

# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>4</b>
<b>Abstract</b>	<b>5</b>
<b>Introdução Geral</b>	<b>5</b>
<b>1 Introdução Geral</b>	<b>6</b>
<b>2 Automodos das redes ópticas</b>	<b>15</b>
2.1 Equações de Maxwell para meios periódicos . . . . .	15
2.2 Teorema de Bloch . . . . .	19
2.3 O problema do auto - valor . . . . .	20
2.4 Redes ópticas em duas dimensões . . . . .	23
2.5 Conclusão . . . . .	26
<b>3 Oscilações de Rabi em redes ópticas</b>	<b>27</b>
3.1 Introdução . . . . .	27
3.2 Propagação linear. . . . .	27
3.3 Oscilações lineares em uma dimensão. . . . .	29
3.4 Oscilações lineares em duas dimensões. . . . .	32
3.5 Conclusão . . . . .	35
<b>4 Auto - desfocalização em redes opticamente induzidas</b>	<b>38</b>
4.1 Propagação não linear. . . . .	38
4.2 Oscilações não lineares em uma dimensão. . . . .	39
4.3 Oscilações não lineares em duas dimensões. . . . .	43
4.4 Conclusão . . . . .	45
<b>5 Conclusão Geral</b>	<b>47</b>
<b>6 Perspectivas</b>	<b>49</b>

# Lista de Figuras

1.1	Esquema básico de cristais fotônicos em uma, duas e três dimensões [3]. . .	7
1.2	Figura representando o colorido das asas da borboleta para ilustrar um cristal fotônico encontrado na natureza [6]. . . . .	9
1.3	Figura representando o colorido da bolha de sabão para ilustrar um cristal fotônico encontrado na natureza [6]. . . . .	9
1.4	Esquema representativo de uma rede opticamente induzida em uma e em três dimensões [10]. . . . .	11
3.1	A figura representa uma rede óptica quadrada e sua primeira zona de Brillouin. Temos o potencial $V_0 = 0.05$ e $\epsilon = 1$ . Os vetores da base da rede recíproca são $Q_1$ e $Q_2$ . . . . .	28
3.2	A linha contínua representa a oscilação da amplitude de Fourier $P_1$ em $\mathbf{k} = (k_B, 0)$ e a linha tracejada representa $P_2$ em $\mathbf{k} = (-k_B, 0)$ , a linha superior paralela ao eixo-z representa a soma de $P_1 + P_2$ . Usamos $V_0 = 0.05$ e $E = \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma}} \exp\{ik_Bx - \frac{\mathbf{r}^2}{(2\gamma)^2}\}$ com $\gamma = 50$ . . . . .	32
3.3	Os pontos luminosos representam as amplitudes do campo $ \mathbf{E} $ no espaço real, e os pontinhos no quadrado na linha inferior representam seu espectro de Fourier obtidos numericamente. Exibimos apenas os valores absolutos e apenas a parte no domínio espacial centradas em $r = 0$ , para melhor visualização [1]. Os parâmetros usados são da fig.3.1. . . . .	33
3.4	A linha sólida representa a posição média do feixe correspondendo a fig.3.2, e a linha tracejado representa o resultado teórico [35] com $ C_j ^2$ substituído pela potência numérica de Fourier $P_j$ da fig.3.2. . . . .	33
3.5	Representação das oscilações das amplitudes de Fourier para um sistema de quatro níveis. Mostramos $P_1 =  C_1 ^2$ (linha sólida), $P_2 =  C_2 ^2$ (linha tracejada), $P_3 =  C_3 ^2$ e $P_4 =  C_4 ^2$ (linha de pontos tracejadas). Usamos $V_0 = 0.05$ , $\epsilon = 1$ e $E = \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma}} \exp\{ik_B(x + y) - \frac{\mathbf{r}^2}{(2\gamma)^2}\}$ com $\gamma = 50$ . . . . .	35
3.6	A figura representa as posições médias $\langle x \rangle$ e $\langle y \rangle$ do feixe correspondente a fig.3.5 (linha sólida, $\langle x \rangle = \langle y \rangle$ ) [1] e o resultado teórico [3.23 e 3.24] com $ C_j ^2$ substituído por $P_{M_j}$ da fig.3.5 (linha tracejada). . . . .	36

- 4.1 A figura representa as oscilações das amplitudes de Fourier do campo elétrico para  $\sigma = 0.1$ ,  $V_0 = 0.05$ . No espaço de Fourier a linha sólida representa a oscilação do modo de Fourier  $P_1 = |C_1|^2$  em  $k = (k_B, 0)$ , a linha tracejada  $P_2 = |C_2|^2$  em  $(-k_B, 0)$  e a linha horizontal ao eixo  $z$  é a soma das amplitudes  $P_1 + P_2$ . . . . . 41
- 4.2 Oscilações das amplitudes de Fourier do campo elétrico em dois níveis para  $\sigma = 0.105, 0.2, 0.3, 0.5, 0.9$  e  $V_0 = 0.05$ . No espaço de Fourier a linha sólida representa a oscilação do modo de Fourier  $P_1 = |C_1|^2$  em  $k = (k_B, 0)$ , a linha tracejada  $P_2 = |C_2|^2$  em  $(-k_B, 0)$  e a linha horizontal ao eixo  $z$  é a soma das amplitudes  $P_1 + P_2$ . . . . . 42
- 4.3 Oscilações dos modos de Fourier do campo em quatro níveis. Mostramos  $P_1 = |C_1|^2$  (linha sólida),  $P_2 = |C_2|^2$  (linha tracejada),  $P_3 = |C_3|^2$  e  $P_4 = |C_4|^2$  (linha de pontos tracejadas). Aqui usamos  $\sigma = 0.1; 0.2; 0.3; 0.5; 0.9$ ,  $V_0 = 0.05$  e  $\varepsilon = 1$ . . . . . 44

OSCILAÇÕES DE RABI EM REDES ÓPTICAS NÃO LINEARES

*Cícero Rita da Silva*

*Dissertação apresentada ao Instituto de Física  
da Universidade Federal de Alagoas como parte  
dos requisitos para obtenção do Título de  
Mestre em Ciências*

ORIENTADORA: *Profa. Dra. Solange Bessa Cavalcanti*

CO - ORIENTADOR: *Prof. Dr. Valery S. Shchesnovich*

Maceió, Alagoas

2008

*A minha esposa Elisângela Alves da Silva.*

# Agradecimentos

- Agradeço ao bondoso **Deus** pela sua infinita graça para comigo. Mesmo com todas as dificuldades encontradas nesse programa de estudo, quando buscava atingir meus ideais, Ele sempre me fortaleceu nos momentos difíceis, sem o auxílio do meu **Senhor** não teria conseguido alcançar meus objetivos.
- Aos meus queridos pais: Gilberto Pedro da Silva e Maria Salete da Silva pelo afeto e carinho que sempre tiveram por mim, durante meu período de estudo, dando - me apoio e incentivo, compartilhando comigo os momentos bons e maus nessa fase da minha vida.
- À minha querida esposa: Elisângela Alves da Silva pelo seu carinho e incentivo para que esta fase de estudo viesse a ser concluída com sucesso.
- Aos meus irmãos: Sílvio Roberto da Silva e sua esposa Rubiam dos Santos Almeida, Carlos Roberto da Silva e Ingberg Pedro da Silva pelo afeto cordial, e ofereço a eles como possibilidades de conquistar metas importantes na vida.
- A minha sobrinha: Elisama dos Santos Almeida Silva por ter nascido durante meu curso de mestrado.
- Agradeço a Professora Solange Bessa Cavalcanti pela orientação e confiança que sempre depositou em mim durante este período de estudo.
- Ao professor Valery S. Shchesnovich, cuja co-orientação foi muito importante para esse trabalho.
- Ao meu colega do Instituto de Física: Willamys Cristiano por ter me ajudado com o Matlab quando precisei, meus sinceros agradecimentos.
- Aos meus colegas, Askery, Manoel, Adriano, Wandearley e Socorro que estudaram comigo algumas disciplinas durante o curso de mestrado, e aos demais colegas do Instituto de Física que proporcionaram um ambiente alegre e dinâmico durante o processo da minha formação.
- Aos professores, funcionários e alunos do Instituto de Física da UFAL.

- À CAPES pelo apoio financeiro.
- A todas as pessoas que contribuíram direta, ou indiretamente para minha formação acadêmica e social.

# Resumo

Uma rede opticamente induzida é um arranjo periódico produzido pela superposição de dois ou mais feixes de laser que ao interferirem criam um padrão de intensidade periódico espacial. Uma importante diferença entre uma rede cristalina no estado sólido e uma rede produzida opticamente é que a última apresenta um tempo de coerência longo, permitindo a observação de fenômenos coerentes tal como as oscilações de Bloch. Recentemente, um efeito interessante análogo às oscilações de Rabi em um sistema atômico de dois níveis impulsionado por um campo externo, foi publicado na literatura [1]: um feixe óptico composto de um par de frequências, ressonantes com os pontos de alta simetria da zona de Brillouin, propagando - se através de uma rede óptica exibe oscilações dos modos de Fourier entre as frequências adequadas para o acoplamento com a rede. Portanto, no caso óptico o campo representa a matéria, enquanto a rede representa a intensidade do campo aplicado que acopla as frequências. Baseado neste resultado, o objetivo desta dissertação é investigar a influência da auto - desfocalização nas oscilações ópticas de Rabi. Demonstraremos, através de cálculos numéricos da equação de onda não linear, que em uma rede opticamente induzida na presença da auto - desfocalização, essas oscilações vão desaparecendo. O resultado do desaparecimento das oscilações de Fourier pode ser compreendido considerando que a auto - desfocalização promove um adicionamento de fases nos modos que eram ressonantes  $-k_B$  e  $k_B$ , de maneira diferente, de forma que a diferença básica entre  $k_B$  e  $-k_B$  não será mais um vetor da rede recíproca, e como consequência as oscilações de Rabi óptica desaparecem, pois o acoplamento com a rede requer esta condição nas frequências ressonantes.



# Abstract

An optical lattice is a periodic array produced by the superposition of two or more counter-propagating laser beams which interfere and create a spatial periodic intensity pattern. An important difference between a solid state crystalline lattice and an optically induced lattice is that the latter have a longer coherence time which permits the observation of coherent phenomenon such as Bloch oscillations. Recently, an interesting effect has been reported in the literature [1], which is the analogue of Rabi oscillations in two level systems driven by an external optical field: an optical beam composed by pair of frequencies, resonants with the high symmetry points of the Brillouin zone, propagating through an optical lattice exhibits oscillations of the Fourier ways between the frequencies due to the coupling with the lattice. Therefore, in the optical case the field plays the role of the matter, while the lattice plays the role of the driving field which couples the frequencies. Based in this result, the objective of this paper is to investigate the influence of self-defocusing in the optical Rabi oscillation. We have shown, through numerical calculation of the wave nonlinear equation, that in the self-defocusing optical lattice, these oscillations go disappearing. The result of the disappearance of the oscillations of Fourier can be understood considering that self-defocusing promotes an addition of phases in the ways that were resonant -  $kB$  and  $kB$ , in different way, form that the basic difference between  $kB$  and -  $kB$  will not be plus a vector of the reciprocal net, and as consequence the oscillations of optic Rabi disappear, therefore the coupling with the net requires this condition in the resonant frequencies.

# Capítulo 1

## Introdução Geral

A propagação de luz em estruturas periódicas apresenta características intrigantes. A periodicidade do meio de propagação em escalas comparáveis ao comprimento de onda da luz possibilita a formação de um espalhamento coerente, isto é, o espalhamento ocorre de forma sistemática. No decorrer da propagação, uma propriedade observada é a existência de regiões espectrais proibidas para a propagação luminosa, pois para comprimentos de onda próximos à escala da periodicidade do meio, as ondas interferem podendo acontecer interferência destrutiva nesses meios dependendo da diferença de fase das ondas superpostas. Essa estrutura periódica consiste, portanto, em um arranjo especial das reflexões de Bragg [2]. As sucessivas reflexões de Bragg possibilitam o confinamento da luz em estruturas que possuem uma distribuição periódica do índice de refração.

Em analogia com a teoria de condução eletrônica, devemos resolver um problema de auto - valor, associado à equação de onda sujeita as condições de contorno periódicas. Ou seja, utilizamos explicitamente o fato de que o potencial elétrico criado pelos átomos é periódico e que esta periodicidade será refletida na forma da função de onda que descreve o movimento eletrônico (Teorema de Bloch) [3]. O mesmo fato usado para condução eletrônica pode ser trabalhado nos cristais fotônicos que por sua vez, são análogos às redes ópticas.

Os cristais fotônicos são arranjos regulares de materiais com índices de refração

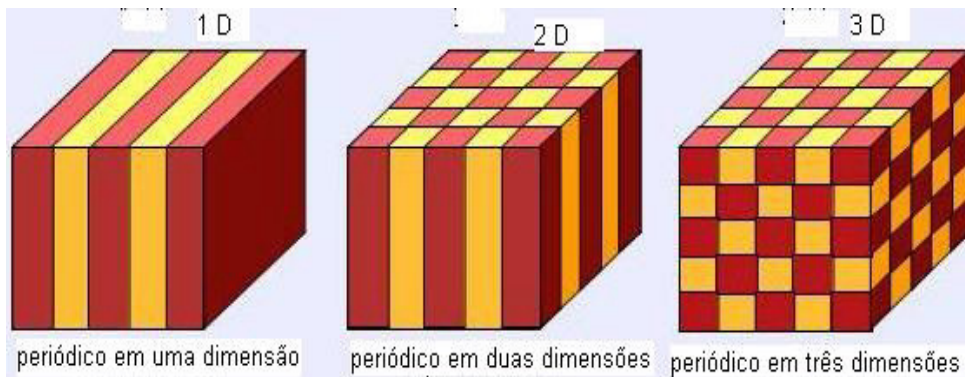


Figura 1.1: Esquema básico de cristais fotônicos em uma, duas e três dimensões [3].

periódicos, ou seja, esses materiais são compostos periodicamente de diferentes dielétricos que afetam a propagação da onda eletromagnética (EM), do mesmo modo como os potenciais periódicos em cristais semicondutores afetam o movimento dos elétrons, permitindo ou proibindo a passagem dessas partículas no material, definindo assim, as bandas de energia eletrônica (uma faixa de energia que um elétron é “permitido” ou “proibido” ter). Cristais fotônicos podem ser encontrados na natureza em diversas formas e, por isso eles têm despertado interesse de vários cientistas nos últimos cem anos no que tange a estudos analíticos dos possíveis fenômenos observados. Os cristais fotônicos que são simplesmente encontrados no meio natural, contêm regiões internas regularmente repetidas cujas constantes dielétricas são periódicas. Os fótons, que nesse caso manifestam sua natureza como onda, propagam-se através dessa estrutura ou não, dependendo do seu comprimento de onda. Os comprimentos de onda de luz (córrego de fótons) que são permitidos viajar, são conhecidos como “modos” do campo eletromagnético. As bandas não permitidas para os comprimentos de onda de luz, ou as faixas de frequências onde não existem “modos” do campo eletromagnético, são chamadas de *bandgaps* fotônicos. Podemos classificar os cristais fotônicos em três categorias: de uma dimensão (1D), duas dimensões (2D), e três dimensões (3D), de acordo com a dimensionalidade (a fig.1.1 ilustra as dimensões dos cristais fotônicos).

A luz apresenta diversas vantagens sobre os elétrons, pois um "pacote" de luz pode transportar uma quantidade imensa de informação por segundo [3] e [4]. A banda de frequência óptica é muito mais larga que a dos metais, pois a banda larga do sistema de comunicação das fibras ópticas é tipicamente da ordem de um terahertz, enquanto que dos sistemas eletrônicos (tais como telefone) é somente alguns kilohertz. Os fótons não interagem entre si como os elétrons e conseqüentemente existe uma reduzida perda de energia [3].

A propagação de ondas através de meios periódicos foi primeiramente estudada por Lord Rayleigh em 1887 [5], em conexão com as propriedades peculiares refletidas de um minério cristalino com planos periódicos idênticos. Esses planos periódicos são materiais dielétricos que desempenham a função de um espelho para refletir as ondas incidentes na sua superfície. As interferências construtivas e destrutivas das ondas refletidas através dos planos idênticos e paralelos, correspondem a um cristal fotônico em uma dimensão, identificando o fato em que as regiões escuras que são causadas pelas interferências destrutivas podem ser identificadas como um *bandgap* estreito que proíbe a propagação da luz através desses planos refletivos. A incidência da luz na superfície desses referidos planos, pode acontecer através de um ângulo qualquer e não exatamente na normal, resultando num arranjo periódico em que o *bandgap* depende do ângulo de incidência da luz com os planos, como conseqüência o campo de luz produz um colorido que reflete intensamente variando esse referido ângulo de incidência. Um exemplo muito encontrado na natureza é o colorido que aparece nas asas das borboletas e numa simples bolha de sabão (fig.1.2 e fig.1.3). Notemos que o colorido depende do ângulo em que estamos observando a superfície desses elementos. Apesar dessas microestruturas periódicas não apresentarem um *bandgap* perfeito, elas se comportam como um verdadeiro cristal fotônico [6].

No desenvolvimento da pesquisa em meios periódicos surgiram os filmes de multicamadas que foram estudados intensamente a partir do século XX, mas somente



Figura 1.2: Figura representando o colorido das asas da borboleta para ilustrar um cristal fotônico encontrado na natureza [6].



Figura 1.3: Figura representando o colorido da bolha de sabão para ilustrar um cristal fotônico encontrado na natureza [6].

aproximadamente cem anos mais tarde, quando Eli Yablonovitch e Sajeev John [7], que trabalharam com as ferramentas do eletromagnetismo clássico e a física do estado sólido, introduziram a concepção do *bandgap* fotônico em uma, duas e três dimensões. Daí surgiram os cristais fotônicos, sendo que a idéia mais comum para esses pesquisadores era usar esses materiais baseando - se em sua potencialidade de transmitir luz em frequências selecionadas e para dobrar seus trajetos sem perder nenhuma energia [8]. Os cristais fotônicos trouxeram um avanço considerado à ciência e à tecnologia em termos de guias de ondas [6]. Os cientistas mencionados acima foram os pioneiros a idealizar a concepção dos materiais compostos de cristais fotônicos. A idéia era construir materiais que tivessem a capacidade de afetar as propriedades dos fótons, da mesma maneira que os materiais de cristais ordinários semicondutores afetam as propriedades dos elétrons. Ambos os cientistas, Yablonovitch e John [7] sugeriram estruturas com variações periódicas cujas constantes dielétricas influenciassem a natureza dos modos dos fótons em um material. O alvo de Yablonovitch era controlar as propriedades radiativas dos materiais, enquanto John era efetivar as localizações dos fótons introduzindo um índice de refração variável aleatório [7]. Do ponto de vista teórico, a descrição da propagação da luz numa rede fotônica está embutida na solução das equações de Maxwell, para um meio periódico dielétrico. Um aspecto atraente da equação de onda deduzida a partir das equações de Maxwell é que, ao contrário do problema complexo da forte interação de muitas partículas em um sólido, pode ser resolvida exatamente. Com materiais lineares não existem interações entre os fótons, de modo que podemos tratar razoavelmente como o problema padrão de uma única partícula. Isso significa que teoricamente a computação pode descrever e prever exatamente as propriedades dos fótons e, portanto seria muito útil e complementar as investigações experimentais [4] - [9].

Em analogia com um cristal fotônico ou ordinário podemos definir uma rede óptica como sendo um potencial periódico praticamente perfeito de átomos, formada

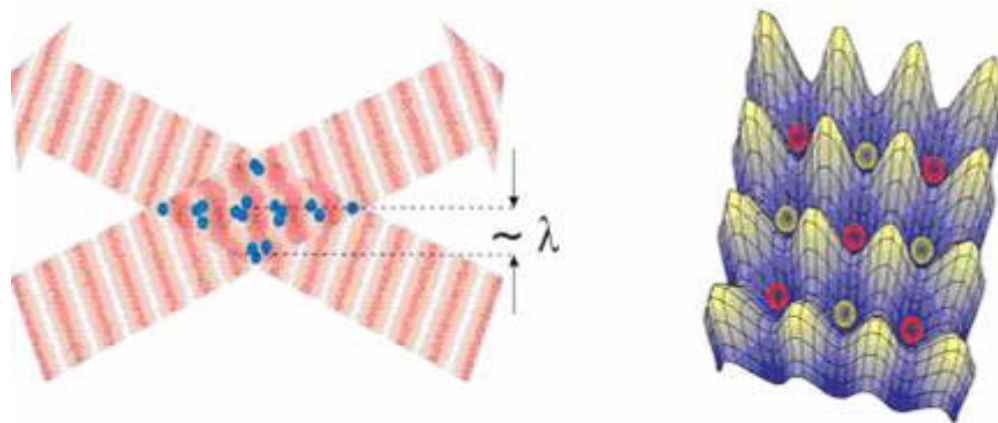


Figura 1.4: Esquema representativo de uma rede opticamente induzida em uma e em três dimensões [10].

usando uma superposição de dois ou mais feixes lasers criando um padrão de intensidade periódico no espaço. O potencial periódico resultante pode ser usado para aprisionar os átomos que estarão submetidos a interferência dos feixes lasers em um menor potencial da rede periódica. Esse sistema de átomos presos assemelha-se a um cristal, no sentido que essas partículas estão localizadas periodicamente no espaço [9]. Igualmente temos um condensado de Bose – Einstein (BEC) que é uma fonte coerente de ondas de matéria, uma coleção de átomos, todos em um mesmo estado. Um teste padrão regular das armadilhas microscópicas para átomos, formado pela força da luz em um padrão de interferência esquematizado por um bombeamento de feixes laser, é visto na fig.1.4 [10]. Os lasers causam o congelamento dos átomos fazendo com que essas partículas percam bastante energia, tornando-se uma armadilha como um poço de potencial [7] e [11].

Esse sistema é chamado de rede óptica, e para estabilizar a existência dessa rede óptica são realizadas as experiências de espalhamento de Bragg, nas quais são observadas as reflexões do feixe laser. Por causa do espaçamento na rede que é na escala de micron (o comprimento de onda de luz que está na armadilha) em vez de angstrom, o espalhamento

de Bragg em grande escala ocorre para a luz visível em vez de raios X [4]. Uma rede óptica demonstra muitas características associadas com os cristais no estado sólido, mas uma importante diferença é que o tempo de coerência das redes ópticas é bastante longo permitindo observar alguns fenômenos coerentes tal como as ondas de Bloch [12].

Uma das concepções fundamentais da mecânica quântica é a dualidade partícula-onda. Ondas eletromagnéticas propagando - se num meio dielétrico periódico se comportam de modo similar a elétrons em um potencial cristalino como já mencionamos. Portanto, muitos efeitos originalmente previstos na física do estado sólido podem ser observados na propagação da luz em estruturas periódicas. Um fenômeno fundamental bem conhecido associado com a propagação de ondas e partículas quânticas em meio periódico sob a ação de uma força externa resistiva é conhecido como oscilações de Bloch [13]. Em um potencial periódico, a dinâmica de uma partícula é dramaticamente afetada por uma estrutura de *bandgap*. Além disso, devido à existência do número de ondas máximo determinado pelas fronteiras da zona de Brillouin, até partículas associadas com uma simples banda espectral podem se comportar de uma maneira fora do comum [14]. As partículas não seguem a direção de uma força resistiva. Em vez disso realizam movimentos oscilatórios, que são conhecidos como as oscilações de Bloch. Tais oscilações ocorrem em consequência da presença de uma força externa fazendo com que a partícula ganhe momento e se aproxime da ressonância de Bragg [15] e [16].

Nesse trabalho, estudaremos a propagação de um feixe luminoso numa rede óptica periódica formada pela interferência de feixes lasers usando a aproximação paraxial (significa que o feixe de luz não é muito aberto). Suponha que o feixe luminoso propague na direção  $z$ , então imaginemos um cone cujo eixo está sobre o eixo  $z$  e o círculo no plano  $-xy$ . Este cone não pode ser muito aberto. Se você usar a componente dos raios na direção  $z$ , essa componente deve ser bem grande comparada com as componentes das outras dimensões. Sendo a rede periódica, usaremos o espaço de Fourier como espaço recíproco,



fazendo as transformações de Fourier necessárias para o campo e para o potencial da rede, e então analisaremos o comportamento das amplitudes de Fourier do campo óptico. Mostraremos que o movimento oscilatório dos modos de Fourier assemelham – se as bem conhecidas oscilações de Rabi. As oscilações de Rabi foram primeiramente identificadas por volta dos anos trinta, quando Rabi e seus colegas mostraram que usando um campo magnético variável, podia forçar o momento magnético para ir de um estado a outro [17]. Uma série de experiências culminou em 1937 nas descobertas que as transições de estado poderiam ser introduzidas usando campos dependentes do tempo. As oscilações de Rabi constituem a base do mecanismo por trás da ressonância por imagem magnética, equipamento encontrado em hospitais. As oscilações de Rabi também foram identificadas na matéria durante o processo que ocorre em um sistema de dois níveis ao absorver ou emitir fótons por emissão estimulada. Isso ocorre quando um feixe de luz coerente atinge tal sistema [18]. Uma absorção seguida de uma emissão compõe um ciclo de Rabi, e o inverso da duração de um ciclo é chamado de frequência de Rabi em que a matéria oscila [18], por exemplo, um átomo de dois níveis (um átomo onde um elétron pode estar ou no estado fundamental, ou no estado excitado). Em 2007, Shchesnovich & Chávez [1], estudaram o comportamento das oscilações das amplitudes de Fourier semelhante as oscilações de Rabi na matéria em uma rede óptica linear. Mostrando que tais oscilações no espaço real são as posições médias do feixe óptico que se propaga na rede. Nesse trabalho, estudamos a partir da equação da onda a influência do efeito não linear chamado auto - desfocalização (*self - defocusing*) produzido por um campo intenso sobre as oscilações dos modos de Fourier na rede óptica quadrada. Introduziremos um termo não linear, cujo coeficiente de não linearidade é muito menor que um (como uma pequena perturbação ao sistema), na equação de propagação do feixe óptico para obter o comportamento das oscilações das amplitudes de Fourier tipo as bem conhecidas oscilações de Rabi na rede óptica sob a influência do efeito auto - desfocalização atuando sobre o campo eletromagnético, mantendo

o potencial da rede constante.

# Capítulo 2

## Automodos das redes ópticas

Neste capítulo, analisaremos a propagação do campo eletromagnético em uma rede óptica, formulando o problema de auto - valor da equação de onda e fornecendo um método numérico geral para resolução desse problema. Baseado no conjunto completo das funções de onda que descrevem a propagação do envelope, também obteremos as expressões para as funções de Green retardadas relacionadas ao campo elétrico. Na seqüência deduziremos a equação de onda em três dimensões, e trataremos o caso de uma rede óptica em duas dimensões, para a qual a equação de onda vetorial se reduz a duas equações escalares e independentes e em seguida simplificaremos as expressões relevantes.

### 2.1 Equações de Maxwell para meios periódicos

Na eletrodinâmica clássica, o comportamento do campo eletromagnético é descrito pelas equações de Maxwell [19]. Essas equações formam um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem acopladas para os vetores campo elétrico e campo magnético. No Sistema Internacional de Unidades as equações de Maxwell no vácuo podem ser escritas como:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.4)$$

onde  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{B}$  são os vetores indução elétrica e magnética, respectivamente.  $\mathbf{E}$  é o vetor campo elétrico, e  $\mathbf{H}$  é o vetor campo magnético. Desprezamos os efeitos da corrente elétrica e das cargas elétricas livres no meio periódico. Para resolver a equação de onda obtida a partir das equações de Maxwell, precisamos usar as equações constitutivas que relacionam  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{E}$  como também a relação entre  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$  [20]. Nesse trabalho não trataremos com as propriedades magnéticas, assumiremos que a permeabilidade magnética da rede óptica é igual a do espaço livre  $\mu_0$ :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t). \quad (2.5)$$

Assumiremos que a constante dielétrica é real, isotrópica e perfeitamente periódica com relação a coordenada espacial  $\mathbf{r}$ , e não depende da frequência da onda eletromagnética [21]. Representaremos a constante dielétrica do espaço livre por  $\varepsilon_0$  e a constante dielétrica relativa da rede óptica por  $\varepsilon(\mathbf{r})$ . O deslocamento elétrico é dado por

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (2.6)$$

A periodicidade de  $\varepsilon(\mathbf{r})$  implica,

$$\varepsilon(\mathbf{r} + \mathbf{a}_i) = \varepsilon(\mathbf{r}), \quad (2.7)$$

(para  $i = 1, 2, 3$ ), onde  $\{\mathbf{a}_i\}$ , são os vetores elementares da rede óptica. Devido à periodicidade espacial, podemos expandir  $\varepsilon^{-1}(\mathbf{r})$  em série de Fourier. Por isso, introduziremos os vetores elementares da rede recíproca  $\{\mathbf{Q}_i, i = 1, 2, 3\}$  e os vetores da rede recíproca  $\{\mathbf{G}\}$ :

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{Q}_j = 2\pi\delta_{ij}, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{G} = l_1\mathbf{Q}_1 + l_2\mathbf{Q}_2 + l_3\mathbf{Q}_3, \quad (2.9)$$

onde os  $\{l_i\}$  são inteiros arbitrários e  $\delta_{ij}$  é a função delta de Kronecker.  $\varepsilon^{-1}(\mathbf{r})$  é expressa como,

$$\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} = \sum_{\mathbf{G}} k(\mathbf{G}) \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}), \quad (2.10)$$

os coeficientes  $k(\mathbf{G})$  são números complexos. Para garantir que  $\varepsilon(\mathbf{r})$  seja uma função real, é necessário que

$$k(-\mathbf{G}) = k^*(\mathbf{G}), \quad (2.11)$$

para os quais a soma dos termos em  $\mathbf{G}$  e em  $-\mathbf{G}$  seja real [22]. Quando substituirmos as equações 2.5 e 2.6 em 2.1 - 2.4 obtemos,

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad (2.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (2.13)$$

$$\nabla \cdot \{\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\} = 0, \quad (2.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.15)$$

Eliminando  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  e  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  das equações 2.12 e 2.13, obtemos as seguintes equações de onda:

$$\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \{ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (2.16)$$

$$\nabla \times \left\{ \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \right\} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad (2.17)$$

onde

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}, \quad (2.18)$$

é a velocidade da luz no espaço livre. Agora vamos tentar um tipo de solução para as equações 2.16 e 2.17 da forma,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t), \quad (2.19)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t), \quad (2.20)$$

onde  $\omega$  é a auto - frequência angular, e  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  e  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  são as auto - funções das equações de onda [20]. E essas auto - funções satisfazem as equações de auto - valores abaixo:

$$\zeta_E \mathbf{E}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \{ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \} = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (2.21)$$

$$\zeta_H \mathbf{H}(\mathbf{r}) \equiv \nabla \times \left\{ \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \right\} = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad (2.22)$$

onde os dois operadores diferenciais  $\zeta_E$  e  $\zeta_H$  são definidos na primeira igualdade das equações acima.

## 2.2 Teorema de Bloch

Sabendo que  $\varepsilon$  é uma função periódica da coordenada espacial  $\mathbf{r}$ , podemos aplicar o teorema de Bloch [13] para as equações 2.21 e 2.22, como no caso da equação de onda eletrônica no cristal ordinário com um potencial periódico adequado para rede de átomos regular.  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  e  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  são caracterizados por um vetor de onda  $\boldsymbol{\kappa}$  na primeira zona de Brillouin e um índice  $n$  de banda, podendo ser expresso como,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{\kappa n}(\mathbf{r}) = u_{\kappa n}(\mathbf{r}) \exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}), \quad (2.23)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_{\kappa n}(\mathbf{r}) = v_{\kappa n}(\mathbf{r}) \exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}), \quad (2.24)$$

onde  $u_{\kappa n}(r)$  e  $v_{\kappa n}(r)$  são as funções vetoriais periódicas que satisfazem as seguintes relações:

$$\mathbf{u}_{\kappa n}(\mathbf{r} + \mathbf{a}_i) = \mathbf{u}_{\kappa n}(\mathbf{r}), \quad (2.25)$$

$$\mathbf{v}_{\kappa n}(\mathbf{r} + \mathbf{a}_i) = \mathbf{v}_{\kappa n}(\mathbf{r}), \quad (2.26)$$

para  $i = 1, 2, 3$ . Devido à periodicidade espacial dessas funções, podemos fazer uma expansão em série de Fourier [23] como fizemos para  $\varepsilon^{-1}(\mathbf{r})$  na equação 2.10. Essa expansão de Fourier apresenta à seguinte forma para as auto - funções,

$$\mathbf{E}_{\kappa n}(\mathbf{r}) = \sum_G \mathbf{E}_{\kappa n}(\mathbf{G}) \exp\{i(\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{r}\}, \quad (2.27)$$

$$\mathbf{H}_{\kappa n}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} \mathbf{H}_{\kappa n}(\mathbf{G}) \exp\{i(\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{r}\}. \quad (2.28)$$

Os coeficientes de expansão no espaço da rede recíproca, isto é,  $\mathbf{E}_{\kappa n}(\mathbf{G})$  e  $\mathbf{H}_{\kappa n}(\mathbf{G})$  são representados pelos mesmos símbolos como no espaço da rede real.

## 2.3 O problema do auto - valor

Nesta seção desenvolveremos um método para resolver o problema do auto - valor. Substituindo as equações 2.10, 2.27 e 2.28 em 2.21 e 2.22, obtemos as seguintes equações de auto - valores para os coeficientes de expansão  $\{\mathbf{E}_{\kappa n}(\mathbf{G})\}$  e  $\{\mathbf{H}_{\kappa n}(\mathbf{G})\}$ :

$$- \sum_{\mathbf{G}'} \kappa(\mathbf{G} - \mathbf{G}')(\mathbf{k} + \mathbf{G}') \times \{(\mathbf{k} + \mathbf{G}') \times \mathbf{E}_{\kappa n}(\mathbf{G}')\} = \frac{\omega_{\kappa n}^2}{c^2} \mathbf{E}_{\kappa n}(\mathbf{G}), \quad (2.29)$$

$$- \sum_{\mathbf{G}'} \kappa(\mathbf{G} - \mathbf{G}')(\mathbf{k} + \mathbf{G}') \times \{(\mathbf{k} + \mathbf{G}') \times \mathbf{H}_{\kappa n}(\mathbf{G}')\} = \frac{\omega_{\kappa n}^2}{c^2} \mathbf{H}_{\kappa n}(\mathbf{G}), \quad (2.30)$$

aqui,  $\omega_{\kappa n}$  representa a auto - frequência angular de  $\mathbf{E}_{\kappa n}(\mathbf{r})$  e  $\mathbf{H}_{\kappa n}(\mathbf{r})$ . Resolvendo esses dois conjuntos de equações numericamente, obtemos a relação de dispersão dos auto - modos, ou da estrutura de bandas fotônicas [24], [25] e [26]. Esse método numérico, que está baseado na expansão de Fourier do campo eletromagnético e da função dielétrica, é chamado método de expansão em ondas planas. No cálculo numérico atual das bandas fotônicas, o somatório nas equações 2.29 e 2.30 é calculado para um número  $N$  suficientemente grande de  $G'$ , e o problema do auto - valor para cada  $\kappa$  é resolvido, equivalente a diagonalizar a matriz definida pelo primeiro membro das equações 2.29 e 2.30. A dimensão da matriz que seria diagonalizada é  $3N$  para  $\{\mathbf{E}_{\kappa n}(\mathbf{G}) : \mathbf{G}\}$ . Por outro lado, é de  $2N$  para  $\{\mathbf{H}_{\kappa n}(\mathbf{G}) : \mathbf{G}\}$ , sendo que  $\mathbf{H}_{\kappa n}(\mathbf{G})$  seria perpendicular a  $\mathbf{k} + \mathbf{G}$  de acordo com as equações 2.15 e 2.28, sendo dois seus graus de liberdade. O tempo de processamento necessário para a diagonalização da matriz é geralmente proporcional ao cubo de suas dimensões.



Portanto, o tempo de processamento para calcular a banda fotônica pelo método de expansão das ondas planas é proporcional a  $N^3$ . Esse fato algumas vezes conduziu a sérias restrições nos cálculos. Em síntese, a convergência do método de expansão das ondas planas não é muito bom, quando a amplitude da variação espacial da constante dielétrica é grande, e numericamente o erro excede a cinco por cento (5%) para  $N$  maior que três mil (3000). O erro numérico também depende da dimensão da rede óptica. Notemos que  $\mathbf{E}_{\kappa n}(\mathbf{r})$  e  $\mathbf{H}_{\kappa n}(\mathbf{r})$  possuem a mesma auto - frequência e que estão relacionados entre si através das equações 2.12 e 2.13. Existe uma diferença no número de auto - valores de  $\mathbf{E}_{\kappa n}(\mathbf{r})$  e de  $\mathbf{H}_{\kappa n}(\mathbf{r})$  já que as dimensões das matrizes são  $3N$  e  $2N$  respectivamente. De fato  $N$  de  $3N$  auto - valores de  $\mathbf{E}_{\kappa n}(\mathbf{r})$  são iguais a zero. Sendo  $\mathbf{H}_{\kappa n}(\mathbf{G})$  perpendicular a  $\mathbf{k} + \mathbf{G}$  podemos expressá - lo como uma combinação linear de dois vetores normais e ortogonais,  $\mathbf{e}_{\mathbf{G}_1}$  e  $\mathbf{e}_{\mathbf{G}_2}$  :

$$\mathbf{H}_{\kappa n}(\mathbf{G}) = h_{\kappa n}^{\mathbf{G}_1} \mathbf{e}_{\mathbf{G}_1} + h_{\kappa n}^{\mathbf{G}_2} \mathbf{e}_{\mathbf{G}_2} , \quad (2.31)$$

sem perda de generalidade podemos assumir que

$$\left\{ \mathbf{e}_{\mathbf{G}_1} , \mathbf{e}_{\mathbf{G}_2} , \frac{\mathbf{k} + \mathbf{G}}{|\mathbf{k} + \mathbf{G}|} \right\}, \quad (2.32)$$

constitui o sistema de referência. A partir da equação 2.30, pode - se obter a seguinte relação:

$$\sum_{G_1} \sum_{j=1}^2 M_k^{ij}(\mathbf{G}, \mathbf{G}^1) h_{\kappa n}^{G_1 J} = \frac{\omega_{\kappa n}^2}{c^2} h_{\kappa n}^{G_1} , \quad (2.33)$$

onde  $\mathbf{M}_k(\mathbf{G}, \mathbf{G}^1)$  é definida por:

$$\mathbf{M}_k(\mathbf{G}, \mathbf{G}^1) = |\mathbf{k} + \mathbf{G}| |\mathbf{k} + \mathbf{G}^1| \kappa(\mathbf{G} - \mathbf{G}^1) \times \begin{pmatrix} e_{G_2} \cdot e_{G^1 2} & -e_{G_2} \cdot e_{G^1 1} \\ -e_{G_1} \cdot e_{G^1 2} & e_{G_1} \cdot e_{G^1 1} \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

que é uma matriz Hermitiana, isto é,

$$M_k^{ij}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') = M_k^{ij*}(\mathbf{G}', \mathbf{G}), \quad (2.35)$$

onde os auto - vetores são ortogonais entre si:

$$\sum_G \sum_{j=1}^2 h_{\kappa n}^{Gi*} \cdot h_{\kappa n'}^{Gi} = \delta_{nn'}, \quad (2.36)$$

de forma que dessa equação, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_V d\mathbf{r} \mathbf{H}_{\kappa n}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}_{\kappa n'}(\mathbf{r}), \\ &= \int_V d\mathbf{r} \sum_G \sum_{G'} \mathbf{H}_{\kappa n}^*(\mathbf{G}) \cdot \mathbf{H}_{\kappa n'}(\mathbf{G}') \exp \{i(\mathbf{G}' - \mathbf{G}) \cdot \mathbf{r}\}, \\ &= V \sum_G H_{\kappa n}^*(\mathbf{G}) \cdot H_{\kappa n'}(\mathbf{G}), \\ &= V \delta_{nn'}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde  $V$  representa o volume da rede óptica. Por outro lado, se  $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$ ,

$$\int_V d\mathbf{r} \mathbf{H}_{\kappa n}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}_{\kappa n'}(\mathbf{r}) = \int_V d\mathbf{r} \mathbf{v}_{\kappa n}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}_{\kappa' n'}(\mathbf{r}) \exp \{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}\}, \quad (2.38)$$

porque, ambos  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{k}'$  são vetores de onda da primeira zona de Brillouin e  $\mathbf{k}' - \mathbf{k}$  não pode coincidir com um vetor da rede recíproca [22]. A periodicidade da função  $\mathbf{v}_{\kappa n}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}_{\kappa' n'}(\mathbf{r})$  leva ao desaparecimento da integral acima [27]. Portanto, podemos obter finalmente,

$$\int_V d\mathbf{r} \mathbf{H}_{\kappa n}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}_{\kappa n'}(\mathbf{r}) = V \delta_{\kappa \kappa'} \delta_{nn'}, \quad (2.39)$$

essa ortogonalidade é uma consequência direta do fato da matriz definida na equação 2.34 ser Hermitiana [23]. Por sua vez, a referida matriz é também Hermitiana devido ao fato

que o operador  $\zeta_H$  definido na equação 2.22 é Hermitiano. Entretanto, o operador  $\zeta_E$  não é Hermitiano. Sendo assim, suas auto - funções não são necessariamente ortogonais entre si [24].

## 2.4 Redes ópticas em duas dimensões

Para uma rede óptica em duas dimensões, as equações de auto - valores podem ser simplificadas se o vetor  $\mathbf{k}$  estiver localizado paralelo ao plano dimensional [22]. Vamos examinar esse caso. Numa rede óptica em duas dimensões, a estrutura dielétrica é uniforme na direção  $z$  (observe a figura 1.1). A onda eletromagnética viajando no plano  $x$ - $y$ , é também uniforme na direção  $z$ . Portanto,  $\varepsilon(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  e  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  são independentes da coordenada  $z$  nas equações 2.12 e 2.13. Nesse caso, essas equações vetoriais são desacopladas para dois conjuntos de equações independentes. O primeiro conjunto é definido como,

$$\frac{\partial}{\partial y} E_z(\mathbf{r}_{//}, t) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H_x(\mathbf{r}_{//}, t), \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E_z(\mathbf{r}_{//}, t) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H_y(\mathbf{r}_{//}, t), \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} H_y(\mathbf{r}_{//}, t) - \frac{\partial}{\partial y} H_x(\mathbf{r}_{//}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}_{//}) \frac{\partial}{\partial t} E_z(\mathbf{r}_{//}, t), \quad (2.42)$$

e o segundo pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\frac{\partial}{\partial y} H_z(\mathbf{r}_{//}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}_{//}) \frac{\partial}{\partial t} E_x(\mathbf{r}_{//}, t), \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} H_z(\mathbf{r}_{//}, t) = -\varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}_{//}) \frac{\partial}{\partial t} E_y(\mathbf{r}_{//}, t), \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E_y(\mathbf{r}_{//}, t) - \frac{\partial}{\partial y} E_x(\mathbf{r}_{//}, t) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H_z(\mathbf{r}_{//}, t), \quad (2.45)$$

com  $\mathbf{r}_{//}$  representando o vetor posição no plano (x,y). Do primeiro conjunto dessas equações, obtemos a seguinte equação de onda eliminando  $H_x(\mathbf{r}_{//}, t)$  e  $H_y(\mathbf{r}_{//}, t)$ :

$$\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r}_{//})} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} E_z(\mathbf{r}_{//}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_z(\mathbf{r}_{//}, t); \quad (2.46)$$

do segundo conjunto obtemos a equação de onda para  $H_z(\mathbf{r}_{//}, t)$ :

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r}_{//})} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r}_{//})} \frac{\partial}{\partial y} \right\} H_z(\mathbf{r}_{//}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} H_z(\mathbf{r}_{//}, t). \quad (2.47)$$

Como fizemos anteriormente podemos testar soluções para essas equações da seguinte forma,

$$E_z(\mathbf{r}_{//}, t) = E_z(\mathbf{r}_{//}) \exp(-i\omega t), \quad (2.48)$$

$$H_z(\mathbf{r}_{//}, t) = H_z(\mathbf{r}_{//}) \exp(-i\omega t). \quad (2.49)$$

As equações de auto - valores são dadas então, por:

$$\zeta_E^{(2)} E_z(\mathbf{r}_{//}) \equiv -\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r}_{//})} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} E_z(\mathbf{r}_{//}) = \frac{\omega^2}{c^2} E_z(\mathbf{r}_{//}), \quad (2.50)$$

$$\zeta_H^{(2)} H_z(\mathbf{r}_{//}) \equiv -\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r}_{//})} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r}_{//})} \frac{\partial}{\partial y} \right\} H_z(\mathbf{r}_{//}) = \frac{\omega^2}{c^2} H_z(\mathbf{r}_{//}), \quad (2.51)$$

onde os dois operadores diferenciais  $\zeta_E^{(2)}$  e  $\zeta_H^{(2)}$  para o caso em duas dimensões são definidos no primeiro lado de cada equação acima 2.50 e 2.51. Esses dois tipos de auto-funções representam duas polarizações independentes: a polarização  $E$  para a qual o campo elétrico é paralelo ao eixo z, e a polarização  $H$  para a qual o campo magnético é paralelo ao eixo z [28] e [29]. Quando aplicamos o teorema de Bloch como antes, podemos expressar  $E_z(\mathbf{r}_{//})$  e  $H_z(\mathbf{r}_{//})$  da seguinte maneira:

$$E_z(\mathbf{r}_{//}) = E_{z, \mathbf{k}_{//n}}(\mathbf{r}_{//}) = \sum_{\mathbf{G}_{//}} E_{z, \mathbf{k}_{//n}}(\mathbf{G}_{//}) \exp\{\mathbf{i}(\mathbf{k}_{//} + \mathbf{G}_{//}) \cdot \mathbf{r}_{//}\}, \quad (2.52)$$

$$H_z(\mathbf{r}_{//}) = H_{z,k_{//}n}(\mathbf{r}_{//}) = \sum_{\mathbf{G}_{//}} H_{z,k_{//}n}(\mathbf{G}_{//}) \exp\{i(\mathbf{k}_{//} + \mathbf{G}_{//}) \cdot \mathbf{r}_{//}\}, \quad (2.53)$$

onde  $\mathbf{k}_{//}$  e  $\mathbf{G}_{//}$  são os vetores de onda e da rede recíproca respectivamente em duas dimensões. Substituindo as equações 2.52 e 2.53 nas equações 2.50 e 2.51 obtemos as seguintes equações de auto - valores para os coeficientes de expansão:

$$\sum_{\mathbf{G}'_{//}} k(\mathbf{G}_{//} - \mathbf{G}'_{//}) \left| \mathbf{k}_{//} + \mathbf{G}'_{//} \right|^2 E_{z,k_{//}n}(\mathbf{G}'_{//}) = \frac{\omega_{k_{//}n}^{(E)2}}{c^2} E_{z,k_{//}n}(\mathbf{G}_{//}), \quad (2.54)$$

$$\sum_{\mathbf{G}'_{//}} k(\mathbf{G}_{//} - \mathbf{G}'_{//}) (\mathbf{k}_{//} + \mathbf{G}_{//}) \cdot (\mathbf{k}_{//} + \mathbf{G}'_{//}) H_{z,k_{//}n}(\mathbf{G}'_{//}) = \frac{\omega_{k_{//}n}^{(H)2}}{c^2} H_{z,k_{//}n}(\mathbf{G}_{//}), \quad (2.55)$$

aqui,  $\omega_{k_{//}n}^{(E)}$  e  $\omega_{k_{//}n}^{(H)}$  representam as auto - frequências angulares de  $E_{z,k_{//}n}(\mathbf{r}_{//})$  e  $H_{z,k_{//}n}(\mathbf{r}_{//})$ , respectivamente. Quando definimos a matriz  $M_{\mathbf{K}_{//}}$  por,

$$M_{\mathbf{K}_{//}}(\mathbf{G}_{//}, \mathbf{G}'_{//}) = k(\mathbf{G}_{//} - \mathbf{G}'_{//}) (\mathbf{k}_{//} + \mathbf{G}_{//}) \cdot (\mathbf{k}_{//} + \mathbf{G}'_{//}), \quad (2.56)$$

notamos que ela é Hermitiana, isto é,

$$M_{\mathbf{K}_{//}}(\mathbf{G}_{//}, \mathbf{G}'_{//}) = M_{\mathbf{K}_{//}}^*(\mathbf{G}'_{//}, \mathbf{G}_{//}). \quad (2.57)$$

A equação de auto - valor 2.55 pode ser expressa em termos da matriz 2.56,

$$\sum_{\mathbf{G}'_{//}} M_{\mathbf{K}_{//}}(\mathbf{G}_{//}, \mathbf{G}'_{//}) H_{z,k_{//}n}(\mathbf{G}'_{//}) = \frac{\omega_{k_{//}n}^{(H)2}}{c^2} H_{z,k_{//}n}(\mathbf{G}_{//}). \quad (2.58)$$

Da maneira como obtemos a ortogonalidade de  $H_{kn}(\mathbf{r}_{//})$  em 2.39, podemos provar que

$$\int_{V^2} d\mathbf{r}_{//} \mathbf{H}_{z,k_{//}n}^*(\mathbf{r}_{//}) \cdot \mathbf{H}_{z,k'_{//}n}(\mathbf{r}_{//}) = V^{(2)} \delta_{k_{//}k'_{//}} \delta_{nm}, \quad (2.59)$$

com  $V^{(2)}$  representando o volume em duas dimensões da rede óptica. Essa relação de ortogonalidade é uma consequência do fato que  $\zeta_H^{(2)}$  é um operador Hermitiano. Por outro lado,  $\zeta_E^{(2)}$  não é Hermitiano, sendo assim, suas auto - funções não são necessariamente ortogonais entre si [22] e [30].

## 2.5 Conclusão

Estudamos a propagação da radiação eletromagnética a partir das equações de Maxwell, formulando o problema de auto - valor da equação de onda e elaborando um método geral para resolvê-la. Com este estudo teórico teremos condições de escrever uma equação que nos permite estudar a propagação de feixes ópticos através de redes ópticas periódicas nos próximos capítulos e então, estudar o comportamento das oscilações das amplitudes de Fourier do campo elétrico que se propaga nesse meio periódico.

# Capítulo 3

## Oscilações de Rabi em redes ópticas

### 3.1 Introdução

Nesse capítulo mostraremos que a propagação de um feixe luminoso largo em uma rede óptica vai resultar nas oscilações de Rabi entre os picos do espectro de Fourier cujos índices são relacionados pela condição de ressonância de Bragg. Em particular, vamos empregar simulações numéricas diretas para a rede óptica em duas dimensões, e obter o comportamento das oscilações das amplitudes de Fourier na rede.

### 3.2 Propagação linear.

A equação que descreve a propagação da luz nas redes periódicas pode ser descrita na aproximação paraxial pela seguinte equação de onda:

$$i \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} \right) + V(\mathbf{r}) \mathbf{E}, \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{E}$  é a amplitude do campo elétrico,  $z$  é a coordenada da direção de propagação do feixe óptico,  $\mathbf{r} = (x, y)$  é o vetor posição da rede (real) e  $V(\mathbf{r})$  é o potencial periódico definido na forma de uma rede quadrada (vide fig.3.1 ),

$$V(\mathbf{r}) = V_0(\cos x + \cos y + \varepsilon \cos x \cdot \cos y).$$

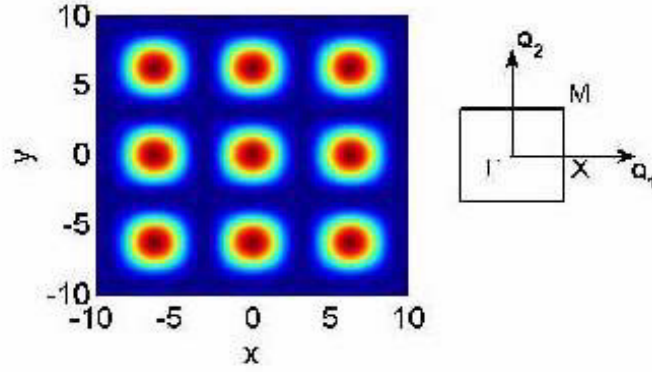


Figura 3.1: A figura representa uma rede óptica quadrada e sua primeira zona de Brillouin. Temos o potencial  $V_0 = 0.05$  e  $\epsilon = 1$ . Os vetores da base da rede recíproca são  $Q_1$  e  $Q_2$ .

$V_0$  e  $\epsilon$  são constantes.

Vamos considerar a equação 3.1 no espaço de Fourier, para uma rede periódica geral.

Fazendo a transformada de Fourier [23] da amplitude do campo,

$$E(\mathbf{r}, z) = \int d\mathbf{k} C(\mathbf{k}, z) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (3.2)$$

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} V_{\mathbf{G}}^1 \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}). \quad (3.3)$$

Após substituição dessas expressões na equação de propagação 3.1, obtem-se a seguinte equação de propagação para as amplitudes de Fourier:

$$i \frac{dC(\mathbf{k}, z)}{dz} = \beta(\mathbf{k}) C(\mathbf{k}, z) + \sum_{\mathbf{G}} V_{\mathbf{G}}^1 C(\mathbf{k} - \mathbf{G}, z), \quad (3.4)$$

onde  $\beta(k) = \frac{1}{2} \mathbf{k}^2$  e  $\mathbf{G}$  é o vetor da rede recíproca. Essa expressão 3.4 representa um conjunto de equações lineares simultâneas ligando os coeficientes  $C(\mathbf{k} - \mathbf{G})$  para todos os vetores da rede recíproca  $\mathbf{G}$ . Para  $|V_0| \ll 1$ , temos uma pequena perturbação na rede, e então segundo a teoria da perturbação [18] podemos escrever os coeficientes de Fourier de



acordo com a expressão abaixo:

$$C(\mathbf{k}, z) = C_0(\mathbf{k}) \exp\{i\beta(\mathbf{k})z\}, \quad (3.5)$$

com  $C_0(\mathbf{k})$  não dependente de  $z$ , e a amplitude de Fourier  $C(\mathbf{k})$  é efetivamente acoplada com a amplitude  $C(\mathbf{k} - \mathbf{G})$  tal que na ressonância de Bragg  $\beta(\mathbf{k}) \approx \beta(\mathbf{k} - \mathbf{G})$ . Desprezando os termos não ressonantes, cada um dos termos  $V_{\mathbf{G}}^l$  adquire um expoente imaginário oscilando com o período,

$$Z = \frac{2\pi}{\beta(\mathbf{k} - \mathbf{G}) - \beta(\mathbf{k})}. \quad (3.6)$$

### 3.3 Oscilações lineares em uma dimensão.

Consideremos inicialmente um vetor de onda exatamente sobre o contorno da zona de Brillouin no ponto  $\frac{1}{2}\mathbf{G}$ , isto é, em  $\frac{1}{\mathbf{a}}\pi$ , onde  $\mathbf{a}$  é a constante de rede. Neste caso, a condição de difração de Bragg nos permite escrever,

$$\mathbf{k}^2 = \left(\frac{1}{2}\mathbf{G}\right)^2 \Rightarrow (\mathbf{k} - \mathbf{G})^2 = \left(\frac{1}{2}\mathbf{G}\right)^2, \quad (3.7)$$

de modo que, no contorno da zona, as frequências das duas ondas  $\mathbf{k} = \pm\frac{1}{2}\mathbf{G}$  são iguais [2].

Na expressão 3.4 retemos somente as equações que contêm ambos os coeficientes  $C(+\frac{1}{2}\mathbf{G})$  e  $C(-\frac{1}{2}\mathbf{G})$ , que são importantes para aproximar as bandas de frequências, e desprezamos todos os outros coeficientes. Notemos que os coeficientes  $C(+\frac{1}{2}\mathbf{G})$  e  $C(-\frac{1}{2}\mathbf{G})$  estão localizados nos pontos  $\mathbf{X}$ , e no seu ponto simétrico  $\mathbf{X}'$  respectivamente, isso implica que esses dois pontos estão na ressonância de Bragg (vide fig.3.1). Este fato nos informa que, as amplitudes de Fourier estão oscilando em uma dimensão, isto é, entre os dois pontos que estão em ressonância nos limites da zona de Brillouin, representados pelos pontos  $\mathbf{X} = (k_B, 0)$  onde  $(k_B = \frac{1}{2}G, \text{ vetor de Bloch})$ , e o ponto  $\mathbf{X}' = (-k_B, 0)$  que estão acoplados pelo vetor da rede recíproca  $\mathbf{Q}_1$ . Substituindo a parcela ressonante do campo,

$$E = C_1(z) \exp(ik_B x) + C_2(z) \exp(-ik_B x), \quad (3.8)$$

na equação 3.1 obtemos o seguinte sistema de equações:

$$i \frac{\partial C_1}{\partial z} = \beta_x C_1 + \frac{V_0}{2} C_2, \quad (3.9)$$

$$i \frac{\partial C_2}{\partial z} = \beta_x C_2 + \frac{V_0}{2} C_1, \quad (3.10)$$

onde  $\beta_x = \frac{1}{2}k_B^2$ . As potências de Fourier são dadas pelas equações abaixo:

$$P_1 = |C_1|^2 = \frac{1}{2} + a \exp(iV_0 z) + a^* \exp(-iV_0 z), \quad (3.11)$$

$$P_2 = |C_2|^2 = \frac{1}{2} - a \exp(iV_0 z) - a^* \exp(-iV_0 z), \quad (3.12)$$

onde  $a$  é uma constante de integração, oscilando com a frequência  $\omega = V_0$ . Comparando diretamente com as simulações numéricas usando como condição inicial um feixe Gaussiano [31] da forma,

$$E = \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma}} \exp\left\{ik_B x - \frac{\mathbf{r}^2}{(2\gamma)^2}\right\}, \quad (3.13)$$

constatamos uma boa correspondência qualitativa, conforme ilustrada na figure.3.2 (onde usamos  $a = \frac{1}{2}$ ). Qualitativamente, a frequência numérica  $\omega$  sofre um desvio de  $V_0$ , e as oscilações médias das amplitudes de Fourier são desiguais  $\overline{P_1} > \overline{P_2}$ . A dinâmica das oscilações de Rabi na rede óptica é ilustrada na fig.3.3. A linha superior representa os módulos das amplitudes do campo elétrico no espaço real, enquanto que a linha inferior apresenta os valores absolutos dos modos de Fourier na zona de Brillouin. O ponto no contorno da zona representado pelo primeiro quadrado na linha inferior corresponde ao módulo da amplitude de Fourier  $|C_1|^2 = 1$  na fig.3.2, que por sua vez corresponde ao ponto

luminoso no primeiro quadrado na linha superior que representa a amplitude do campo no espaço real. No centro da fig.3.3, o ponto luminoso na linha superior começa perder intensidade, enquanto que na linha inferior aparece outro ponto minúsculo à esquerda do quadrado da zona, quando  $z$  passa assumir alguns valores. Nesse momento observamos o fenômeno da interferência entre as amplitudes de Fourier ( $|C_1|^2$ ,  $|C_2|^2$ ) no espaço recíproco, e entre as amplitudes do campo ( $|\mathbf{E}|$ ) que ocorre no espaço real durante a propagação do feixe luminoso na rede. No lado direito da fig.3.3, recomeça o ciclo para dar seqüência as oscilações das amplitudes. As oscilações de Rabi mostradas no espaço de Fourier na fig.3.3, equivalem as oscilações da posição do feixe no espaço real, definido pela seguinte expressão,

$$\langle x \rangle = \int d\mathbf{r}^2 x |E(\mathbf{r}, z)|^2, \quad (3.14)$$

vide fig.3.4. Aproximando o feixe como uma superposição de duas ondas planas ressonantes com índices  $(k_B, 0)$  e  $(-k_B, 0)$  obtemos:

$$\frac{d\langle x \rangle}{dz} = k_B(|C_1|^2 - |C_2|^2), \quad (3.15)$$

que vem da equação geral

$$\frac{d\langle x \rangle}{dz} = \int d\mathbf{r}^2 \text{Im}\{E^* \partial_x E\}, \quad (3.16)$$

usando uma soma de Gaussianas [1]. As equações que descrevem as oscilações da posição do feixe são as expressões: 3.9, 3.10 e 3.15. A fig.3.4, representa as mudanças do feixe luminoso na rede correspondendo a fig.3.2, e também ilustra a posição média do feixe apresentada no eixo vertical com a propagação em  $z$ . Por outro lado, se considerarmos um índice de refração  $\eta$  introduzido na rede óptica proporcional ao potencial  $V_0$  (isto é, temos um índice de refração de Fourier efetivo  $\mathbf{k}_{eff} = \eta\mathbf{k}(z=\mathbf{o})$ ) [31], possibilita a

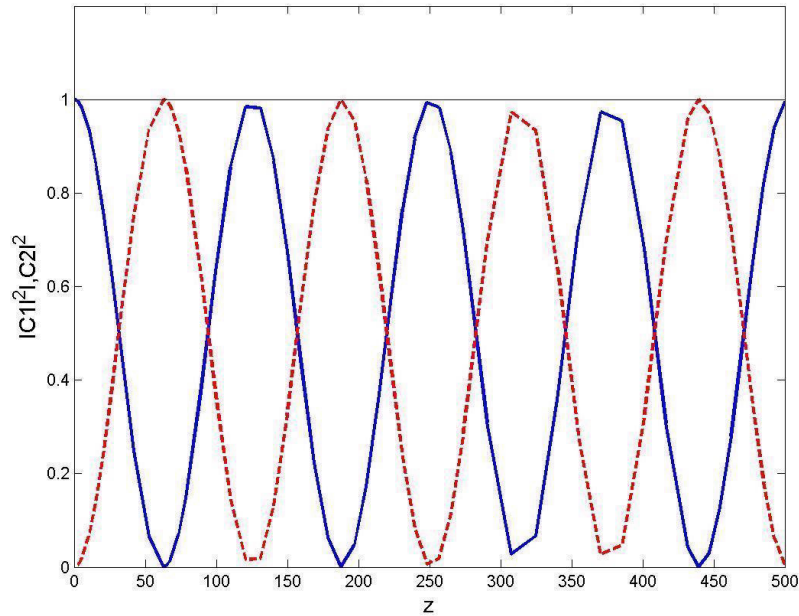


Figura 3.2: A linha contínua representa a oscilação da amplitude de Fourier  $P_1$  em  $\mathbf{k} = (k_B, 0)$  e a linha tracejada representa  $P_2$  em  $\mathbf{k} = (-k_B, 0)$ , a linha superior paralela ao eixo-z representa a soma de  $P_1 + P_2$ . Usamos  $V_0 = 0.05$  e  $E = \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma}} \exp\{ik_B x - \frac{\mathbf{r}^2}{(2\gamma)^2}\}$  com  $\gamma = 50$ .

explicação da desigualdade  $\overline{P_1} > \overline{P_2}$  da fig.3.2.

### 3.4 Oscilações lineares em duas dimensões.

O ponto M,  $(\frac{1}{a}\pi, \frac{1}{a}\pi)$ , localizado na zona de Brillouin mostrado na fig.3.1, é um ponto que apresenta alta simetria no contorno da zona, onde estão acopladas as amplitudes de Fourier que oscilam nas frequências do feixe luminoso, conforme explicamos para o caso em uma dimensão. Agora temos as amplitudes de Fourier oscilando em duas dimensões ou quatro níveis. Substituindo as parcelas do campo, cujas amplitudes estão oscilando em ressonância com as frequências do ponto M obtemos,

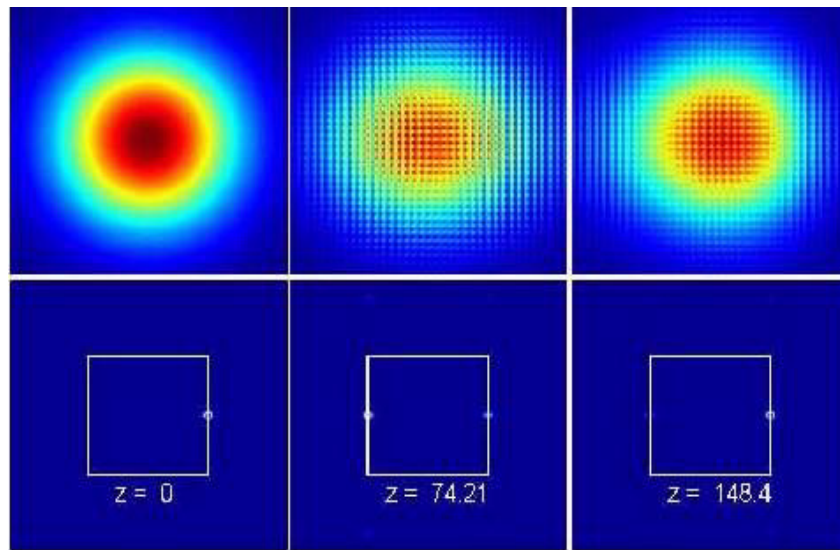


Figura 3.3: Os pontos luminosos representam as amplitudes do campo  $|\mathbf{E}|$  no espaço real, e os pontinhos no quadrado na linha inferior representam seu espectro de Fourier obtidos numericamente. Exibimos apenas os valores absolutos e apenas a parte no domínio espacial centradas em  $r = 0$ , para melhor visualização [1]. Os parâmetros usados são da fig.3.1.

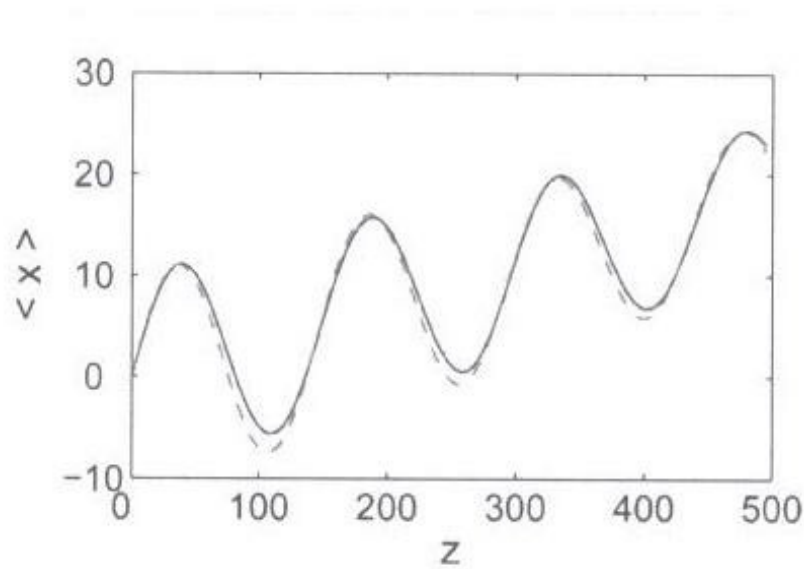


Figura 3.4: A linha sólida representa a posição média do feixe correspondendo a fig.3.2, e a linha tracejado representa o resultado teórico [35] com  $|C_j|^2$  substituído pela potência numérica de Fourier  $P_j$  da fig.3.2.

$$E = C_1(z) \exp[ik_B(x + y)] + C_2(z) \exp[-ik_B(x + y)] + \quad (3.17)$$

$$+ C_3(z) \exp[ik_B(y - x)] + C_4(z) \exp[ik_B(x - y)].$$

Substituindo a equação 3.17 na equação 3.1, podemos obter o seguinte sistema de equações:

$$i \frac{\partial C_1}{\partial z} = \beta_M C_1 + \frac{\varepsilon V_0}{4} C_2 + \frac{V_0}{2} C_3 + \frac{V_0}{2} C_4, \quad (3.18)$$

$$i \frac{\partial C_2}{\partial z} = \beta_M C_2 + \frac{\varepsilon V_0}{4} C_1 + \frac{V_0}{2} C_3 + \frac{V_0}{2} C_4, \quad (3.19)$$

$$i \frac{\partial C_3}{\partial z} = \beta_M C_3 + \frac{V_0}{2} C_1 + \frac{V_0}{2} C_4 + \frac{\varepsilon V_0}{4} C_4, \quad (3.20)$$

$$i \frac{\partial C_4}{\partial z} = \beta_M C_4 + \frac{V_0}{2} C_1 + \frac{V_0}{2} C_2 + \frac{\varepsilon V_0}{4} C_3, \quad (3.21)$$

onde  $\beta_M = \frac{1}{2}k_B^2$ . Este conjunto de equações diferenciais acopladas das amplitudes de Fourier será esquematizado na fig.3.5, representando a dinâmica das oscilações dos modos de Fourier em quatro níveis com a distância de propagação  $z$ . O ponto M da zona de Brillouin da fig.3.2 localiza um par de vetor de onda ou frequência espacial  $(k_B, k_B)$ , em ressonância com as frequências que estão localizadas nos outros três pontos,  $(-k_B, -k_B)$ ,  $(k_B, -k_B)$  e  $(-k_B, k_B)$ , simétricos ao ponto M, situado no limite da zona. A linha sólida ilustra a oscilação da amplitude de Fourier no ponto M,  $|C_1|^2$ , enquanto que a linha tracejada mostra a oscilação da amplitude  $|C_2|^2$ , as outras amplitudes  $|C_3|^2, |C_4|^2$  são representadas pela linha tracejada - pontilhada, pois estão oscilando em fase. A fig.3.5 apresenta uma ótima comparação com a simulação numérica direta usando como condição inicial o feixe Gaussiano da forma

$$E = \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma}} \exp\{ik_B(x + y) - \frac{\mathbf{r}^2}{(2\gamma)^2}\}. \quad (3.22)$$

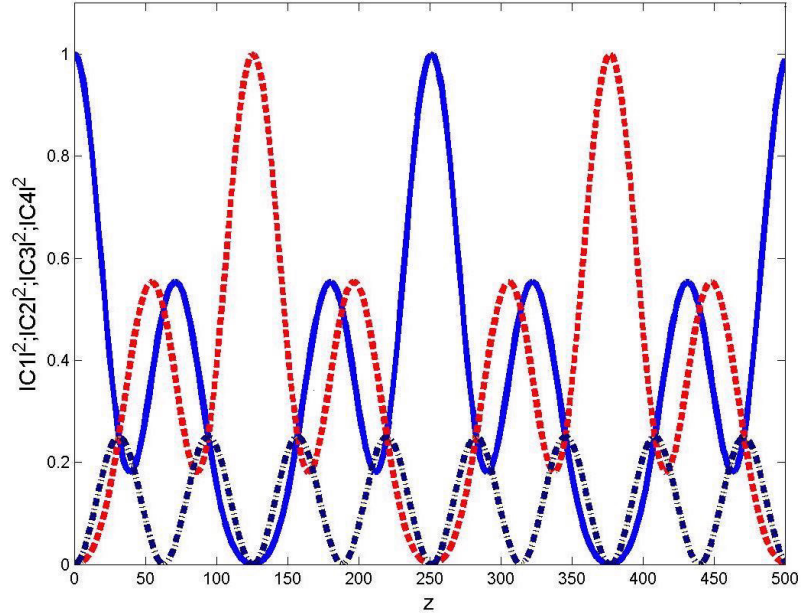


Figura 3.5: Representação das oscilações das amplitudes de Fourier para um sistema de quatro níveis. Mostramos  $P_1 = |C_1|^2$  (linha sólida),  $P_2 = |C_2|^2$  (linha tracejada),  $P_3 = |C_3|^2$  e  $P_4 = |C_4|^2$  (linha de pontos tracejada). Usamos  $V_0 = 0.05$ ,  $\varepsilon = 1$  e  $E = \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma}} \exp\{ik_B(x+y) - \frac{\mathbf{r}^2}{(2\gamma)^2}\}$  com  $\gamma = 50$ .

No espaço real a posição das oscilações do feixe é mostrada na fig.3.6. Usando  $\mathbf{E}$  como uma superposição de quatro ondas planas em ressonância obtemos,

$$\frac{d\langle x \rangle}{dz} = k_B(|C_1|^2 + |C_4|^2 - |C_2|^2 - |C_3|^2), \quad (3.23)$$

$$\frac{d\langle y \rangle}{dz} = k_B(|C_1|^2 + |C_3|^2 - |C_2|^2 - |C_4|^2). \quad (3.24)$$

As equações 3.18, 3.19, 3.20, 3.21, 3.23 e 3.24 expressam a posição das oscilações do feixe.

### 3.5 Conclusão

Em conclusão mostramos que a dinâmica de propagação de um feixe largo do tipo Gaussiano em redes ópticas periódicas lineares na condição de Bragg, resulta nas bem conhecidas oscilações de Rabi, representadas pelas oscilações dos modos de Fourier e a

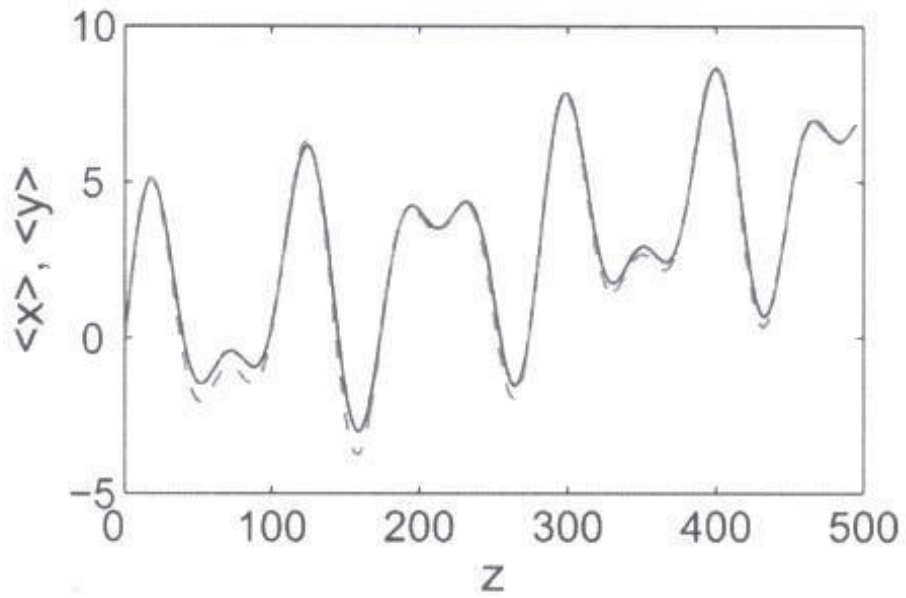


Figura 3.6: A figura representa as posições médias  $\langle x \rangle$  e  $\langle y \rangle$  do feixe correspondente a fig.3.5 (linha sólida,  $\langle x \rangle = \langle y \rangle$ ) [1] e o resultado teórico [3.23 e 3.24] com  $|C_j|^2$  substituído por  $P_{M_j}$  da fig.3.5 (linha tracejada).



posição média do feixe na rede. Embora tenhamos usado apenas uma rede quadrada, podemos futuramente testar esses resultados em outros casos, como em uma rede que apresente simetria triangular ou hexagonal em duas dimensões, adequadas à condição de ressonância de Bragg (mais detalhes podem ser encontrados na referência [32]). No próximo capítulo faremos um estudo das redes ópticas quadradas sob um efeito não linear conhecido como auto - desfocalização (*self - defocusing*), atuando sobre as oscilações dos modos de Fourier do campo luminoso que se propaga nesse meio óptico.

# Capítulo 4

## Auto - desfocalização em redes ópticamente induzidas

No capítulo anterior, apresentamos um estudo da propagação da luz em uma rede óptica, considerando apenas os efeitos lineares, visto que, a equação que utilizamos para representar a propagação de um feixe luminoso nesse meio é baseada na aproximação paraxial contida na equação de onda na forma linear. Agora usando essa mesma equação com uma pequena perturbação, ou seja adicionando um termo não linear, iremos mostrar que um feixe luminoso propagando em uma rede óptica sob efeito não linear chamado auto - desfocalização (*self - defocusing*), apresenta um decaimento acentuado das oscilações dos modos de Fourier com a distância de propagação.

### 4.1 Propagação não linear.

A propagação da luz em redes ópticas considerando o efeito da auto - desfocalização pode ser realizado experimentalmente [33] aumentando - se a intensidade do laser que produz o feixe propagante. O efeito da auto - desfocalização é análogo ao efeito da difração no regime anômalo (o índice de refração diminui com a frequência), sendo que este atua alargando o feixe no espaço real, enquanto que a auto - desfocalização atua alargando o perfil das frequências espaciais (vetor de onda) do feixe óptico [36] e [37]. Usaremos a

equação 3.1 adicionada de um termo não linear, que representa a auto - desfocalização do feixe luminoso na rede.

$$i\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2}\right) + \sigma |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E} + V(\mathbf{r})\mathbf{E}, \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{E}$  é amplitude do campo elétrico,  $z$  é a distância de propagação,  $\mathbf{r}=(x,y)$  as coordenadas transversais.  $\sigma$  é o coeficiente de não linearidade, ou seja, o coeficiente da auto - desfocalização do feixe  $|\sigma| \ll 1$  e  $V(\mathbf{r})$  é o potencial da rede quadrada dado pela expressão 4.2 abaixo, conforme apresentamos no capítulo anterior.

$$V(\mathbf{r}) = V_0(\cos x + \cos y + \varepsilon \cos x \cos y). \quad (4.2)$$

## 4.2 Oscilações não lineares em uma dimensão.

Considere a ressonância de Bragg no ponto  $\mathbf{X}$  conforme a fig.3.1, isto é, dois pontos cujas amplitudes oscilam na mesma frequência, ou seja, podemos considerar as oscilações dos modos de Fourier em uma dimensão conforme tratamos no capítulo anterior (capítulo 3), aplicando para o caso do efeito da auto - desfocalização atuando no feixe. Os pontos de simetria mencionados, onde as amplitudes de Fourier estão acopladas, são  $\mathbf{X} = (k_B, 0)$  com  $k_B = \frac{1}{2} \mathbf{G}$  e o ponto  $\mathbf{X}' = (-k_B, 0)$ , que estão conectados por  $\mathbf{Q}_1$  vetor da rede recíproca [1]. Substituindo a parte ressonante do campo,

$$E = C_1(z) \exp(ik_B x) + C_2(z) \exp(-ik_B x), \quad (4.3)$$

na equação 4.1, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$i\frac{\partial C_1}{\partial z} = \frac{1}{2}C_1 k_B^2 + \sigma |C_1|^2 C_1 + 2\sigma C_1 |C_2|^2 + \frac{V_0}{2}C_2, \quad (4.4)$$

$$i\frac{\partial C_2}{\partial z} = \frac{1}{2}C_2k_B^2 + \sigma |C_2|^2 C_2 + 2\sigma C_2 |C_1|^2 + \frac{V_0}{2}C_1. \quad (4.5)$$

Analisaremos as oscilações ópticas de Rabi, isto é, as oscilações das amplitudes de Fourier do feixe luminoso que se propaga através de uma rede opticamente induzida, para diferentes valores do coeficiente da auto - desfocalização com a distância de propagação. As figuras abaixo mostram que aumentando o valor do coeficiente  $\sigma$ , as oscilações das amplitudes de Fourier do campo elétrico sofrem um decaimento acentuado, enquanto o feixe se propaga na rede quadrada com o potencial periódico de valor constante. As oscilações das amplitudes de Fourier do campo elétrico para  $\sigma = 0, V_0 = 0.05$ , são equivalentes as oscilações das amplitudes de Fourier para o caso linear conforme a fig.3.2. A fig.4.1, representa as oscilações das amplitudes de Fourier do campo elétrico para  $\sigma = 0.1$  e  $V_0 = 0.05$ . Nesse caso, os modos de Fourier demonstram uma oscilação mais lenta, comparada com a fig.3.2. Nesse gráfico  $\sigma$  apresenta o menor valor para as amplitudes começarem a oscilar de forma mais demorada como consequência o período do ciclo passa a ser mais longo. Analisando o gráfico 4.1, notamos que as amplitudes de Fourier ao sofrerem interferência descrevem um comportamento aproximadamente de uma reta, ou seja, quando as amplitudes se encontram apresentam um comportamento linear.

Os gráficos da fig.4.2, representam as oscilações das amplitudes de Fourier do campo elétrico em dois níveis para os seguintes valores do coeficiente  $\sigma = 0.105, 0.2, 0.3, 0.5, 0.9$  e  $V_0 = 0.05$ . A figura mostra uma degradação das oscilações das amplitudes, ou dos modos de Fourier com o aumento do valor do coeficiente da auto - desfocalização. No valor crítico de 0.9 não existem mais oscilações dos modos de Fourier, onde estes modos passam a ser estados localizados.

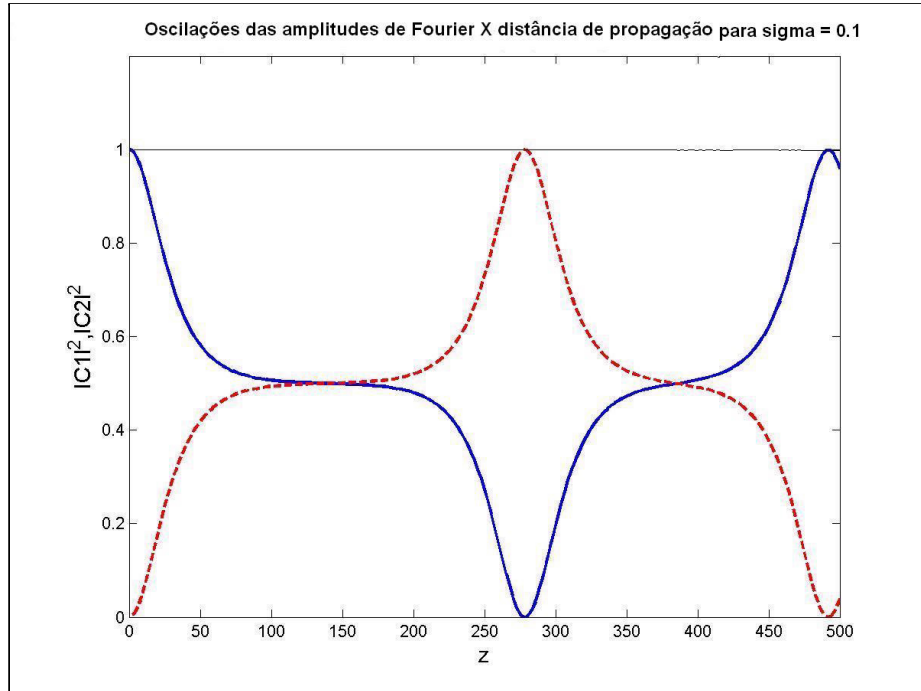


Figura 4.1: A figura representa as oscilações das amplitudes de Fourier do campo elétrico para  $\sigma = 0.1, V_0 = 0.05$ . No espaço de Fourier a linha sólida representa a oscilação do modo de Fourier  $P_1 = |C_1|^2$  em  $k = (k_B, 0)$ , a linha tracejada  $P_2 = |C_2|^2$  em  $(-k_B, 0)$  e a linha horizontal ao eixo  $z$  é a soma das amplitudes  $P_1 + P_2$ .

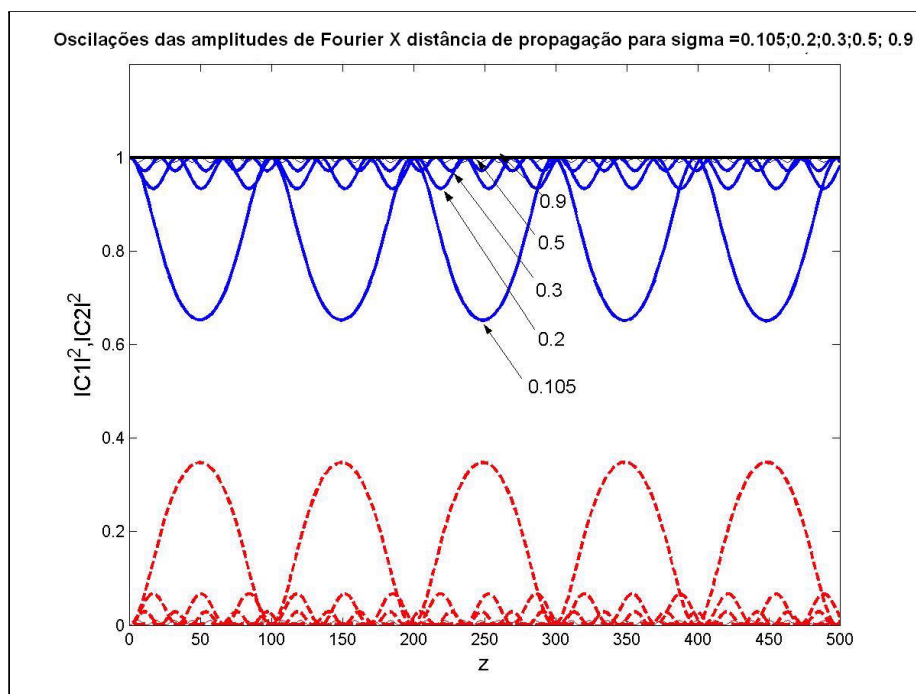


Figura 4.2: Oscilações das amplitudes de Fourier do campo elétrico em dois níveis para  $\sigma = 0.105, 0.2, 0.3, 0.5, 0.9$  e  $V_0 = 0.05$ . No espaço de Fourier a linha sólida representa a oscilação do modo de Fourier  $P_1 = |C_1|^2$  em  $k = (k_B, 0)$ , a linha tracejada  $P_2 = |C_2|^2$  em  $(-k_B, 0)$  e a linha horizontal ao eixo z é a soma das amplitudes  $P_1 + P_2$ .

### 4.3 Oscilações não lineares em duas dimensões.

O ponto M no contorno da zona de Brillouin acopla as amplitudes de Fourier, que estão oscilando em ressonância com as amplitudes do campo do feixe luminoso, conforme vimos no capítulo anterior (capítulo3). Substituindo a parte ressonante do campo,

$$E = C_1(z) \exp ik_B[(x + y)] + C_2(z) \exp[-ik_B(x + y) + C_3(z) \exp[ik_B(y - x)] + C_4(z) \exp[ik_B(x - y)], \quad (4.6)$$

na equação 4.1 obtemos o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_1}{\partial z} = & C_1 k_B^2 + \sigma |C_1|^2 C_1 + 2\sigma |C_2|^2 C_1 + 2\sigma |C_3|^2 C_1 + 2\sigma |C_4|^2 C_1 + \\ & + 2\sigma C_2^* C_3 C_4 + \varepsilon \frac{V_0}{4} C_2 + \frac{V_0}{2} C_3 + \frac{V_0}{2} C_4, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_2}{\partial z} = & C_2 k_B^2 + \sigma |C_2|^2 C_2 + 2\sigma |C_1|^2 C_2 + 2\sigma |C_3|^2 C_2 + 2\sigma |C_4|^2 C_2 \\ & + 2\sigma C_1^* C_3 C_4 + \varepsilon \frac{V_0}{4} C_1 + \frac{V_0}{2} C_3 + \frac{V_0}{2} C_4, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_3}{\partial z} = & C_3 k_B^2 + \sigma |C_3|^2 C_3 + 2\sigma |C_1|^2 C_3 + 2\sigma |C_2|^2 C_3 + 2\sigma |C_4|^2 C_3 + \\ & + 2\sigma C_1 C_2 C_4^* + \varepsilon \frac{V_0}{4} C_4 + \frac{V_0}{2} C_1 + \frac{V_0}{2} C_2, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_4}{\partial z} = & C_4 k_B^2 + \sigma |C_4|^2 C_4 + 2\sigma |C_1|^2 C_4 + 2\sigma |C_2|^2 C_4 + 2\sigma |C_3|^2 C_4 + \\ & + 2\sigma C_1 C_2 C_3^* + \varepsilon \frac{V_0}{4} C_3 + \frac{V_0}{2} C_1 + \frac{V_0}{2} C_2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

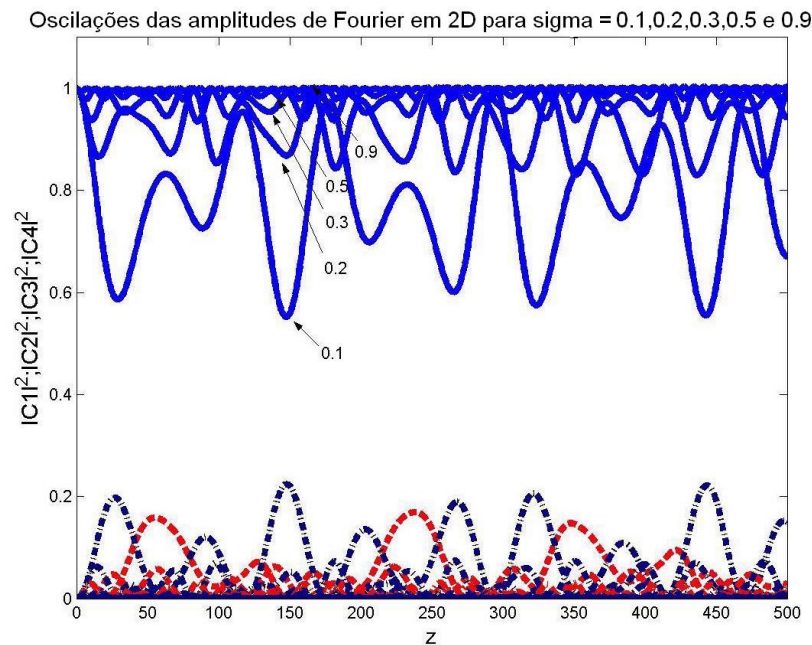


Figura 4.3: Oscilações dos modos de Fourier do campo em quatro níveis. Mostramos  $P_1 = |C_1|^2$  (linha sólida),  $P_2 = |C_2|^2$  (linha tracejada),  $P_3 = |C_3|^2$  e  $P_4 = |C_4|^2$  (linha de pontos tracejadas). Aqui usamos  $\sigma = 0.1; 0.2; 0.3; 0.5; 0.9$ ,  $V_0 = 0.05$  e  $\varepsilon = 1$ .

Observe que as amplitudes estão acopladas em cada uma das equações que foram apresentadas acima. Estas amplitudes são complexas, sendo  $C_1^*$ ,  $C_2^*$ ,  $C_3^*$  e  $C_4^*$  as amplitudes de Fourier conjugadas.  $\sigma$  conhecemos como o coeficiente da auto - desfocalização do feixe óptico. Vamos realizar o cálculo numérico para os mesmos valores do coeficiente  $\sigma$  que utilizamos no caso das oscilações das amplitudes de Fourier em uma dimensão. Então, poderemos analisar os possíveis resultados do cálculo numérico para o caso das oscilações dos modos de Fourier do campo elétrico em duas dimensões ou quatro níveis.

Como no caso em uma dimensão ou dois níveis, as oscilações das amplitudes de Fourier do campo elétrico decaem com o aumento do valor do coeficiente da auto - desfocalização, enquanto o feixe óptico se propaga na rede com potencial periódico constante. As fig.4.1, fig.4.2 e fig.4.3 apresentam as oscilações das amplitudes de Fourier sob o efeito da auto - desfocalização a medida que o feixe luminoso se propaga na rede opticamente



induzida. Observamos que as oscilações das amplitudes de Fourier vão decaindo bruscamente com o aumento do valor de  $\sigma$ , enquanto o feixe se propaga na rede, mas mantendo o princípio da conservação das amplitudes, ou seja, a soma das probabilidades das amplitudes resultam em um, pois o princípio da conservação da energia é conservado. Para o caso mais simples em que  $\sigma = 0$ , as amplitudes apresentam máximas oscilações do pico de Fourier do campo na rede óptica [1], este fato está explícito nas fig.3.2 e fig.3.5, para o caso linear. Notemos que  $\sigma = 0.9$ , é um valor crítico da auto - desfocalização do feixe, a partir do qual as oscilações das amplitudes de Fourier deixam de existir, passando a ser estados localizados. O efeito da auto - desfocalização, que é um efeito não linear, atua alargando o perfil das frequências espaciais do campo eletromagnético, sendo responsável pelo desaparecimento das oscilações das amplitudes de Fourier promovendo um adicionamento de fases nos modos que eram ressonantes  $-k_B$  e  $k_B$ , de maneira diferente, de forma que a diferença básica entre  $k_B$  e  $-k_B$  não será mais um vetor da rede recíproca, e como consequência as oscilações de Rabi óptica desaparecem, pois o acoplamento com a rede requer esta condição nas frequências ressonantes, como consequência os estados das amplitudes de Fourier deixam de oscilar, e passam agora a ser estados localizados a medida que a potência do feixe de luz é aumentada.

## 4.4 Conclusão

Neste capítulo, demonstramos a degradação das oscilações das amplitudes de Fourier de um feixe luminoso composto de um par de frequências, que obedecem a condição de Bragg ao se propagar através de uma rede óptica na presença da auto - desfocalização. Verificamos assim, que o termo da auto - desfocalização adicionado na equação de onda é responsável por eliminar as oscilações das amplitudes de Fourier do campo de luz, e a partir do valor crítico de 0.9 para o coeficiente  $\sigma$ , as amplitudes de Fourier pára totalmente

---

de oscilar na rede óptica.

# Capítulo 5

## Conclusão Geral

Inicialmente, nesse trabalho mostramos que o estudo das redes ópticas periódicas apresenta muitas características associadas com os cristais no estado sólido, mas uma importante diferença é que o tempo de coerência das redes ópticas é bastante longo, de tal forma que podemos observar alguns fenômenos de coerências como por exemplo as oscilações de Bloch. Na condição de ressonância de Bragg demonstramos que um feixe luminoso propagando na rede óptica na aproximação paraxial induz oscilações das amplitudes de Fourier como as bem conhecidas oscilações de Rabi que ocorrem na matéria. As oscilações de Rabi no meio material são acopladas pelo campo eletromagnético incidente que liga os estados do sistema que ficam oscilando, como no caso de um átomo de dois níveis onde os elétrons mudam de níveis energéticos sob a ação do campo. No caso óptico a rede faz o acoplamento, ligando as amplitudes de Fourier que ficam oscilando. No trabalho de Shchesnovich & Chávez [1] foram identificadas numericamente as oscilações de Rabi em redes ópticas apenas sob os efeitos lineares da rede, interpretando que tais oscilações no espaço real seriam as posições médias do feixe óptico na rede.

Nosso trabalho demonstrou que introduzindo o termo da auto - desfocalização na equação de propagação do feixe luminoso, tem como consequência um decaimento das oscilações ópticas de Rabi. A rede acopla o campo composto de um par de frequências que estão na ressonância de Bragg. Então durante a propagação do feixe as oscilações

das amplitudes de Fourier começam a sofrer uma degradação acentuada, a medida que o valor do coeficiente da auto - desfocalização aumenta, até um valor crítico de 0.9 onde completamente deixam de existir.

Observamos que o efeito da auto - desfocalização (análogo a difração no espaço real) que atua alargando o perfil das frequências espaciais do campo eletromagnético, induz a degradação das oscilações de Fourier através de um adicionamento de fases nos modos que eram ressonantes  $-k_B$  e  $k_B$ , de maneira diferente, de forma que a diferença básica entre  $k_B$  e  $-k_B$  não será mais um vetor da rede recíproca, e como consequência as oscilações de Rabi óptica desaparecem, pois o acoplamento com a rede requer esta condição nas frequências ressonantes.

# Capítulo 6

## Perspectivas

Baseado nesse trabalho poderemos testar os resultados obtidos em redes ópticas que apresentem outras simetrias como, por exemplo, uma rede que apresente simetria triangular, ou uma simetria hexagonal, obedecendo a condição de Bragg. Depois, comparar os resultados encontrados nessas simetrias com os resultados que foram obtidos na rede quadrada. Faremos um estudo analítico de um pulso multi - modal, para que se possa então descrever a distribuição da energia entre os modos co - propagantes.

# Bibliografia

- [1] V. S. Shchesnovich and S. Chávez-Cerda, "*Bragg-resonance-induced Rabi oscillations in photonic lattices*", *Opt. Lett.* **32**,1920-1922 (2007).
- [2] N.W. Ashcroft and N. W. Mermin, "*solid state physics*", (Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976).
- [3] P. St. J. Russell, "*photonic crystal fibers*", *science* vol. **299**, january, (2003).
- [4] J. D. Joannopoulos, R. D. Meade, and J. N. Winn, "*photonic Crystal* ", Princeton Press, Princeton, NJ, (1995).
- [5] J. W. Strutt, Baron Rayleigh, "*On waves propagating along the plane surface of an elastic solid*", *London Math. Soc. Proc.*, vol. **XVII**, pp. 4–11, (1885).
- [6] Steven G . Johnson and J. D. Joannopoulos, "*Three - dimensionally periodic dielectric layered structure with omnidirectional photonic band gap*", *Appl. Phys. Lett.* **77**, 3490 (2000).
- [7] E. Yablonovitch, "*Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics*", *Phys. Rev. Lett.*,Vol. **58**, 2059 -2062 (1987).
- [8] D. Trager, R. Fischer, D. N. Neshev, A. A. Sukhorukov, C. Denz, W. Królikowski, and Y. S. Kivshar, "*Nonlinear Bloch modes in two-dimensional photonic lattices*", *Opt. Express* **14**, 1913-1923 (2006).

- [9] M. Lonjcar, D. Nedeljković, T. P. Pearsall, J. Vujčković, A. Scherer, S. Kuchinsky, and D. C. Allan, "*Experimental and theoretical confirmation of Bloch-mode light propagation in planar photonic crystal waveguides*", Appl. Phys. Lett. **80**,1689-1691 (2002).
- [10] N.V. Morrow and G. Raithel, "*Wave-packet interference in an optical lattice*", Phys. Rev. Vol. **15** , 74-78 (2005).
- [11] J. Durnin, "*Nonlinear Optics with Stationary Pulses of Light*", J. Opt. Soc. Am. A **4**, 651 (1987).
- [12] Biao Wu and Qian Niu, "*Nonlinear Landau-Zener tunneling*", New Journal Physics **5**, 104.1 (2003).
- [13] F. Bloch, "*Photonic Bloch Oscillations and Zener Tunnelling*" Z. Phys. Rev. Lett. **52**, 555 (1928).
- [14] T. Pertsch, U. Peschel, J. Kobelke, K. Schuster, H. Bartelt, S. Nolte, A. Tünnermann, and F. Lederer, "*Nonlinearity and disorder in fiber arrays*", Phys. Rev. Lett. **93**, 053901.
- [15] H. Trompeter, Wieslaw Krolikowski, Dragomir N. Neshev, Anton S. Desyatnikov, Andrey A. Sukhorukov, Yuri S. Kivshar, Thomas Pertsch, Ulf Peschel, and Falk Lederer, "*Bloch Oscillations and Zener Tunneling in Two - Dimensional Photonic Lattices et al*", Phys. Rev. Lett. **96**. 053903 (2006).
- [16] C. Zener, "*Non-Adiabatic Crossing of Energy Levels*", Proc. R. Soc. London A **137**, 696 (1932).
- [17] I. I. Rabi, "*New Method of Measuring Nuclear Magnetic Moment*", Phys. Rev. **51** p. 652 (1937).

- [18] G. Bartal, O. Cohen, H. Buljan, J. W. Fleischer, O. Manela, and M. Segev, "*Brillouin zone spectroscopy of nonlinear photonic lattices*", Phys. Rev. Lett. **94**,1639024 (2005).
- [19] J. D. Jackson, "*Classical Electrodynamics*", 3rd ed, Wiley, New York, (1999).
- [20] L. Mandel and E. Wolf, "*Optical Coherence and Quantum Optics*", Cambridge University Press, New York, (1995).
- [21] S. Fan, "*Guided and defect modes in periodic dielectric waveguides*", J. Opt. Soc. Am., **B12**,1267 -1272(1995).
- [22] K. Sakoda, "*Optical Properties of Photonic Crystal*", Springer Berlin (2001).
- [23] G. B. Arfken and H. J. Weber, "*Mathematical Methods for Physicists*", 4nd ed, Academic Press, New York, (1995).
- [24] K. Leung, "*Defect modes in photonic band structures: a Green's function approach using vector Wannier function*", J. Opt. Soc. Am. **B10**, 3030-306 (1993).
- [25] L. D. Landau, "*On the theory of stars*", Phys. Z. USSR **2**, 46 (1932).
- [26] A. Maradudin and A. McGurn, "*In Photonic Band Gaps and Localization*" (ed. Soukoulis, C.) 247-268 (Plenum, New York, 1993).
- [27] M. Abramowitz and I. A. Stegun, "*Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*", Dover Publications, Inc., New York, (1965).
- [28] W. Robertson, "*Measurement of photonic band structure in a two - dimensional periodic dielectric array*", Phys. Rev. Lett. **68**, 2023-2026 (1992).
- [29] E. Majorana, "*Atomi orientati in campo magnetico variabile*", Nuovo Cimento vol. **9**, 43 (1932).



- [30] S. M. McCall, P. M. Platzman, R. Dalichaouch, D. Smith and S. Schultz, "*Microwave propagation in two - dimensional dielectric lattices*", Phys. Rev. Lett. **67**, 2017-2020 (1991).
- [31] D. McGloin, V. Garcés-Chávez, and K. Dholakia, "*Interfering Bessel beams for optical micromanipulation*", Optics Letters **28**, 657 (2003).
- [32] V. S. Shchesnovich, S. B. Cavalcanti, J. M. Hickmann, and Yu. S. Kivshar, "*Non-linear tunneling in two-dimensional lattices*", Phys. Rev. E **74**, 056602 (2006).
- [33] Tese de Doutorado de José Manuel Chávéz-Boggio, "*Efeitos não lineares em fibras ópticas de dispersão deslocada*", oriented by: Prof. Hugo L. Fragnito, Unicamp-IFGW, (2001).
- [34] N. K Efremidis, S. Sears., D. N. Christodoulides, J. W. Fleischer, and M. Segev, "*Two-dimensional optical discrete/lattice solitons* ", Phys. Rev. E **66**, 046602 (2002).
- [35] R. Sapienza, P. Constantino, D. Wiersma, M. Ghulinyan, C. Oton, and L. Pavesi, "*Presence of Stark ladders in scattering of shear horizontal piezoelectric waves*", Phys. Rev. Lett. **91**, 263902 (2003).
- [36] R. Morandotti,\* H. S. Eisenberg, and Y. Silberberg "*Silberberg Self-Focusing and Defocusing in Waveguide Arrays*", Phys. Rev. Lett. **86**, 3296 - 3299 (2001).
- [37] Yaroslav Kartashov, Lluís Torner, and Victor Vysloukh, "*Diffraction management of focused light beams in photonic lattices with a quadratic frequency modulation*", Optics Express, Vol. **13**, Issue 11, pp. 4244-4249 (2005).