e $[N, a^\dagger]$. Mostre que, sendo $N|n\rangle = n|n\rangle$, então $a|n\rangle = \sqrt{(n)}|n-1\rangle$ e $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$, onde $n = 0, 1, 2, ...$ (1,0 ponto)

d) Considere que no instante $t = 0$ o oscilador encontra-se no estado $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Determine o valor esperado $\langle x\rangle(t)$. (1,0 ponto)

Questão 4

Considere um poço quadrado infinito onde $V(x) = 0$ para $0 < x < a$ e $V(x) = +\infty$ fora deste intervalo.

a) Mostre que os possíveis valores para a energia de uma partícula neste poço são dados por $E_n = \hbar^2\pi^2 n^2/2ma^2$, com as correspondentes autofunções do Hamiltoniano sendo dadas por $\Phi_n(x) = \sqrt{2/a}\sin(n\pi x/a)$ com $n = 1, 2, 3, ...$ (1,0 ponto)

Considere agora que dois bosons são colocados neste poço quadrado e que eles interagem fracamente entre si através do potencial $V(x_1, x_2) = -aV_0\delta(x_1 - x_2)$, onde $\delta(x)$ refere-se a função delta de Dirac.

b) Ignorando a interação entre essas partículas, encontre a energia e função de onda do estado fundamental e do primeiro estado excitado para esse sistema de duas partículas indistinguíveis. (0,5 ponto)

c) Use teoria de perturbação em primeira ordem para determinar a correção na energia do estado fundamental e do primeiro estado excitado causado pela interação entre estas partículas. (1,0 ponto)