

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Cristais Fotônicos  
e Luz Lenta

CÍCERO JULIÃO DA SILVA JUNIOR

Cícero Julião da Silva Junior

# Cristais Fotônicos e Luz Lenta

Dissertação de mestrado  
apresentado no Instituto de  
Física da Universidade Federal de  
Alagoas como parte dos requisitos  
para a obtenção do título de  
Mestre em Física.

Orientador: Dr. Prof. Jandir Miguel Hickmann

Maceió - Alagoas - Brasil

Fevereiro - 2011

*Instituto de Física - UFAL*

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

**Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale**

S586c Silva Júnior, Cícero Julião da.  
Cristais fotônicos e luz lenta / Cícero Julião da Silva Júnior. – 2011.  
65 f. : il., grafs.

Orientador: Jandir Miguel Hickmann.  
Dissertação (mestrado em Física da Matéria Condensada) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2011.

Bibliografia: f. 59-65.

1. Óptica. 2. Cristal fotônico. 3. Velocidade de grupo. 4. Luz lenta. I. Título.

CDU: 535.22

---

## DEDICATÓRIA

A minha filha, Ana Júlia Ribeiro Gomes Julião, que mesmo sem falar uma palavra cativou todo o meu coração e abriu uma nova vida para mim, cheia de sentimentos e emoções antes nem sequer sonhados.

---

## AGRADECIMENTOS

Sou imensamente grato ao Professor Jandir Hickmann por inúmeros motivos, mas principalmente por acreditar em meu sucesso em um novo caminho. Diante de um recomeço, eu dediquei meu tempo e minhas energias para compreender o maravilhoso campo da óptica. E daí em diante, contei com o apoio do Professor Jandir Hickmann. Sua incrível e profunda visão sobre os caminhos da ciência aumentaram ainda mais minha determinação em compreender as belas sutilezas da natureza.

Agradeço também a outros professores que contribuíram em minha vida acadêmica. Os professores Márcio André e Eduardo Fonseca pelo constante apoio em nosso grupo de pesquisa. Ao professor Eduardo Perdigão, pelas inesquecíveis (e intermináveis) aulas de EDO. À professora Solange Cavalcanti pela sempre inspiradora postura. Ao professor Kleber Serra pelas inúmeras oportunidades de crescimento para mim e para tantos outros que cruzaram seu caminho.

Agradeço a todos os colegas de curso e de trabalho que contribuíram das mais diversas formas. Entre eles estão Gentil Luiz II, Paulo Brandão, Uéslen Rocha, Hemerson Pablo, Ana Paula, Pedro Heades, João Victor e Samuel Albuquerque.

Agradeço a meus pais, Edileusa Gomes e Cícero Julião, pelo imenso apoio, atenção e toda a dedicação durante toda minha vida; também a meus irmãos, Célio, Célia, Cerise e Juliana, que sempre estiveram ao meu lado.

Agradeço a minha esposa, Viviane Ribeiro, pelo apoio, compreensão, carinho e paciência que sempre teve comigo.

Agradeço acima de tudo a Deus e a toda a sua criação. Em sua ausência, não haveria nada... muito menos natureza, ciência ou Física.

---

## RESUMO

Neste trabalho, desenvolvemos uma análise característica de cristais fotônicos e de como utilizá-los para produzir luz lenta. Mostramos como as equações de Maxwell, em conjunto com Teorema de Bloch e a Lei de Bragg levam aos fenômenos peculiares nesses cristais. Para cristais fotônicos unidimensionais, vimos como construir um diagrama de bandas fotônicas. Tal diagrama é uma importante ferramenta para projetar e construir cristais com utilidade prática. Na sequência expandimos a análise, para incluir cristais bi e tridimensionais. Por fim, estudamos o fenômeno de luz lenta em cristais fotônicos e em guias de onda em cristais fotônicos, e mostramos a simulação de um cristal fotônico com guias de onda e cavidades ressonantes, contendo o fenômeno de luz lenta.

Palavras-Chaves: Óptica.Cristal fotônico.Velocidade de grupo.Luz lenta

---

## ABSTRACT

In this work, an analysis of the characteristics of photonic crystals is carried out. Within the framework of Maxwell's equations in combination with Bloch's theorem and Bragg's resonance condition, one may unveil peculiar phenomena exhibited by these crystals. For one-dimensional photonic crystals, we calculate the photonic band diagram. This diagram is an important tool to design and build crystals of practical value. Then we expand the analysis, generalizing the study to two and three dimensions. Finally, we studied the phenomenon of slow light in photonic crystals and in photonic crystal waveguides, and observe slow light in photonic crystal waveguides via numerical simulations.

Keywords: Optics.Photonic crystal.Group velocity.Slow light

# Conteúdo

Folha de rosto . . . . .	i
Dedicatória . . . . .	ii
Agradecimentos . . . . .	iii
Resumo . . . . .	iv
Abstract . . . . .	v
<b>1 Introdução</b>	<b>6</b>
<b>2 Cristais Fotônicos</b>	<b>9</b>
2.1 Equações de Maxwell . . . . .	9
2.2 Teorema de Bloch . . . . .	14
2.3 Estrutura de Bandas Fotônicas . . . . .	18
<b>3 Cristais Fotônicos Unidimensionais</b>	<b>23</b>
3.1 Lei de Bragg . . . . .	24
3.2 Estrutura de bandas unidimensionais . . . . .	28
<b>4 Cristais Fotônicos Bidimensionais e Tridimensionais</b>	<b>35</b>
4.1 Cristais Fotônicos Bidimensionais . . . . .	35
4.2 Cristais Fotônicos Tridimensionais . . . . .	40
<b>5 Luz Lenta e Cristais Fotônicos</b>	<b>42</b>
5.1 O que é luz lenta? . . . . .	42
5.2 Dispersão temporal versus dispersão espacial . . . . .	43

## CONTEÚDO

---

5.3	Luz lenta em guias de cristal fotônico . . . . .	47
5.4	A natureza do atraso e seus limites . . . . .	48
<b>6</b>	<b>Cavidades Ressonantes em Cristal Fotônico</b>	<b>51</b>
6.1	Cavidade Ressonante em Cristal Fotônico . . . . .	52
<b>7</b>	<b>Conclusão e Perspectivas</b>	<b>62</b>
	<b>Referências Bibliograficas</b>	<b>63</b>

# Lista de Figuras

2.1	Relação de dispersão para uma onda no espaço livre (linha contínua), e para um meio com índice de refração $n$ (linha pontilhada). . . . .	20
2.2	Representação esquemática da estrutura fotônica de bandas . . . . .	22
3.1	Cristal fotônico unidimensional, composto de camadas alternadas de materiais (claro e escuro), com diferentes índices de refração, separadas por uma constante de rede $\mathbf{a}$ . . . . .	24
3.2	Representação esquemática da difração de Bragg. Difração máxima ocorre em $2d \cdot \sin = m\lambda$ , onde $\lambda$ é o comprimento de onda da onda eletromagnética e $m$ é um número inteiro. . . . .	26
3.3	Solução gráfica da equação 3.8: as linhas tracejadas indicam os pontos onde os vetores $\mathbf{G}_i$ da rede recíproca, $i = 1, 2, \dots$ , são reduzidos para a metade. Cada vetor $\mathbf{k}_i$ , $i = 1, 2, \dots$ , (com origem no ponto 0 e paralelos à linha ligando os pontos 0 e 1, ou 0 e 2) com a extremidade da seta na linha tracejada, é uma solução para equação 3.8 . . . . .	28
3.4	Estrutura de bandas fotônicas de cristal fotônico de multicamadas. Cada camada tem largura de $0,5a$ , onde $\mathbf{a}$ é a constante de rede. Aqui, vamos considerar uma onda eletromagnética propagando ao longo da direção $\mathbf{z}$ (ver figura 3.2) [25]. . . . .	30
3.5	Representação esquemática do campo elétrico em cristal fotônico unidimensional de multicamadas (a) com baixa constante dielétrica e (b) com alta constante dielétrica [25] . . . . .	31

## LISTA DE FIGURAS

---

- 3.6 Diagrama mostrando o mecanismo de band gap fotônico em uma dimensão. (a) Uma onda incidente com um comprimento de onda dentro do band gap fotônico entra em uma estrutura periódica com dois diferentes índices de refração são representadas por  $n_1$  e  $n_2$  (b) A onda incidente é parcialmente refletida pelo contorno da estrutura. (c) Se cada onda refletida está em fase, a onda incidente é totalmente refletida e incapaz de penetrar a estrutura [25]. . . . . 33
- 3.7 Esquema de interferência destrutiva. (a) Uma onda incidente em um comprimento de onda fora do band gap fotônico incorpora uma estrutura periódica. (b) A onda incidente é parcialmente refletida pelo contorno da estrutura, mas as ondas refletidas são fora de fase e interferem destrutivamente umas com as outras. (c) A reflexão não acontece, e a onda incidente penetra na estrutura [25]. . . . . 34
- 4.1 (a) redes bidimensionais quadrada e triangular. Os vetores  $\mathbf{a}_1$  e  $\mathbf{a}_2$  são os vetores da rede primitiva. (b) rede retangular bidimensional no espaço recíproco e sua zona de Brillouin correspondente. A região triangular escura é a parte irredutível da zona de Brillouin. Pontos de alta simetria são representados por  $\Gamma$ ,  $M$  e  $X$ . (c) rede triangular bidimensional no espaço recíproco e sua correspondente zona de Brillouin. Os vetores  $\mathbf{b}_1$  e  $\mathbf{b}_2$  são os vetores primitivos da rede recíproca [25]. . . . . 37
- 4.2 Estrutura de bandas para uma rede quadrada de cilindros com índice de refração 3.2 com raio de  $0.2a$  e imersos no ar [25]. . . . . 38
- 4.3 Densidade de energia do campo elétrico para uma rede quadrada com índice de refração 3.2, cilindros com raios de  $0,2a$  (a) no ponto  $X$  para a primeira e segunda bandas TM e (b) no ponto  $X$  para a primeira e a segunda banda TE [25]. . . . . 39

## LISTA DE FIGURAS

---

5.1	Duas possibilidades para o surgimento de luz lenta em guias de cristal fotônico. (a) <i>backscattering</i> e (b) <i>omnidirectional reflection</i> [68]. . . . .	49
5.2	Ilustração da compressão de um pulso e aumento da intensidade após a entrada no regime de luz lenta [68]. . . . .	50
6.1	Cristal fotônico bidimensional, com índices de refração $n_{cilindro} = 3.21$ e $n_{ar} = 1$ . . . . .	52
6.2	Velocidade de grupo na porta B. . . . .	53
6.3	Velocidade de grupo na porta C. . . . .	54
6.4	Velocidade de grupo na porta D. . . . .	55
6.5	Velocidade de grupo na guia de onda inferior. . . . .	56
6.6	Cristal fotônico bidimensional, com duas cavidades e índices de refração $n_{cilindro} = 3.21$ e $n_{ar} = 1$ . . . . .	57
6.7	Velocidade de grupo na porta B. . . . .	58
6.8	Velocidade de grupo na porta C. . . . .	59
6.9	Velocidade de grupo na porta D. . . . .	60
6.10	Velocidade de grupo na guia de onda inferior. . . . .	61

# Capítulo 1

## Introdução

Controlar o “caminho”, ou fluxo da luz é um dos principais desafios da óptica moderna. Com a telecomunicação por meios ópticos e a tecnologia da computação se tornando cada vez mais relevantes, há uma crescente necessidade de dispositivos capazes de controlar e manipular sinais luminosos. Transmitir informações por grandes distâncias com baixíssimas perdas revolucionou a indústria da comunicação, graças à possibilidade de guiar luz por fibras ópticas. Portanto, é bem provável que o controle do fluxo da luz em uma escala microscópica possa abrir uma nova era nos domínios da computação e de chips totalmente ópticos. Meios agora comuns para controlar os sinais de luz são espelhos de Bragg, guias de onda, ressonadores e divisores de feixe. No entanto, considerando a crescente diversidade de modernos dispositivos ópticos, há muitos novos desafios na busca de outras formas de controlar a luz. Um exemplo de funcionalidade muito interessante para a indústria da informação é um modulador controlado em tempo real pela informação contida no pacote de dados sendo transmitido, cujo comportamento se adequa segundo a situação (por exemplo, de opaco para totalmente transparente e vice-versa). É claro que tais tipos de aplicações fundamentalmente implicam a exploração e a busca de novas idéias, projetos e dispositivos fotônicos que nos permitirão controlar o fluxo da luz além das restrições atuais.

Os cristais fotônicos são estruturas periódicas construídas com materiais

---

com diferentes índices de refração, possibilitando a proibição total ou parcial da propagação da luz em certas direções e em certas frequências. Dentro destas estruturas periódicas, a distribuição dos modos eletromagnéticos e suas relações de dispersão diferem radicalmente daquelas dos meios isotrópicos. Cristais fotônicos são, neste contexto, muito atraentes porque permitem a manipulação de propriedades dispersivas e transmissivas com base na chamada estrutura de bandas. Em particular, cristais fotônicos podem possuir band gap fotônico, ou seja, regiões nas quais a propagação de fótons é proibida e a densidade de estados eletromagnéticos é nula. Estas regiões podem ser projetadas para existir em uma, duas ou três dimensões, dependendo se a constante dielétrica é periódica ao longo de uma direção e homogênea nas demais (cristais fotônicos unidimensionais), periódica em um plano e homogênea na terceira direção (cristais fotônicos bidimensionais), ou periódica em todas as três direções (cristais fotônicos tridimensionais).

Apesar de cristais fotônicos unidimensionais serem conhecidos e muito estudados já por décadas sob a forma de espelhos dielétricos multicamadas, a idéia de construir um cristal fotônico bidimensional ou tridimensional não tem mais de duas décadas. Desde o início, cristais fotônicos tridimensionais atraíram enorme atenção devido à previsão de possuírem muitas características incomuns, como band gap fotônico tridimensional, e também devido a possíveis aplicações dessas estruturas [1, 2]. De 1987 até 2005, entre artigos e livros, mais de 10 mil publicações sobre cristais fotônicos e dispositivos baseados em cristais fotônicos já haviam sido publicados [3]. Algumas das estruturas de cristais fotônicos mais conhecidas são a estrutura do Yablonovite [4], filmes multicamadas [5], a estrutura opala e a estrutura opala invertida [6]-[8]. Entre as várias estruturas tridimensionais, as baseadas em opala são as mais estudadas, visto serem sintetizáveis com relativa facilidade por auto-montagem coloidal [9]-[13].

As aplicações atuais para cristais fotônicos podem ser divididas de acordo com suas propriedades. Algumas aplicações dependem exclusivamente da existência (ou inexistência) de um band gap fotônico completo, enquanto outras são baseadas

---

nas propriedades peculiares das bandas fotônicas e sua dispersão. Outro ponto importante sobre cristais fotônicos se encontra na possibilidade de ajuste dinâmico de suas propriedades ópticas. Uma vez que a estrutura de banda fotônica depende principalmente do arranjo (geometria) do cristal e dos índices de refração dos materiais utilizados, há duas abordagens principais para alcançar band gaps fotônicos ajustáveis. A primeira abordagem é baseada na mudança da estrutura cristalina ou da simetria espacial por meio de agentes externos, tais como as forças mecânicas [14]-[16], campos elétricos/magnéticos [17] ou luz [18]. Apesar de grandes alterações em band gaps fotônicos já serem demonstradas com essas técnicas, as mudanças estruturais necessárias, que são da ordem de micrometros, podem limitar a implantação real em dispositivos. A segunda abordagem se baseia no controle dos índices de refração dos materiais. Os cristais líquidos foram amplamente utilizados neste contexto, devido à sua inerente anisotropia e suas diferentes fases que permitem uma variação considerável em suas propriedades ópticas [19]-[24].

O trabalho aqui apresentado está organizado da seguinte forma. Começamos com uma revisão das propriedades básicas dos cristais fotônicos. Após a introdução da equação característica, ou “equação mestra”, que permite calcular os modos ópticos em cristais fotônicos, continuamos com uma revisão do teorema de Bloch, da lei de Bragg, e do conceito de estrutura de bandas sucessivamente em uma, duas e três dimensões. Seguimos com uma análise detalhada das origens físicas da estrutura de bandas. Como próximo passo, revisamos o fenômeno de luz lenta, em que a velocidade de grupo da luz é muito menor que sua velocidade no vácuo. Concluimos com um resumo dos resultados apresentados em uma simulação de cristal fotônico bidimensional contendo duas cavidades. A simulação revelou indícios do surgimento de luz lenta na estrutura.

# Capítulo 2

## Cristais Fotônicos

Para compreendermos a descrição física da interação da luz com estruturas periódicas, veremos conceitos e definições da física do estado sólido e da eletrodinâmica envolvendo tanto a estrutura dos cristais como as equações de Maxwell. As propriedades ópticas dos cristais fotônicos podem ser descritas formalmente pela combinação das equações de Maxwell do eletromagnetismo com o teorema de Bloch da física do estado sólido.

Neste capítulo, analisaremos os princípios básicos e a teoria sobre cristais fotônicos unidimensionais. Depois de expor as bases para uma análise mais profunda neste capítulo, prosseguiremos com as características de cristais fotônicos bidimensionais e tridimensionais no próximo.

### 2.1 Equações de Maxwell

Todos os fenômenos eletromagnéticos macroscópicos, incluindo a propagação da luz em cristais fotônicos, são regidos pelas equações de Maxwell. São as quatro equações abaixo:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{2.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (2.4)$$

Nas equações 2.1 a 2.4,  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  é o campo elétrico,  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  é o campo magnético,  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  é o deslocamento elétrico,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  é a densidade de fluxo magnético,  $\rho(\mathbf{r}, t)$  e  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  são as densidades de carga e de corrente, respectivamente, todos dependentes do tempo e do espaço.

Quando um meio projetado, ou seja, um meio com uma estrutura dielétrica projetada, com suas regiões sendo homogêneas e não contendo cargas elétricas livres, correntes ou fontes de luz em seu interior, pode-se assumir  $\rho(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = 0$ . Além disso, faremos as seguintes aproximações:

- Os campos são “fracos”, de modo que os efeitos não-lineares podem ser ignorados;
- O material é totalmente isotrópico na escala macroscópica, de modo que podemos relacionar  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  e  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  com uma função dielétrica escalar  $\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ ;
- Não há nenhuma dependência explícita da constante dielétrica com relação à frequência;
- A permeabilidade magnética é igual à unidade.

Assim, podemos escrever  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  onde  $\varepsilon(\mathbf{r})$  é a variação espacial da constante dielétrica e  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ . Assumindo isto, as equações de Maxwell se tornam:

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (2.8)$$

As aproximações que assumimos certamente restringem nosso estudo a materiais lineares e sem perdas. No entanto, muitas das características relevantes surgem em casos elementares desses materiais. Também a teoria de cristais fotônicos fica mais simples e de fácil compreensão; e mesmo assim produzindo resultados bastante precisos que são a base para a construção de uma teoria mais sofisticada.

Vamos supor também, sem perda de generalidade, que os campos eletromagnéticos possuem uma natureza harmônica no tempo. Na verdade, tanto o campo elétrico como o campo magnético são, de modo geral, funções complicadas tanto do espaço como do tempo. Mas como as equações de Maxwell são lineares, podemos separar a dependência temporal da espacial. Modos harmônicos podem ser expressos da seguinte forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \quad (2.9)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \quad (2.10)$$

Substituindo estas expressões para  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  e  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  nas 2.5 e 2.6, chegamos às seguintes relações independentes do tempo (as equações de divergência):

$$\nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.12)$$

Agora vejamos a substituição das equações 2.9 e 2.10 nas 2.7 e 2.8.

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \frac{\partial [\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega t)]}{\partial t} = 0 \quad (2.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega t)]}{\partial t} = 0 \quad (2.14)$$

Após a derivação no tempo, temos

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - i\omega\mu_0\mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) - i\omega\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.16)$$

Dividindo ambas as equações por  $\varepsilon(\mathbf{r})$  e tomando o rotacional, podemos usar a primeira equação para eliminar  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ . E como as constantes  $\varepsilon_0$  e  $\mu_0$  podem ser combinadas na expressão para a velocidade da luz no vácuo ( $c = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$ ), obtemos uma equação única em termos de  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ :

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \right) = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (2.17)$$

Esta é a equação característica, ou equação *mestre*. Em conjunto com 2.11 e 2.12, contém toda a informação necessária sobre o campo  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ . A equação mestre é resolvida no domínio da frequência. Para uma determinada frequência e distribuição espacial do índice de refração, identificamos suas possíveis soluções algébricas. Ou seja, determinamos a distribuição espacial das componentes do campo magnético. As soluções fisicamente aceitáveis são aquelas que satisfazem também a condição de transversalidade de 2.11 e 2.12. Assim vamos considerar a 2.17 em sua forma de autovalor.

$$\Theta \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (2.18)$$

onde

$$\Theta \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left( \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \right) \quad (2.19)$$

A equação 2.14 indica que os padrões de campo que procuramos são os autovetores  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ , com autovalores  $(\frac{\omega}{c})^2$ . Podemos notar que o operador  $\Theta$  é linear e contém todas as informações sobre a distribuição espacial da constante dielétrica, como pode ser visto da equação 2.19. Com boa aproximação, principalmente nos comprimentos de onda igual ou inferior ao infravermelho, os materiais dielétricos mais utilizados nos cristais fotônicos não possuem perdas. Isto é, as constantes dielétricas são reais e positivas:  $\varepsilon$  é real e positivo em todo o meio. Portanto,  $\Theta$  é real. Também é importante notar que  $\Theta$  é simétrico [26]. Portanto,  $\Theta$  é hermitiano, ou seja,  $\Theta = \Theta^\dagger$ , onde  $\Theta^\dagger$  denota o transposto conjugado de  $\Theta$ . De interesse para nós aqui é que, sendo hermitiano,  $\Theta$  possui autovalores reais ortogonais formando um conjunto completo de funções da base. Isto desempenha um papel crucial para uma análise numérica eficiente de cristais fotônicos usando, por exemplo, o método de expansão em ondas planas [27] ou outros métodos numéricos.

Outra abordagem para a obtenção dos modos pode ser o uso da equação do campo vetorial  $\mathbf{E}$ , ou seja,

$$\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.20)$$

A dificuldade desta abordagem é que os componentes do campo elétrico não-tangenciais a uma interface dielétrica são descontínuos. Como resultado, a equação 2.20 não pode ser convertida em um ‘simples’ problema de autovalor. Embora ainda possa ser resolvido, o procedimento para encontrar a solução é complicado pelo fato de que o operador  $\Xi = \left(\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})}\right) \nabla \times \nabla \times$  na equação 2.20 não ser Hermitiano. Na

verdade, a posição diferente do termo  $\varepsilon(r)$  em  $\Xi$  comparado com a posição de  $\varepsilon(r)$  em  $\Theta$  destrói a hermiticidade. Por esta razão, tal abordagem é geralmente evitada.

É conveniente observar algumas propriedades dos cristais fotônicos que podem ser deduzidas a partir da equação 2.17. Primeiro, vemos que o campo-solução na equação 2.17 possui natureza vetorial e deve, portanto, também satisfazer a restrição  $\nabla \cdot H(r) = 0$  exigida pelas equações de Maxwell. Além disso, é evidente a partir da forma da equação 2.17 que as equações de Maxwell não são caracterizadas por uma escala de comprimento particular, ou seja, elas são totalmente escalonáveis nos limites de validade do eletromagnetismo. Esta falta de uma escala de comprimento absoluta faz a física dos cristais fotônicos ser ‘escalável’. Assim, uma estrutura de banda para um sistema com uma constante de rede  $a$  será a mesma estrutura de banda de um outro sistema com constante de rede  $a/x$  se as frequências forem reescaladas para  $\omega \rightarrow x\omega$ .

## 2.2 Teorema de Bloch

Iremos agora explorar a analogia com a física do estado sólido. A similaridade mais importante entre cristais fotônicos e a física do estado sólido surge da já citada modulação periódica da função dielétrica e da rede atômica dos cristais. O comportamento das amplitudes dos campos elétricos e magnéticos em um cristal fotônico é similar ao comportamento da função de onda dos elétrons em uma rede atômica. A periodicidade da rede, tanto em cristais fotônicos como em redes atômicas cristalinas fazem surgir band gaps, intervalos de energia onde nenhum elétron pode penetrar na estrutura cristalina. Do ponto de vista matemático, a determinação de autofunções em cristais fotônicos é similar ao cálculo das funções de onda dos elétrons na física do estado sólido. E é esta similaridade que usamos para obter a estrutura de bandas fotônicas.

Em contrapartida a esta analogia, há também diferenças essenciais. Uma das principais diferenças está na distribuição de energia das partículas. Os elétrons

obedecem à distribuição de Fermi-Dirac enquanto os fótons obedecem a distribuição de Bose-Einstein. Por fim, cabe notar a característica escalar da função de onda em comparação com a natureza vetorial dos campos eletromagnéticos.

Explorando a analogia com a física do estado sólido, a informação sobre a célula primitiva e sua periodicidade no espaço pode ser reduzida para apenas dois conceitos: base e rede. A rede define a organização espacial da célula unitária, enquanto a base define o conteúdo da célula unitária. Por exemplo, a base de um cristal fotônico tridimensional pode ser um cubo dielétrico no ar. A rede é gerada por uma combinação linear de vetores primitivos  $\mathbf{a}_i$  determinados pelas translações mínimas que deixam a função dielétrica inalterada. Escolher uma célula como referência e um ponto da rede como sua origem faz com que qualquer outro ponto da rede tenha uma correspondência unívoca com um vetor  $\mathbf{R}$ , que é uma combinação linear dos vetores primitivos da rede:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N n_i \mathbf{a}_i \quad (2.21)$$

onde os números  $n_i$  são inteiros. Recordando a analogia com a física do estado sólido, vemos que a constante dielétrica  $\varepsilon(\mathbf{r})$  na equação 2.19 funciona como um ‘potencial’ para a autofunção  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ . Como o ‘potencial’  $\varepsilon(\mathbf{r})$  é periódico em uma ou mais dimensões nos cristais fotônicos, podemos escrever

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r} + \mathbf{R}) \quad (2.22)$$

A rede no espaço real (ou rede de Bravais) define um conjunto infinito de pontos gerados por um conjunto de operações de translação discreta. O conjunto de todos os vetores de onda que geram ondas planas correspondentes à periodicidade acima mencionada é conhecido como rede recíproca. Mais formalmente, o vetor  $\mathbf{k}$  pertence à rede recíproca de uma rede de Bravais de pontos  $\mathbf{R}$  desde que a relação  $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$  seja válida para qualquer  $\mathbf{r}$  e para todos os  $\mathbf{R}$  na rede de Bravais. De forma equivalente, podemos identificar a rede recíproca como o conjunto de vetores

de onda  $\mathbf{K}$  satisfazendo  $\exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}) = 1$  para todos os  $\mathbf{R}$  da rede de Bravais. A célula primitiva de Wigner-Seitz da rede recíproca, que designa a completa simetria irredutível da estrutura, é definida como a Zona de Brillouin. A zona de Brillouin também corresponde ao conjunto de pontos no espaço recíproco que pode ser alcançado a partir da origem, sem atravessar qualquer plano de Bragg.

Os vetores primitivos  $a_i$  da rede no espaço real e os vetores primitivos  $b_j$  da rede no espaço recíproco são relacionados por

$$a_i \cdot b_j = 2\delta_{ij} \quad (2.23)$$

onde  $\delta_{ij}$  é a função delta de Kronecker, ou seja,  $\delta_{ij} = 1$  para  $i = j$  e 0 caso contrário. Além disso, sabemos que a rede recíproca é ela mesma uma rede de Bravais, com os seus vetores primitivos podendo ser gerados a partir dos vetores da rede direta. Sejam  $a_1, a_2$  e  $a_3$  um conjunto de vetores primitivos. Então sua rede recíproca pode ser gerada pelos três vetores primitivos seguindo as relações abaixo:

$$b_1 = 2\pi \frac{a_2 \times a_3}{a_1 \cdot (a_2 \times a_3)} \quad (2.24)$$

$$b_2 = 2\pi \frac{a_3 \times a_1}{a_1 \cdot (a_2 \times a_3)} \quad (2.25)$$

$$b_3 = 2\pi \frac{a_1 \times a_2}{a_1 \cdot (a_2 \times a_3)} \quad (2.26)$$

onde  $b_1, b_2$  e  $b_3$  são os vetores primitivos da rede recíproca.

Consideremos agora um sistema unidimensional periódico com simetria discreta na direção  $x$ ,  $\mathbf{R} = n\mathbf{a}$  ( $n$  inteiro),  $\mathbf{a} = a\mathbf{x}_0$ , e supomos que exista simetria de translação contínua nas outras duas direções. A simetria discreta de translação pode ser expressa em termos de um operador  $O$ , que cria uma mudança espacial na direção  $x$ , com periodicidade  $a$ . Devido à estrutura da função dielétrica  $\varepsilon(\mathbf{r})$ , pode ser demonstrado que  $O$  comuta com  $\Theta$ :

$$[O, \Theta] = 0 \quad (2.27)$$

Isso significa que nós podemos construir autofunções simultâneas do  $O$  e  $\Theta$ , e assim classificar as autofunções de  $\Theta$  pelos autovalores de  $O$ . As autofunções de  $O$  são facilmente determinadas como ondas planas com vetor de onda  $\mathbf{k}$ , porque a simetria de translação permite que as autofunções se diferenciem apenas por uma mudança de fase que corresponde ao autovalor  $\varphi$ :

$$O \exp^{ik_x x} = \exp^{ik_x(x+a)} = \exp^{ik_x x} \exp^{ik_x a} = \varphi \exp^{ik_x x} \quad (2.28)$$

Podemos perceber que todas as autofunções com vetores de onda da forma  $k_x + m\frac{2\pi}{a}$ , com  $m$  inteiro, formam um conjunto degenerado. Ou seja, todos eles possuem o mesmo autovalor  $\varphi$ . Isto sugere que  $\varphi$  não é único para todos os vetores de onda. Matematicamente, todas as ondas planas correspondentes a  $k_x + mG$ , com  $G = \frac{2\pi}{a}$  formam um conjunto degenerado de autofunções e cada superposição de ondas planas com vetores de onda  $k_x + mG$  também é uma autofunção, com autovalor  $\varphi$ .

Como  $\varphi$  depende de  $\mathbf{k}$  apenas como um parâmetro livre para uma determinada estrutura, podemos agora voltar um passo em nosso raciocínio (para a equação mestre) e afirmar o seguinte: as autofunções de  $\Theta$  podem ser classificadas por um vetor de onda  $\mathbf{k}$  e possuem a forma

$$\mathbf{H}_k(x) = \exp^{ik_x x} \sum_m \mathbf{H}_m \exp^{imGx} = \exp^{ik_x x} \mathbf{u}_k(x) \quad (2.29)$$

com a função periódica de rede  $\mathbf{u}_k(x) = \mathbf{u}_k(x + ma)$  e as amplitudes de ondas planas  $\mathbf{H}_m$ . Em física do estado sólido, a forma da equação 2.29 é conhecida como teorema de Bloch [28]. Um ponto fundamental sobre esse teorema é que um estado de Bloch com vetor de onda  $\mathbf{k}$  e um estado de Bloch com vetor de onda  $\mathbf{k} + m\mathbf{G}$  são idênticos. Os  $k_x$ 's que diferem por múltiplos inteiros de  $G = 2\pi/a$  não são diferentes

do ponto de vista físico. Na verdade, basta considerar os  $k$  existentes no intervalo  $\frac{-\pi}{a} \leq k_x \leq \frac{+\pi}{a}$ . Esta importante região, onde os valores de  $k$  não são redundantes, é conhecida como a Primeira Zona de Brillouin.

Vamos voltar para o teorema de Bloch e generalizá-lo para um sistema periódico com  $N$  dimensões. Uma dada estrutura periódica  $N$ -dimensional com constante dielétrica  $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r} + \mathbf{R})$ , onde  $\mathbf{R}$  é dado pela equação 2.22, possui auto-funções que podem ser indexadas por um vetor de onda  $k$  e expressos na forma

$$\mathbf{H}_k(\mathbf{r}) = \exp^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \sum_G \mathbf{H}_{k,G} \exp^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) \quad (2.30)$$

onde  $\mathbf{G}$  denota os vetores da rede recíproca e é dado por

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^N n_i \mathbf{b}_i \quad (2.31)$$

com vetores primitivos da rede  $b_i$  e números inteiros  $n_i$ . Na equação 2.30,  $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$  é uma função periódica com a periodicidade da rede:  $\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_k(\mathbf{r} + \mathbf{R})$  para todos os vetores  $\mathbf{R}$ .

## 2.3 Estrutura de Bandas Fotônicas

O conceito de estrutura de bandas é crucial, pois a maioria das propriedades ópticas úteis dos cristais fotônicos é baseada neste conceito. O significado físico da estrutura de bandas é a conexão entre as propriedades das ondas eletromagnéticas e as propriedades do meio óptico onde tais ondas se propagam [3]. Entre os parâmetros que influenciam a estrutura de bandas, a rede e sua zona de Brillouin correspondente são de importância primordial.

Uma vez que um cristal fotônico corresponde a uma função periódica dielétrica (equação 2.22), as soluções para a equação 2.17, usando o teorema de Bloch, podem ser escritas na forma

$$\mathbf{H}_{\mathbf{k}}^v(\mathbf{r}) = \exp^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \sum_G \mathbf{H}_{\mathbf{k},\mathbf{G}}^v \exp^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} = \exp^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^v(\mathbf{r}) \quad (2.32)$$

com autovalores  $\omega_v(\mathbf{k})$  gerando um problema de autovalores hermitiano ao longo da célula primitiva da rede para cada vetor de onda  $\mathbf{k}$ . Esta célula primitiva é um domínio finito nas direções onde a estrutura é periódica, levando a autovalores discretos indexados por  $v = 1, 2, \dots$ . Os autovalores  $\omega_v(\mathbf{k})$  são funções contínuas de  $\mathbf{k}$ , formando bandas discretas quando graficados contra tal vetor. Esta plotagem de  $\omega_v(\mathbf{k})$  é chamada de estrutura de bandas, onde cada modo ( $\omega_v(\mathbf{k})$ ) é um modo de Bloch.

Em geral, a estrutura de bandas é graficada apenas ao longo das simetrias percorrendo um caminho característico da parte irredutível da zona de Brillouin, ou seja, uma linha conectando os pontos de simetria da zona irredutível de Brillouin. Na prática, todos os máximos e mínimos da estrutura de bandas estão sobre este caminho característico. Assim, a existência de um band gap pode ser deduzida com uma plotagem da estrutura de bandas ao longo do caminho característico. As frequências normalmente são exibidas em unidades de  $2\pi/a$ . Além disso, como as equações de Maxwell são lineares, a geometria e os autovalores/autofunções também são linearmente escaláveis, e é, portanto, razoável normalizar as frequências pelo comprimento característico (a constante de rede).

A curva de dispersão mais simples é mostrada na figura 2.1 para uma onda em um meio sem dispersão, como o espaço livre. O gráfico da relação de dispersão é uma linha reta, já que  $\omega = ck$ . Em um material uniforme com índice de refração  $n$ , a equação de dispersão que caracteriza a propagação de uma onda eletromagnética é  $\omega = ck/n$ . Esta relação estabelece uma reta cuja inclinação é proporcional ao inverso do índice de refração.

No entanto, como destacado acima, em um material periódico a relação de dispersão da frequência em função do vetor de onda apresenta intervalos sem solução, os chamados ‘band gaps’. Um band gap fotônico é uma faixa de frequência em que

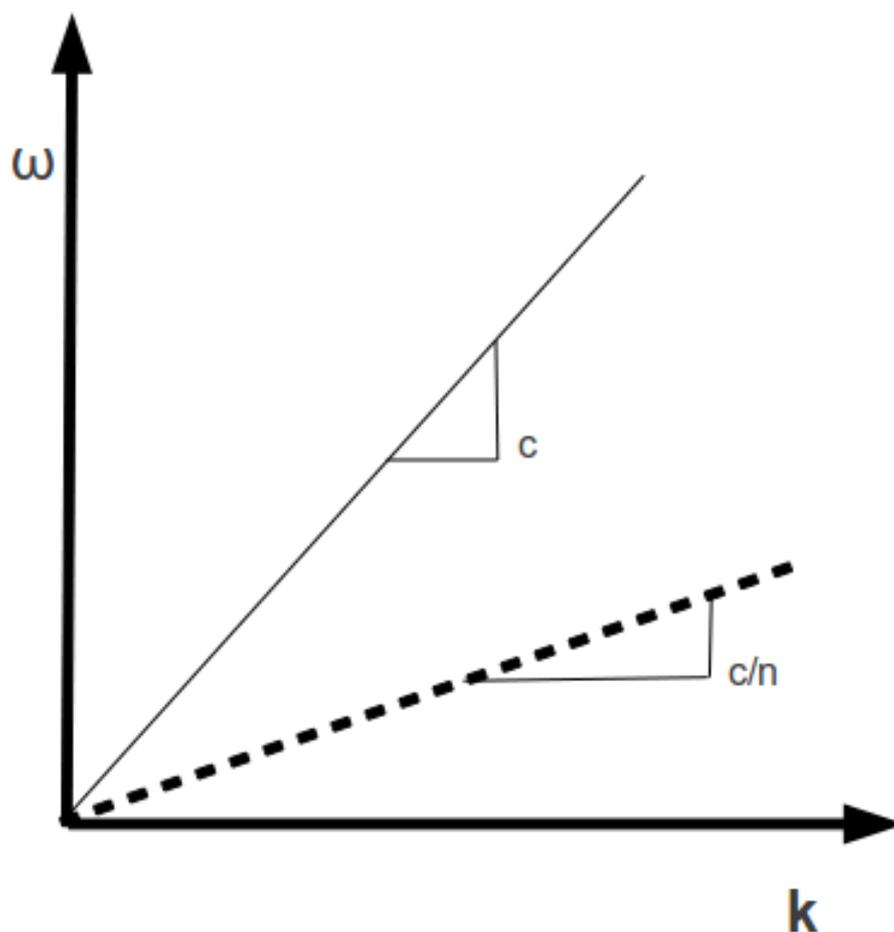


Figura 2.1: Relação de dispersão para uma onda no espaço livre (linha contínua), e para um meio com índice de refração  $n$  (linha pontilhada).

nenhum estado existe para qualquer vetor de onda  $\mathbf{k}$ . Um gap unidimensional é mostrado na figura 2.2. Os fótons são completamente proibidos de se propagarem ao longo da direção no qual o band gap é exibido. No caso de um band gap completo, o intervalo de frequências proibidas se estende a todas as direções de propagação no diagrama de bandas. Na direção que ocorre um band gap, o cristal fotônico age como um espelho que reflete perfeitamente todas as ondas com frequências dentro do band gap.

Em muitas das aplicações práticas, o objetivo é criar um band gap tão largo quanto possível. Portanto, a largura do band gap é um recurso importante. O

tamanho do band gap é geralmente descrito em termos do gap-to-midgap (GMR), definido como o quociente entre o tamanho absoluto do band gap ( $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ ) e a frequência na metade do band gap ( $\omega_c = (\omega_1 + \omega_2)/2$ ), com  $\omega_1$  sendo a frequência superior do band gap e  $\omega_2$  a frequência inferior do band gap, respectivamente. Isso pode ser expresso como

$$GMR = \frac{\Delta\omega}{\omega_c} = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{\omega_c} \quad (2.33)$$

A razão para a escolha do GMR em vez do band gap absoluto é fazer uso de uma métrica (GMR), independente da frequência. Os parâmetros geométricos são importantes para o tamanho e a posição do gap. A origem do band gap e sua dependência da geometria do cristal fotônico são discutidas nos capítulos e seções seguintes.

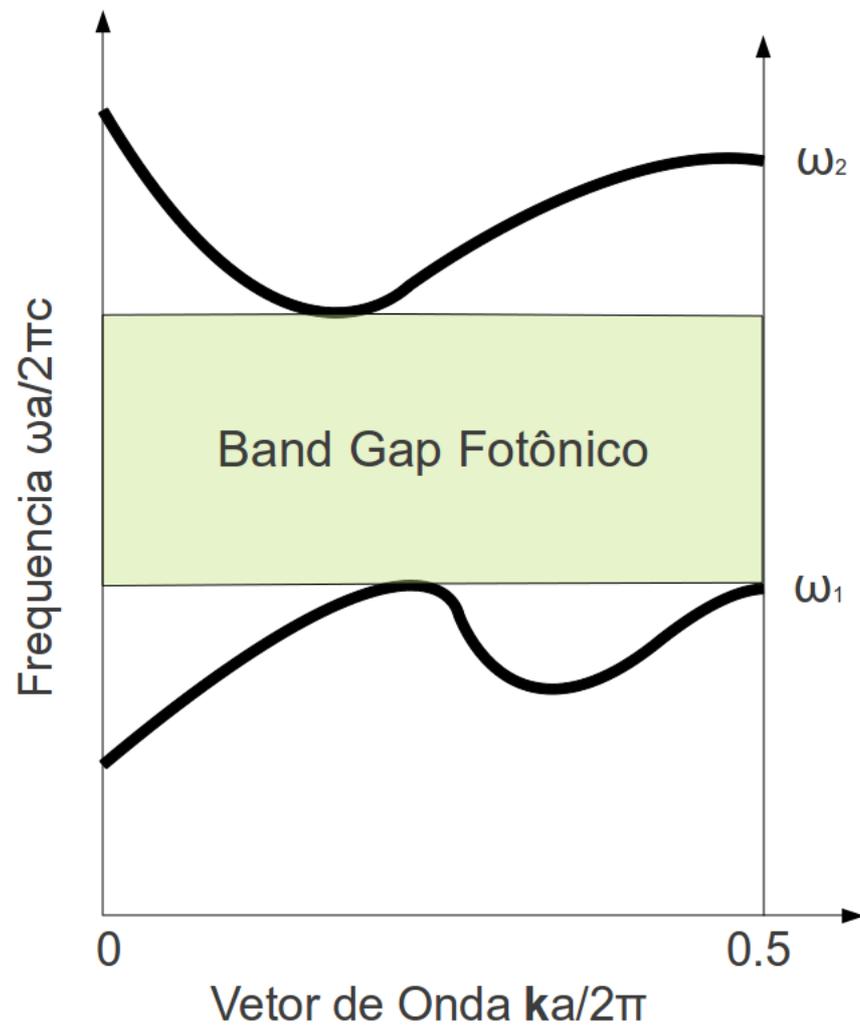


Figura 2.2: Representação esquemática da estrutura fotônica de bandas

## Capítulo 3

# Cristais Fotônicos Unidimensionais

Neste capítulo, apresentamos a lei de Bragg para um cristal comum, que será estendida aos cristais fotônicos. Em seguida, vemos o conceito de estrutura de banda para um sistema de múltiplas camadas em uma dimensão e, finalmente, discutiremos as suas características.

Apesar de ser o sistema mais simples, cristais fotônicos unidimensionais apresentam muitas das propriedades físicas mais complexas dos cristais fotônicos bi e tridimensionais. Portanto, a fim de ganhar uma compreensão das estruturas de bandas fotônicas e da origem de band gaps fotônicos, consideraremos aqui o caso de cristais fotônicos unidimensionais em mais detalhes. Duas diferentes abordagens serão apresentadas a seguir: a primeira é baseada na lei de Bragg, e a segunda na estrutura de banda fotônica. Mostraremos como ambas as abordagens são complementares para explicar a origem do band gap fotônico.

A figura 3.1 ilustra uma estrutura de múltiplas camadas de um cristal fotônico unidimensional com constante de rede  $a$ . Ela é periódica ao longo da direção  $\mathbf{z}$  e homogênea ao longo das duas outras direções. Assumimos que a luz se propaga ao longo da direção  $\mathbf{z}$ .

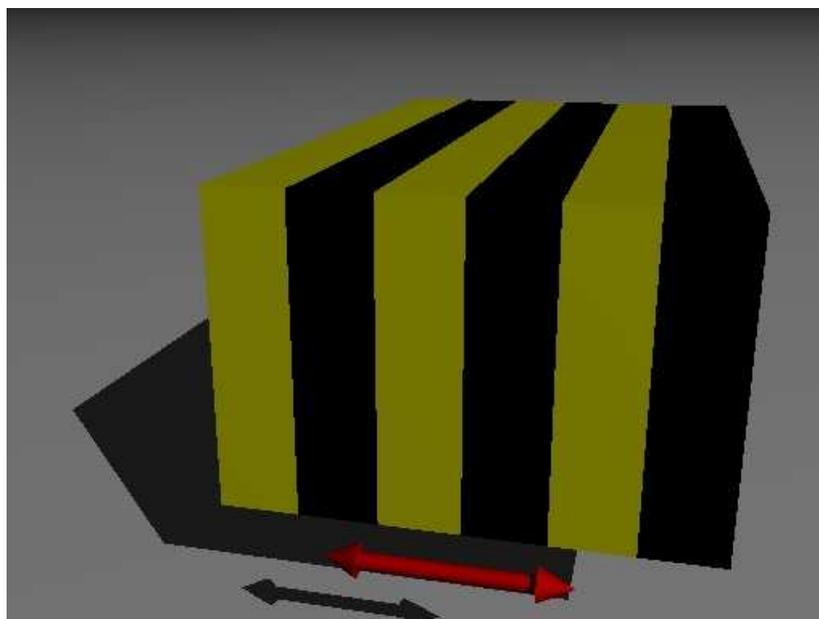


Figura 3.1: Cristal fotônico unidimensional, composto de camadas alternadas de materiais (claro e escuro), com diferentes índices de refração, separadas por uma constante de rede  $a$

### 3.1 Lei de Bragg

Partículas dispersam raios incidentes em todas as direções. Arranjos periódicos fazem com que em certas direções os feixes espalhados estejam em fase e interfiram construtivamente, dando origem a feixes difratados mais intensos. A descrição matemática da difração de raios X foi escrita pela primeira vez por von Laue em 1912 [28], e suas equações continuam a ser úteis até hoje. No entanto, a maneira mais simples de descrever a geometria da difração de raios X pode ser obtida por meio da lei de Bragg.

A figura 3.2 ilustra a interferência entre as ondas espalhadas a partir de duas linhas adjacentes de átomos em um cristal. O efeito conjunto do espalhamento de uma única linha é equivalente a reflexão parcial de um espelho imaginado em alinhamento com esta linha. Assim, o ângulo de "reflexão" é igual ao ângulo de incidência para cada linha. A interferência é vista como ocorrendo entre os feixes refletidos de diferentes linhas de átomos no cristal.

Uma maior intensidade será detectada em determinado ângulo se os raios refletidos em cada camada sucessiva interferem construtivamente. Obviamente, as sucessivas camadas interferem de forma construtiva se a diferença de caminho for um múltiplo inteiro do comprimento de onda  $\lambda$ :  $AB + BC = m\lambda$ . Como  $AB = BC = d \cdot \sin \theta$ , a interferência construtiva ocorrerá quando

$$2d \sin \theta = m\lambda \quad (3.1)$$

onde  $d$  é o espaçamento entre os planos subsequentes, e  $\theta$  é o ângulo entre o raio incidente e o plano da superfície. Sólidos possuem características estruturais dadas pelo espaçamento interatômico, na ordem de 2 a 6Å. Portanto, para estudar a estrutura dos sólidos necessitamos de luz com comprimento de onda inferior ou igual a 2Å, os chamados raios X. A periodicidade das estruturas pode ser analisada de forma particularmente eficaz por meio de difração. Ondas de luz refletidas por elétrons individuais podem interferir construtiva ou destrutivamente, e uma intensa reflexão é a prova de interferência construtiva. Além disso, se apenas dois planos atômicos estão envolvidos, a transição da interferência construtiva para a destrutiva é gradual. No entanto, se ocorre interferência de muitos planos, então os picos de interferência construtiva se tornam muito fortes com uma interferência destrutiva quase perfeita aparecendo entre os picos.

Embora a lei de Bragg tenha sido usada para explicar o padrão de interferência de raios X espalhados por cristais, a teoria pode ser utilizada para estudar estruturas periódicas de todos os estados da matéria com qualquer feixe (por exemplo íons, elétrons, nêutrons, prótons e fótons) com um comprimento de onda de dimensão comparável à distância entre as estruturas de interesse, sejam elas atômicas, moleculares ou camadas dielétricas.

Uma estrutura dielétrica periódica, seja em uma, duas ou três dimensões, difrata fótons de forma similar à maneira que um cristal difrata raios X. Alternando as regiões de material com alto e baixo índices de refração, cria-se uma estrutura

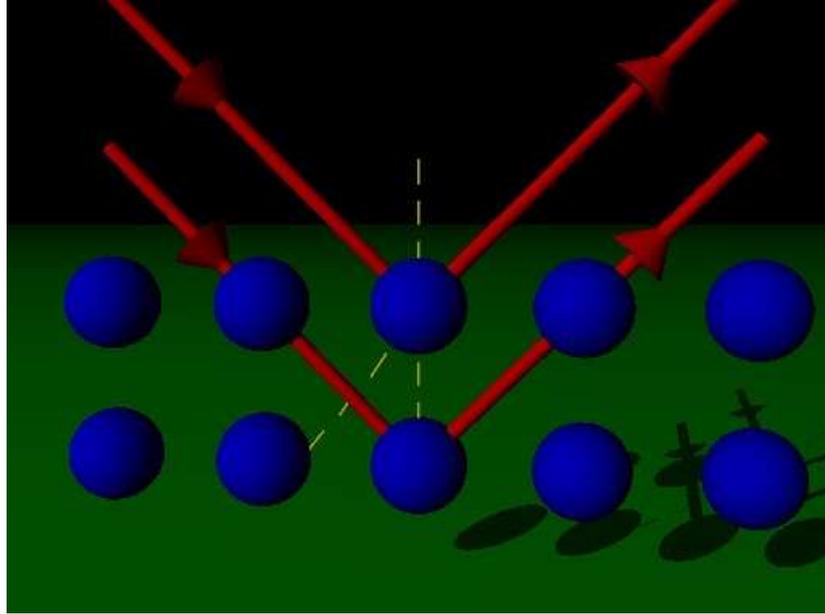


Figura 3.2: Representação esquemática da difração de Bragg. Difração máxima ocorre em  $2d \cdot \sin \theta = m\lambda$ , onde  $\lambda$  é o comprimento de onda da onda eletromagnética e  $m$  é um número inteiro.

periódica com diferentes densidades de material dielétrico, como os planos atômicos em cristais. Se as fases das ondas espalhadas em cada camada dielétrica coincidem, a estrutura alcançará refletividade máxima. Devido à existência de planos cristalinos dielétricos de cristais fotônicos, as ondas em algumas regiões de frequência serão difratadas de acordo com a Lei de Bragg [7]

$$\lambda_{hkl} = 2d_{hkl} \sqrt{n_{eff}^2 - \sin^2 \theta_{hkl}} \quad (3.2)$$

onde  $\lambda_{hkl}$  é o comprimento de onda da onda eletromagnética,  $d$  é a distância interplanar para a direção cristalográfica  $[hkl]$ ,  $n_{eff}$  é o índice de refração efetivo do cristal fotônico, e  $\theta_{hkl}$  é o ângulo entre a radiação incidente e a normal ao conjunto de planos cristalinos determinado pelos índices  $[hkl]$ . Uma importante diferença entre a difração em sólidos e difração em cristais fotônicos é a largura de banda dos picos de Bragg.

Podemos escrever a relação entre o vetor de onda  $\mathbf{k}_{hkl}$  e o vetor da rede

recíproca  $\mathbf{G}_{hkl}$  como [28]

$$2\mathbf{k}_{hkl} \cdot \mathbf{G}_{hkl} = G_{hkl}^2 \quad (3.3)$$

Além disso, podemos também escrever

$$\mathbf{k}_{hkl} \cdot \mathbf{G}_{hkl} = k_{hkl} G_{hkl} \cos \theta_{hkl} \quad (3.4)$$

Agora, podemos introduzir um índice de refração efetivo  $n_{eff}$ , que pode ser estimado por meio de seguinte abordagem:  $n_{eff}^2 = f_1 n_1^2 + f_2 n_2^2 + \dots + f_n n_n^2$  com  $f_i$  e  $n_i$  representando diferentes frações de preenchimento para os diferentes componentes e seus índices de refração, respectivamente. Para o módulo dos vetores  $\mathbf{k}_{hkl}$  e  $\mathbf{G}_{hkl}$  podemos escrever  $k_{hkl} = n_{eff}(2\pi/\lambda_{hkl})$  e  $G_{hkl} = 2\pi/d_{hkl}$ . Inserindo essas definições na equação 3.3, obtemos o comprimento de onda da radiação eletromagnética

$$\lambda_{hkl} = 2d_{hkl} n_{eff} \cos \theta_{hkl} \quad (3.5)$$

Usando a lei de Snell, podemos escrever

$$n \sin \theta = n_{eff} \sin \theta_{hkl} \quad (3.6)$$

e pela aplicação desta lei na equação 3.5, chegamos a condição de Bragg anterior, a equação 3.2

$$\lambda_{hkl} = 2d_{hkl} \sqrt{n_{eff}^2 - \sin^2 \theta_{hkl}}$$

Em uma dimensão, a equação 3.3 se torna

$$\mathbf{k} = \pm \left( \frac{m\pi}{a} \right) \quad (3.7)$$

onde  $m = 0, 1, 2, \dots$

Se, agora, dividirmos ambos os termos da equação 3.3 por 4, obtemos:

$$2\mathbf{k} \left( \frac{\mathbf{G}}{2} \right) = \left( \frac{G}{2} \right)^2 \quad (3.8)$$

Esta relação tem uma interpretação geométrica simples, mostrada na figura 3.3. Os vetores  $\mathbf{k}$  que satisfazem a condição de difração máxima são os que definem a rede recíproca. Portanto, as estruturas de banda são calculadas ao longo dos pontos de alta simetria da zona de Brillouin.

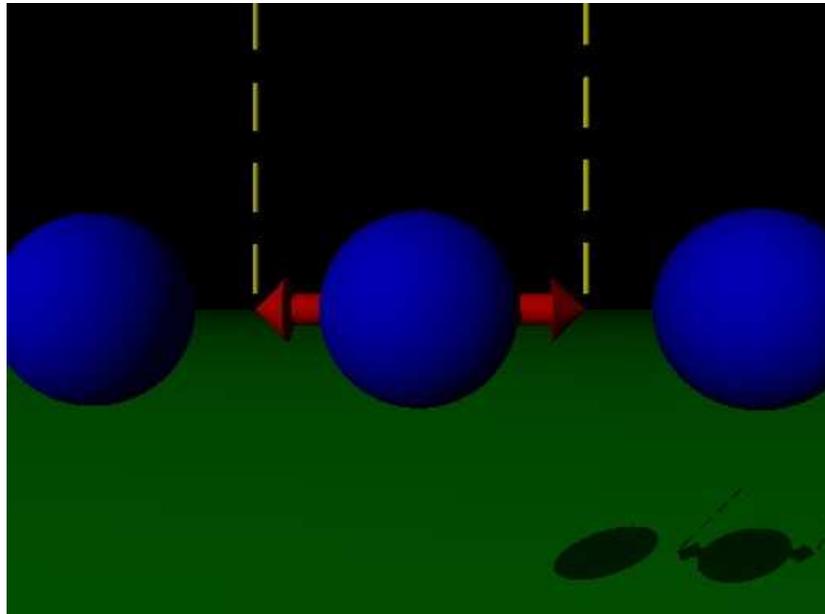


Figura 3.3: Solução gráfica da equação 3.8: as linhas tracejadas indicam os pontos onde os vetores  $\mathbf{G}_i$  da rede recíproca,  $i = 1, 2, \dots$ , são reduzidos para a metade. Cada vetor  $\mathbf{k}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , (com origem no ponto 0 e paralelos à linha ligando os pontos 0 e 1, ou 0 e 2) com a extremidade da seta na linha tracejada, é uma solução para equação 3.8

## 3.2 Estrutura de bandas unidimensionais

A estrutura de bandas fotônicas nos dá informações sobre as propriedades da propagação da radiação eletromagnética no interior do cristal fotônico. Esta é uma representação onde os estados de energia disponíveis são plotados em função da direção de propagação.

A fim de compreender como a estrutura de bandas fotônicas é construída, um sistema unidimensional de multicamadas dielétricas será estudado e comparado com o caso de um sistema dielétrico homogêneo. As estruturas de banda de três diferentes filmes multicamadas são plotadas na figura 3.4. A figura 3.4(a) mostra a estrutura de banda de filmes multicamadas, onde cada camada tem a mesma constante dielétrica, 11.56. Esta é uma estrutura homogênea à qual atribuímos uma periodicidade  $a$ . Neste caso, os fótons não reagem à presença de camadas de dielétrico periódico e se comportam como se estivessem em um dielétrico com estrutura homogênea; portanto, não aparecerá um band gap fotônico.

Substituindo um dos dois materiais que compõem a estrutura multicamadas por um material com uma constante dielétrica menor, igual a 10,24, introduzimos uma perturbação no sistema homogêneo. A estrutura de banda resultante é mostrada na figura 3.4(b). Esta figura parece com as curvas de dispersão de um sistema homogêneo, com uma diferença importante: há uma lacuna nas frequências entre os ramos superior e inferior das bandas, ou seja, um gap de frequência em que nenhum modo existe no cristal, independentemente do vetor de onda  $k$ .

A razão por trás do band gap fotônico em cristais fotônicos é a remoção da degenerescência dos dois estados existentes em  $\pm\pi a$ . Na verdade, para  $\pi a$  os modos são ondas estacionárias com um comprimento de onda de  $2a$ , duas vezes a constante da rede. Isto é conhecido como condição de Bragg. Na figura 3.4(a), esses dois modos são degenerados, pois o sistema é homogêneo. No entanto, no sistema correspondente à figura 3.4(b), os dois materiais não são idênticos, e agora só existem duas maneiras de posicionar o modo em relação a estrutura.

Podemos posicionar os nós da onda estacionária ou em cada uma das camadas de constante dielétrica mais baixa, como na figura 3.5(a), ou em cada uma das camadas de constante dielétrica mais alta, como na figura 3.5(b). Qualquer outra posição violaria a simetria da célula unitária sobre seu centro.

Por outro lado, de acordo com o teorema variacional do eletromagnetismo ([26]), modos tendo sua energia concentrada nas regiões de alta constante dielétrica

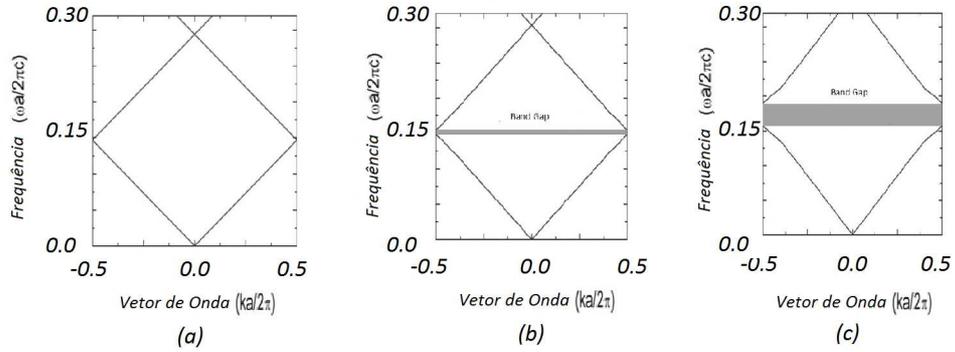


Figura 3.4: Estrutura de bandas fotônicas de cristal fotônico de multicamadas. Cada camada tem largura de  $0,5a$ , onde  $a$  é a constante de rede. Aqui, vamos considerar uma onda eletromagnética propagando ao longo da direção  $z$  (ver figura 3.2) [25].

possuem frequência menor do que os modos com energia concentrada nas regiões de baixa constante dielétrica. Isto dá origem à diferença de frequência entre os dois casos e, portanto, o band gap fotônico aparece. Em outras palavras, como a energia eletromagnética

$$Energia = \int [\varepsilon(x)|E(x)|^2 + |H(x)|^2] dx \quad (3.9)$$

é diferente nestes dois casos; os modos possuem autofrequências diferentes, resultando em um bandgap.

Estamos prontos para nos perguntar como a estrutura de bandas concorda com a lei de Bragg. Para responder a esta questão, vamos considerar um exemplo de uma rede periódica de camadas dielétricas, como apresentado nas figuras 3.6 e 3.7. Quando uma onda incidente entra numa rede periódica de camadas dielétricas, ela é parcialmente refletida e parcialmente refratada nas fronteiras das camadas dielétricas. Este fenômeno é fortemente dependente da geometria e do contraste do índice de refração. De acordo com a lei de Bragg, se as ondas parcialmente refletidas estão em fase e sobrepostas, a onda incidente é totalmente refletida de volta e é incapaz de entrar no meio, como ilustrado na figura 3.6. O intervalo de comprimentos de onda em que as ondas incidentes são totalmente refletidas corresponde a um

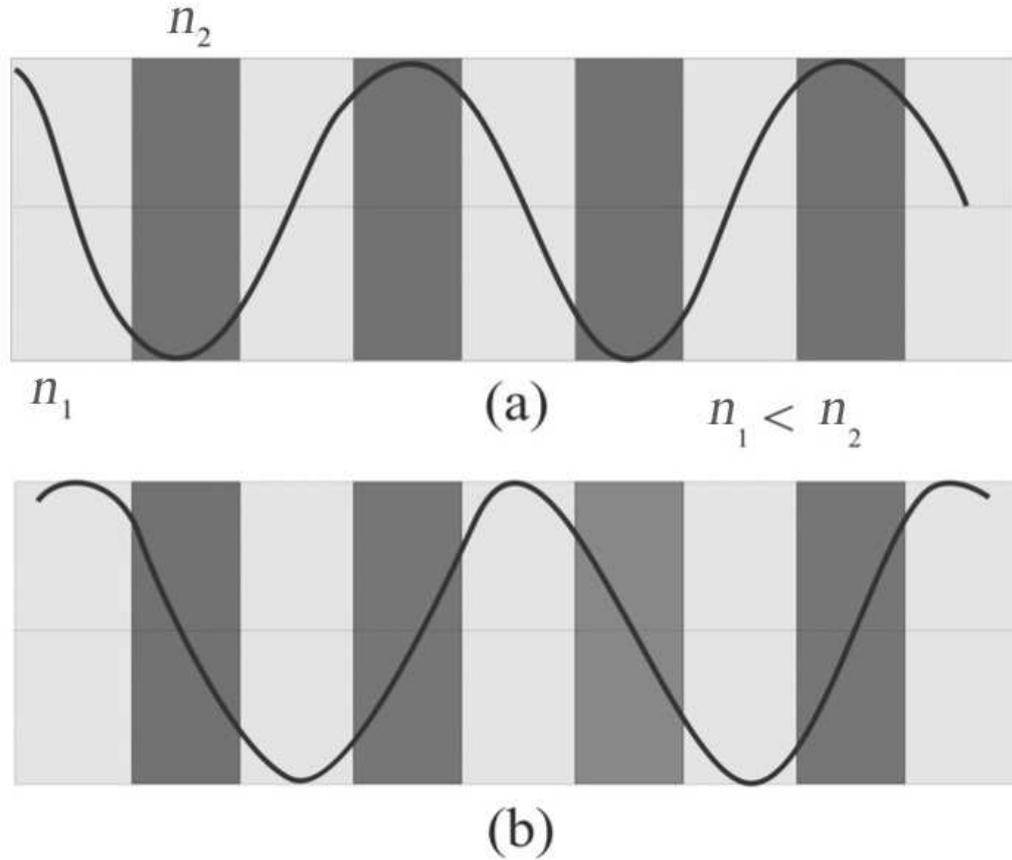


Figura 3.5: Representação esquemática do campo elétrico em cristal fotônico unidimensional de multicamadas (a) com baixa constante dielétrica e (b) com alta constante dielétrica [25] .

band gap. Por outro lado, quando o comprimento de onda de uma onda incidente não se encontra dentro do band gap, ocorre interferência destrutiva, e as ondas refletidas parcialmente cancelam umas as outras. Consequentemente, não ocorre reflexão total a partir da estrutura periódica, e parte da luz é transmitida através do cristal fotônico, como mostrado na figura 3.7.

A interação entre as ondas eletromagnéticas e cristais fotônicos causa a separação das bandas degeneradas para vetores de onda sobre a superfície da zona de Brillouin e o aparecimento de band gaps. Ondas com frequência dentro destes intervalos de band gap sofrem difração de Bragg e não podem se propagar. As larguras do

band gap fotônico em geral aumentam com o contraste entre os índices de refração dos meios. Esta condição dá uma idéia intuitiva de qual tipo de estrutura pode se tornar um cristal fotônico. Ou seja, a estrutura deve ser periódica para que as ondas espalhadas sejam sobrepostas e em fase, em qualquer ponto da estrutura. Além disso, a estrutura deve possuir simetria em todas as direções possíveis, de modo que as ondas sejam dispersas em uma forma similar a partir de pontos “equivalentes” na rede, ou seja, a partir de pontos que são invariáveis por translação.

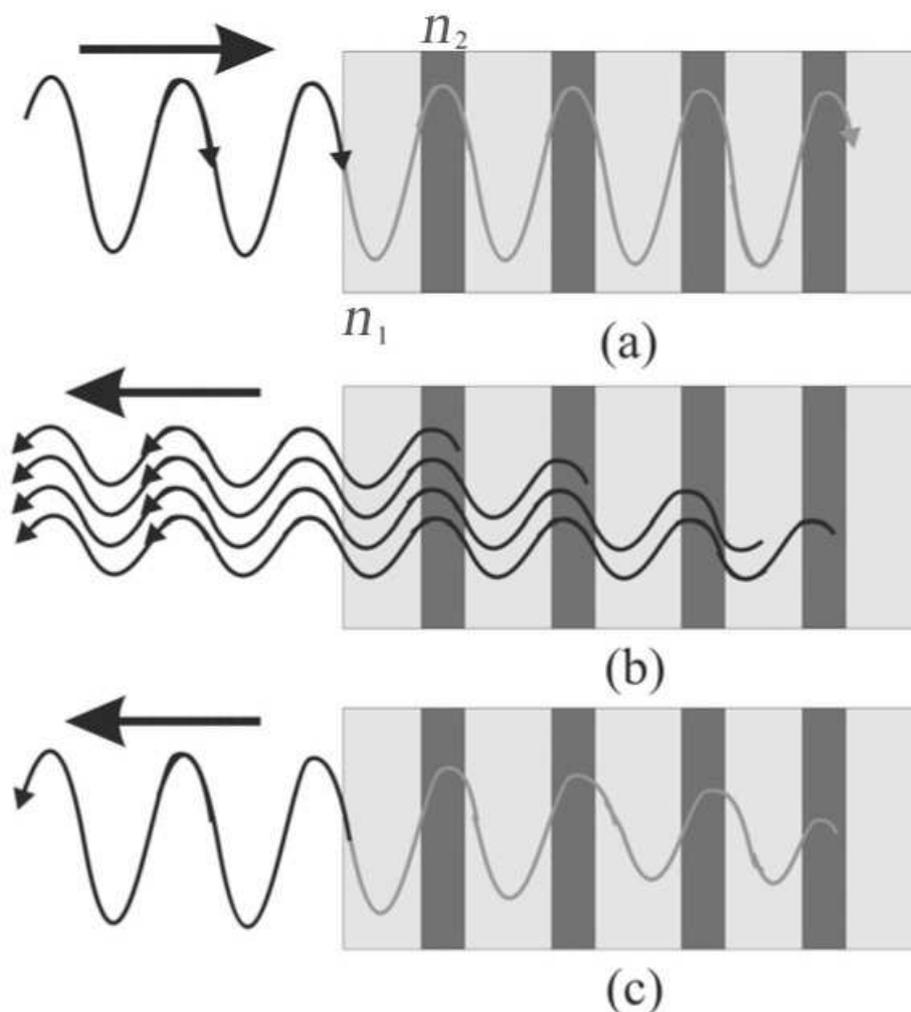


Figura 3.6: Diagrama mostrando o mecanismo de band gap fotônico em uma dimensão. (a) Uma onda incidente com um comprimento de onda dentro do band gap fotônico entra em uma estrutura periódica com dois diferentes índices de refração são representadas por  $n_1$  e  $n_2$  (b) A onda incidente é parcialmente refletida pelo contorno da estrutura. (c) Se cada onda refletida está em fase, a onda incidente é totalmente refletida e incapaz de penetrar a estrutura [25].

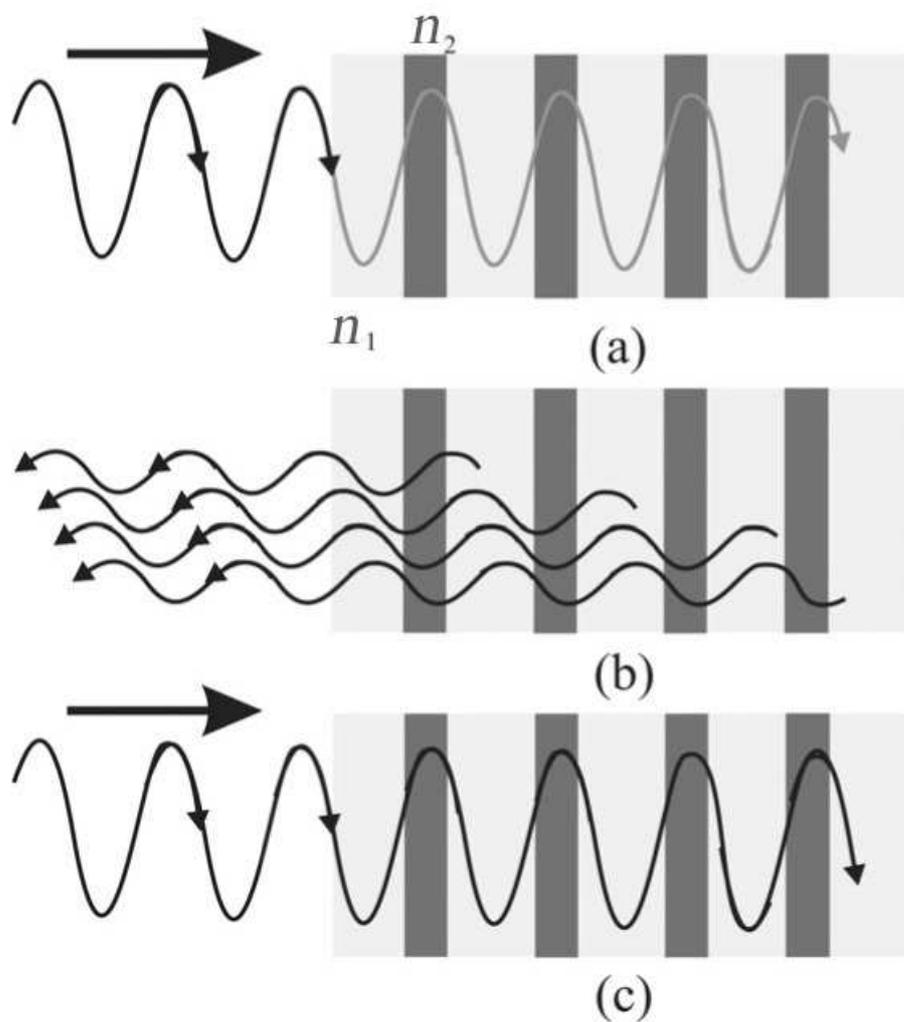


Figura 3.7: Esquema de interferência destrutiva. (a) Uma onda incidente em um comprimento de onda fora do band gap fotônico incorpora uma estrutura periódica. (b) A onda incidente é parcialmente refletida pelo contorno da estrutura, mas as ondas refletidas são fora de fase e interferem destrutivamente umas com as outras. (c) A reflexão não acontece, e a onda incidente penetra na estrutura [25].

# Capítulo 4

## Cristais Fotônicos Bidimensionais e Tridimensionais

Agora que já discutimos os princípios básicos de cristais fotônicos unidimensionais, descreveremos brevemente cristais fotônicos em duas e em três dimensões.

### 4.1 Cristais Fotônicos Bidimensionais

Cristais fotônicos bidimensionais podem possuir diferentes tipos de redes. Redes quadradas e triangulares são as mais comuns. Estas redes, no espaço real, estão ilustradas na figura 4.1a. Na figura,  $a_1$  e  $a_2$  são vetores da rede no espaço real. As redes quadrada e triangular possuem redes quadrada e triangular, respectivamente, no espaço recíproco e são apresentados nas Figs. 4.1b e 4.1c, respectivamente, onde  $b_1$  e  $b_2$  representam os vetores da rede recíproca. O destaque na figura mostra a zona de Brillouin construída a partir de  $b_1$  e  $b_2$  como a célula de Wigner-Seitz da rede recíproca.

A zona de Brillouin, no exemplo acima, é quadrada e, portanto, tem simetrias adicionais que reduzem parte do espaço-k que precisa ser considerado. O triângulo ( $\Gamma MX$ ) possui a menor área que pode ser mapeada para toda a zona de Brillouin, por operações de rotação e espelhamento. Também contém toda a informação não

redundante. Essa menor região possível é a zona de Brillouin irredutível. Portanto, é suficiente calcular a estrutura de bandas para um caminho fechado ao longo das linhas que ligam os pontos de alta simetria da primeira zona (irredutível) de Brillouin.

Agora, considere uma rede quadrada com espaçamento  $a$ , os vetores da rede  $\mathbf{a}_1 = a\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{a}_2 = a\mathbf{y}_0$  estando ao longo dos eixos X e Y, respectivamente ( $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{y}_0$  são os vetores unitários correspondentes). As equações 2.24 a 2.29 podem ser usadas para determinar quais são os vetores da rede recíproca e quais são os vetores da rede real. Assim, os vetores da rede recíproca para esta rede bidimensional são  $\mathbf{b}_1 = (2\pi/a)\mathbf{y}_0$  e  $\mathbf{b}_2 = (2\pi/a)\mathbf{x}_0$ . Portanto, a rede recíproca também é uma rede quadrada, mas com espaçamento  $2\pi/a$  (não apenas  $a$ ). Da mesma forma, vetores da rede recíproca de uma rede triangular podem ser calculados usando as equações ?? a 2.29.

Para a propagação de luz no plano de periodicidade, os modos podem ser separados em duas polarizações independentes, TE (transverso elétrico, ou seja, o campo elétrico fica no plano da periodicidade e o campo magnético é perpendicular perpendicular a ele) e TM (transverso magnético, quando o campo magnético está no plano da periodicidade e o campo elétrico é perpendicular a ele). Com uma escolha correta da rede, o cristal fotônico pode ter um band gap no plano de periodicidade. Como um exemplo, considere um arranjo quadrado de cilindros com constante dielétrica 10.24 e raio  $0,2a$  imersos no ar. Nós já sabemos do nosso exemplo unidimensional que um band gap aparecerá na fronteira da zona de Brillouin. A figura 4.2 mostra o cálculo da estrutura de banda para as polarizações TE e TM. Como esperado, aparece um gap na polarização TM (normalizado para as frequências que variam entre 0,304 e 0,433), embora não haja um gap TE. O gap TM possui um GMR de 34,99% e é limitado pela primeira banda no ponto M e pela segunda banda no ponto X. Há também um band gap parcial na direção  $\Gamma X$  para os modos TE.

Podemos notar que, além do band gap já considerado, vemos band gaps em

certas direções apenas para determinados intervalos de frequências. Por exemplo, na direção X não há autofrequências disponíveis entre os valores 0.6 e 0.75 para o modo TM. Significa que luz com frequência nesse intervalo será refletida se estiver com propagação na direção X. Isto causa os efeitos ópticos interessantes vistos em cristais fotônicos naturais, como as opalas.

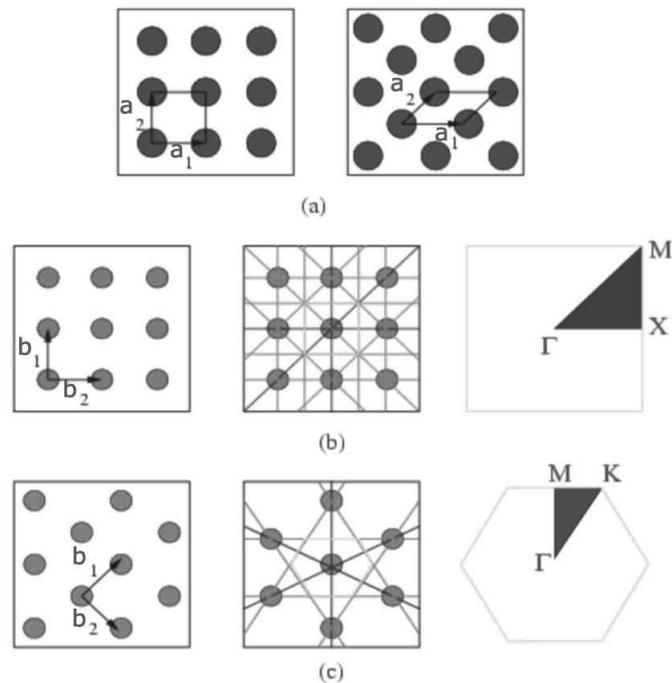


Figura 4.1: (a) redes bidimensionais quadrada e triangular. Os vetores  $\mathbf{a}_1$  e  $\mathbf{a}_2$  são os vetores da rede primitiva. (b) rede retangular bidimensional no espaço recíproco e sua zona de Brillouin correspondente. A região triangular escura é a parte irredutível da zona de Brillouin. Pontos de alta simetria são representados por  $\Gamma$ ,  $M$  e  $X$ . (c) rede triangular bidimensional no espaço recíproco e sua correspondente zona de Brillouin. Os vetores  $\mathbf{b}_1$  e  $\mathbf{b}_2$  são os vetores primitivos da rede recíproca [25].

Para explicar o surgimento de band gap de acordo com a equação 3.9, vamos analisar a distribuição da energia elétrica  $\varepsilon(\mathbf{x})|\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2$  das duas primeiras bandas TE e TM no ponto X. A Figura 4.3 mostra a energia para a primeira banda TM (cinza claro indica os valores de alta intensidade e cinza escuro indica baixa intensidade). Como o campo E aponta ao longo do eixo dos cilindros e, portanto, sempre em paralelo à interface dielétrica, a energia pode ser confinada fortemente na região do

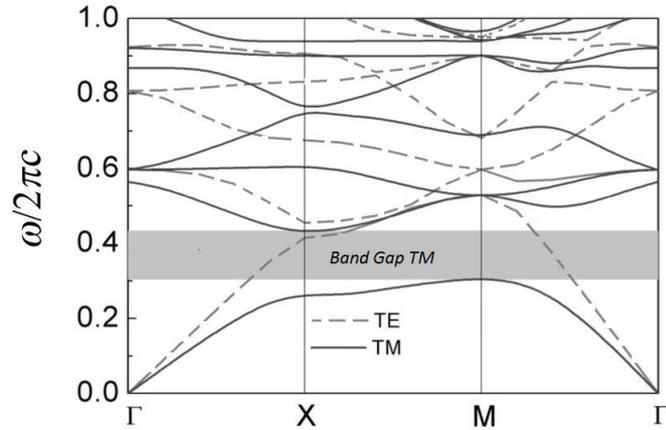


Figura 4.2: Estrutura de bandas para uma rede quadrada de cilindros com índice de refração 3.2 com raio de  $0.2a$  e imersos no ar [25].

material dielétrico de alto índice de refração. Consequentemente, isso leva a menores frequências do espectro de autovalores, conforme já vimos anteriormente. Um modo de ordem superior agora exige um nó extra no plano de cristal porque não há nenhum grau de liberdade adicional, devido ao caráter quasi-escalar do campo elétrico com polarização em  $z$ . Esta linha nodal, como pode ser visto a partir da Figura 4.3, tem que atravessar o centro dos cilindros, pois o modo tem de ser ortogonal ao primeiro (teorema da ortogonalidade). Isto empurra uma parte significativa da energia para fora da região com alta constante dielétrica para região do ar e provoca um shift de energia que leva a um grande gap.

A situação, porém, é diferente para os modos TE. Como o vetor campo elétrico se encontra no plano de cristal, existem outras possibilidades para a energia se localizar. O vetor campo elétrico pode ser orientado perpendicular ou paralelamente à interface. Para as ordens mais baixas (figura 4.3b), as linhas de campo tendem a ser paralelas. Isso indica um cruzamento perpendicular nos dois lados dos cilindros. O correspondente aumento descontínuo da energia é claramente observado na figura 4.3b. Isso causa uma alta localização na região de baixa constante dielétrica. A banda de segunda ordem mostrada na figura 4.3b tem uma estrutura mais complexa na distribuição do campo e uma localização ainda maior na região

de baixa constante dielétrica. No entanto, a diferença na banda de primeira ordem é, obviamente, muito menor do que no caso TM.

Agora entendemos que band gaps fotônicos surgem de interferências conjuntas de ondas de luz espalhadas a partir dos pontos de rede de uma estrutura periódica. Reforçamos que o alto contraste entre os índices de refração da estrutura desempenha um papel vital para que o band gap se torne mais pronunciado para uma determinada estrutura. Há duas razões para a importância de um alto contraste nos índices de refração.

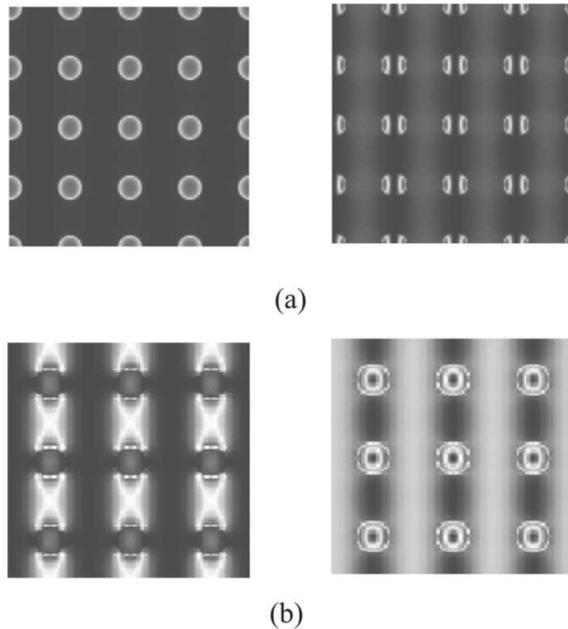


Figura 4.3: Densidade de energia do campo elétrico para uma rede quadrada com índice de refração 3.2, cilindros com raios de  $0,2a$  (a) no ponto X para a primeira e segunda bandas TM e (b) no ponto X para a primeira e a segunda banda TE [25].

Em primeiro lugar, cada estrutura de um cristal fotônico tem um valor mínimo de contraste do índice de refração para exibir um band gap completo. Este fenômeno decorre do fato de que combinações de dois dielétricos com índices de refração com alto contraste tendem a espalhar mais fortemente as ondas (a partir de qualquer direção) quando comparados com contrastes mais baixos de índices de refração. Portanto, tanto band gaps parciais como completos são mais prováveis

de ocorrer em estruturas que contêm materiais com alto contraste de índices de refração. Segundo, quanto maior o contraste dos índices de refração, menor o número necessário de camadas para ter efeitos de band gap. Como explicado anteriormente, cada camada ou rede no cristal fotônico reflete parcialmente a onda propagante. Como consequência, quanto maior o contraste dos índices de refração, maior será o coeficiente de reflexão por camada. Em geral, Reflexões suficientes para efeitos interessantes de band gap podem assim ser alcançados com poucas camadas se a estrutura tiver alto contraste de índices de refração, quando comparado a uma estrutura com a mesma configuração, mas com um contraste menor.

## 4.2 Cristais Fotônicos Tridimensionais

Apesar de cristais fotônicos bidimensionais possuírem basicamente todas as propriedades dos cristais fotônicos tridimensionais, falta-lhes uma capacidade extremamente óbvia, mas importante: eles não podem confinar a luz na terceira direção. O controle tridimensional de fótons pode ser obtido por uma estrutura dielétrica periódica tridimensional, ou seja, um cristal fotônico em três dimensões.

A idéia de uma estrutura dielétrica periódica tridimensional como meio de controlar a emissão espontânea foi primeiramente proposta por Eli Yablonovitch [1]. A motivação era criar uma estrutura onde o band gap deveria se sobrepor ao gap eletrônico, tornando assim possível melhorar a performance de lasers semicondutores, transistores bipolares de heterojunção, e células solares. Esta ideia foi, de forma independente, proposta por John Sajeev enquanto estudava o fenômeno da localização de luz em super-redes dielétricas desordenadas [2]. Diversas estruturas baseadas em redes do tipo cúbicas de face centrada (fcc) foram experimentalmente fabricadas por Gmitter e Yablonovitch [29], e a transmissão foi medida em busca de band gaps fotônicos. A zona de Brillouin de uma rede fcc tem mais simetria esférica e é mais provável possuir um band gap tridimensional completo quando os band gaps ao longo das direções individuais se sobrepõem. Seguindo esta abordagem,

verificou-se que uma estrutura projetada adequadamente exibia um band gap em três dimensões.

A pesquisa mais sistemática por uma estrutura com band gap completo seguiu quando teóricos começaram a dar atenção para este problema [23]-[33]. A primeira tentativa foi resolver o caso tridimensional com aproximação de onda escalar por desacoplar as equações de Maxwell. Os resultados previram band gap para o caso de rede tipo inversa de uma fcc feita por Yablonovitch, mas também para a estrutura fcc feita de esferas dielétricas, o que contrariou resultados experimentais. A concordância entre os valores teóricos e experimentais não foi boa, sugerindo que a natureza vetorial do campo eletromagnético seria crucial e não deveria ser negligenciada.

Cálculos foram feitos utilizando o método de expansão em ondas planas desenvolvido anteriormente [30, 31], incorporando ondas inteiramente vetoriais e foi descoberto que a estrutura fcc realmente não possui um band gap completo, devido à degenerescência das bandas nos pontos W e U. Esta degenerescência não poderia ser evitada, mesmo com um contraste nos índices de refração tão alto quanto 4.0 (germânio) e fração de preenchimento de 96% ([27],[34] e [35]) . Ho *et all* sugeriram um meio de evitar essa degenerescência escolhendo a rede de diamante com esferas dielétricas nas posições dos átomos[27, 36]. Para uma constante dielétrica fixa de 3.6, um band gap total foi encontrado para esferas dielétricas, bem como para esferas de ar, e para um bom intervalo de frações de preenchimento. A estrutura do diamante foi experimentalmente fabricada pela perfuração de orifícios cilíndricos em um material dielétrico [4]. Em boa concordância com a teoria, medidas experimentais das propriedades dessa estrutura verificaram a presença de um band gap completo. Seguindo o sucesso da estrutura de diamante, a fabricação experimental das mais diversas estruturas foi iniciada.

# Capítulo 5

## Luz Lenta e Cristais Fotônicos

### 5.1 O que é luz lenta?

No vácuo, a luz se propaga com velocidade constante. Em meios não dispersivos transparentes, a velocidade da propagação da luz é diferente

$$v = \omega/k = c/n \quad (5.1)$$

onde  $k$  é o número de onda,  $\omega$  é a respectiva frequência, e  $n$  é o índice de refração do meio. Em frequências ópticas, o índice de refração  $n$  de materiais transparentes normalmente não excede várias unidades, e a velocidade de fase da propagação da luz é da mesma ordem de grandeza no vácuo.

Embora a velocidade de fase da luz seja determinada pela mesma equação 5.1, a velocidade de propagação do pulso eletromagnético é diferente de  $v$  e é determinado pela velocidade de grupo [38, 39, 40]:

$$u = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c \left( n + \omega \frac{\partial n}{\partial \omega} \right)^{-1} \quad (5.2)$$

que é uma das mais importantes características eletromagnéticas do meio. A velocidade de grupo  $u$  muitas vezes pode ser considerada coincidente com a velocidade da propagação da energia eletromagnética e é geralmente chamada apenas como a

velocidade de propagação de pulsos da luz no meio.

Uma forte dispersão significa que a velocidade de grupo  $u$  depende fortemente da frequência e pode ser radicalmente diferente de  $c$ . No caso de luz lenta, o pulso eletromagnético se propaga através do meio dispersivo com velocidade  $u \ll c$ , independentemente do respectivo valor da velocidade de fase (5.1). Em alguns casos,  $u$  pode se tornar muito pequena, tendendo a zero e implicando que a propagação do modo nestas frequências não transfere energia. Em outro extremo, a velocidade de grupo pode exceder  $c$  (este caso é o chamado propagação superluminal do pulso), sem contrariar o princípio da causalidade [38, 41, 44]. Em mais outro caso, de um meio chamado *left-handed* (algo do tipo “meio da regra da mão esquerda”), a velocidade de grupo pode ter o sinal oposto à da velocidade de fase [45]. Nossa atenção será exclusivamente à luz lenta e fenômenos correlatos.

Luz lenta possui diversas aplicações práticas. Os fenômenos relacionados incluem aumento dramático de várias interações do tipo luz-matéria, como os efeitos não-lineares (maior geração de harmônicos, etc), assim como muitas outras importantes propriedades eletromagnéticas dos meios ópticos. Tal aumento pode facilitar o projeto de linhas de atraso, transformadores de fase, e eficientes amplificadores ópticos e lasers em miniatura. Além disso, a luz de baixíssima velocidade pode permitir que as interações não lineares alcancem o nível de um único fóton, que poderá beneficiar significativamente o design de switches ópticos ultrasensíveis, armazenamento de dados totalmente óptico e dispositivos ópticos de processamento de dados. Luz lenta também pode ser utilizada em comunicação quântica e design de novos dispositivos. Esta lista pode seguir avante. Potenciais aplicações práticas dos fenômenos de luz lenta são sugeridas nas referências [46] a [54].

## 5.2 Dispersão temporal versus dispersão espacial

Nos últimos anos, diversas abordagens tem sido aplicadas a fim de diminuir a velocidade ou até mesmo parar completamente a luz. Estas abordagens podem ser

agrupadas em duas grandes categorias:

- aquelas em que a baixa velocidade de grupo resulta da forte dispersão temporal  $\partial n/\partial\omega$  do meio ótico;
- aquelas em que a baixa velocidade de propagação do pulso é resultado da interferência coerente em meio heterogêneo com periodicidade espacial, tais como cristais fotônicos.

Em cristais fotônicos, normalmente não temos qualquer excitação intrínseca de ressonância do meio e, portanto, não há dependência de forte dispersão temporal. Em vez disso, temos redes dielétricas periódicas, onde a baixa velocidade de grupo resulta somente da heterogeneidade espacial do meio ótico.

Exemplos bem conhecidos de estruturas dielétricas periódicas incluem não apenas os cristais fotônicos, mas também estruturas periódicas de ressonadores óticos acoplados ([55] a [61]), entre outros. Geralmente, a um meio periódico heterogêneo pode ser atribuído um índice de refração  $n$  apenas se o período  $L$  da estrutura é muito menor do que o comprimento de onda  $\lambda$  da luz

$$L \ll \lambda \quad (5.3)$$

Por outro lado, uma dispersão espacial significativa associada com a heterogeneidade do meio só pode ocorrer quando  $L$  e  $\lambda$  possuem valores comparáveis

$$L \sim \lambda \quad (5.4)$$

Em frequências óticas, a velocidade de propagação do pulso em redes dielétricas periódicas pode ser reduzido por duas ou três ordens de magnitude. Esta não é uma restrição fundamental, mas sim uma limitação tecnológica relacionada com a dificuldade de construir estruturas perfeitamente periódicas em escala nanométrica. Por outro lado, os componentes dielétricos da rede periódica não precisam ter forte dispersão temporal e, portanto, a absorção da luz não é um problema essencial e

inevitável neste caso. Além disso, a abordagem baseada em cristais fotônicos é muito mais versátil em termos da intensidade da luz que usamos para propagar no meio óptico. Tal abordagem permite que o mesmo dispositivo fotônico opere tanto em alta como em baixa intensidade da luz.

Há uma limitação na largura de banda do pulso retardado em meio periódico dielétrico, semelhante ao caso da luz lenta em meios com dispersão temporal. Seja  $\Delta\omega$  a largura de banda da frequência de um pulso e de  $\Delta k$  o respectivo intervalo do número de onda de Bloch. A velocidade média de grupo do pulso é definida como

$$\langle u \rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad (5.5)$$

Vamos assumir que

- O pulso propagando no meio periódico é composto por autovetores de Bloch pertencentes ao mesmo intervalo espectral da relação de dispersão  $\omega(k)$ . Isto implica que  $\Delta k$  não pode exceder o tamanho de  $2\pi/L$  da zona Brillouin

$$\Delta k \leq 2\pi/L \quad (5.6)$$

onde  $L$  é o comprimento da célula unitária da rede periódica.

- O índice de refração dos componentes constituintes da rede periódica é da ordem da unidade e, portanto,

$$L \sim \lambda_0 = 2\pi c/\omega \quad (5.7)$$

onde  $\lambda_0$  é o comprimento de onda da luz no vácuo.

As equações 5.5 a 5.7 fornecem a seguinte limitação para a velocidade mínima da propagação de um pulso com uma determinada largura de banda  $\Delta\omega$ :

$$\langle u \rangle = \frac{L}{2\pi} \Delta\omega \approx c \frac{\Delta\omega}{\omega} \quad (5.8)$$

Qualquer tentativa de contornar a restrição imposta pela equação 5.8 envolve algum tipo de técnica de compressão de pulsos [54] .

De forma similar a redes periódicas de ressonadores acoplados, em cristais fotônicos uma baixa velocidade de grupo da luz pode surgir a partir de múltiplos espalhamentos de fótons individuais por impurezas periódicas no espaço, e não por dispersão temporal do próprio meio [61, 62, 63]. A menor velocidade de grupo possível em cristais fotônicos para uma determinada largura de banda do pulso dado pode estar próxima à definida pela restrição fundamental mostrada na equação 5.8. Por exemplo, se quisermos que um pulso se propague sem distorção em velocidade tão baixa quanto  $10^{-3}c$ , a sua largura de banda  $\Delta\omega$  deve ser inferior a  $10^{-3}\omega$ , que em frequências ópticas é da ordem de 10 GHz. Neste caso, as condições em cristais fotônicos são tão boas quanto em qualquer outro meio linear com índice de refração limitado.

Diferente do caso de guias de onda “comuns” e redes de ressonadores acoplados, em cristais fotônicos temos a possibilidade de ondas eletromagnéticas com propagação em qualquer direção através da estrutura heterogênea. Isto resulta em maior densidade de modos, comparado ao das redes de ressonadores citadas acima. Além disso, as ondas eletromagnéticas em cristais fotônicos podem permanecer coerentes nas três dimensões, algo essencial para uma variedade de aplicações práticas.

Um grande problema com luz lenta em cristais fotônicos é a eficiência de conversão da luz incidente no modo de luz lenta para dentro do meio heterogêneo. Na maioria dos casos, uma onda eletromagnética incidente com frequência de um dos modos de luz lenta é simplesmente refletida de volta ao meio, sem criar o modo de luz lenta no interior do cristal fotônico. Como superar esse problema fundamental e, assim, como transformar uma fração significativa da energia da luz incidente em um modo de luz lenta com amplitude drasticamente melhorada, é um dos temas mais relevantes.

Devido à possibilidade de adicionar interessantes características a um material, simplesmente controlando sua geometria, a busca por dispositivos envolvendo

cristais fotônicos e geradores de luz lenta não se restringe ao cristal fotônico em si. Guias de onda em cristais fotônicos também mostram modos de luz lenta.

### 5.3 Luz lenta em guias de cristal fotônico

O fator  $S$  é definido como a relação entre a velocidade de fase e a velocidade de grupo,  $S = v_\phi/v_g$ . Se também for levado em conta a largura de banda e a dispersão [64], a performance de dispositivos dielétricos de luz lenta depende do contraste do índice de refração. Portanto, estruturas com alto índice de refração parecem ser particularmente promissoras.

Embora luz lenta em cristais fotônicos já tenha sido observada por diversos autores [64, 65, 66], geralmente a observação de tal fenômeno está relacionada a uma curva de dispersão próxima dos limites da zona de Brillouin. Portanto, luz lenta em cristais fotônicos tende a surgir juntamente com alta dispersão, o que anula a maioria das vantagens dos modos de luz lenta e limita a largura de banda que pode ser utilizada [66]. No entanto, esta limitação não é uma propriedade intrínseca do material, mas sim devido ao projeto das estruturas. Projetos baseados em um melhor entendimento dos modos de luz lenta podem superar essa limitação, como já demonstrado por vários autores [67, 69, 70]. Outra abordagem para superar o problema envolvendo a largura de banda e a dispersão é ajustar dinamicamente a estrutura, como proposto por Yanik e Fan [71]. Referente às perdas, foi proposto que em guias de onda de cristais fotônicos elas variam com o quadrado do fator  $S$  [72].

Vamos discutir a utilidade de guias de onda em cristais fotônicos para utilização como dispositivos para modos de luz lenta, tais como switches, dispositivos de retardo óptico e armazenamento óptico de dados. Um ponto central alcançado pelo uso de cristal fotônico é que ele oferece uma grande largura de banda, aspecto crítico em praticamente qualquer aplicação prática. Os cristais fotônicos também oferecem flexibilidade quando pensamos nos comprimento de onda utilizados, pois

sua operação é adequada à constante de rede, ao contrário de outros dispositivos de luz lenta que interagem com uma ressonância do próprio material.

## 5.4 A natureza do atraso e seus limites

A natureza do atraso em um guia de ondas de cristal fotônico é facilmente compreendida se pensarmos nas imagens de raios luminosos, bastante utilizadas para descrever a propagação da luz em um guia de onda dielétrico. Comparando com o caso de termos apenas reflexão interna total, os cristais fotônicos apresentam duas características adicionais que podem levar à formação de modos de luz lenta.

(a) *Backscattering*: A luz é espalhada ‘para trás’ (fenômeno conhecido como *backscattering*) em cada célula unitária do cristal. Portanto, o cristal pode ser visto como uma grade (indicada pelas linhas verticais no lado esquerdo da figura 5.1) Se a propagação ‘para a frente’ e o espalhamento ‘para trás’ estiverem em fase e com a mesma amplitude (como no limite da zona de Brillouin  $k = 0.5\pi/a$ ), uma onda estacionária surge, que pode ser entendida como um modo de luz parada, com velocidade de grupo zero.

Se nos afastarmos dos limites da zona de Brillouin, entramos no intervalo de luz lenta. Nesse intervalo os componentes das ondas propagando em sentidos opostos começam a sair de fase, mas ainda interagem num padrão de interferência resultando em luz lenta. Se nos afastarmos ainda mais dos limites da zona de Brillouin, as componentes das ondas ficam muito fora de fase para experimentar uma interação que leve a um modo de luz lenta. Então temos um modo de propagação de um guia de onda comum, dominado pelo fenômeno da reflexão interna total.

Na figura 5.1, está ilustrado o regime de luz lenta com setas apontando para a direita e esquerda a fim de representar os componentes da onda nesses sentidos. As setas para a direita são mais longas, como se o modo percorresse três ‘passos’ para frente e dois ‘passos’ para trás: um movimento lento para frente. Esta explicação sugere que o efeito de luz lenta se limita aos limites da zona de Brillouin. Porém, isso

não é verdade. O ponto chave aqui mostrado é que o modo de luz lenta é próximo a uma ressonância com a estrutura. Outras ressonâncias podem ser criadas onde efeitos de luz lenta também podem ocorrer [67]. Portanto, administrando várias ressonâncias com cuidado, é possível criar um regime de luz lenta que se estende por uma fração considerável da zona de Brillouin.

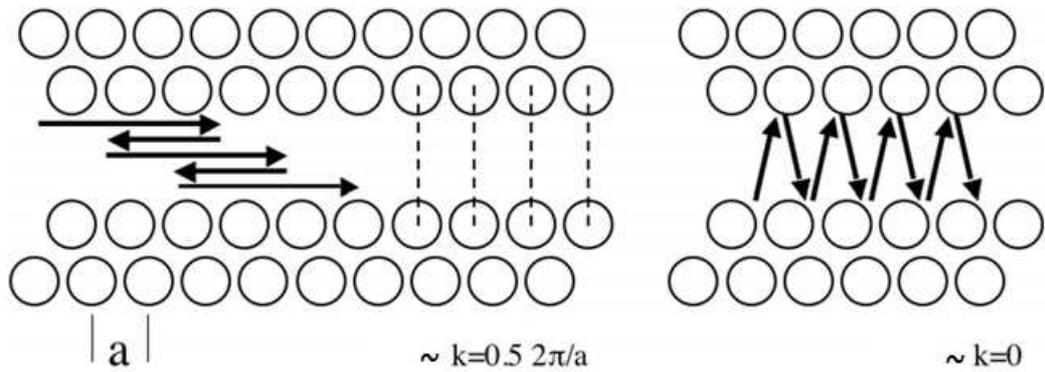


Figura 5.1: Duas possibilidades para o surgimento de luz lenta em guias de cristal fotônico. (a) *backscattering* e (b) *omnidirecional reflection* [68].

(b) *Omnidirecional Reflection*. A outra característica singular oferecida pelos cristais fotônicos é que não existe um ângulo de corte. Ou seja, se um há bandgap fotônico, a luz se propagando em qualquer ângulo é refletida. Este fenômeno é conhecido como *omnidirecional reflection*. Mesmo a luz com incidência normal ou muito próxima da normal, pode formar um modo propagante, como indicado pelo forte ziguezague mostrado à direita da figura 5.1. Em termos de estrutura de banda, isso corresponde a propagação no ponto  $\Gamma$ , ou muito próximo de tal ponto. Ou seja,  $k \approx 0$ . É óbvio que esses modos possuem componentes do vetor de onda muito pequenos, e isso significa que eles estão em modos de luz lenta ao longo do guia de onda. Ou, para  $k = 0$ , formam uma onda estacionária.

Se assumirmos um meio sem dispersão, ou seja, um meio onde diferentes frequências de um pulso sofrem o mesmo fator  $S$ , um pulso é comprimido espacialmente quando entra no regime de luz lenta. A parte frontal do pulso penetra primeiro no meio, e se propaga mais lentamente do que o restante do pulso. O pulso

resultante ocupa menos espaço, é ‘comprimido espacialmente’ sem alterar suas propriedades em termos de tempo ou de frequência. Além disso, se assumirmos que nenhuma energia é perdida na interface, a mesma quantidade de energia será concentrada em um volume menor. Portanto, a intensidade do pulso aumenta. Este efeito é ilustrado na Figura 5.2 .

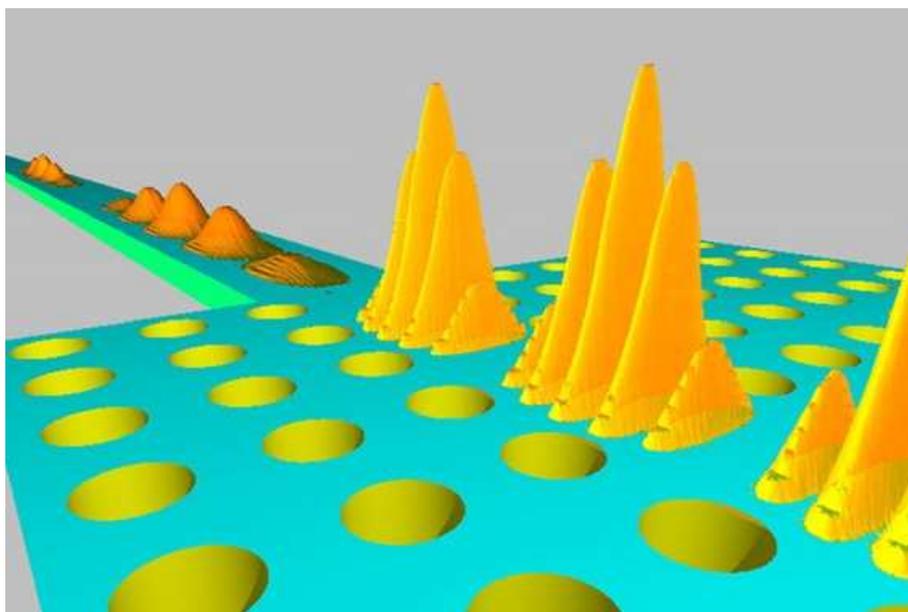


Figura 5.2: Ilustração da compressão de um pulso e aumento da intensidade após a entrada no regime de luz lenta [68].

## Capítulo 6

# Cavidades Ressonantes em Cristal Fotônico

Como já vimos, controlar a velocidade de propagação de pulsos ópticos é um dos mais importantes requisitos para o progresso da tecnologia da informação por meios ópticos. Manipular a velocidade da luz pode alterar drasticamente como os sistemas de comunicação são projetados e controlados. Um dos grandes desafios é manipular dados contidos em pacotes compostos de pulsos de luz de forma inteiramente sem conversão para sinais eletrônicos. Aqui encontramos uma aplicação direta de dispositivos de luz lenta e luz rápida, onde sinais ópticos seriam ‘armazenados’ sem conversão, diminuindo significativamente o atraso global e o gasto de energia na comunicação associado a conversão para chaveamento eletrônico[75].

Neste capítulo veremos os resultados de uma simulação computacional. Simulamos um cristal fotônico bidimensional com defeitos formando guias de onda e cavidades ressonantes. Tal dispositivo mostra a interessante característica dos modos de luz lenta.

## 6.1 Cavidade Ressonante em Cristal Fotônico

Simulamos um cristal bidimensional, mostrado na figura 6.1. Utilizamos o método de elementos finitos. No método de elementos finitos, a simulação é realizada por substituir as equações que regem o problema sobre uma região complexa (de volume  $V$ ) por um somatório de equações estendidas a regiões de geometria bem mais simples (de volume  $V_i$ ), contidas na região original. Cada região  $V_i$  é o que chamamos de elemento finito, com uma geometria mais simples que a região original [76].

O cristal é formado de cilindros com índice de refração  $n = 3.21$  imersos em ar ( $n = 1$ ). Os defeitos no cristal que formam os guias de onda horizontais e a cavidade em forma de anel foram construídos retirando-se uma única fileira de cilindros para cada formato desejado.

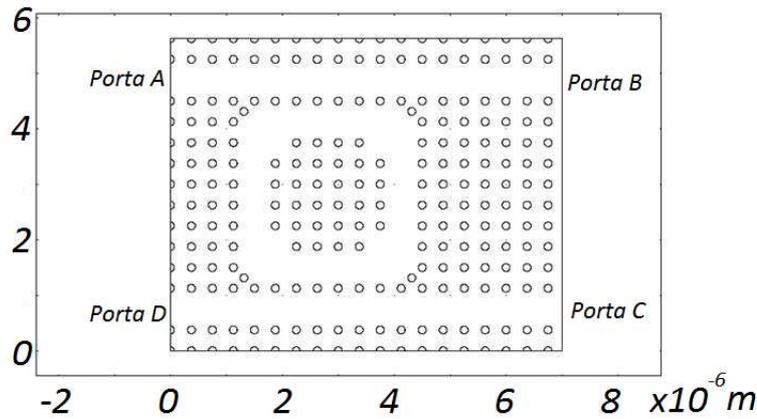


Figura 6.1: Cristal fotônico bidimensional, com índices de refração  $n_{cilindro} = 3.21$  e  $n_{ar} = 1$ .

Na porta A, temos a excitação de uma onda plana de amplitude unitária. Em seguida, calculamos a velocidade de grupo nas portas de saída B, C e D. Observamos o comportamento da simulação para comprimentos de onda no intervalo de  $8.545 \times 10^{-7}m$  a  $9.416 \times 10^{-7}m$ . Conforme visto nas figuras 6.2 a 6.4, não detectamos luz lenta nas portas de saída. Porém, podemos observar luz lenta para alguns

comprimentos de onda ao calcular a velocidade de grupo no guia de onda inferior, logo abaixo da cavidade (coordenadas  $x = 2.8 \times 10^{-6}m$  e  $y = 0.5 \times 10^{-6}m$ ).

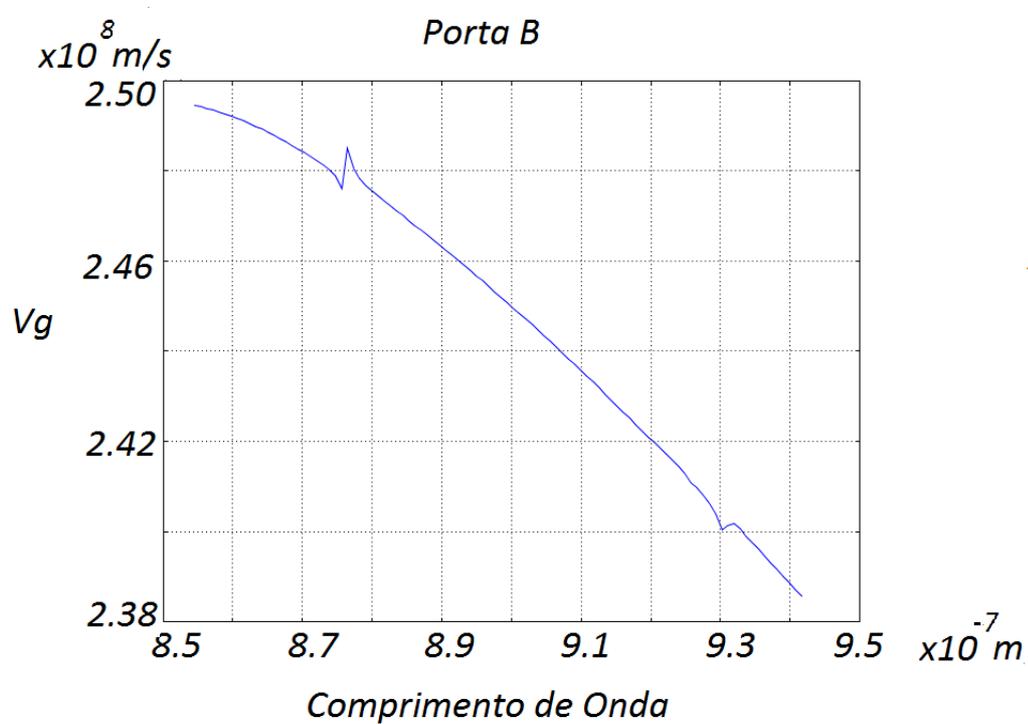


Figura 6.2: Velocidade de grupo na porta B.

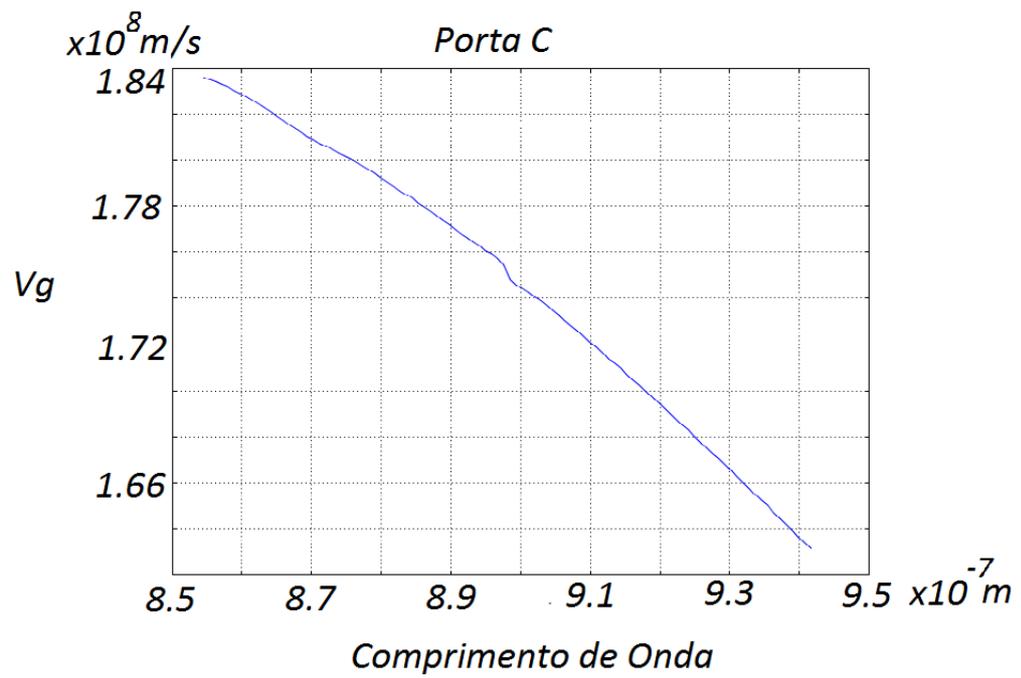


Figura 6.3: Velocidade de grupo na porta C.

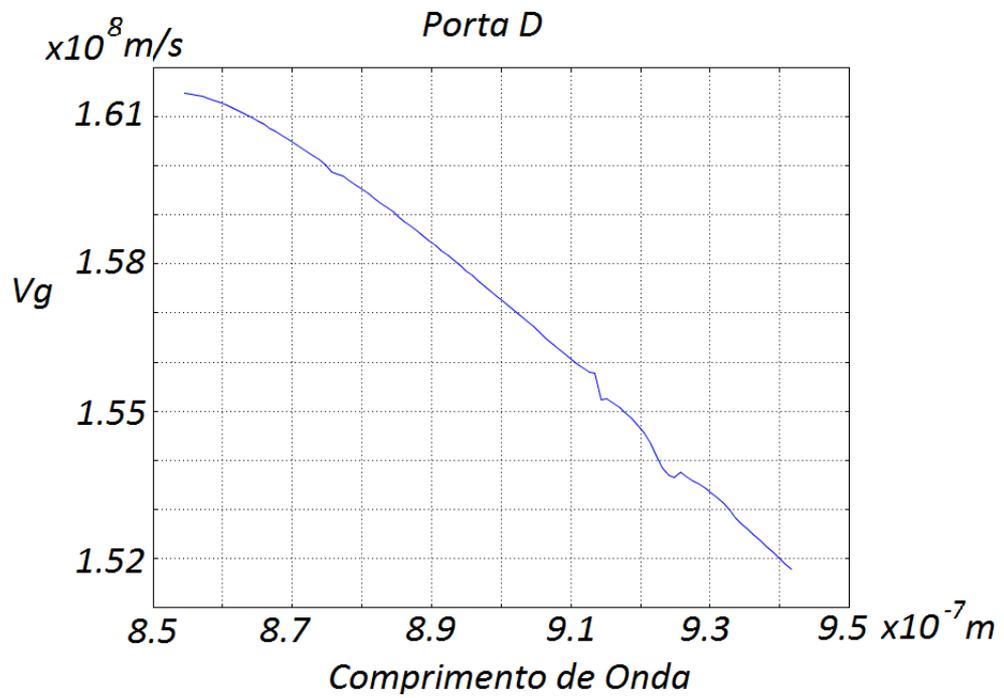


Figura 6.4: Velocidade de grupo na porta D.

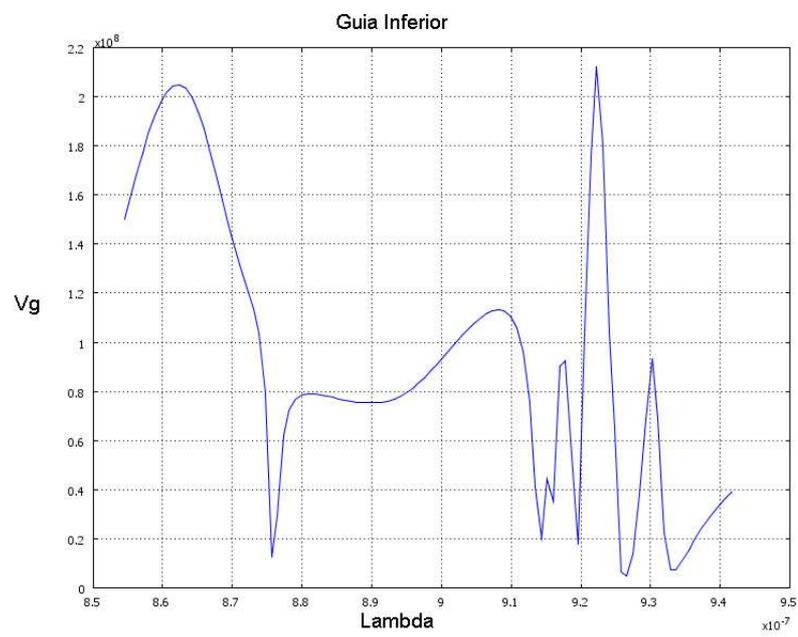


Figura 6.5: Velocidade de grupo na guia de onda inferior.

Conforme mostrado na figura 6.5, a velocidade de grupo chega a ficar 30 vezes menor que  $c$  para alguns comprimentos de onda.

Para fins de comparação, realizamos a mesma análise para uma geometria similar, porém com duas cavidades (figura 6.6). Os resultados foram bastante diferentes do caso para uma cavidade.

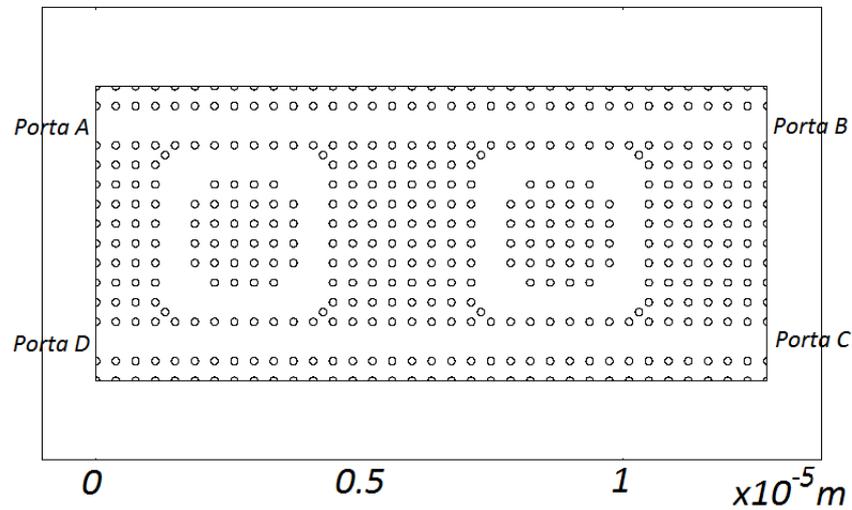


Figura 6.6: Cristal fotônico bidimensional, com duas cavidades e índices de refração  $n_{cilindro} = 3.21$  e  $n_{ar} = 1$ .

Como no caso anterior, não foi detectado luz lenta nas portas de saída (figura 6.7 a 6.9). Porém, novamente para a região logo abaixo de uma das cavidades, obtemos velocidades de grupo baixas, inclusive próximas de zero para determinados comprimentos de onda (figura 6.10).

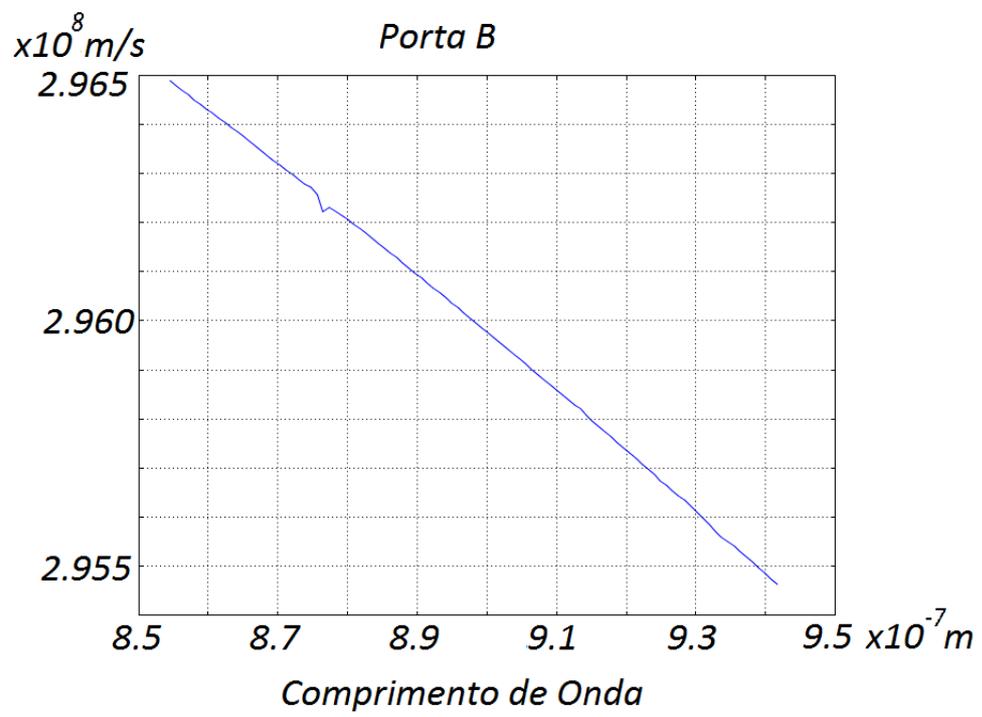


Figura 6.7: Velocidade de grupo na porta B.

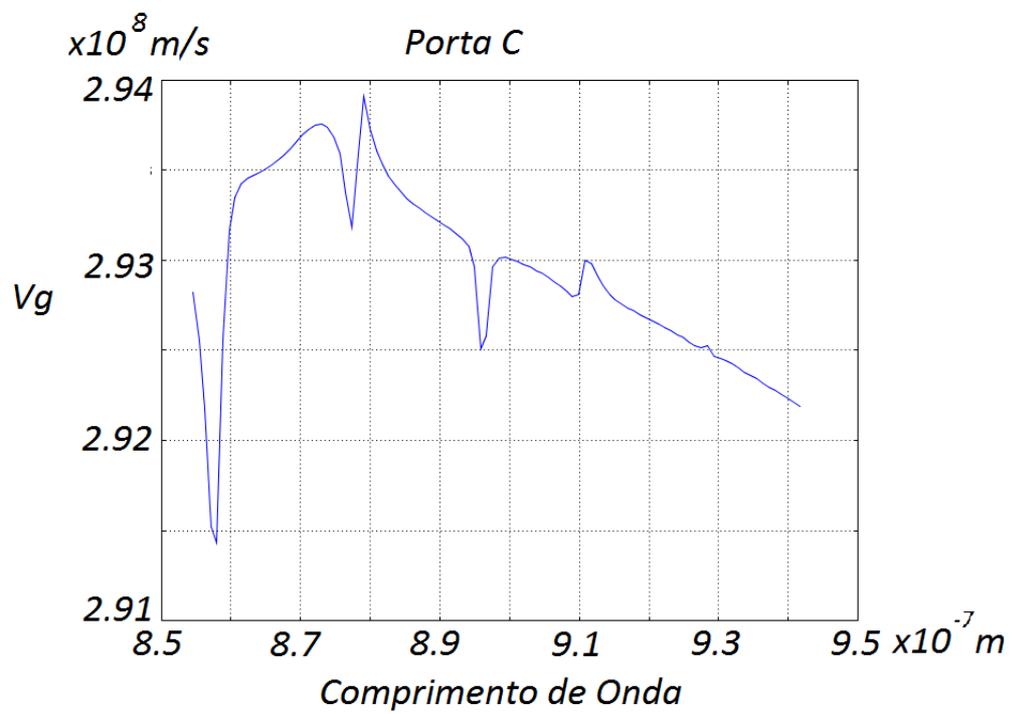


Figura 6.8: Velocidade de grupo na porta C.

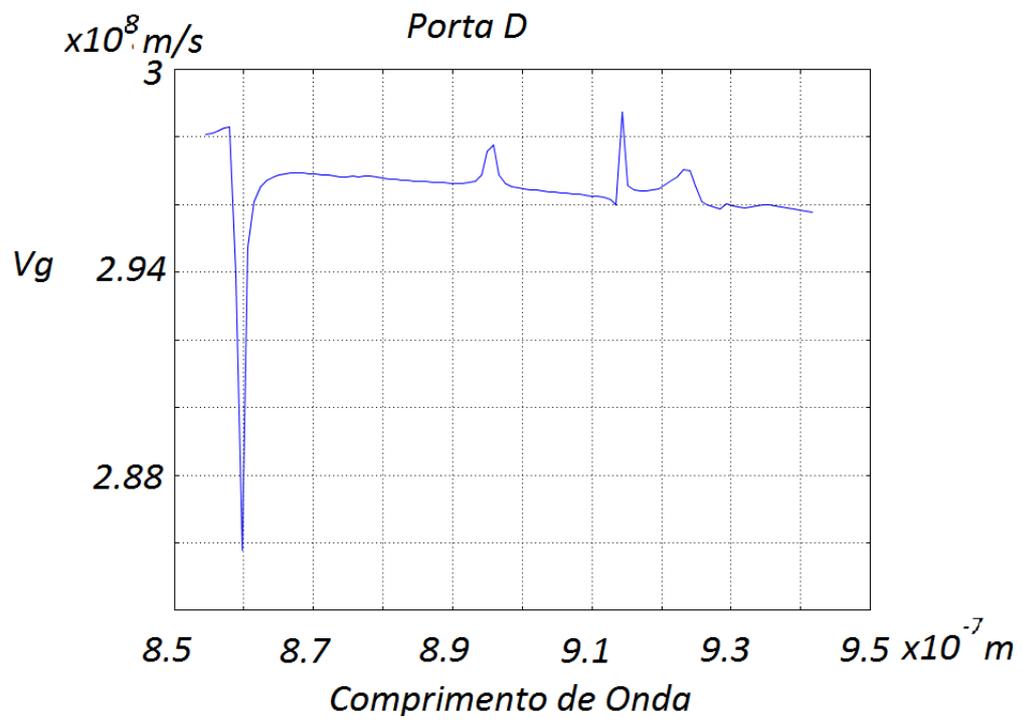


Figura 6.9: Velocidade de grupo na porta D.

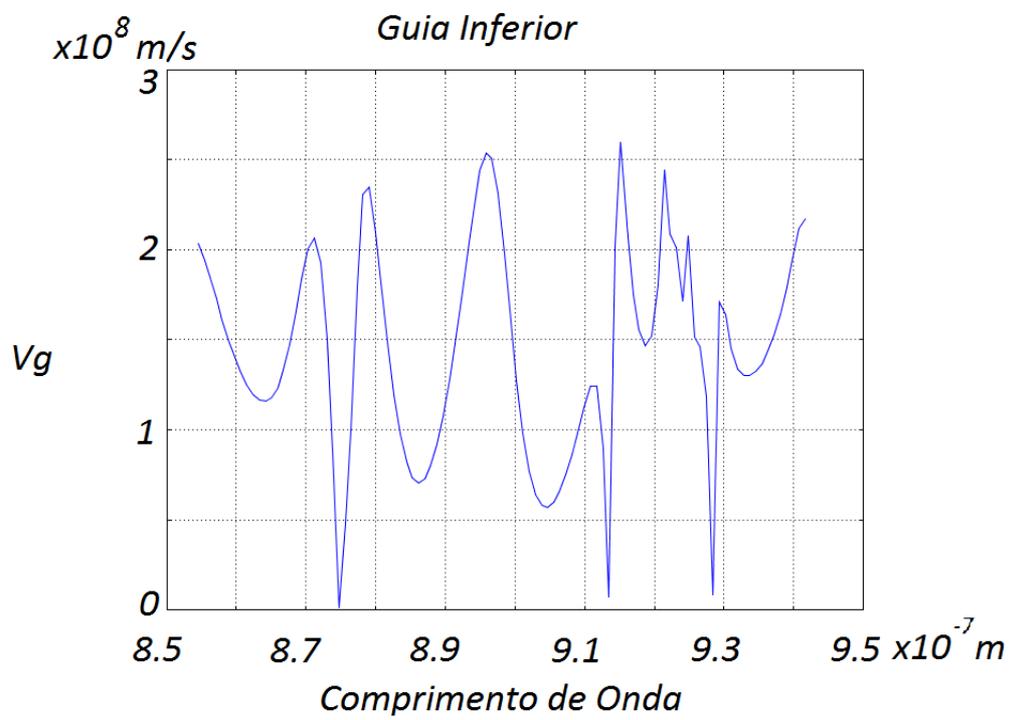


Figura 6.10: Velocidade de grupo na guia de onda inferior.

# Capítulo 7

## Conclusão e Perspectivas

Realizamos uma revisão das propriedades básicas dos cristais fotônicos. Incluímos a exposição do importante conceito e desenvolvimento da equação característica, que nos fornece os modos ópticos permitidos. Mostramos como os conceitos contidos no teorema de Bloch e na lei de Bragg estão relacionados com o conceito de estrutura de bandas. Em seguida estudamos as origens físicas da estrutura de bandas. Após revisarmos o fenômeno de luz lenta, analisamos e mostramos (por meio de simulações computacionais) o surgimento de luz lenta em um cristal fotônico bidimensional com defeitos formando guias de onda e cavidades ressonantes.

Fenômenos de luz lenta são bons candidatos a estimular o progresso das comunicações ópticas. Em trabalhos futuros, analisaremos como adequar a geometria do cristal proposto no capítulo 6 para aplicações práticas. Outra alternativa será estudar como cavidades de outros formatos lidam com a velocidade de grupo, e observar possíveis modos de luz lenta em tais geometrias.

# Referências

- [1] E. Yablonovitch, Phys. Rev. Lett. **58** (1987)
- [2] S. John, Phys. Rev. Lett. **58** (1987)
- [3] Igor A. Sukhoivanov e Igor V. Guryev, Photonic Crystal - Physics and Practical Modeling, Springer (2009)
- [4] E. Yablonovitch, T. J. Gmitter, e K. M. Leung, Phys. Rev. Lett. **67** (1991)
- [5] S. Fan, P. R. Villeneuve, R. D. Meade, e J. D. Joannopoulos, Appl. Phys. Lett. **65** (1994)
- [6] H. S. Sözüer, e J. P. Dowling, J. Mod. Opt. **41** (1994)
- [7] A. Reynolds, F. López-Tejeira, D. Cassagne, F. J. García-Vidal, C. Jouanin, e J. Sánchez-Dehesa, Phys. Rev. B **60** (1999)
- [8] E. Palacios-Lidón, A. Blanco, M. Ibisate, F. Meseguer, C. López, e J. Sánchez-Dehesa, Appl. Phys. Lett. **81** (2002)
- [9] O. D. Velev, T. A. Jede, R. F. Lobo, e A. M. Lenhoff, Nature **389** (1997)
- [10] J. E. G. J. Wijnhoven, e W. L. Vos, Science **281** (1998)
- [11] N. Tétreault, A. Mihi, H. Míguez, I. Rodríguez, G. A. Ozin, F. Meseguer, e V. Kitaev, Adv. Mater. **16** (2004).
- [12] P. Jiang, J. F. Bertone, K. S. Hwang, e V. L. Colvin, Chem. Mater. **11** (1999)

- [13] C. F. Blanford, H. Yan, R. C. Schrodin, M. Al-Daous, e A. Stein, *Adv. Mater.* **13** (2001)
- [14] K. Sumioka, H. Kayashima, e T. Tsutsui, *Adv. Mater.* **14** (2002)
- [15] K. Busch e S. John, *Phys. Rev. E* **58** (1998)
- [16] S. H. Foulger, P. Jiang, A. Lattam, D. W. Smith, Jr., J. Ballato, D. E. Dausch, S. Grego, e B. R. Stoner, *Adv. Mater.* **15** (2003)
- [17] P. Sheng, W. Wen, N. Wang, H. Ma, Z. Lin, W. Y. Zhang, X. Y. Lei, Z. L. Wang, D. G. Zheng, W. Y. Tam, e C. T. Chan, *Pure Appl. Chem.* **72** (2000)
- [18] Z. Gu, A. Fujishima, e O. Sato, *J. Am. Chem. Soc.* **122** (2000)
- [19] S. W. Leonard, J. P. Mondia, H. M. van Driel, O. Toader, S. John, K. Busch, A. Birner, U. Gösele, e V. Lehmann, *Phys. Rev. B* **61** (2000)
- [20] H. Takeda e K. Yoshino, *J. Appl. Phys.* **92** (2002)
- [21] Ch. Schuller, F. Klopff, J. P. Reithmair, M. Kamp, e A. Forchel, *Appl. Phys. Lett.* **82** (2003)
- [22] G. Mertens, T. Röder, H. Matthias, H. Marsmann, H. R. Kitzrow, S. L. Schweizer, C. Jamois, R. B. Wehrspohn, e M. Neubert, *Appl. Phys. Lett.* **83** (2003)
- [23] S. Kubo, Z. Gu, K. Takahashi, A. Fujishima, H. Segawa, e O. Sato, *J. Am. Chem. Soc.* **126** (2004)
- [24] T. Ruhl, P. Spahn, C. Hermann, C. Jamois, e O. Hess, *Adv. Funct. Mater.* **16** (2006)
- [25] J. D. Joannopoulos. **Ab Initio Physics**. Disponível em <http://ab-initio.mit.edu/book/>. Acesso: 01 setembro 2010

- [26] J. D. Joannopoulos, R. D. Meade, e J. N. Winn, Princeton University Press, Princeton, NJ (1995)
- [27] K. M. Ho, C. T. Chan, e C. M. Soukoulis, Phys. Rev. Lett. **65** (1990)
- [28] S. Kittel, Introduction to Solid State Physics, Ch. 2, John Wiley and Sons (1995)
- [29] E. Yablonovitch e T. J. Gmitter, Phys. Rev. Lett. **63** (1989)
- [30] S. Satpathy, Ze Zhang, e M. R. Salehpour, Phys. Rev. Lett. **64** (1990)
- [31] K. M. Leung e Y. F. Liu, Phys. Rev. B **41** (1990)
- [32] S. John e R. Rangarajan, Phys. Rev. B **38** (1988)
- [33] E. N. Economou e A. Zdetsis, Phys. Rev. B **40** (1989)
- [34] K. M. Leung e Y. F. Liu, Phys. Rev. Lett. **65** (1990)
- [35] Ze Zhang e S. Satpathy, Phys. Rev. Lett. **65** (1990)
- [36] C. T. Chan, K. M. Ho, e C. M. Soukoulis, Europhys. Lett. **16** (1991)
- [37] E. Ozbay, A. Abeyta, G. Tuttle, M. C. Tringides, R. Biswas, C. T. Chan, C. M. Soukoulis, e K. M. Ho, Phys. Rev. B **50** (1994)
- [38] L. Brillouin, Academic, New York (1960).
- [39] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskii. Electrodynamics of continuous media. (Pergamon, N.Y. 1984).
- [40] A. Yariv e Pochi Yeh., Wiley-Interscience (1984).
- [41] A. Sommerfeld, Phys. Z. **8** (1907).
- [42] A. Kuzmich, A. Dogariu, L. J. Wang, P. W. Milonni, R. Y. Chiao, Phys. Rev. Lett. **86** (2001).

- [43] R. W. Boyd, D. J. Gauthier, in Progress in Optics, E. Wolf, Ed. Elsevier, Amsterdam (2002).
- [44] P. W. Milonni, J. Phys. B **35** (2002).
- [45] V. G. Veselago, Soviet Physics USPEKHI **10** (1968).
- [46] L. Hau, S. Harris, Z. Dutton, C. Behroozi. Nature **397** (1999).
- [47] M. Kash, V. Sautenkov, Al. Zibrov, L. Hollberg, G. Welch, M. Lukin, Yu. Rostovtsev, E. Fry, e M. Scully. Phys. Rev. Lett. **82** (1999)
- [48] D. Budker, D. F. Kimball, S. M. Rochester, e V. V. Yashchuk. Phys. Rev. Lett. **83** (1999).
- [49] M. Lukin e A. Imamoglu. Nature **413** (2001).
- [50] D. F. Phillips, A. Fleischhauer, A. Mair, and R. L. Walsworth, M. D. Lukin. Phys. Rev. Lett. **86** (2001).
- [51] A.V. Turukhin, V. S. Sudarshanam, M. S. Shahriar, J. A. Musser, B. S. Ham, and P. R. Hemmer. Phys. Rev. Lett. **88** (2002).
- [52] Matthew S. Bigelow, Nick N. Lepeshkin, e Robert W. Boyd. Phys. Rev. Lett. **90** (2003).
- [53] Matthew S. Bigelow, Nick N. Lepeshkin, Robert W. Boyd. Science **301** (2003).
- [54] M. Yanik e S. Fan. Phys. Rev. Lett. **92** (2004).
- [55] A. Melloni, F. Morichetti, M. Maritelli. Optical and Quantum Electronics **35** (2003)
- [56] J. Poon, J. Scheuer, Y. Xu, e A. Yariv. J. Opt. Soc. Am. B **21** (2004).
- [57] J. Scheuer, G. Paloczi, J. Poon, e A. Yariv. OPN **16** (2005).

- [58] J. B. Khurgin. J. Opt. Soc. Am. B **22** (2005).
- [59] J. B. Khurgin. Optic Letters **30** (2005).
- [60] M. Notomi,<sup>1</sup> K. Yamada,<sup>2</sup> A. Shinya,<sup>1</sup> J. Takahashi,<sup>2</sup> C. Takahashi,<sup>2</sup> e I. Yokohama. Phys. Rev. Lett. **87** (2001).
- [61] M. Scalora, R. J. Flynn, S. B. Reinhardt, R. L. Fork, M. J. Bloemer, M. D. Tocci, C. M. Bowden, H. S. Ledbetter, J. M. Bendickson, J. P. Dowling, R. P. Leavitt. Phys. Rev. **54** (1996).
- [62] M. Bloemer, K. Myneni, M. Centini, M. Scalora, e G. D'Aguanno. Phys. Rev. **65** (2002).
- [63] M. Soljacic, S. Johnson, S. Fan, M. Ibanescu, E. Ippen, e J. D. Joannopoulos. J. Opt. Soc. Am. B **19** (2002).
- [64] Khurgin J B, J. Opt. Soc. Am. B **22** (2005)
- [65] Notomi M, Yamada K, Shinya A, Takahashi J, Takahashi C e Yokohama I Phys. Rev. Lett. (2001)
- [66] Engelen R J P, Sugimoto Y, Watanabe Y, Korterik J P, Ikeda N, van Hulst N F, Asakawa K e Kuipers L, Opt. Express **14** (2001)
- [67] Petrov A Y e Eich M, Appl. Phys. Lett. **85** (2004)
- [68] Krauss T F, J. Phys. D: Appl. Phys. **40** (2007)
- [69] Frandsen L H, Lavrinenko A V, Fage-Pedersen J e Borel P I, Opt. Express **14** (2006)
- [70] Biallo D, Ayre M, Karle T J, Settle M, D'Orazio A e Krauss T F (2007)
- [71] Yanik M F e Fan S, Phys. Rev. Lett. **92** (2004)
- [72] Hughes S, Ramunno L, Young J F e Sipe J E, Phys. Rev. Lett. **94** (2005)

- 
- [73] Ibanescu M, Johnson S G, Roundy D, Luo C, Fink Y e Joannopoulos J D, Phys. Rev. Lett. **92** (2004)
- [74] Figotin A e Vitebsky I, Phys. Rev. E **63** (2001)
- [75] Chang-Hasnain, C. J. Chuang, S. L., Journal of Lightwave Technology **24** (2006)
- [76] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L., McGraw-Hill (1988).