2010.2

Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Instituto de Física – IF
Programa de Pós-Graduação em Física da Matéria Condensada
Exame de Qualificação 2010/2: Mecânica Quântica
Professor Ítalo de Oliveira   Nota -
Aluno:

1 - Considere uma partícula de massa m mantida sob um potencial dado por:

$$V = \begin{cases} V_0\ , & -a/2 < x < a/2 \\ \infty\ , & em\ todas\ as\ outras\ regiões\ do\ espaço. \end{cases}$$

a) Encontre os estados estacionários $\varphi_n(x)$ e os autovalores da energia E_n.do sistema.

b) Supondo que a partícula está no estado estacionário $\varphi_p(x)$, calcule $\langle x\rangle$, $\langle x^2\rangle$ e Δx.

2 - Considere um elétron de uma molécula triatômica linear, formada por átomos iguais e eqüidistantes. Os estados do sistema são definidos pela base ortonormal $\{|\phi_A\rangle, |\phi_B\rangle, |\phi_C\rangle\}$, que correspondem às funções de onda do elétron localizado em um dos núcleos. Se a possibilidade do elétron saltar de um núcleo para o outro for desprezada, a base $\{|\phi_A\rangle, |\phi_B\rangle, |\phi_C\rangle\}$ é constituída pelos autoestados do Hamiltoniano H_o, com o mesmo autovalor E_o (estados degenerados). Agora, vamos considerar existe uma possibilidade de salto do elétron entre os núcleos, representada por um termo de interação adicional W, onde

$$W|\phi_A\rangle = -a|\phi_B\rangle$$
$$W|\phi_B\rangle = -a|\phi_A\rangle - a|\phi_C\rangle$$
$$W|\phi_C\rangle = -a|\phi_B\rangle$$

a) Encontre os autovalores e autovetores do Hamiltoniano $H = H_o + W$.
b) Se o estado inicial do sistema ($t = 0$) é $|\Psi(t=0)\rangle = |\phi_A\rangle$, determine $|\Psi(t)\rangle$, ou seja, a evolução temporal do sistema.

3 - Em um sistema de momento angular $l = 1$, os autovetores de L_z são $|+1\rangle$, $|0\rangle$ e $|-1\rangle$, com

$$L_z|+1\rangle = \hbar/\sqrt{2}|+1\rangle \quad L_z|0\rangle = 0 \qquad L_z|-1\rangle = -\hbar/\sqrt{2}|-1\rangle$$

O Hamiltoniano do sistema é dado por $H = \frac{\omega_0}{\hbar}\left(L_x^2 - L_y^2\right)$, onde ω_0 é uma constante.

a) Encontre a matriz de representação de H na base $\{|+1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$.
b) Determine os autovalores e autovetores de H.

ok

c) Considere os operadores $W_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}(L_+ + L_-)$ e $W_2 = \frac{b}{\sqrt{2}}(L_+ - L_-)$. É possível realizar uma medida simultânea em algum desses operadores e H? Justifique sua resposta.

4) Considere o Hamiltoniano de um oscilador harmônico unidimensional, dado por

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2 .$$

a) Usando $\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X$, $\hat{P} = \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}} P$, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P})$ e $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P})$, mostre que

$$H = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right) \text{, onde } N = a^\dagger a .$$

b) Considere agora uma perturbação $W = \sigma\hbar\omega\hat{X}^3$. Calcule a correção na energia do estado fundamental até ordem quadrática em σ .

Formulário

$$[X, P] = i\hbar$$

$$L_\pm |\ell, m\rangle = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - \underbrace{m(m \pm 1)}}\,|\ell, m \pm 1\rangle$$

$\hbar\sqrt{2 - 2}$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$$|m\rangle = |m_0\rangle + \lambda \sum_{r \neq m} |r_0\rangle \frac{\langle r_0|W|m_0\rangle}{E_m^{(0)} - E_r^{(0)}} +$$

$$+\lambda^2 \left(\sum_{r \neq m} \sum_{s \neq m} |r^0\rangle \frac{\langle r_0|W|m_0\rangle\langle s_0|W|m_0\rangle}{(E_m^{(0)} - E_r^{(0)})(E_m^{(0)} - E_s^{(0)})} - \sum_{r \neq s} |r^0\rangle \frac{\langle r_0|W|m_0\rangle\langle m_0|W|m_0\rangle}{(E_m^{(0)} - E_r^{(0)})^2} \right)$$

$$E_m = E_m^0 + \lambda\langle m_0|W|m_0\rangle + \lambda^2 \sum_{r \neq m} \frac{|\langle r_0|W|m_0\rangle|^2}{E_m^{(0)} - E_r^{(0)}}$$