

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
Instituto de Física

Complexidade como uma propriedade
emergente: Caudas grossas, correlações de
longo alcance e multifractalidade em séries
temporais não estacionárias.

Frederico Salgueiro Passos

Maceió, Alagoas – Brasil

Fevereiro – 2011

FREDERICO SALGUEIRO PASSOS

Complexidade como uma propriedade emergente: Caudas grossas, correlações de longo alcance e multifractalidade em séries temporais não estacionárias.

Dissertação apresentada ao
Instituto de Física da Universidade
Federal de Alagoas como
pré-requisito para obtenção
do título de Mestre em Ciências

Orientador: Prof. Dr. Iram Marcelo Gléria

Co-orientador: Prof. Dr. Madras Viswanathan Gandhi Mohan

Maceió, Alagoas – Brasil

Fevereiro – 2011

BANCA EXAMINADORA

1^o Examinador

2^o Examinador

3^o Examinador

Maceió, Alagoas – Brasil

Fevereiro – 2011

Dedico às pessoas que estiveram
ao meu lado durante o
mestrado e que tanto me apoiaram.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos da minha família, em especial, meu irmão, meus pais, minhas avós e meus tios.

Agradeço ao pessoal da Bat-Caverna, que me acompanhou durante todo o mestrado e me ajudou a superar muitos dos problemas que surgiam com o tempo. Em especial eu agradeço à Anderson Bandeira de Melo, Alex Costa, José Pereira Leão Neto, José Henrique, Paulo Brandão, Filipe Ferreira, Ricardo Momberg e Tiago Lobo.

Agradeço ao corpo discente do Instituto de Física da UFAL, em especial à Lidiane Omena, Gentil II, Thiago Bento, Felipe Doria, Rafael Rocha, Wandearley Dias, Maria Socorro, Nuccia, Thaíla, Wesley, André Lima, Elder, Marcelo Felisberto, Ueslen, Queila, Geovana, Daniela e Cícero Julião.

Agradeço ao corpo Docente do Instituto de Física da UFAL.

Agradeço aos meus principais colaboradores para esse trabalho, Prof Iram Gleria, meu orientador, Prof Gandhi Viswanathan, meu co-orientador e Prof César Nascimento, uma espécie de co-co-orientador.

Agradeço a Juliana Morena Bento Gomes de Barros, minha companheira, que esteve ao meu lado sempre me apoiando.

Por fim agradeço a R.P. Feynman e R. Dawkins, que sempre me mostraram o prazer de descobrir as coisas e a beleza de desvendar o arco-íris.

*“O conhecimento científico somente
adiciona ao mistério e excitação da descoberta,
ele só adiciona, eu não consigo entender como
poderia subtrair”*

- R. P. Feynman

Resumo

Um problema muito importante e em aberto é a origem física de correlações de longo alcance, multifractalidade e distribuições de caudas grossas observados em séries temporais heterocedásticas associadas com sistemas complexos. Os fatos estilizados financeiros nos fornecem um exemplo útil usualmente não explicado por modelos econômicos tradicionais. Nós investigamos o comportamento de um modelo baseado em agentes, que consiste em N agentes heterogêneos que não interagem entre si e que seguem regras simples. Nós mostramos que distribuições de caudas grossas, correlações de longo alcance, heterocedasticidade e multifractalidade surgem com N se tornando muito grande. Nossas descobertas sugerem que tais fatos estilizados podem em princípio surgir como propriedades emergentes.

Palavras-Chave: Sistemas Complexos, Econofísica, Multifractalidade, Propriedades Emergentes, Correlações de longo-alcance.

Abstract

An important open problem concerns the physical origin of long-range correlations, multifractality and fat tailed distributions observed in heteroscedastic time series associated with complex systems. Financial stylized facts provides one useful example usually not explained by traditional economic models. We investigate the behavior of an agent based model consisting of N agents which are heterogeneous and do not interact with each other and follow simple rules. We show that fat tailed distributions, long-range correlations, heteroscedasticity and multifractality arise as N becomes large. Our findings suggest that such stylized facts can in principle arise as emergent properties.

Keywords: Complex Systems, Econophysics, Multifractality, Emergence, Long-range correlations

Lista de Figuras

2.1	Caminhantes Aleatórios em 1D	14
2.2	Caminhante Aleatório 2D	15
2.3	Caminhante Aleatório 3D	16
2.4	Função Densidade de Probabilidade para Caminhante 1D	18
2.5	Várias distribuições com diferentes skewness	21
2.6	Várias distribuições com diferentes kurtosis	22
2.7	Distribuição Gaussiana	29
2.8	Algumas distribuições estáveis de Lévy	31
2.9	Exemplo do comportamento de $f(\alpha)$ em relação a α . Retirada de[21]	38
3.1	Retornos do índice IBOVESPA com diferentes frequências	40
3.2	Distribuição de retornos de alta frequência no índice S&P 500, onde a linha tracejada em forma de parábola é a distribuição Gaussiana e a linha sólida é uma distribuição truncada de Lévy.[9]	41
3.3	Plot da distribuição de probabilidades para vários atrasos no retorno. Variando Δt podemos perceber claramente que as distribuições de probabilidade também são diferentes [31].	42

3.4	Comparativo entre os dois regimes, de alta(a) e baixa(b) frequência. Figura retirada do artigo [31]	43
3.5	Fit linear para $P(0)$ e Δt no índice S&P500[9].	45
3.6	Fit linear para $P(0)$ e Δt no índice Bovespa[32].	46
3.7	Volatilidade do índice S&P500 retida de[15].	48
3.8	Volatilidade do índice IBOVESPA[35].	49
3.9	Padrão de autocorrelação na série de retornos[15].	50
3.10	Padrão de autocorrelação na série de volatilidade[15].	51
3.11	Padrão de correlação cruzada entre a série de volatilidade e de retorno.[36].	51
3.12	Colapso dos dados de diferentes frequências de retornos para o mer- cado S&P500[9].	53
3.13	(a)Dependência do expoente de Hurst com o q-ésimo momento. (b) Espectro multifractal em função do expoente de Hölder.[38]	54
4.1	Simulação com 50 Agentes.	59
4.2	Simulação com 100 Agentes.	60
4.3	Simulação com 250 Agentes.	60
4.4	Simulação com 600 Agentes.	61
4.5	Simulação com 1000 Agentes.	61
4.6	Distribuição de Retornos.	62
4.7	A kurtosis calculada para as distribuições de retornos.	63
4.8	Relação entre $P(0)$ e Δt para 50 Agentes.	65
4.9	Relação entre $P(0)$ e Δt para 100 Agentes.	65
4.10	Relação entre $P(0)$ e Δt para 250 Agentes.	66
4.11	Relação entre $P(0)$ e Δt para 600 Agentes.	66

4.12	Relação entre $P(0)$ e Δt para 1000 Agentes.	67
4.13	α de Levy calculado para diferentes números de agentes.	67
4.14	Transição de regime devido a mudança no atraso para 250 Agentes. O Inset mostra o padrão de auto-similaridade da série temporal, com o colapso dos dados devido a re-escala.	68
4.15	Transição de regime devido a mudança no atraso para 600 Agentes. O Inset mostra o padrão de auto-similaridade da série temporal, com o colapso dos dados com o devido a re-escala.	69
4.16	Dependência do expoente de Hürst com o momento q	70
4.17	Ajuste do espectro multifractal $f(\alpha)$ vs expoente α de Hölder	70
4.18	Autocorrelação das séries de retorno para diferentes números de agentes.	71
4.19	Autocorrelação das séries de volatilidade para diferentes números de agentes	72
4.20	Plot de diversos intervalos para o preço base para 50 Agentes.	73
4.21	Plot de diversos intervalos para o preço base para 100 Agentes.	73
4.22	Plot de diversos intervalos para o preço base para 250 Agentes.	74
4.23	Plot de diversos intervalos para o preço base para 600 Agentes.	74
4.24	Plot de diversos intervalos para o preço base para 1000 Agentes. . . .	75
4.25	Desvio padrão das distribuições em função do tamanho do intervalo do preço base.	75

Lista de Tabelas

3.1	Tabela Com diferentes valores para α [32]	47
4.1	Valores para a kurtosis dependendo do número de agentes e do fator de impacto	76

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Propriedades Emergentes de Sistemas Complexos	1
1.2	A Econofísica	3
1.3	Os Fatos Estilizados de Mercado	9
2	INTRODUÇÃO MATEMÁTICA	12
2.1	Variáveis Aleatórias e Caminhada Aleatória	12
2.1.1	Variáveis Discretas	13
2.1.2	Variáveis Contínuas	13
2.1.3	Caminhada Aleatória	13
2.2	Função Densidade de Probabilidade(PDF)	17
2.2.1	Momentos Estatísticos	18
2.2.2	Momentos Centrados na Média	19
2.2.3	Função Característica	22
2.3	Correlação Linear	24
2.4	Principais Distribuições Estatísticas	25
2.4.1	Distribuição Binomial	25
2.4.2	Distribuição Gaussiana(Normal)	26

2.4.3	Distribuições α -estáveis de Lévy	28
2.5	Fractalidade	31
3	PROPRIEDADES UNIVERSAIS DOS MERCADOS REAIS: FATOS ESTILIZADOS	39
3.1	Retornos e Volatilidade	39
3.2	Correlações	49
3.3	Multifractalidade das Séries de Retorno	51
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	55
4.1	Modelo Proposto	56
4.2	Resultados	58
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	78
	REFERÊNCIAS	80

1

INTRODUÇÃO

1.1 Propriedades Emergentes de Sistemas Complexos

Sistemas com muitos indivíduos, com muitas correlações, interconectados e com uma ou mais propriedades coletivas (tais como comportamento) não óbvias a partir das propriedades de um indivíduo único, são chamados de sistemas complexos. Sistemas complexos são estudados em vários âmbitos. Em Ciências biológicas, sociais, em matemática e também no contexto de física utilizando a Mecânica Estatística. Exemplos de sistemas complexos podem ser: colônias de formigas, o clima, o sistema nervoso dos animais, vírus e células, telecomunicações e o sistema econômico. Todos esses sistemas podem ser modelados via teorias de sistemas complexos[1].

Esses sistemas dinâmicos são ricos em propriedades interessantes, muitas delas são chamadas de propriedades emergentes, ou seja, padrões que surgem, emergem, da dinâmica de interação dos componentes do sistema. Propriedades emergentes são estudadas desde o tempo de Aristóteles quando este diz que: “O todo é mais do que a soma de suas partes”[2], o termo emergente foi designado por G. H. Lewes, que

escreveu: *“Every resultant is either a sum or a difference of the co-operant forces; their sum, when their directions are the same – their difference, when their directions are contrary. Further, every resultant is clearly traceable in its components, because these are homogeneous and commensurable. It is otherwise with emergents, when, instead of adding measurable motion to measurable motion, or things of one kind to other individuals of their kind, there is a co-operation of things of unlike kinds. The emergent is unlike its components insofar as these are incommensurable, and it cannot be reduced to their sum or their difference.”*[3]

J. Goldstein da School of Business na Adelphi University nos fornece a definição atual de propriedades emergentes. Para J. Goldstein, emergência pode ser definida como: “o surgimento de novas e coerentes estruturas , padrões e propriedades durante o processo de auto-organização em sistemas complexos”[4] .

Uma propriedade típica de sistemas emergentes é a lei de escala, ou seja, uma ausência de escala bem definida, possuindo assim uma simetria de invariância de escala, fenômenos muito bem conhecidos em estruturas ditas fractais. Outro fenômeno também apresentado é que os sinais oriundos das análises desses sistemas não possuem uma variância constante, ou seja, o segundo momento, que será melhor definido no capítulo 2, varia com o tempo. Essa peculiaridade acerca da variância é chamada de heterocedasticidade.

Usando ferramentas de Mecânica Estatística, que serão melhor abordadas no capítulo 2, pretendemos identificar diversas propriedades que surgem em sistemas econômicos tais como: multifractalidade, caudas grossas, correlações de longo alcance e heterocedasticidade, gerando séries temporais não estacionárias por meio de um modelo de agentes com regras simples, com o objetivo de compreender melhor

os mecanismos de auto-organização do sistema.

1.2 A Econofísica

A utilização de conceitos e quantidades de natureza física para explicar fenômenos econômicos é conhecida hoje em dia como Econofísica, uma área crescente em todo o mundo com grandes contribuições para o conhecimento. Abordaremos de forma mais enfática a história e os fundamentos da Econofísica.

Em 1844, J. S. Mill apresentou o que foi conhecido como Lei de Walras [5], em nome do economista francês L. Walras. Essa lei é um princípio em teoria geral do equilíbrio, que é um ramo teórico da economia que visa explicar o comportamento dos mercados buscando determinar o equilíbrio entre os mercados. A afirmativa é que se todos os mercados, menos um, estivessem em equilíbrio, logo este único também estaria em equilíbrio. Algo que lembra de certa forma a Lei Zero da Termodinâmica, que diz: se um corpo A está em equilíbrio térmico com um corpo B e este em equilíbrio térmico com C, logo A está também em equilíbrio com C. Essa foi portanto uma das primeiras analogias econômicas para sistemas físicos. A teoria tem suas limitações e muitos economistas ainda buscam entender qual é o limiar até onde a lei é válida.

Também como exemplo de um dos pais do estudo das leis de mercado, temos V. Pareto, um economista italiano que observou que a distribuição de riquezas deveria seguir uma lei de potência de tal maneira que probabilidade de um indivíduo

ter uma renda X maior que um valor x dado por[6]:

$$P_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{x_m}{x}\right)^\nu & \text{for } x \geq x_m, \\ 1 & \text{for } x < x_m. \end{cases} \quad (1.1)$$

em que x_m é o menor valor que X pode assumir e ν é o índice de Pareto.

Pareto também usou essa distribuição para estudar receitas, ou retornos. A distribuição de Pareto é amplamente encontrada em outros sistemas que não estes que ele estudou.

A análise de preços de ativos financeiros de maneira formal em matemática, consiste em buscar por uma lei que mostre o comportamento de uma variável e dessa maneira também o poder de previsão do comportamento futuro. O primeiro trabalho formal foi descrito por L. Bachelier em 1900 em sua tese de doutoramento[7]. Nesse trabalho, L. Bachelier definiu que os preços dos ativos eram distribuídos aleatoriamente e independentes uns dos outros e, além disso, deveriam seguir uma distribuição normal ou Gaussiana, típica do movimento Browniano, descrito mais tarde por Einstein.

Em meados de 1960, B. B. Mandelbrot, estudando os preços das ações de algodão na bolsa dos EUA, verificou que os preços não se distribuíam como uma Gaussiana, eles possuíam as chamadas caudas-grossas, algo típico das distribuições estáveis de Lévy[8], nomeadas em homenagem à P. Lévy, que foi orientador de B. B. Mandelbrot.

A partir desse ponto, muitos físicos teóricos que trabalham com Física Estatística se interessaram pelo estudo dos fenômenos estocásticos que apareciam em mercados financeiros, fenômenos estes que eram típicos de sistemas com muitas correlações e complexidade. Com o grande crescimento do número de artigos publicados

nessa área um nome específico para essa linha de pesquisa seria um caminho natural a seguir. O nome surgiu em uma conferência de física estatística em Calcutá, alcunhada por H. E. Stanley em 1995, mesmo ano em que ele e R. Mantegna publicaram um dos artigos mais importantes para a área[9], onde eles descrevem que os mercados financeiros podem ser descritos por uma distribuição truncada de Lévy e possuem a propriedade de auto-similaridade.

Com a criação e desenvolvimento dessa nova área da Física, uma gama de possibilidades surgiram para os físicos. Muitos bancos e empresas financeiras procuram agora doutores em Física, com especialidade em econofísica, para desempenhar papéis importantes em seus negócios.

Um fato muito importante para os defensores da Econofísica aconteceu em 1973. F. Black e M. Scholes[10] publicaram um modelo que tratava do “preço justo” a ser pago por uma opção. Tal modelo, que foi melhor explicado por R. C. Merton[11], o qual foi nomeado modelo Black-Scholes, argumentava que o preço justo a ser pago era regido por um movimento browniano geométrico. O modelo trata de uma solução analítica para o preço justo a se pagar por um contrato de opção europeia. Inicialmente vamos considerar as seguintes hipóteses:

- O comportamento dos preços segue um processo de Itô descrito pela equação:

$$dS = \gamma S dt + \sigma S dZ \quad (1.2)$$

- Não existe arbitragem
- As negociações no mercado são contínuas
- O custo das transações e os impostos envolvidos nas mesmas são desprezados

O valor de uma opção de compra, Ω , depende de várias variáveis, tais como, o preço de referência do ativo no tempo t , S ; o preço de exercício da opção ou strike, K ; a data do vencimento T ; a taxa de juros, r ; Z é uma variável aleatória com desvio padrão σ e γ é um *drift*, uma tendência que o mercado sofre.. Considerando que as variáveis K, T, r, γ e σ são constantes e podem ser determinadas pelo investidor, teremos a simplificação de que

$$\Omega = \Omega(S, t)$$

De posse disso podemos utilizar o lema de Itô para fazer a expansão e determinar uma equação diferencial para ser resolvida. Assim teremos:

$$d\Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial S} dS + \frac{\partial \Omega}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial S^2} dS^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} dt^2 + \dots \quad (1.3)$$

Substituindo a equação 1.2 na equação anterior nos fornece uma equação para $d\Omega$:

$$d\Omega = \left(\gamma S \frac{\partial \Omega}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial S^2} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right) dt + \sigma S \frac{\partial \Omega}{\partial S} dZ \quad (1.4)$$

De posse dessa equação e juntamente com a dinâmica di preço de um ativo seremos capazes de chegar a uma expressão analítica para o preço justo a ser pago por uma opção.

Vamos agora definir uma carteira de investimentos contendo uma opção de compra Ω e uma posição vendida em Δ ações, teremos assim que:

$$\Pi = \Omega - \Delta S \quad (1.5)$$

onde o sinal negativo indica que o investidor está devendo uma quantidade Δ de ações. Não há capital inicial e todo lucro é reinvestido na carteira, por exemplo, compensando o débito inicial.

Da equação acima podemos determinar uma equação em um tempo $t + dt$ como sendo:

$$d\Pi = d\Omega - \Delta dS \quad (1.6)$$

Substituindo tanto a equação 1.4 e 1.2, teremos:

$$d\Pi = \left(\gamma S \frac{\partial \Omega}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial S^2} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} - \gamma S \Delta \right) dt + \sigma S \left(\frac{\partial \Omega}{\partial S} - \Delta \right) dZ \quad (1.7)$$

Para que tenhamos uma carteira sem risco é preciso eliminar a aleatoriedade, para tal o coeficiente de dZ deve ser zero, logo:

$$\Delta = \frac{\partial \Omega}{\partial S} \quad (1.8)$$

E com isso a equação 1.7 perde três termos e fica:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial S^2} \right) dt \quad (1.9)$$

Esse procedimento onde consideramos que a carteira seja livre de risco é clamado *delta de hedge* e com uma carteira livre de risco teremos o modelo representado pela equação:

$$dS = \gamma S dt \quad (1.10)$$

, logo,

$$d\Pi = r\Pi dt \Rightarrow r\Pi = \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial S^2} \quad (1.11)$$

Substituindo as equações 1.5 e 1.8 na equação acima teremos que:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial S^2} + rS \frac{\partial \Omega}{\partial S} - r\Omega = 0 \quad (1.12)$$

Essa é a famosa Equação de Black-Scholes, cuja solução é não-trivial, mas utilizaremos de alguns artifícios para resolve-la.

Vamos definir que:

$$\Omega(S, t) = e^{-r(T-t)} u(x, \tau) \quad (1.13)$$

onde,

$$x = \frac{2\rho}{\sigma^2} \left(\ln \frac{S}{K} + \rho(T-t) \right) \quad (1.14)$$

$$\tau = \frac{2\rho^2}{\sigma^2} (T-t) \quad (1.15)$$

$$\rho = r - \frac{\sigma^2}{2} \quad (1.16)$$

Tomando então todas as derivadas ficamos com a equação:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial S^2} + rS \frac{\partial \Omega}{\partial S} - r\Omega = e^{-r(T-t)} \frac{2\rho^2}{\sigma^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial \tau} \right] = 0 \quad (1.17)$$

Logo temos:

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial \tau} \right] = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad (1.18)$$

Que equivale a uma equação de difusão unidimensional, já que τ tem dimensão temporal. Tal equação é muito bem conhecida por físicos e sua solução é amplamente estudada.

Após a contribuição de R.C. Merton, o modelo pode ser encontrado com o nome de Black-Scholes-Merton, por esse trabalho R. C. Merton e M. Scholes receberam em 1997 o prêmio Nobel de economia, F. Black já havia falecido.

Além do estudo do mercado através de análises empíricas de séries em busca de processos que melhor se aproximem do comportamento real com equações estocásticas, um outro tipo de abordagem também popular é o *Agent-Based Model*,

ou modelo de agentes. Esse modelo é focado na dinâmica que envolve os agentes pertencentes ao mercado. Em comparativo é como se o comportamento da série macroscópica fosse explicada em termos das interações microscópicas do sistema.

Muitos modelos físicos têm sido usados nessa abordagem. O mais popular entre eles é o modelo Ising de interação de spins em uma rede que em sistemas econômicos é usado no modelo USDF (*United we Stand Divided we Fall*) [12]. Usando simulações de Monte-Carlo, esse modelo foi capaz de apresentar muitos dos fatos estilizados [13].

Alguns outros exemplos são amplamente utilizados, tais como Autômatos Celulares, modelos que simulem decisões via volatilidade estocástica, como o modelo de Black-Scholes que mostramos e entre muitos outros que vem apresentando resultados muito satisfatórios no que se diz respeito a reprodução dos dos comportamentos reais presentes em mercados financeiros.

Neste trabalho apresentaremos uma proposta de modelo extremamente simples, com alguns poucos parâmetros e com uma boa precisão em representar muitos fatos estilizados. Como comparativo para saber a concordância do nosso modelo com a realidade do mundo, utilizamos os resultados conhecidos como Fatos Estilizados de Mercado que serão explanados na próxima seção.

1.3 Os Fatos Estilizados de Mercado

Conforme mencionado anteriormente, neste trabalho voltamos a atenção para as propriedades que são pertencentes aos mercados financeiros utilizando os conceitos e ferramentas bem conhecidas de Mecânica Estatística baseados na ideia

de que tais propriedades surgem de forma emergente de um sistema complexo.

Vamos agora expor e exemplificar melhor as propriedades de interesse nesses sistemas. Sabe-se que existem certas características que são compartilhadas por qualquer mercado financeiro, essas são fundamentadas em dados empíricos e são um excelente termômetro para indicar se um modelo está ou não condizente com a realidade. Tais características receberam o nome de Fatos Estilizados, pelo economista N. Kaldor em 1961[14].

Usando os conceitos utilizados atualmente[15], podemos expor alguns dos fatos estilizados como sendo:

1. As distribuições de probabilidade dos retornos para dados de alta frequência possuem “caudas grossas”, ou seja a probabilidade de observarmos uma grande mudança no mercado não deve cair exponencialmente.
2. As distribuições de probabilidade normalmente são leptocúrticas¹ e também possuem uma skewness¹ negativa(fruto da correlação cruzada entre retorno e volatilidade ser negativa, o efeito de leverage)
3. Os q-ésimos momentos da distribuição das flutuações dos preços (retornos) são multifractais, pois seus expoentes dependem do índice q.
4. Os retornos de uma série temporal são fracamente correlacionadas.
5. As séries de volatilidade(retornos absolutos) possuem correlações de longo alcance.

¹curtose e skewness são momentos estatísticos que serão melhor descritos no próximo capítulo

¹n

6. Se hoje o mercado apresenta uma elevada volatilidade, então a probabilidade de observarmos um grande evento amanhã é maior que a média (cluster de volatilidade).

Esses são os principais fatos estilizados e o foco principal do nosso trabalho. Os fatos de 1 a 4 já são discutidos há muito tempo. o quinto fato foi proposto por B. B. Mandelbrot[8], que afirmou que a distribuição correta deveria ser uma distribuição estável de Lévy com o parâmetro $\alpha = 1.7$. O fato (6) foi observado por Z. Ding *et al*[16].

2

INTRODUÇÃO MATEMÁTICA

Desde a época em que a economia se consolidou como cenário de análises racionais junto as ciências naturais e a matemática, os estudiosos procuram por uma lei matemática universal que possibilite a explicação dos diferentes fenômenos que ocorrem dentro da economia. Muito se avançou desde o simples modelo de lei de potência apresentado por V. Pareto[6].

Neste capítulo apresentaremos as ferramentas matemáticas utilizadas para criar os modelos matemáticos e para a sua análise.

2.1 Variáveis Aleatórias e Caminhada Aleatória

Podemos definir variável aleatória através de um exemplo bem simples. Considerando um conjunto qualquer, chamado Espaço Amostral. Ele é composto de todos os eventos que podem ocorrer em um determinado sistema. Por exemplo ao jogarmos uma moeda, o espaço amostral é composto por dois eventos, cara e coroa. No caso do lançamento de um dado, o espaço amostral cresce para 6 eventos.

Uma variável aleatória é uma função do espaço amostral para o conjunto dos números reais, ou seja:

$$X : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

Essa função leva um dado evento a sua frequência, ou de forma normalizada, a sua probabilidade.

2.1.1 Variáveis Discretas

“Se a menor diferença não nula entre dois possíveis valores dessa variável for sempre finita, logo ela é um variável discreta.”. Como exemplo podemos citar novamente o jogar de dados, vemos que os valores que essa variável pode assumir satisfazem a definição acima.

2.1.2 Variáveis Contínuas

“Se a menor diferença não nula entre dois possíveis valores da variável aleatória nem sempre for finita, ela é uma variável contínua.”. Neste caso a variável pode assumir infinitos valores dentro de um intervalo finito. Como exemplo temos uma escolha aleatória em um intervalo $[x, y]$, onde x e y são números reais.

2.1.3 Caminhada Aleatória

A caminhada aleatória é um problema muito comum e útil em física. Consiste em um caminhante(moléculas, partículas, cargas, bêbados) que se move de forma randômica. Sua posição depende de escolhas feitas aleatoriamente a cada tempo t .

O problema da caminhada aleatória é muito importante para a econofísica,

pois vários pesquisadores afirmam que o mercado é quase como um passeio aleatório[7, 9, 15, 8]. Apresentaremos exemplos gráficos de caminhadas unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais.

Caminhante 1D

Considere um caminhante movendo-se de forma aleatória, restrito a uma linha(1D), a partir de x_0 , cujo passo seja $\pm l$ logo, depois de um tempo t sua posição deverá ser $x(t) = x_0 + tn$, onde n é a diferença entre os passos dados para $+l$ e os passos dados para $-l$. Nesse, a variável aleatória é discreta, ou seja, a posição do caminhante é discretizada.

A figura 2.1 apresenta a posição x em função do tempo para caminhantes com probabilidades p diferentes.

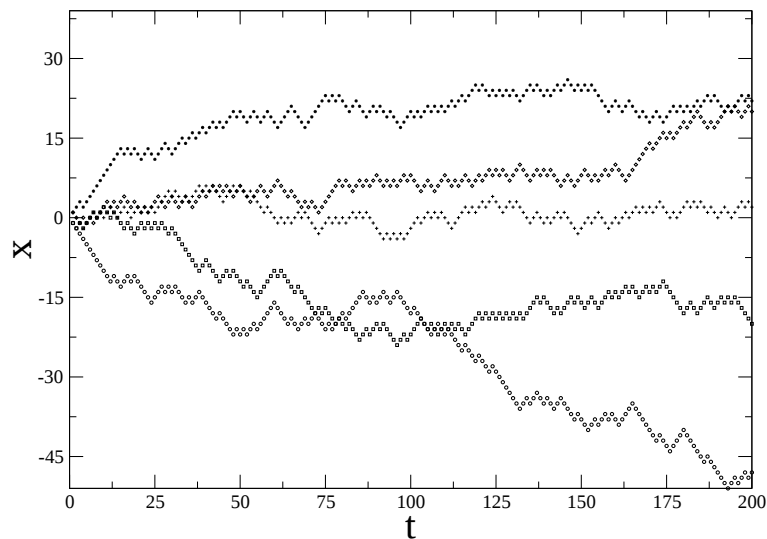


Figura 2.1: Caminhantes Aleatórios em 1D

Caminhada 2D

Para o caminhante 2D, ao invés de trabalhar com duas variáveis aleatórias diretamente, x e y , é mais prático tratar do ângulo θ_i entre x e y . Logo teremos as equações:

$$x = x_0 + l \cos(\theta_i) \quad (2.1)$$

$$y = y_0 + l \sin(\theta_i) \quad (2.2)$$

Para cada passo um ângulo θ_i será sorteado, posteriormente a posição do caminhante é atualizada.

A figura 2.2 ilustrar, fizemos uma pequena simulação para um θ_i com igual probabilidade para todos os valores entre 0 e 2π .

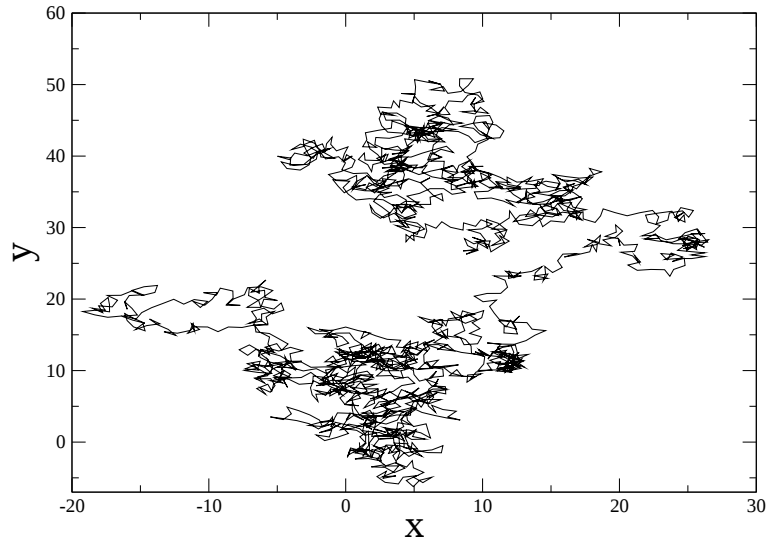


Figura 2.2: Caminhante Aleatório 2D

Caminhada 3D

A generalização para 3 dimensões espaciais é bem simples, basta considerar coordenadas esféricas, onde podemos escrever as coordenadas x, y, z como função de dois ângulos aleatórios, θ_i e ϕ_i , com as relações canônicas:

$$x = x_0 + l \cos(\theta_i) \sin(\phi_i), \quad (2.3)$$

$$y = y_0 + l \sin(\theta_i) \sin(\phi_i), \quad (2.4)$$

$$z = z_0 + l \cos(\phi_i), \quad (2.5)$$

em que θ_i está distribuído no intervalo de 0 à 2π e ϕ_i entre 0 e π . A figura 2.3 apresenta o comportamento para 3 caminhantes distintos.

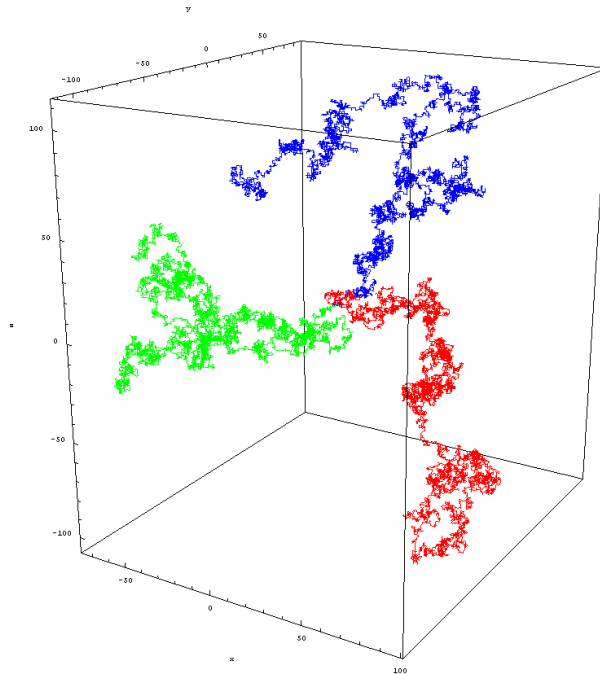


Figura 2.3: Caminhante Aleatório 3D

2.2 Função Densidade de Probabilidade(PDF)

Como citado anteriormente, nossas variáveis aleatórias são funções que levam do espaço amostral até o espaço real. Essa não é uma ligação qualquer. Associamos que para a realização x_i , de uma variável aleatória X , teremos um número real p_i , donde $p_i \leq 1$, possuindo também a seguinte restrição: se a variável aleatória X possui n realizações, logo $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Podemos definir a probabilidade associada à uma variável aleatória discreta, como sendo:

$$P_X(x) = \sum_{i=1}^n p_i \delta(x - x_i). \quad (2.6)$$

Para uma variável contínua, a probabilidade de encontrar uma realização entre X entre x e $x + dx$ é

$$P(x) = f(x)dx. \quad (2.7)$$

Em que $f(x)$ é a função densidade de probabilidade associada com à realização x .

Podemos apresentar um estímulo visual para a função densidade de probabilidade, calculando-a para os nossos caminhantes aleatórios de 1D mostrados na seção 2.1.3.

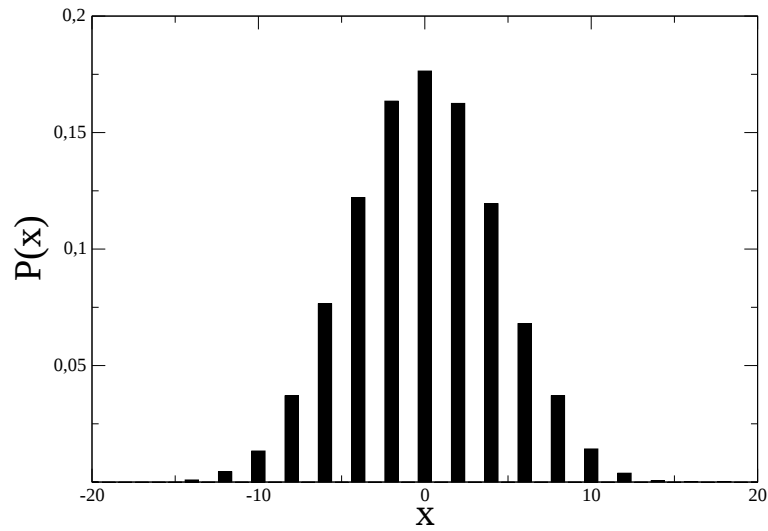


Figura 2.4: Função Densidade de Probabilidade para Caminhante 1D

2.2.1 Momentos Estatísticos

De posse da função densidade de probabilidade(PDF) de uma variável aleatória X , temos todas as informações possíveis sobre ela. A PDF pode ser descrita através de outras quantidades denominadas de momentos estatísticos.

Por definição temos que o n -ésimo momento é dado por:

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n P_X(x) dx. \quad (2.8)$$

Para uma distribuição discreta de n realizações, teremos:

$$\langle x^n \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i^n p_i}{\sum_{i=1}^{\infty} p_i}. \quad (2.9)$$

Alguns momentos tem nomes específicos e utilidades bem definidas. Apresentaremos os principais deles e como a análise numérica pode ser feita.

Primeiro Momento

O primeiro momento, também chamado de média, é a medida do que podemos dizer como sendo o “centro de massa” da densidade de probabilidade. Ele muitas vezes é confundido com o valor mais provável e a mediana. O valor mais provável é o ponto de maior valor para $P_X(x)$. A mediana é o valor de x que divide a área sob a curva de $P_X(x)$, em duas partes iguais.

Para iguais probabilidades das variáveis discretas, com n passos, o primeiro momento pode ser calculado como:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (2.10)$$

2.2.2 Momentos Centrados na Média

Vamos definir agora os momentos centrados na média que nos fornecem muitas propriedades interessantes das PDFs. Para um conjunto discreto de k realizações, temos que o n -ésimo momento, μ_n , será

$$\mu_n = \sum_{i=1}^k \frac{p_i (x_i - \langle x \rangle)^n}{\sum_{i=1}^k p_i}. \quad (2.11)$$

Segundo Momento

O segundo momento seria como a medida do “momento de inércia” da distribuição. Ele também é associado à largura da densidade de probabilidade, e também é chamado de variância. Com a variância, calculamos outra quantidade muito importante, o desvio padrão, que é a raiz quadrada da variância. Definimos o segundo

momento de uma distribuição discreta como sendo

$$\mu_2 = \sum_{i=1}^n \frac{p_i(x_i - \langle x \rangle)^2}{\sum_{i=1}^n p_i}. \quad (2.12)$$

Como dito antes, o desvio padrão deverá ser

$$\sigma = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{p_i(x_i - \langle x \rangle)^2}{\sum_{i=1}^n p_i}}. \quad (2.13)$$

Terceiro Momento

O terceiro momento nos ajuda a calcular o grau de assimetria de uma distribuição.

Para uma distribuição discreta, o terceiro momento será

$$\mu_3 = \sum_{i=1}^n \frac{p_i(x_i - \langle x \rangle)^3}{\sum_{i=1}^n p_i}. \quad (2.14)$$

Dividido o terceiro momento pelo cubo do desvio padrão, temos a quantidade conhecida como skewness. Ela determina o grau de assimetria de uma função densidade de probabilidade. Podemos definir o skewness como:

$$s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \quad (2.15)$$

Se $s > 0$, a função possui uma cauda direita (valores acima da média) mais pesada. Se $s < 0$, logo a função tem uma cauda esquerda (valores abaixo da média) mais pesada. Se $s = 0$, podemos dizer então que a função é simétrica. Na figura 2.5, temos os três casos citados acima.

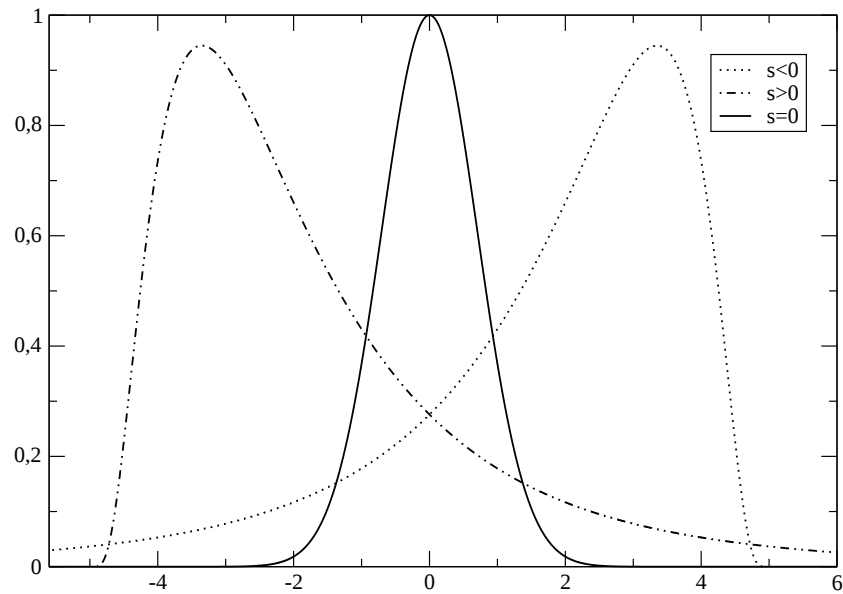


Figura 2.5: Várias distribuições com diferentes skewness

Quarto Momento

O quarto momento é utilizado em análises estatísticas. Com ele podemos calcular o quão “achatada” é uma distribuição. O quarto momento para uma distribuição discreta é

$$\mu_4 = \sum_{i=1}^n \frac{p_i (x_i - \langle x \rangle)^4}{\sum_{i=1}^n p_i}. \quad (2.16)$$

O quarto momento é usado para calcular quantidade conhecida como Kurtosis. A partir dela obtemos informações do “achatamento” da função. Podemos definir a kurtosis como

$$k = \frac{\mu_4}{\sigma^4}. \quad (2.17)$$

Para $k = 0$, temos as funções mesocúrticas que são comparadas à função gaussiana. Com $k < 0$ chamamos de funções platicúrticas, e são mais achatadas que a gaussiana. Por fim, temos: Se $k > 0$, caracterizando as leptocúrticas, bem

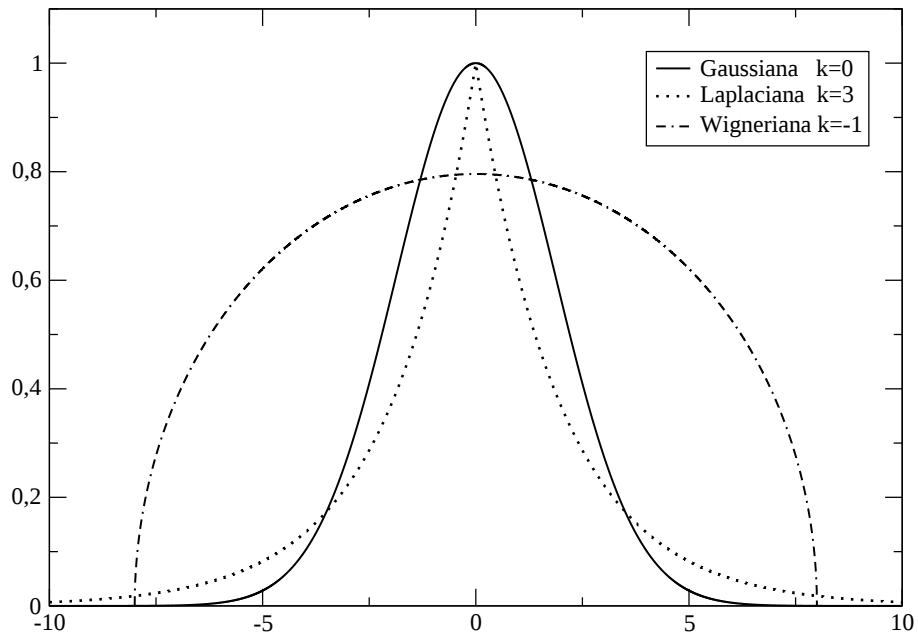


Figura 2.6: Várias distribuições com diferentes kurtosis

afinadas e que possuem as chamadas *caudas grossas*. A figura 2.6, ilustra os casos.

2.2.3 Função Característica

A função característica, também conhecida como função geradora de momentos, é uma função definida no espaço k , cuja transformada inversa de Fourier nos retorna os momentos.

A função característica $f_X(k)$, correspondente a variável aleatória X , é definida como:

$$f_X(k) = \langle e^{ikx} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} P_X(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n \langle x^n \rangle}{n!} \quad (2.18)$$

Alguns exemplos de funções características de distribuições conhecidas são:

$$G(\mu, \sigma^2) = e^{ik\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 k^2} \text{ Distribuição Gaussiana} \quad (2.19)$$

$$L(\mu, b) = \frac{e^{ik\mu}}{1 + b^2 k^2} \text{ Distribuição de Laplace} \quad (2.20)$$

$$C(\mu, \theta) = e^{ik\mu - k|\theta|} \text{ Distribuição de Cauchy-Lorentz} \quad (2.21)$$

De posse da função característica, podemos obter todas as informações sobre a função densidade de probabilidade e os momentos estatísticos associados a variável aleatória, apenas calculando a transformada inversa de Fourier, como dito anteriormente.

$$P_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f_X(k) dk \quad (2.22)$$

$$\langle x^n \rangle = \lim_{k \rightarrow 0} (-i)^n \frac{d^n f_X(k)}{dk^n} \quad (2.23)$$

Outra forma muito útil de se escrever a função característica, é através de uma expansão em série de quantidades, chamadas de cumulantes. Esses cumulantes nos dão diretamente os momentos centrados na média. Os cumulantes são definidos da seguinte forma

$$f_X(k) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} C_n(X) \right). \quad (2.24)$$

Expressando os primeiros temos:

$$C_1(X) = \langle x \rangle \quad (2.25)$$

$$C_2(X) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \mu_2 \quad (2.26)$$

$$C_3(X) = \langle x^3 \rangle - 3\langle x \rangle \langle x^2 \rangle + 2\langle x \rangle^3 = \langle (x - \langle x \rangle)^3 \rangle = \mu_3 \quad (2.27)$$

$$C_4(X) = \langle x^4 \rangle - 3\langle x^2 \rangle^2 - 4\langle x \rangle \langle x^3 \rangle + 12\langle x^2 \rangle \langle x \rangle^2 - 6\langle x \rangle^4 \quad (2.28)$$

$$= \langle (x - \langle x \rangle)^4 \rangle = \mu_4 \quad (2.29)$$

$\vdots$

2.3 Correlação Linear

Podemos analisar como duas variáveis aleatórias estão ligadas entre si através da função de correlação, ou coeficiente de Pearson. Se por exemplo tivemos o lançamento de uma moeda, dizemos que os eventos são independentes, uma jogada não depende da outra, então não há correlação. Agora, ao invés disso, se tivermos um dado viciado, vemos que uma jogada está correlacionada com a anterior.

A forma de medir isso é com a seguinte equação

$$Cor(X, Y) = \frac{\langle (x - \langle x \rangle)(y - \langle y \rangle) \rangle}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (2.30)$$

A função correlação tem valor que está no intervalo $[-1, 1]$, e se duas variáveis são independentes $Cor(X, Y) = 0$.

Com a função de correlação, podemos analisar também a correlação entre séries de números, e até mesmo a chamada autocorrelação, que mede o quão correlacionados são os valores em uma dada série.

2.4 Principais Distribuições Estatísticas

2.4.1 Distribuição Binomial

Quando temos um espaço amostral de apenas dois possíveis eventos, um com probabilidade p e o outro com probabilidade q , ou seja, $1 - p$, teremos uma distribuição binomial. No caminhante aleatório 1D que apresentamos na seção 2.1.3, tínhamos um grande exemplo de uma distribuição binomial.

Voltando ao exemplo, vamos denotar n_+ como o número de passos $+l$ e n_- o número de passos que ele dá para a direção $-l$. Logo, a probabilidade que ele dê n_+ passos para a direção $+l$ após N passos dados é:

$$W_N(n_+) = \frac{N!}{n_+!n_-!} p^{n_+} q^{n_-}. \quad (2.31)$$

Em que o primeiro termo é composto por todas as combinações possíveis com n_+ e n_- . Como $N = n_+ + n_-$, podemos escrever a equação de uma forma mais familiar

$$W_N(n_+) = \frac{N!}{n_+!(N - n_+)!} p^{n_+} q^{N - n_+}. \quad (2.32)$$

Que nada mais é que o $n_+ + 1$ -ésimo termo da expansão do binômio $(q + p)^N$.

Se agora quisermos a probabilidade do caminhante se encontrar na posição n , como n foi definido antes, após N passos, podemos utilizar a quantidade $W(n_+)$ fazendo uma mudança. Escrevendo n_+ e n_- em termos de n , teremos

$$n_+ = \frac{N + n}{2} \quad n_- = \frac{N - n}{2} \quad (2.33)$$

Logo, utilizando a equação 2.31, teremos

$$P(n) = \frac{N!}{[(N+n)/2]![(N-n)/2]!} p^{(N+n)/2} q^{(N-n)/2}. \quad (2.34)$$

2.4.2 Distribuição Gaussiana(Normal)

A distribuição Gaussiana é amplamente conhecida e aplicada no âmbito físico. Sua principal importância vem pelo “Teorema Central do Limite” que será melhor ilustrado em seções posteriores.

Podemos mostrar a distribuição normal como um caso da distribuição binomial quando temos um grande número de realizações. Para tal demonstração vamos investigar melhor a probabilidade $W(n_+)$, que é descrita pela equação 2.32. Nesse limite a função tende a exibir um máximo em um valor de $n_+ = \tilde{n}_+$. Para essa investigação, faremos uma expansão em série de Taylor, em torno de $\tilde{n}_+$, para $\ln W_N(n_+)$, pois ele varia de forma mais lenta, então a série irá convergir de forma mais rápida.

A série de Taylor de uma função em torno de um ponto x_0 é dada por:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0) \frac{d}{dx} f(x) \Big|_{x=x_0} + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \frac{d^2}{dx^2} f(x) \Big|_{x=x_0} + \dots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x - x_0)^i}{i!} \frac{d^i}{dx^i} f(x) \Big|_{x=x_0} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Tomando o logaritmo neperiano da probabilidade, teremos:

$$\ln W_N(n_+) = \ln N! - \ln n_+! - \ln(N - n_+)! + n_+ \ln p + (N - n_+) \ln q$$

Utilizando a fórmula de Stirling, $\ln K! \simeq K \ln K - K$, a equação ficará:

$$\begin{aligned}\ln W_N(n_+) &= N \ln N - N - n_+ \ln n_+ + n_+ - (N - n_+) \ln(N - n_+) + \\ &\quad + (N - n_+) + n_+ \ln p + (N - n_+) \ln q\end{aligned}\quad (2.36)$$

A primeira derivada será:

$$\frac{\partial}{\partial n_+} \ln W_N(n_+) = -\ln n_+ + \ln(N - n_+) + \ln p - \ln q. \quad (2.37)$$

Para condição de máximo, $\frac{\partial}{\partial n_+} \ln W_N(n_+) \Big|_{n_+=\tilde{n}_+} = 0$, logo

$$\ln \frac{\tilde{n}_+}{N - \tilde{n}_+} = \ln \frac{p}{q} \Rightarrow \tilde{n}_+ = \frac{Np}{q} - \frac{\tilde{n}_+ p}{q} \Rightarrow \tilde{n}_+ = \frac{Np}{p+q} = Np \quad (2.38)$$

Calculemos agora a segunda derivada no limite onde $n_+ = \tilde{n}_+$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial n_+^2} \ln W_N(n_+) \Big|_{n_+=\tilde{n}_+} &= \frac{\partial}{\partial n_+} \left(\frac{\partial}{\partial n_+} \ln W_N(n_+) \Big|_{n_+=\tilde{n}_+} \right) \\ &= -\frac{1}{Np} - \frac{1}{N - Np} = -\frac{1}{Npq}\end{aligned}\quad (2.39)$$

Podemos desprezar os termos de mais altas derivadas. Sendo assim, a expansão tomará a forma:

$$\begin{aligned}\ln W_N(n_+) &= \ln W_N(\tilde{n}_+) + (n_+ - \tilde{n}_+) \frac{\partial \ln W_N(n_+)}{\partial n_+} \Big|_{n_+=\tilde{n}_+} + \\ &\quad \frac{(n_+ - \tilde{n}_+)^2}{2!} \frac{\partial^2 \ln W_N(n_+)}{\partial n_+^2} \Big|_{n_+=\tilde{n}_+} \\ &= \ln W_N(\tilde{n}_+) - \frac{(n_+ - Np)^2}{2Npq} \Rightarrow \ln \frac{W_N(n_+)}{W_N(\tilde{n}_+)} = -\frac{(n_+ - Np)^2}{2Npq} \Rightarrow \\ \Rightarrow W_N(n_+) &= W_N(\tilde{n}_+) e^{-\frac{(n_+ - Np)^2}{2Npq}}\end{aligned}\quad (2.40)$$

A condição de normalização nos diz que a probabilidade em todo espaço deve ser igual a unidade, logo

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_N(\tilde{n}_+) e^{-\frac{(n_+ - Np)^2}{2Npq}} dn_+ = 1 \Rightarrow W_N(\tilde{n}_+) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(n_+ - Np)^2}{2Npq}} dn_+} = \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}}. \quad (2.41)$$

Sendo assim, a probabilidade para grande N , será a chamada distribuição gaussiana, dada por:

$$W_{N \rightarrow \infty}(n_+) = P_G(n_+) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}} e^{-\frac{(n_+ - Np)^2}{2Npq}}. \quad (2.42)$$

De forma mais geral, uma variável aleatória X , possui uma distribuição de probabilidades dada por:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad (2.43)$$

onde $\langle x \rangle$ é a média de x e σ seu desvio padrão.

Para ilustração, a figura 2.7 mostra a curva de uma gaussiana com média zero e desvio padrão $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

2.4.3 Distribuições α -estáveis de Lévy

Em 1925, o matemático francês P. Lévy desenvolveu uma distribuição de probabilidades mais geral[17]. A partir desta podemos gerar muitas outras apenas mudando alguns parâmetros.

Tal distribuição nasce da seguinte função característica:

$$f_X(k) = \exp[ik\mu - |ck|^\alpha(1 - i\beta \operatorname{sgn}(k) \tan(\pi\alpha/2))], \quad (2.44)$$

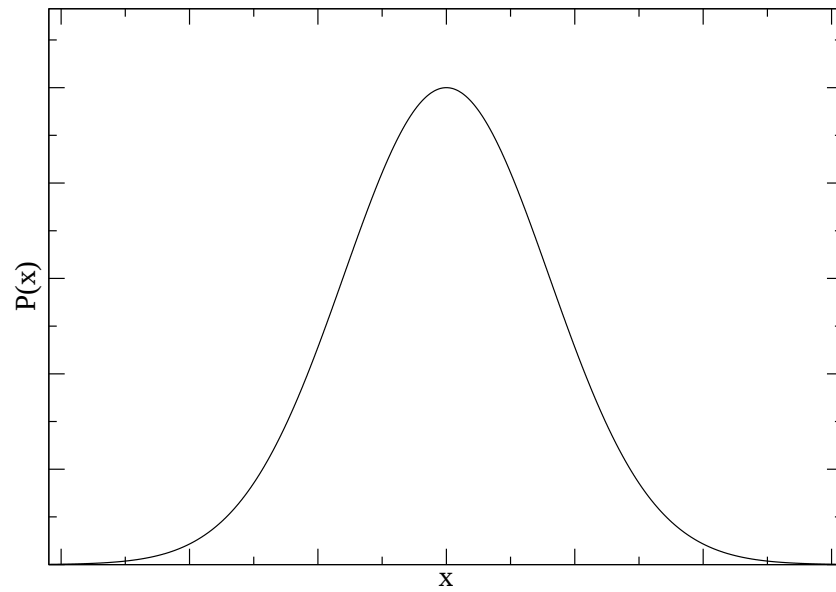


Figura 2.7: Distribuição Gaussiana

onde μ é um valor referente a média, β é o grau de assimetria da distribuição e c é um fator de escala associado à medida da largura da distribuição e α é o chamado expoente ou índice da distribuição, que está relacionado com a kurtosis.

Para $\alpha \in (0, 2]$ temos a distribuição chamada de estável, que também recebe o nome de “Lévy skew alpha-stable distribution”. Dessa forma, temos a distribuição de probabilidades no limite assintótico, quando x é muito maior, ou menor, que a média ou seja, na cauda, dada como [18]

$$P_X(x) \sim \frac{\alpha c^\alpha (1 + \beta) \text{sen}(\pi\alpha/2) \Gamma(\alpha) / \pi}{|x|^{1+\alpha}}. \quad (2.45)$$

Então, é visto que o regime assintótico é dado por uma lei de potência, ou seja, podemos dizer que as distribuições de Lévy no regime assintótico se comportam como:

$$P_X(x) \sim \frac{1}{|x|^{1+\alpha}}. \quad (2.46)$$

Assim, a distribuição de Lévy leva para um teorema mais geral, chamado “Teorema central do limite generalizado”.

Abaixo temos alguns exemplos analíticos de vários valores diferentes α s que nos fornecem distribuições já bem conhecidas:

- Distribuição Gaussiana, $\alpha = 2$

$$P_X(x) = \frac{1}{\sqrt{4c\pi}} \exp \left[-\frac{(x - \mu)^2}{4c} \right]$$

- Distribuição de Cauchy, $\alpha = 1, \beta = 0$

$$P_X(x) = \frac{c}{\pi} \left[\frac{1}{(x - \mu)^2 + c^2} \right]$$

- Distribuição de Lévy-Smirnov, $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 0$

$$P_X(x) = \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \frac{\exp \left[-\frac{c}{2(x-\mu)} \right]}{(x - \mu)^{3/2}}$$

A menos de $\alpha = 2$, a distribuição Gaussiana, as distribuições estáveis não possuem média, skewness e kurtosis bem definidas.

Como exemplos ilustrativos vamos mostrar essas distribuições com $\mu = 0$ e $c = 1$, na figura 2.8

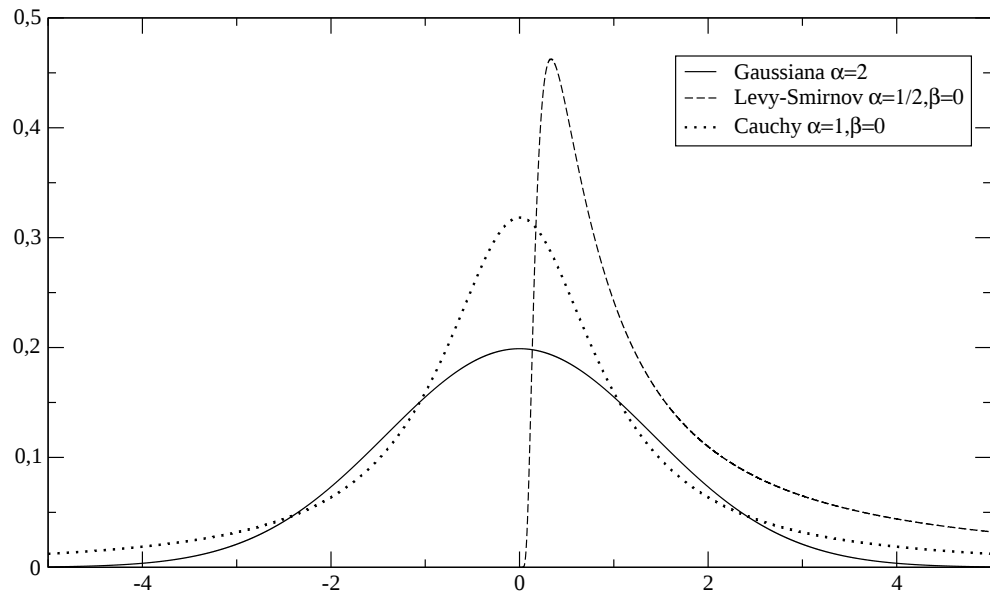


Figura 2.8: Algumas distribuições estáveis de Lévy

2.5 Fractalidade

Muitos fenômenos e estruturas encontradas na natureza necessitam de um formalismo matemático especial para quantificá-los. Alguns padrões tais como o crescimento e a disposição de galhos e folhas em uma árvore e a formação de nuvens podem ser recriados a partir de regras simples de construção geométrica, que quando executadas são capazes de criar estruturas de alta complexidade. Algumas dessas estruturas têm propriedades conhecidas como *fractais* [19, 20] e para definí-los são necessários dois conceitos: (i) *dimensão fractal* — característica marcante de uma estrutura do tipo fractal devido ao fato de frequentemente possuir valores fracionários, o que foge dos conceitos da dimensão topológica associada à geometria euclidiana e, (ii) *auto-similaridade* — invariância por mudança de escala, ela é fisicamente caracterizada pelo fato de poder observar a mesma estrutura independente da escala utilizada.

Para os objetos geométricos tradicionais existe uma relação simples entre a sua dimensão d , o número de “caixas” N (não sobrepostas) necessárias para recobrir todo o objeto e o comprimento das caixas. Esta é a ideia do método conhecido como método “Box-Counting” (contagem de caixas). Existem outras diversas maneiras de determinar a dimensão fractal de um objeto, existe também o método de Hausdorff de excelente precisão e amplamente utilizado em análises. Uma ótima referência para análise de dimensões fractais são os livros [21, 20]

A auto-similaridade implica que um objeto é composto de sub-conjuntos (sub-unidades) em vários níveis de escala, os quais assemelham-se ao objeto como um todo. Esta ausência de escala apesar de ilimitada em termos matemáticos apresenta limites nos casos reais, tanto a menor quanto a maior escala em que a auto-similaridade pode ser observada. Como exemplo pode-se pensar em uma couve-flor, onde a menor escala de observação é definida pelo tamanho de sua menor “célula” macroscópica e a maior escala é aquela da própria verdura.

Uma descoberta importante e surpreendente na última década foi que muitos sistemas físicos, biológicos e até mesmo econômicos não possuem escalas características, isto é, eles têm propriedades fractais e mostram invariância por mudança de escala [22, 23, 24]. Enquanto certas classes de distribuições de probabilidade para uma dada variável aleatória X , por exemplo

$$P_X(x) \sim e^{-x/x_0} , \quad (2.47)$$

possui uma escala característica (neste caso, associada ao parâmetro x_0), outra classe de distribuições expressas por leis de potência, tais como

$$P_X(x) \sim \frac{1}{x^\mu} , \quad (2.48)$$

mostram invariância por mudança de escala contínua (auto-similaridade):

$$P_X(\lambda x) \sim \lambda^{-\mu} P_X(x) . \quad (2.49)$$

Algumas funções tais como:

$$g(x) = \cos(\alpha \ln(x)), \quad (2.50)$$

possuem invariância por mudança de escala discreta

$$\begin{aligned} g(\lambda x) &= \cos(\alpha \ln(\lambda x)) \\ &= \cos(\alpha \ln(x) + \alpha \ln(\lambda)); \end{aligned} \quad (2.51)$$

apenas quando $\lambda = e^{2\pi n/\alpha}$, com $n \in \mathbb{N}$, observamos $g(\lambda x) = g(x)$.

Para uma série temporal, podemos definir auto-similaridade se a série satisfizer:

$$y(t) \stackrel{d}{=} a^\alpha y\left(\frac{t}{a}\right) \quad (2.52)$$

onde $\stackrel{d}{=}$ implica que as propriedades estatísticas de ambos os lados da equação são similares ou idênticas. Portanto, uma série temporal será auto-similar se, quando o eixo das ordenadas for reescalado na forma: $y \rightarrow a^\alpha y$, e o eixo temporal for reescalado por um fator a ($t \rightarrow \frac{t}{a}$), a série resultante possuir as mesmas propriedades estatísticas que a original. O expoente α é chamado de parâmetro de auto-similaridade.

Para a definição da dimensão fractal vamos introduzir um outro parâmetro chamado de expoente de Hürst muito útil para análise de propriedades de séries temporais.

H.E. Hürst (1880 - 1978) foi um hidrólogo inglês que trabalhou no projeto de construção de uma represa para o rio Nilo. Seu objetivo era construir um reservatório

ideal, o qual nunca transbordaria ou secaria. Na construção deste tipo de modelo era comum assumir que o fluxo de águas da chuva seguia uma dinâmica de caminhante aleatório. Para resolver o problema, H.E. Hürst estudou os mais de 800 anos de registros das cheias anuais do rio Nilo e, a partir deles, propôs um método para a análise a vassão do reservatório[25].

H.E. Hürst montou seu modelo considerando que para um determinado ano t , o reservatório recebe uma quantidade $Q(t)$ de água. A média de quantidade de água que entra no reservatório em τ anos é

$$\langle Q(t) \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} Q(t). \quad (2.53)$$

Para que o reservatório nunca seque ou transborde a amplitude $R(\tau)$ que o reservatório deve possuir será dada por:

$$R(\tau) = \max_{1 \leq t \leq \tau} \sum_{i=1}^t (Q(i) - \langle Q \rangle) - \min_{1 \leq t \leq \tau} \sum_{i=1}^t (Q(i) - \langle Q \rangle) \quad (2.54)$$

Dividindo pelo desvio padrão $S(\tau)$:

$$S(\tau) = \left[\frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} (Q(i) - \langle Q \rangle)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.55)$$

Hürst encontrou uma razão que segue uma lei de potência:

$$(R/S) \sim \tau^H, \quad (2.56)$$

onde H é chamado de expoente de Hürst. Esse expoente tem valores dentro do intervalo $[0 : 1]$, para os estudos do rio Nilo, Hürst obteve em seus estudos $H = 0.7$. Essa técnica apresentada acima é chamada de análise R/S, algumas outras técnicas foram sugeridas para melhorar a precisão do cálculo do expoente.

O expoente de Hrst está relacionado com a dimensão fractal da série através de[20]:

$$d = 2 - H \quad (2.57)$$

B. B. Mandelbrot e J. Wallis[26] perceberam que a análise de Hrst poderia ser usada em séries temporais e que o expoente de Hrst seria capaz de mostrar as correlações presentes em uma série. Para séries temporais com expoente $H = \frac{1}{2}$, os valores da série são independentes e não há correlação. Para $H < \frac{1}{2}$, temos uma série anti-persistente, ou seja, tende a fazer o oposto ao que fez no passado, por exemplo se um caminhante aleatório 1D com $H < \frac{1}{2}$ no passado resolveu dar um passo para direita, no futuro a probabilidade dele dar um passo para esquerda  maior do que para direita. Com $H > \frac{1}{2}$ a série  persistente, tende a repetir aes passadas.

A análise R/S possui uma tendência de superestimar o expoente de Hrst para $H < 0.72$ e subestimá-lo para $H > 0.72$ [26]. Para uma análise muito mais eficiente foi proposto[27] uma nova técnica DFA(*Detrend Fluctuation Analysis*), uma análise de flutuações sem tendência, que explicaremos abaixo.

O primeiro passo para a análise DFA é integrar a série temporal original, $x(t)$ com N pontos, e obter o perfil da série:

$$y(t) = \sum_{t'}^t (x_{t'} - \langle x \rangle); \quad (2.58)$$

$t = 1, \dots, N$. Agora é preciso dividir a nova série, $y(t)$, em N_τ intervalos temporais não superpostos de tamanho τ . Por meio de uma regressão do n-ésimo segmento($n = 1, \dots, N_\tau$) deve-se obter o melhor ajuste para a tendência local da série $y_n(i)$, $i = 1, \dots, \tau$. Determina-se o segundo momento para o n-ésimo segmento através de:

$$F_2(n, \tau) \equiv \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} |y((n-1)\tau + i) - y_n(i)|^2. \quad (2.59)$$

A flutuação para a série será então:

$$F_2(\tau) = \frac{1}{N_\tau} \sum_{n=1}^{N_\tau} F_2(n, \tau). \quad (2.60)$$

O expoente de Hürst é obtido diretamente da relação:

$$F_2(\tau) \sim \tau^{2H} \quad (2.61)$$

Em séries temporais e outros sistemas próximos a uma transição de fase[28] é comum não conseguir descrever completamente o sistema através de um único expoente (a dimensão fractal), torna-se então necessário um espectro contínuo de expoentes, chamado de espectro de singularidades.

Essa generalização de fractalidade é chamada de multifractalidade. Para sistemas multifractais podemos generalizar também o expoente de Hürst, calculando o q -ésimo momento como:

$$F_q(\tau) = \frac{1}{N_\tau} \sum_{n=1}^{N_\tau} [F_2(n, \tau)]^{q/2}, \quad (2.62)$$

e por consequência a lei de escala antes dada pela equação 2.61 é dada agora por:

$$F_q(\tau) \sim \tau^{qh(q)}, \quad (2.63)$$

onde $h(q)$ representa o expoente de Hürst generalizado. Essa é a generalização do método DFA chamada MF-DFA(Multifractal Detrended Fluctuation Analysis). Enquanto valores positivos de q fazem com que grandes flutuações se sobressaíam, pequenas flutuações contribuem para momentos negativos. Uma série monofractal possui um “único” expoente de Hürst $h(q) = H$, já para aquelas multifractais o valor de $h(q)$ possui uma dependência não constante com q .

Em diversos livros texto [21, 20] é comum usar o espectro multifractal, $f(\alpha)$, onde α é o índice de singularidade. Considerando que o conjunto o qual estamos estudando seja invariante, se dividirmos esse conjunto em pequenas caixas de tamanho ϵ e para cada uma delas associamos um expoente de singularidade α_i . Se ϵ for infinitesimal, teremos um número muito elevado de caixas, de tal maneira que a diferença entre os α_i deixe de ser discreto, $\Delta\alpha$, e passe para o limite do contínuo, $d\alpha$. O número de caixas com índice de singularidade entre α e $\alpha + d\alpha$ então é:

$$\rho(\alpha)\epsilon^{f-a(\alpha)}d\alpha \quad (2.64)$$

Agora vamos relacionar o espectro de singularidades com a dimensão do espectro [29], D_q ¹, onde D_0 é o conhecido como dimensão do “Box Counting”,

$$D_q = \frac{1}{q-1}[q\alpha(q) - f(\alpha(q))]. \quad (2.65)$$

Multiplicando a equação 2.65 por $(q-1)$ e diferenciando com respeito a q e usando o fato que

$$f'(\alpha) = q,$$

podemos definir o expoente $\tau(q)$:

$$\frac{d}{dq}[(1-q)D_q] = \alpha = \tau'(q), \quad (2.66)$$

logo

$$\tau = (q-1)D_q. \quad (2.67)$$

dessa maneira temos finalmente que:

$$f(\alpha) = q\alpha - \tau(q). \quad (2.68)$$

¹Para uma melhor definição da dimensão do espectro e dimensão pontual, verificar o capítulo 3 da referência [21]

Usando a função de partição podemos relacionar os expoentes $h(q)$ e $\tau(q)$ [30]:

$$\tau(q) = qh(q) - 1. \quad (2.69)$$

Portanto, usando o método MF-DFA, podemos calcular todas as propriedades multifractais do sistema, e analisar a curva entre o espectro de singularidades e o chamado expoente de Hölder, α , ilustrado na figura 2.9 para um caso qualquer.

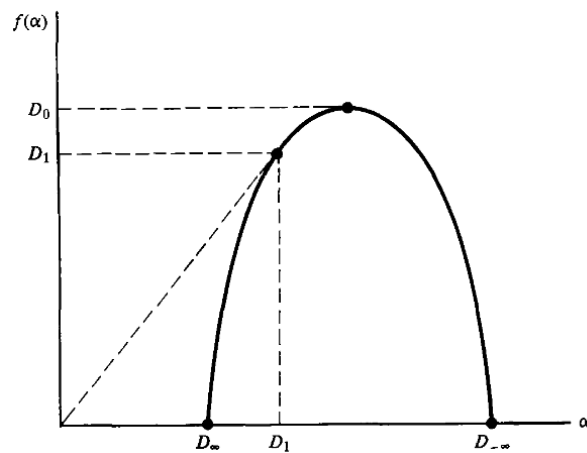


Figura 2.9: Exemplo do comportamento de $f(\alpha)$ em relação a α . Retirada de[21]

Quando mais aberta é a curva, mais multifractal é o sistema, ou seja precisamos de um espectro mais amplo de expoentes para caracterizar o sistema como um todo.

3

PROPRIEDADES UNIVERSAIS DOS MERCADOS REAIS: FATOS ESTILIZADOS

3.1 Retornos e Volatilidade

Para estudarmos as propriedades inerentes à todos os mercados financeiros precisamos de uma quantidade que seja absoluta e que sirva de parâmetro para compararmos comportamentos diferentes e semelhantes dos diversos mercados que formam a economia global.

Definimos, assim, retorno como sendo:

$$r_{\Delta t}(t) = \log \left(\frac{S(t + \Delta t)}{S(t)} \right), \quad (3.1)$$

onde $S(t)$ é o preço de um dado ativo ou um dado índice no tempo t e Δt é um atraso que nos fornece a frequência dos dados. Encontramos comumente na literatura,

retorno representado com a letra Z . Na figura 3.1 podemos observar como uma série temporal de retornos se comporta tipicamente.

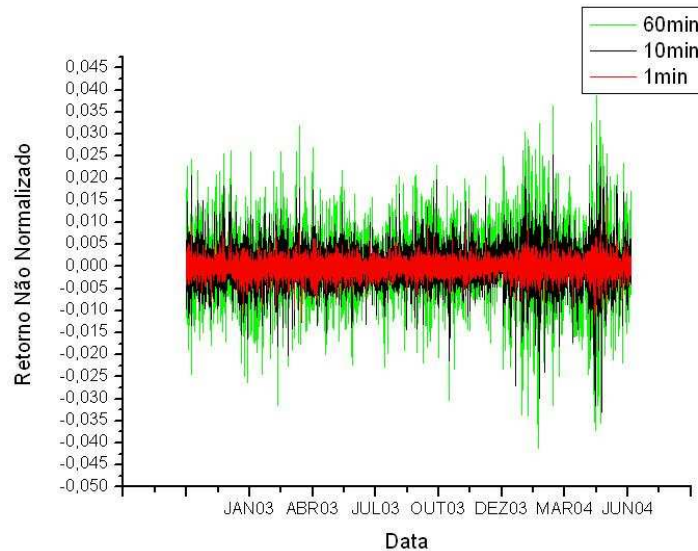


Figura 3.1: Retornos do índice IBOVESPA com diferentes frequências

De posse da série temporal, podemos estudar a distribuição de probabilidades desses retornos absolutos, afim de compreender como é dada a dinâmica de mercado. A questão sobre qual distribuição de probabilidades melhor se encaixa no perfil de distribuição de retornos é uma grande dúvida entre os estudiosos.

Como falamos no início do capítulo, a primeira distribuição de probabilidades foi de V. Pareto, como uma lei de potência, mas não conseguia explicar por completo o comportamento real da distribuição de riquezas, que requer uma abordagem mais robusta para explicar os seus detalhes. Depois, L. Bachelier afirmou que deveria seguir uma tendência gaussiana, tipo um movimento browniano completamente descorrelacionado e em seguida vimos que B.B. Mandebrot disse que a distribuição era uma Lévy. Em 1995, R. Mantegna e H.E. Stanley publicaram na

revista Nature[9] um trabalho importantíssimo para econofísica. Nele estudaram os retornos de alta frequência e notaram a presença das chamadas caudas grossas(*fat tails*) mostrando que uma gaussiana não é uma boa distribuição para esse tipo de retorno, podemos perceber isso na figura 3.2, plotada em semi-log onde a gaussiana é a curva em forma de parábola.

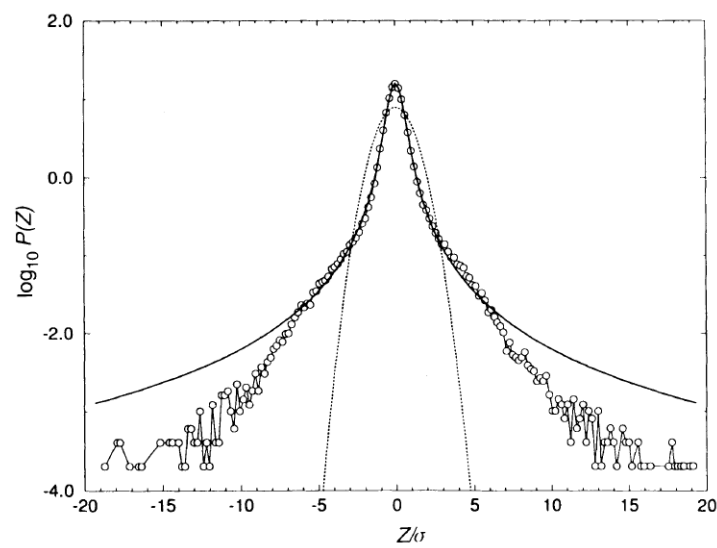


Figura 3.2: Distribuição de retornos de alta frequência no índice S&P 500, onde a linha tracejada em forma de parábola é a distribuição Gaussiana e a linha sólida é uma distribuição truncada de Lévy.[9]

Muitas distribuições tem sido cotadas para mostrar o melhor ajuste, são exemplos,

- Distribuição de Lévy não Gaussiana
- Voos de Lévy truncados

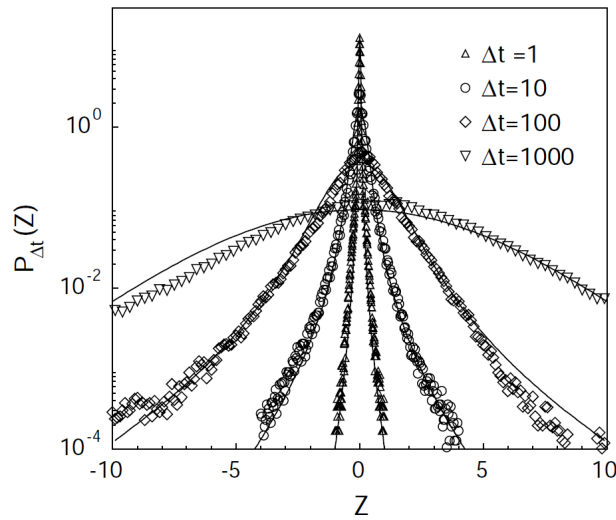


Figura 3.3: Plot da distribuição de probabilidades para vários atrasos no retorno. Variando Δt podemos perceber claramente que as distribuições de probabilidade também são diferentes [31].

- Distribuição t-Student
- Misturas de distribuições Gaussianas
- Distribuição Gaussiana com saltos seguindo a distribuição de Poisson
- Distribuição q-Gaussiana

E muitas outras que são amplamente estudadas.

Um detalhe muito importante já foi observado: dependendo da janela de tempo em que o estudo é feito, ou seja, a frequência dos dados, teremos distribuições diferentes. Para baixas frequências uma Gaussiana pode ser um ótimo ajuste. Para altas, com as caudas grossas, teremos distribuições tipo Lévy, ou lei de potência como frisado anteriormente. Podemos observar essa transição de regime através da figuras 3.3 e 3.4

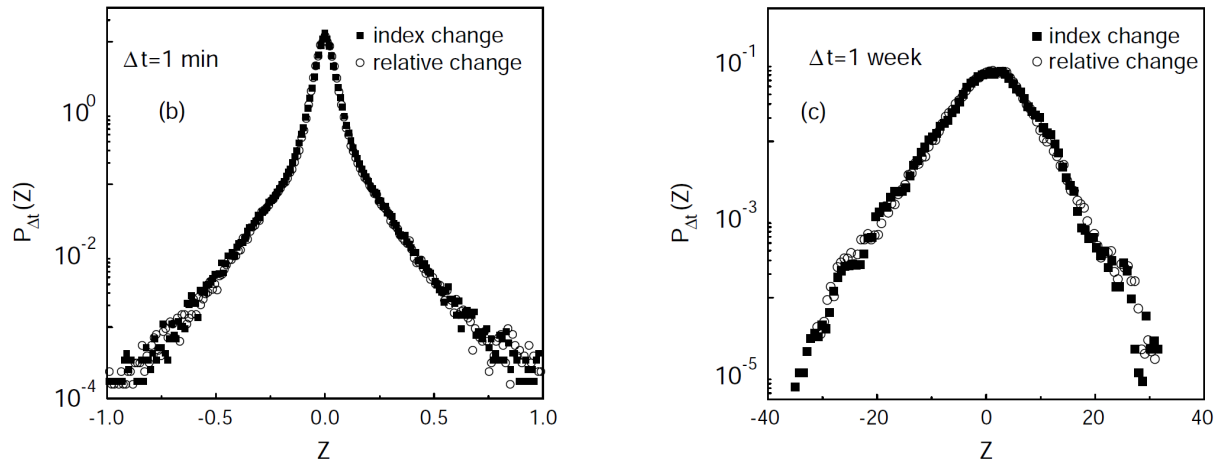


Figura 3.4: Comparativo entre os dois regimes, de alta(a) e baixa(b) frequência.

Figura retirada do artigo [31]

Para caracterizar melhor a forma funcional da distribuição de probabilidades usualmente investiga-se a “cauda” da distribuição. Tendo em vista que com Δt ficando cada vez maior teremos uma quantidade menor de dados para analisar, métodos de investigação das caudas são ineficientes e difíceis. H.E. Stanley e R. Mantegna atacaram o problema de outra maneira[9] utilizando o conceito de “probabilidade de retorno para a origem”, onde $P(r = 0)$, e $P(r)$ é uma função de Δt . Experimentalmente para determinar $P(0)$, escolhemos um valor pequeno c , de tal maneira que $P(0) \approx P(-c \leq r \leq c)$. Se a região central da distribuição for bem descrita por uma distribuição estável de Levy na forma:

$$P(r) = L_\alpha(r, \Delta t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(-\gamma \Delta t q^\alpha) \cos(qr) dq, \quad (3.2)$$

a probabilidade de retorno para a origem será:

$$P(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(-\gamma \Delta t q^\alpha) dq \quad (3.3)$$

seja,

$$u = \gamma \Delta t q^\alpha \Rightarrow q = \left(\frac{u}{\gamma \Delta t} \right)^{1/\alpha}$$

logo,

$$\begin{aligned} du &= \alpha \gamma \Delta t q^{\alpha-1} dq \\ &= \alpha \gamma \Delta t \left(\frac{u}{\gamma \Delta t} \right)^{\frac{1}{\alpha}(\alpha-1)} dq \\ &= \alpha u^{-(1/\alpha-1)} (\gamma \Delta t)^{1/\alpha} dq \\ dq &= \frac{1}{\alpha (\gamma \Delta t)^{1/\alpha}} u^{(1/\alpha-1)} du \end{aligned} \quad (3.4)$$

substituindo 3.4 em 3.3 teremos:

$$P(0) = \frac{1}{\pi \alpha (\gamma \Delta t)^{1/\alpha}} \int_0^\infty e^{-u} u^{(1/\alpha-1)} du, \quad (3.5)$$

pela definição da função $\Gamma(z)$,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{(z-1)} dt,$$

finalmente a probabilidade de retorno a origem será:

$$P(0) = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\pi \alpha (\gamma \Delta t)^{1/\alpha}}. \quad (3.6)$$

Podemos tomar o logaritmo da equação 3.6 e assim teremos uma relação linear entre o logaritmo da probabilidade de retorno para a origem e o logaritmo de Δt , como mostra a equação 3.7

$$\log P(0) = \log \left(\frac{\Gamma(1/\alpha)}{\pi \alpha \gamma^{1/\alpha}} \right) - \frac{1}{\alpha} \log \Delta t. \quad (3.7)$$

De posse dessa relação linear entre o logaritmo de $P(0)$ e o logaritmo de Δt vemos claramente que o coeficiente angular da reta é $\frac{1}{\alpha}$, e determinando o valor de α podemos determinar facilmente o valor de γ com:

$$\gamma = \left(\frac{\Gamma(1/\alpha)}{e^b \pi \alpha} \right)^\alpha,$$

onde b é o coeficiente linear da curva.

Nas figuras 3.5 e 3.6 pode-se notar o procedimento sendo utilizado para dois diferentes mercados, S&P500[9] e Ibovespa[32]. Nesses dois trabalhos os valores para α foram de 1.44 e 1.66.

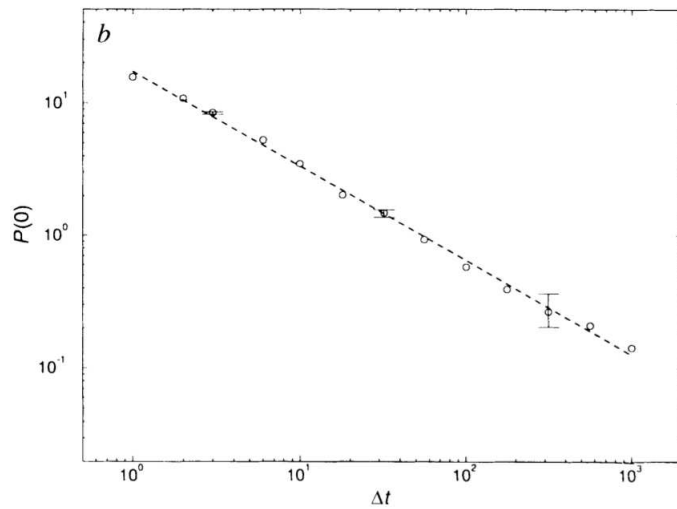


Figura 3.5: Fit linear para $P(0)$ e Δt no índice S&P500[9].

Na referência [33] os autores afirmam que a convergência da distribuição de série financeira para um voo truncado de Levy, discutida inicialmente em [34], pode ser explicada por meio de autocorrelações não lineares presentes nas séries. De posse disso eles foram capazes de determinar os valores para α de muitos mercados. Na tabela 3.1 podemos notar os diferentes valores que o parâmetro α pode assumir. Um detalhe muito importante que deve ser frisado é que podemos notar que para

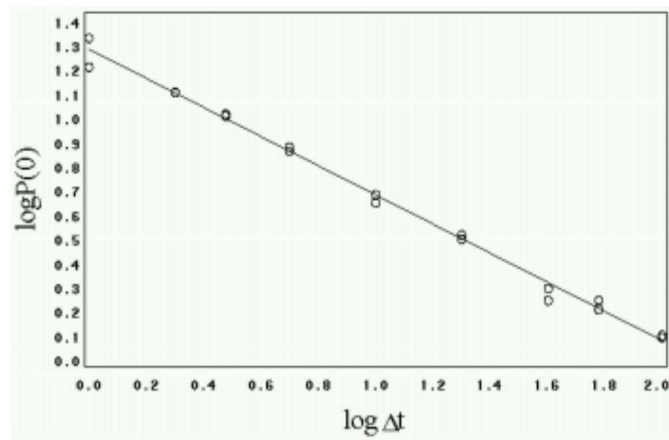


Figura 3.6: Fit linear para $P(0)$ e Δt no índice Bovespa[32].

mercados mais líquidos, ou seja, de mercados de forte economia, temos valores de α pequenos e próximos de 1.5, fato que não ocorre com mercados cuja economia seja fraca ou muito controlada pelo estado, caso da Venezuela e da China.

Tabela 3.1: Tabela Com diferentes valores para α [32]

País	α
Austrália	1.41487
Bélgica	1.56042
Brasil	1.89059
Inglaterra	1.76454
Canadá	2.04822
China	4.19286
Finlândia	1.75114
França	1.48668
Alemanha	1.54737
Irlanda	1.61516
Itália	1.27801
Japão	1.43542
Malásia	2.78363
México	1.60305
Holanda	1.55999
Nova Zelândia	1.87623
África do Sul	3.46313
Coreia do Sul	1.93298
Suécia	1.53611
Suíça	1.68564
Tailândia	2.03006
Venezuela	4.13507

Vamos agora definir outra importante quantidade no estudo de econofísica, a volatilidade. Usamos volatilidade para saber o quão líquido o mercado está, ou seja, o quão volátil, o quão fluido ele está. Podemos encontrar na literatura diferentes formas de se definir volatilidade, aqui estaremos interessados em formalizar volatilidade como sendo o valor absoluto do retorno.

$$v_{\Delta t} = |r_{\Delta t}(t)|. \quad (3.8)$$

O típico comportamento de uma série temporal de volatilidade pode ser visto na figuras 3.7 e 3.8. Podemos notar alguns picos que surgem, devido a grandes movimentações e também alguns aglomerados, ou clusters podem ser visto se for feito um zoom. Essa propriedade de clusters na volatilidade é algo típico de mercados reais e um dos fatos estilizados.

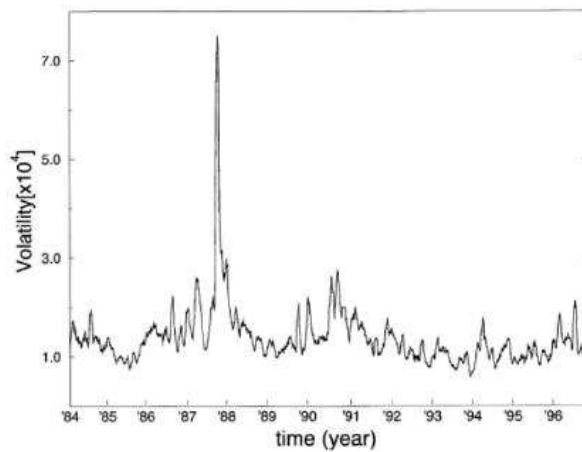


Figura 3.7: Volatilidade do índice S&P500 retida de[15].



Figura 3.8: Volatilidade do índice IBOVESPA[35].

3.2 Correlações

Trataremos agora das correlações que surgem nas séries temporais de retorno e volatilidade. Como definimos anteriormente na seção 2.3, a função de correlação de Pearson determina o quanto duas variáveis aleatórias são linearmente dependentes entre si.

Através da observação, um dos fatos estilizados é que a autocorrelação da série de retornos(ou seja, a correlação entre um retorno no tempo t e um retorno no tempo $t + \delta t$) decai exponencialmente para zero a medida que δt cresce, mas a autocorrelação do valor absoluto do retorno, o que definimos como volatilidade, tem um longo “alcance”, cujo valor decai com a “distância temporal” entre as variáveis que estamos analisando segundo uma lei de potência. Podemos observar esses dois comportamentos nas figuras 3.9 e 3.10.

Outro padrão muito interessante surge quando calculamos a correlação entre a série dos retornos e a série da volatilidade[36, 37]. A correlação volatilidade-retorno é entre a volatilidade futura e o retorno passado e a mesma é de curto alcance, com um comportamento exponencial seguindo:

$$Cor_{v,r}(\tau) = -A \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right), \quad (3.9)$$

onde A e T são parâmetros a serem ajustados de acordo com a série apresentada. Esse comportamento é chamado na literatura de efeito de leverage consequência de uma leve assimetria na distribuição de retornos, tendo como característica uma skewness negativa.

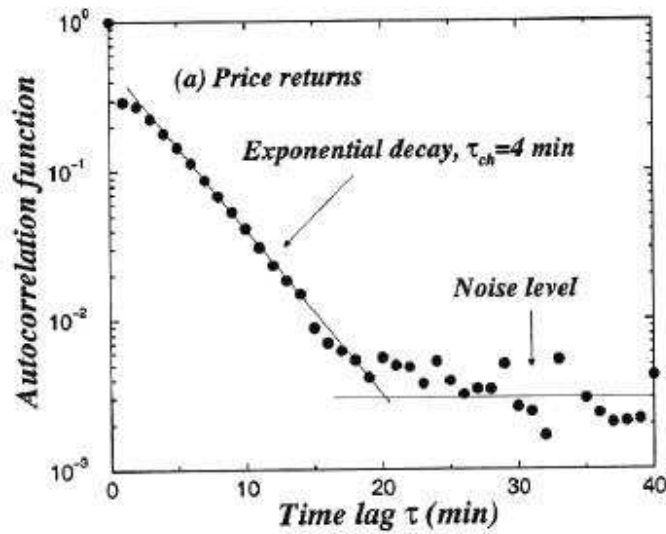


Figura 3.9: Padrão de autocorrelação na série de retornos[15].

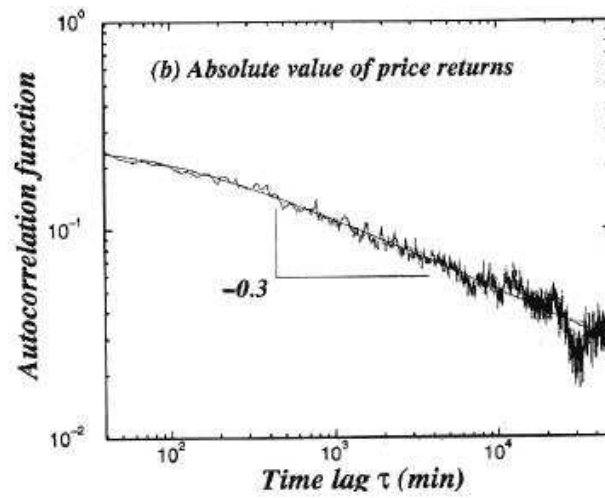


Figura 3.10: Padrão de autocorrelação na série de volatilidade[15].

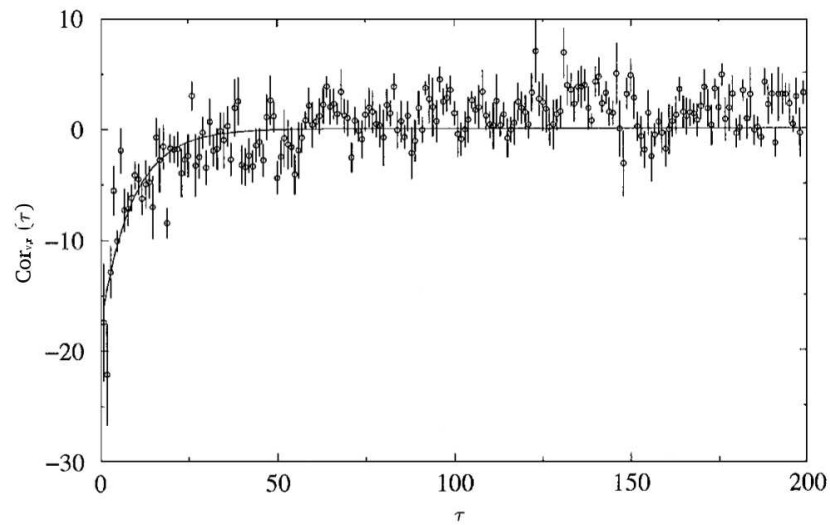


Figura 3.11: Padrão de correlação cruzada entre a série de volatilidade e de retorno.[36].

3.3 Multifractalidade das Séries de Retorno

Outro fato estilizado de mercado foi observado por H.E. Stanley e R. Mantegna[9, 15] estudando a turbulência presente em séries temporais de mercados financeiros. Eles

observaram o que mercado financeiro exhibe uma relação entre o chamado expoente de Hurst generalizado e a ordem do momento estatístico analisado de tal forma que o expoente depende do momento. O expoente de Hurst está ligado com a dimensão fractal de um sistema estocástico e a sua não linearidade implica em uma propriedade chamada Multifractalidade, onde temos um espectro contínuo de expoentes de escala, como definido no capítulo anterior.

Outra propriedade também vista pelos autores foi a auto-similaridade das séries, ou ausência de uma escala característica das séries. Essa propriedade de escala pode ser observada pelo colapso dos dados para diferentes janelas de retorno quando re-escalamos a probabilidade e o retorno, usando o parâmetro α de Levy mostrado na seção 3.1, segundo a regra:

$$r_s = \frac{r}{(\Delta t)^{1/\alpha}} \quad (3.10)$$

$$P_s(r_s) = \frac{P(r)}{(\Delta t)^{-1/\alpha}}. \quad (3.11)$$

Na figura 3.12 podemos notar o resultado da auto-similaridade presente em mercados.

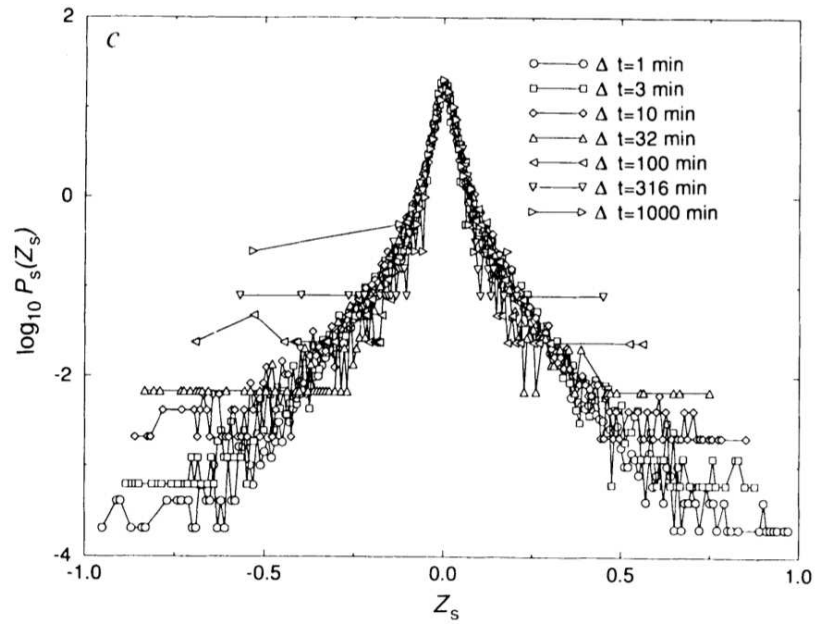


Figura 3.12: Colapso dos dados de diferentes frequências de retornos para o mercado S&P500[9].

Uma ferramenta muito útil também na análise da fractalidade do sistema é o método MF-DFA para calcular o expoente de Hurst, e com ele podemos calcular o espectro de singularidades, ou espectro multifractal, $f(\alpha)$, onde α é o expoente de Hölder. Na figura 3.13 podemos ver o comportamento característico de um mercado financeiro, representado pela série de retorno, e o “grau” de multifractalidade que ele apresenta, pela não linearidade do expoente de Hurst e pela curva característica entre o espectro de multifractal e o expoente de Hölder.

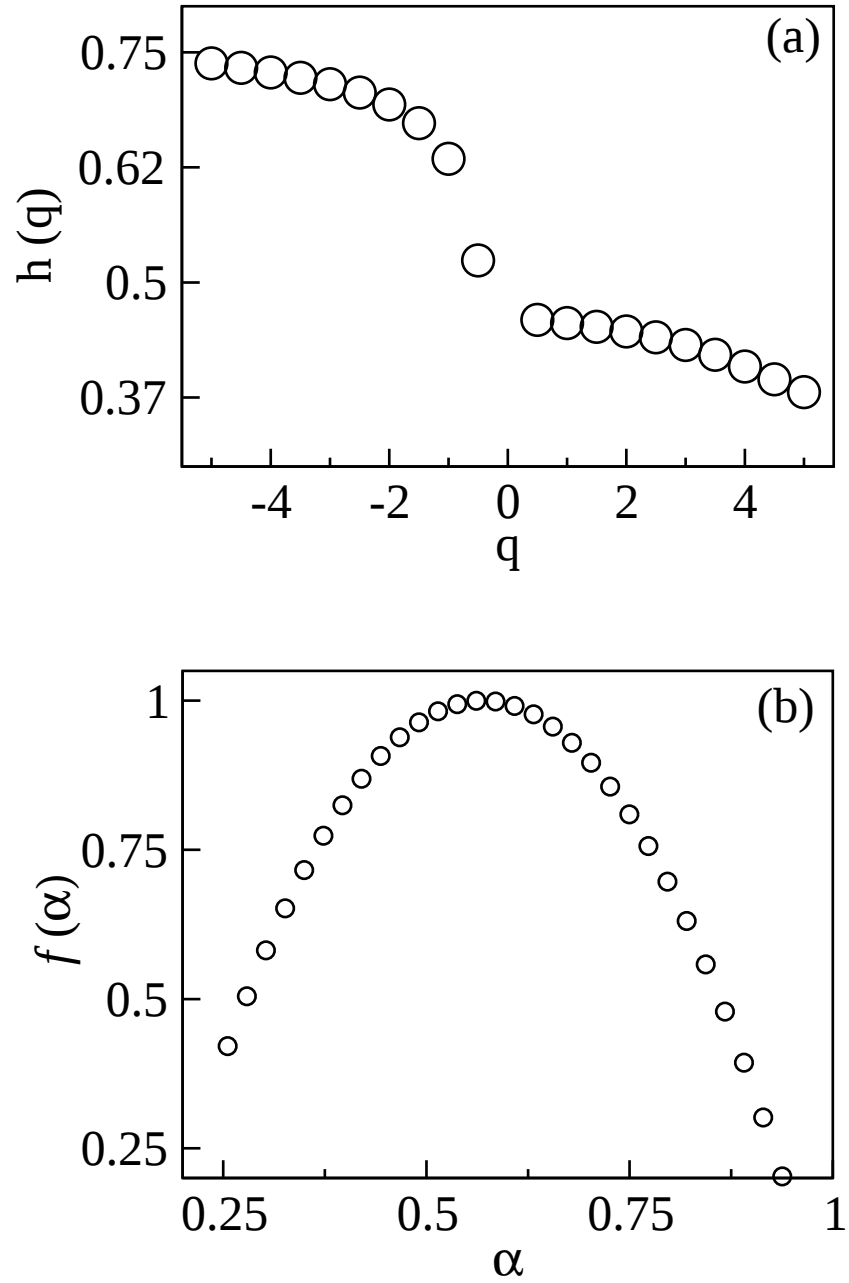


Figura 3.13: (a) Dependência do expoente de Hurst com o q -ésimo momento. (b) Espectro multifractal em função do expoente de Hölder.[38]

4

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Em 2005, a revista *Economist* lançou a seguinte pergunta: “Agentes Algorítmicos são bons ou ruins para a economia?”. A pergunta surge dentro de um âmbito conturbado da sociedade, onde vemos cada dia mais máquinas e robôs trabalhando em prol da sociedade. Muitos acreditam que para o mercado continuar crescendo é necessário a introdução de novas tecnologias, para os mais conservadores e para os apocalípticos os agentes algorítmicos vem para criar caos.

Nosso objetivo, então, é verificar se um sistema composto por agentes, por mais simples que seja, se comporta como um mercado real, apresentando características, conhecidas como fatos estilizados, ou se o sistema entrará em colapso e mostrará que uma formação de agentes algoritmos não é estável para manter o mercado da maneira que ele se apresenta hoje.

A abordagem de agentes artificiais para descrever a dinâmica de mercado ou reproduzir os fatos estilizados vem crescendo no meio acadêmico [39-48] com várias maneiras e discussões diferentes para tentar explicar a razão pela qual as propriedades emergem nesses sistemas.

Os modelos propostos até o presente momento possuem muitos detalhes e parâmetros, como por exemplo interações sobre os agentes, conservação da carteira, ou seja os agentes tem um valor finito de recursos, e muitas outros detalhes. Neste trabalho, nos propomos a apresentar um modelo que seja o mais simples possível e verificar quais propriedades de mercado ele consegue reproduzir apesar de sua simplicidade.

4.1 Modelo Proposto

O modelo que criamos é bem simples, ele é composto por N agentes que seguem regras básicas do tipo “se-então”. Os agentes não interagem entre si para tomar uma decisão e a única informação compartilhada pelos agentes é o preço de um dado ativo financeiro que é o nosso objeto de estudo.

O algoritmo do modelo é o seguinte:

1. Escolhemos uma quantidade N de agentes.
2. Introduzimos um valor inicial para a o preço do ativo financeiro.
3. A cada um dos agentes é atribuído um valor f , tal que $f_{min} \leq f \leq f_{max}$.
Esse fator representa a influência de cada agente na série, quanto maior o valor de f maior a influência da decisão desse agente. Como cada agente tem o seu próprio f associado, esse parâmetro introduz uma heterogeneidade aos agentes.
4. Os agentes são divididos em dois grupos, onde $\eta\%$ são do tipo 1 e $(1 - \eta)\%$ são do segundo grupo.

5. Cada agente determina um preço base, que representa o valor que ele julga como justo a ser pago pelo ativo em questão. O preço base é escolhido aleatoriamente dentro do intervalo $Pb_{min} \leq Pb \leq Pb_{max}$, com probabilidade uniforme.
6. Os agentes do tipo 1 seguem a seguinte regra: Se o Pb for maior que a média calculada ele compra, caso contrário, ele vende. Os agentes restantes fazem o oposto: Se o Pb for maior que a média calculada ele vende, caso contrário, ele compra.
7. A decisão do i -ésimo agente gera uma contribuição para a série final de tal forma que
 - Caso ele compre, sua contribuição será: $\sigma_i = 1$
 - Caso ele venda, temos que: $\sigma_i = -1$
8. após as decisões o preço final é calculado somando cada contribuição

$$P(t+1) = \sum_{i=1}^n \sigma_i f_i P(t) \quad (4.1)$$

As únicas restrições que o modelo apresentou foram que, o valor de f_{max} deveria ser sempre menor que 10^{-1} para evitar divergências e que η deveria estar próximo de 50, valores muito afastados ou conduziam a um valor nulo do preço ou a divergência no mesmo.

É importante notar também que não há uma carteira associada para cada agente, ou mesmo um número fixo de ativos. Podemos imaginar que estamos estudando um conjunto de N agentes que estão em um “banho térmico” e que ações

podem surgir de fora do sistema. Dessa maneira podemos ter uma configuração por exemplo onde todos os agentes comprem ações ou o contrário, todos vendem.

4.2 Resultados

Nós fizemos várias simulações com diversos valores dos nossos diferentes parâmetros para poder determinar com maior precisão os pontos relevantes do sistema. Inicialmente estudamos como o número de agentes dentro do sistema iria afetar o preço do ativo, com alguns parâmetros fixados.

Tomando o preço base dentro do intervalo arbitrário $500 \leq Pb \leq 2000$ ¹ e distribuído de forma uniformemente aleatória e com o fator de impacto de cada agente entre 10^{-3} e 10^{-2} .

Cada decisão que os agentes tomam é baseada em uma média temporal exponencialmente ponderada, isso por que no mercado o preço de um dia anterior tem muito mais relevância do que o preço de dois dias e assim sucessivamente. A média exponencialmente ponderada (*EWMA*) é dada pela seguinte equação de recorrência:

$$\text{MÉDIA}(t) = \text{MÉDIA}(t-1) + \alpha(P(t) - \text{MÉDIA}(t-1)) \quad (4.2)$$

em que:

$$\alpha = \frac{2}{T-1}, \quad (4.3)$$

$P(t)$ é o preço no tempo t e T é o período da média. Utilizamos o parâmetro T como sendo 20, para representar um mês útil.

¹no caso qualquer intervalo do tipo 1 para 4 reproduz os mesmos resultados que aqui são apresentados, a escolha 500 e 2000 é apenas para simbolizar melhor o preço de mercado.

Implementamos o programa para 5 quantidades diferentes de agentes, 50, 100, 250, 600 e 1000, para 5000 dias de transições virtuais. Esse resultados foram aceitos para publicação no periódico internacional Europhysics Letters[49].

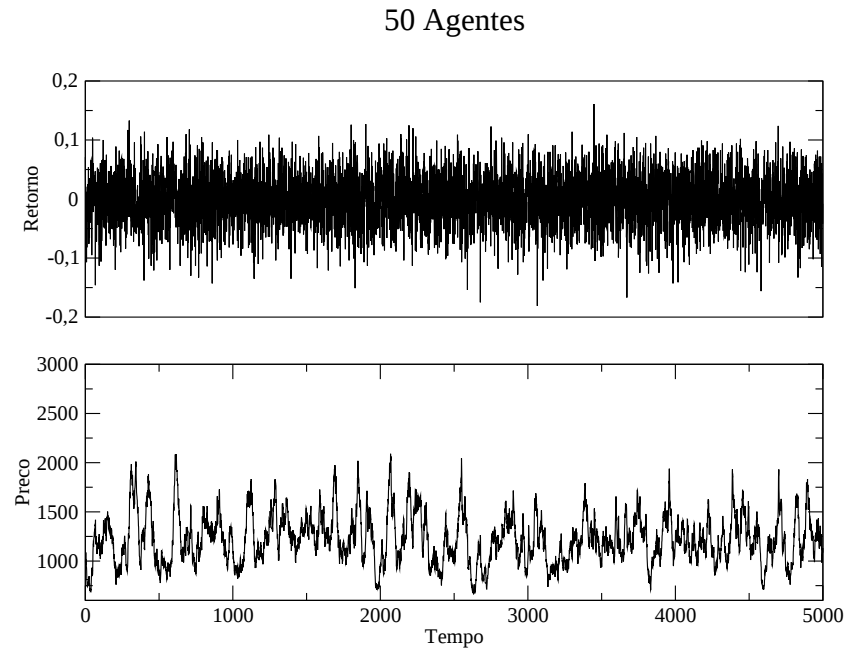


Figura 4.1: Simulação com 50 Agentes.

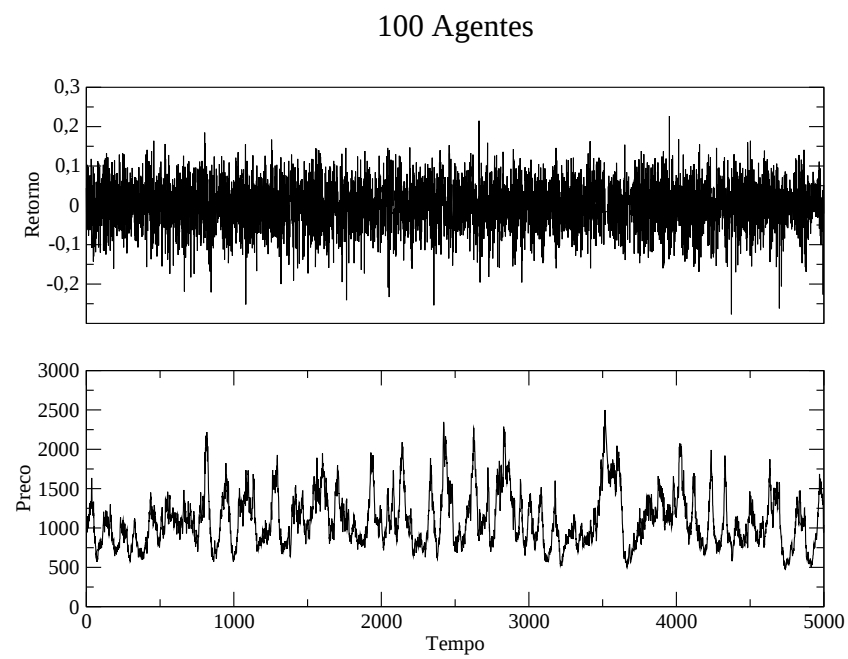


Figura 4.2: Simulação com 100 Agentes.

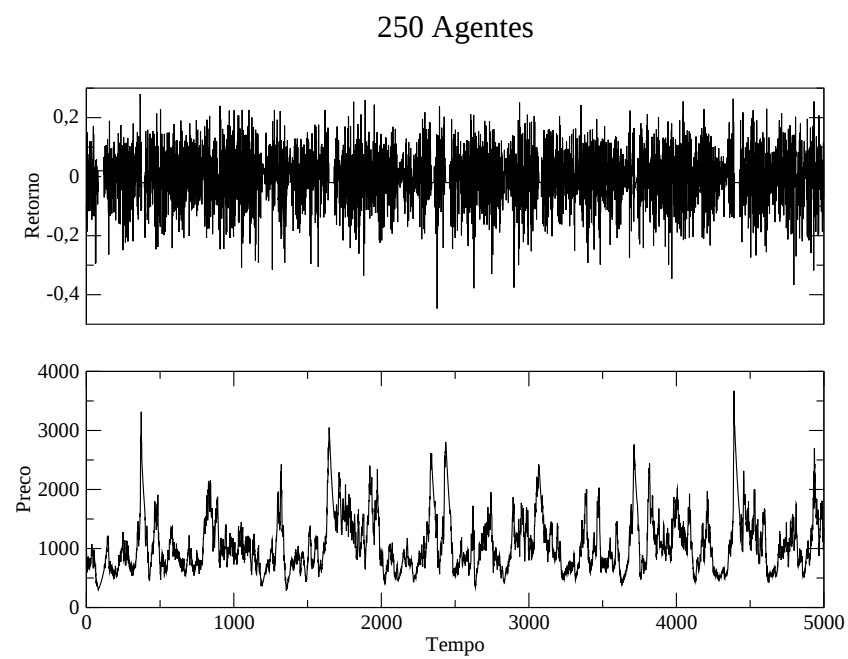


Figura 4.3: Simulação com 250 Agentes.

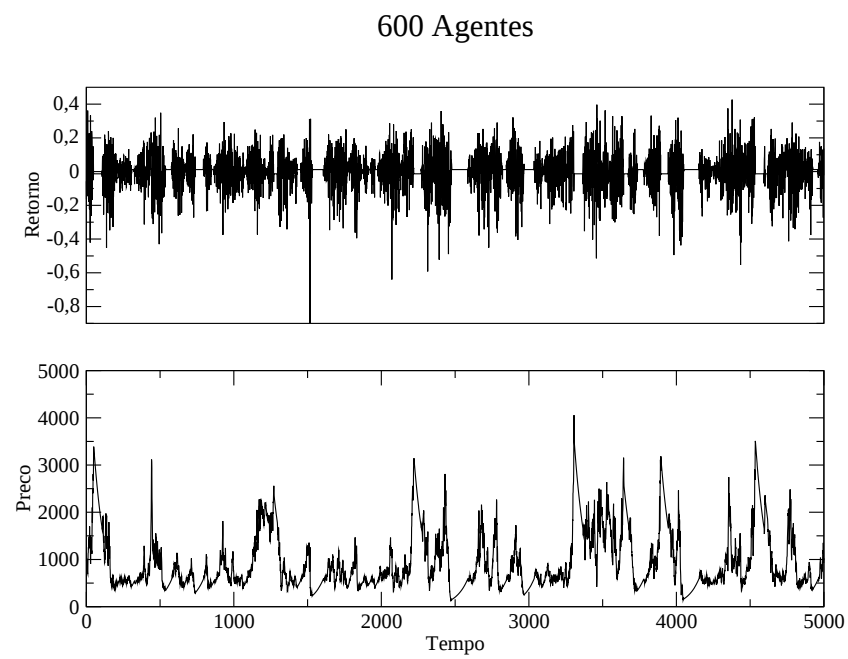


Figura 4.4: Simulação com 600 Agentes.

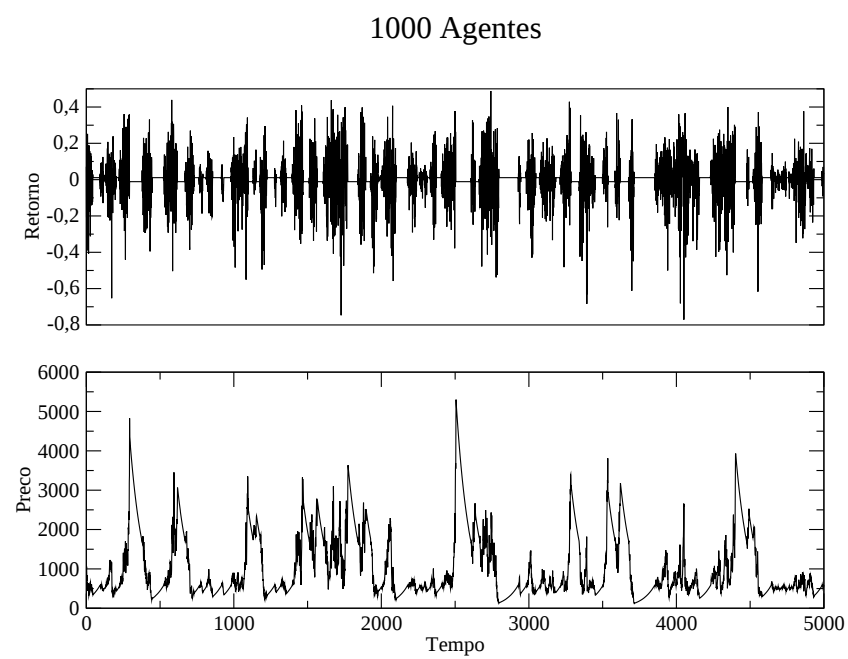


Figura 4.5: Simulação com 1000 Agentes.

Podemos perceber que alguns picos de volatilidade surgem e os retornos aparentam estar mais centrados em zero. Para uma análise mais detalhada nós calculamos a distribuição de probabilidades para cada número de agentes:

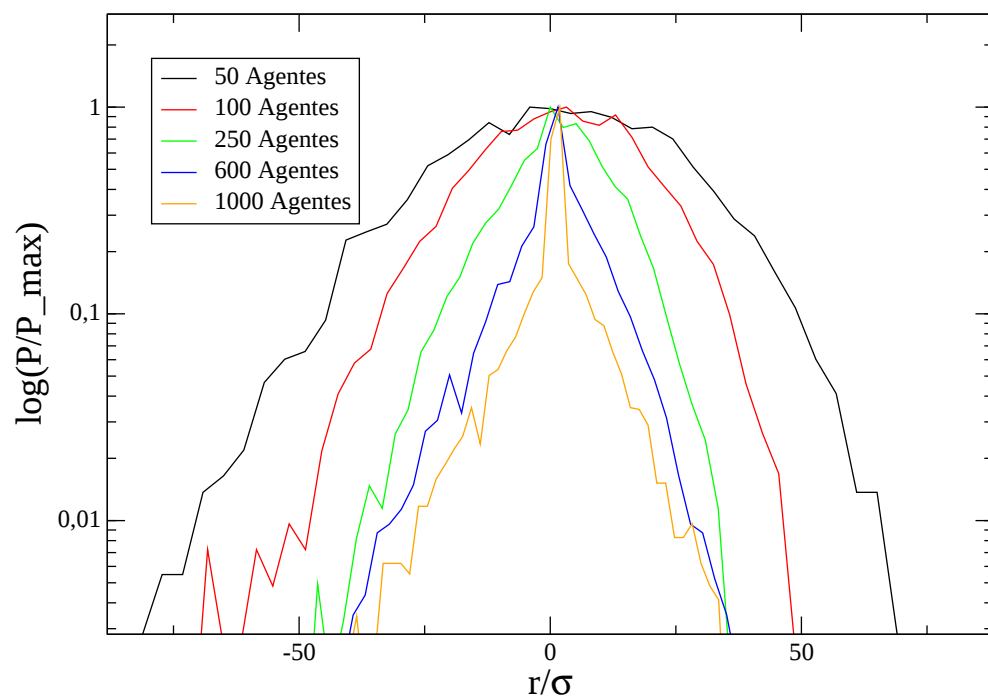


Figura 4.6: Distribuição de Retornos.

Claramente podemos perceber que as distribuições vão se tornando mais afinadas, divergindo aparentemente do comportamento tipicamente gaussiano. Para uma melhor confirmação nós calculamos a kurtosis de cada distribuição, lembrando que a kurtosis da gaussiana é 3 e que distribuições do tipo Lévy tendem a ter uma kurtosis mais alta, ou seja, são leptokurticas.

A figura 4.7 mostra claramente a dependência da kurtosis com o número de agentes, e como a mesma cresce com esse aumento.

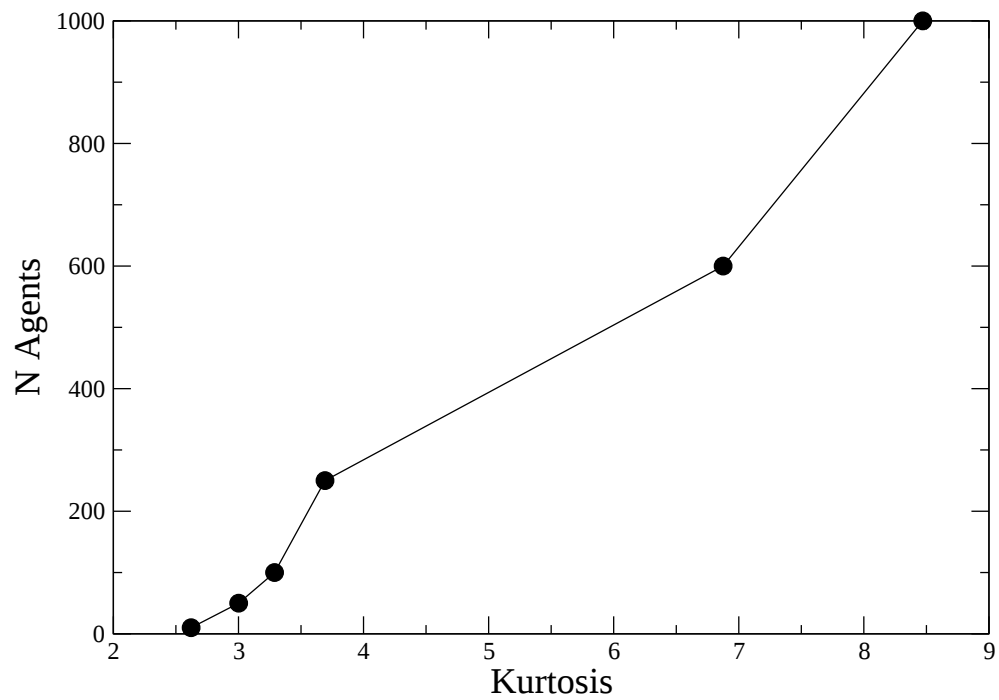


Figura 4.7: A kurtosis calculada para as distribuições de retornos.

Para determinar então qual a distribuição que melhor se adeque, empregamos o método para calcular o expoente α de Levy mostrado em [9, 32] nesta dissertação na seção 3.1, através do coeficiente linear da reta entre a probabilidade de retorno a origem e o atraso do retorno.

As curvas podem ser observadas logo abaixo com seus respectivos parâmetros de ajuste.

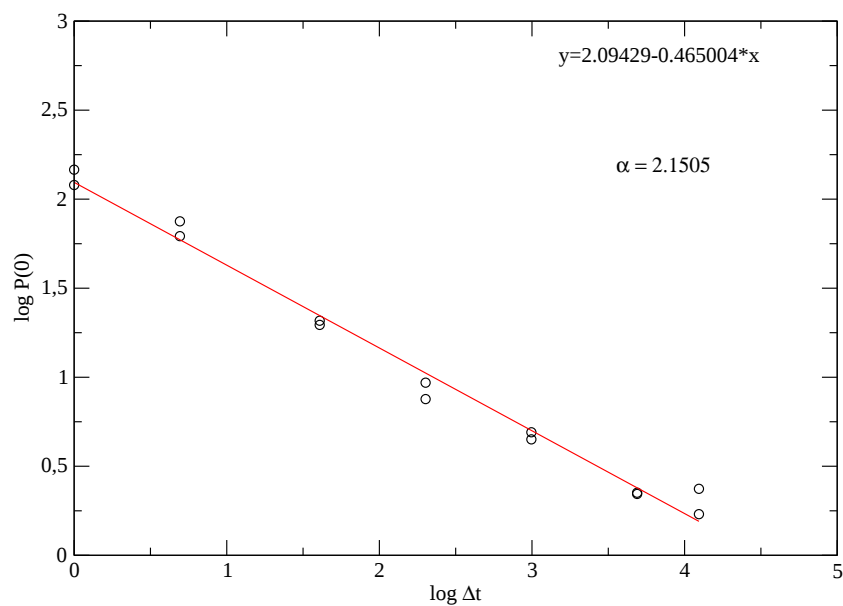


Figura 4.8: Relação entre $P(0)$ e Δt para 50 Agentes.

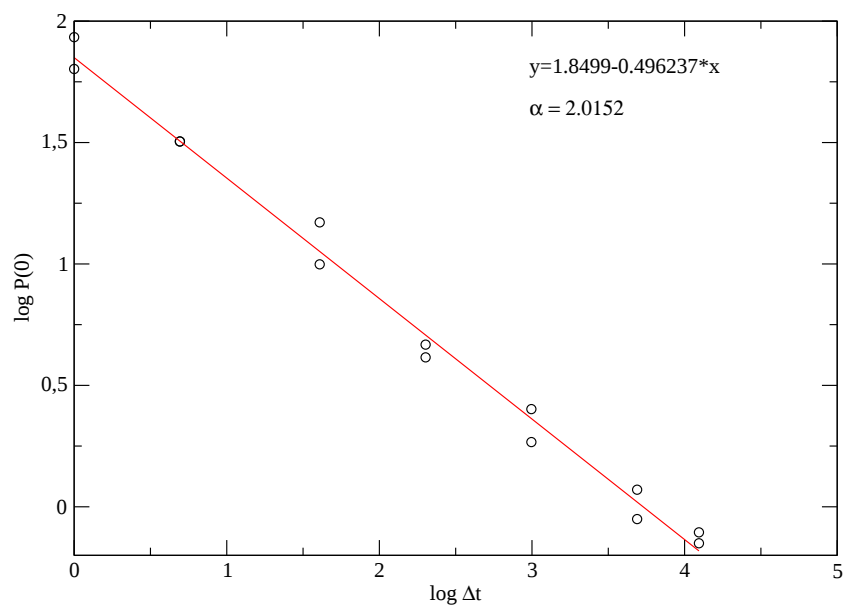


Figura 4.9: Relação entre $P(0)$ e Δt para 100 Agentes.

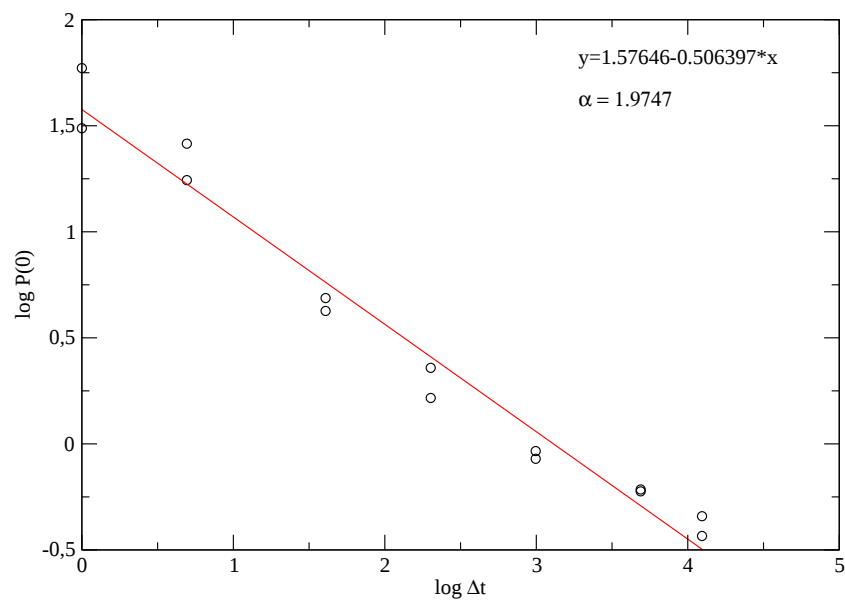


Figura 4.10: Relação entre $P(0)$ e Δt para 250 Agentes.

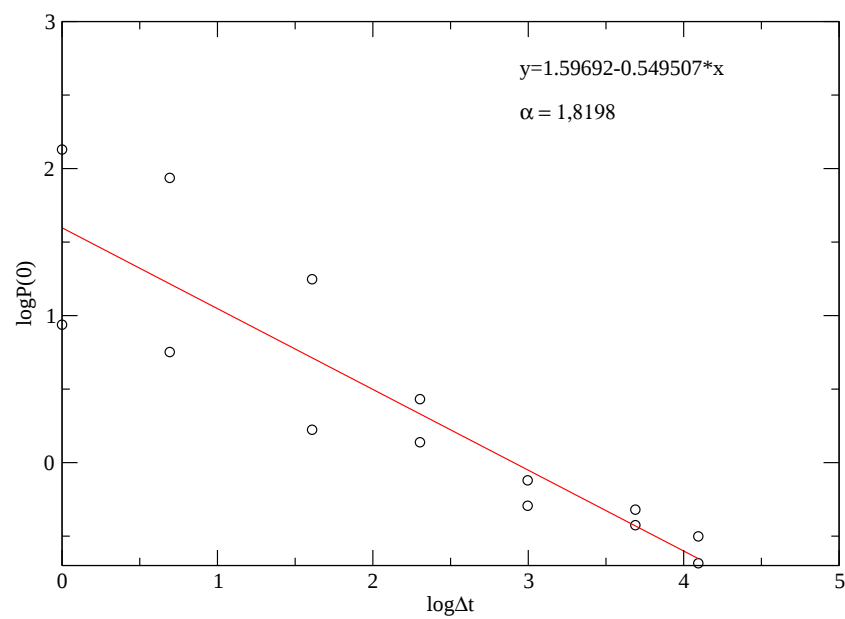


Figura 4.11: Relação entre $P(0)$ e Δt para 600 Agentes.

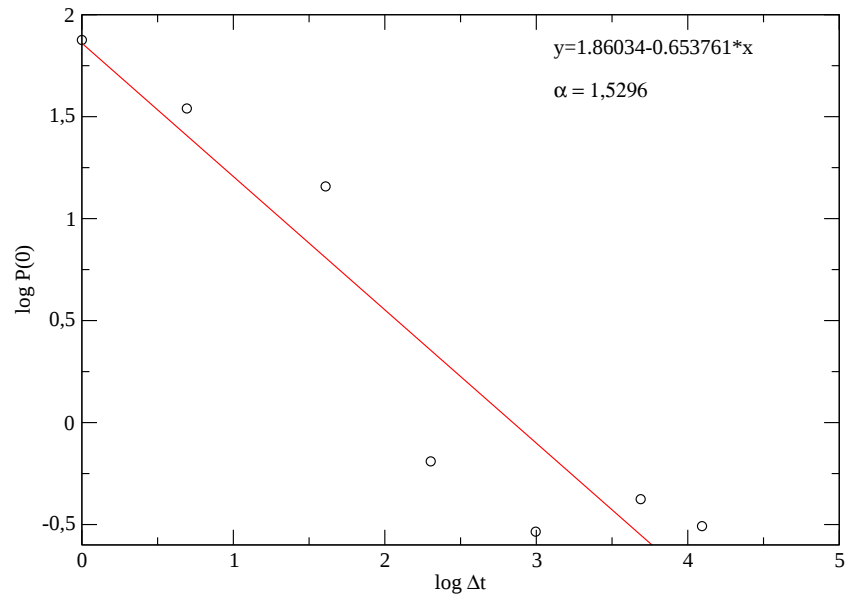


Figura 4.12: Relação entre $P(0)$ e Δt para 1000 Agentes.

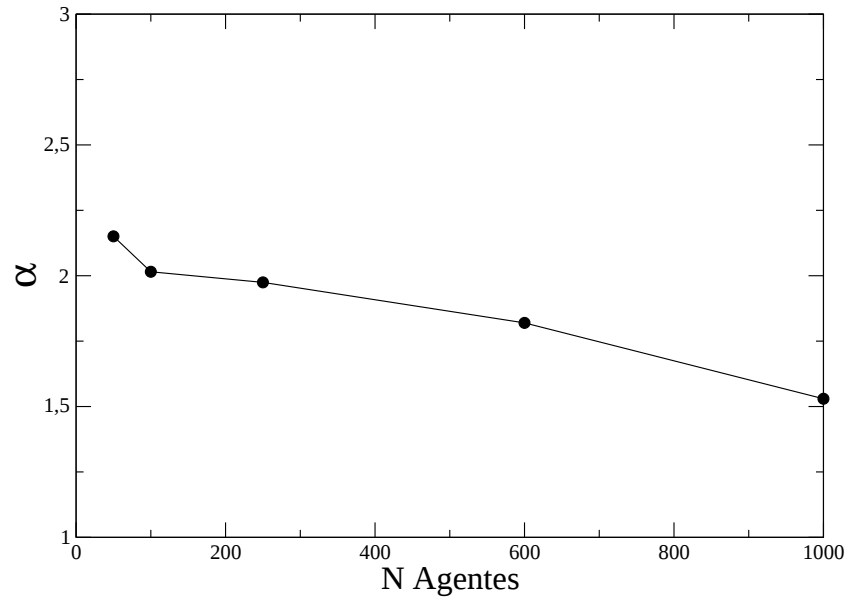


Figura 4.13: α de Levy calculado para diferentes números de agentes.

Podemos aqui afirmar que os fatos estilizados de mercado ficam cada vez mais aparentes a medida que o número de agentes cresce. Comparando com o que foi mostrado pela tabela 3.1, quanto mais agentes são adicionados mais parecido

com um mercado real e com mercados grandes, como Alemanha($\alpha = 1.54737$), Holanda($\alpha = 1.55999$), Japão($\alpha = 1.43542$).

Outro fato estilizado muito importante é transição de regime de uma distribuição gaussiana, quando a frequência dos dados é baixa, e uma distribuição de Levy truncada, quando temos altas frequências. Para verificar a clareza dessa transição no nosso modelo as figuras 4.14 e 4.15 mostram as distribuições para dois valores diferentes de agentes e com dois atrasos de retornos, $\Delta t = 1$ e $\Delta t = 60$.

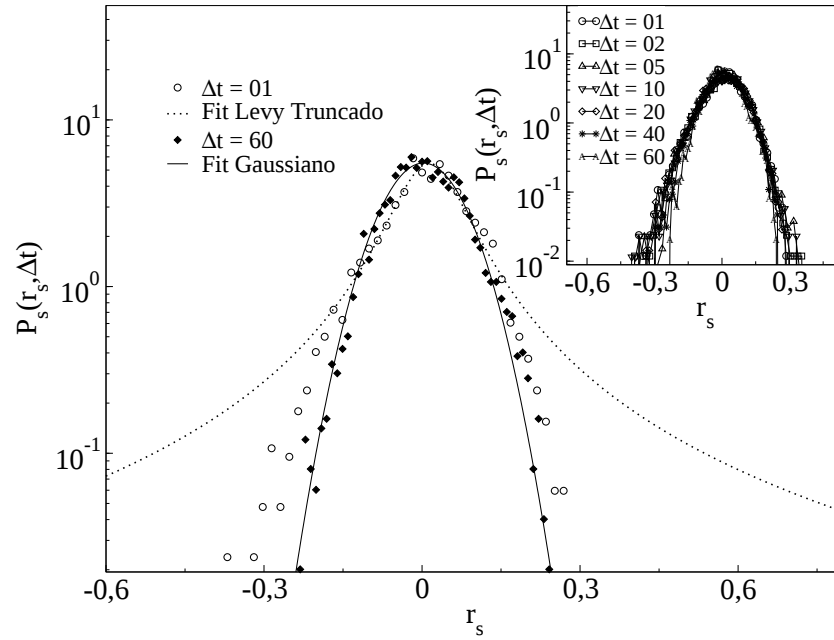


Figura 4.14: Transição de regime devido a mudança no atraso para 250 Agentes. O Inset mostra o padrão de auto-similaridade da série temporal, com o colapso dos dados devido a re-escala.

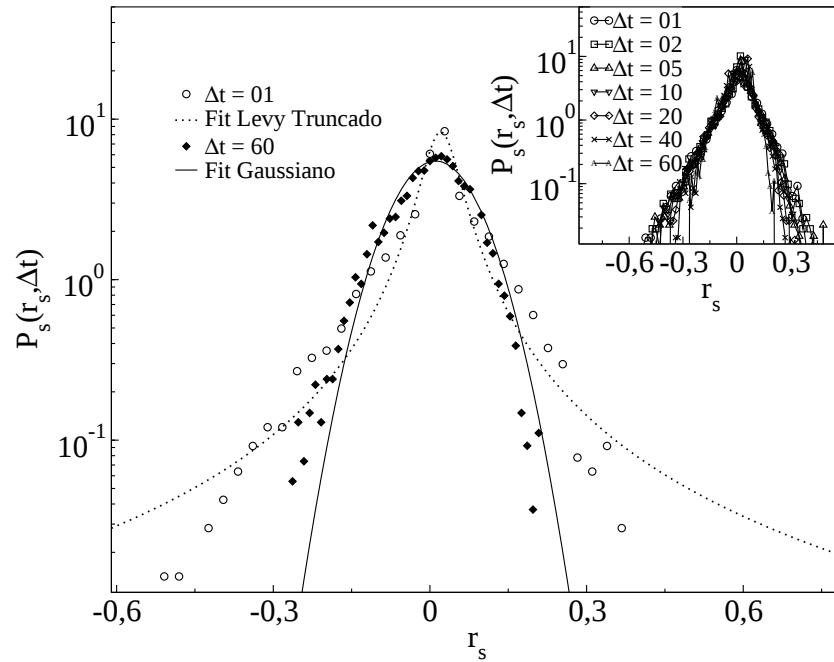


Figura 4.15: Transição de regime devido a mudança no atraso para 600 Agentes. O Inset mostra o padrão de auto-similaridade da série temporal, com o colapso dos dados com o devido a re-escala.

Novamente com o incremento de novos agentes no sistema podemos perceber que outro fato estilizado de mercado se concretiza, a transição de regime devido o atraso no retorno é muito mais clara para um número maior de agentes. Outro fato já observado nessa análise é o padrão de auto-similaridade que mercados reais também possuem. O padrão de auto-similaridade está intimamente ligado com as propriedades fractais do sistema.

Para ter acesso a mais propriedades fractais do nosso modelo, nós estudamos também o comportamento do expoente de Hürst e o expoente de Hölder, para verificar se o sistema apresenta o padrão de multifractalidade, onde temos um espectro contínuo de expoentes de singularidade (vide seção 2.5).

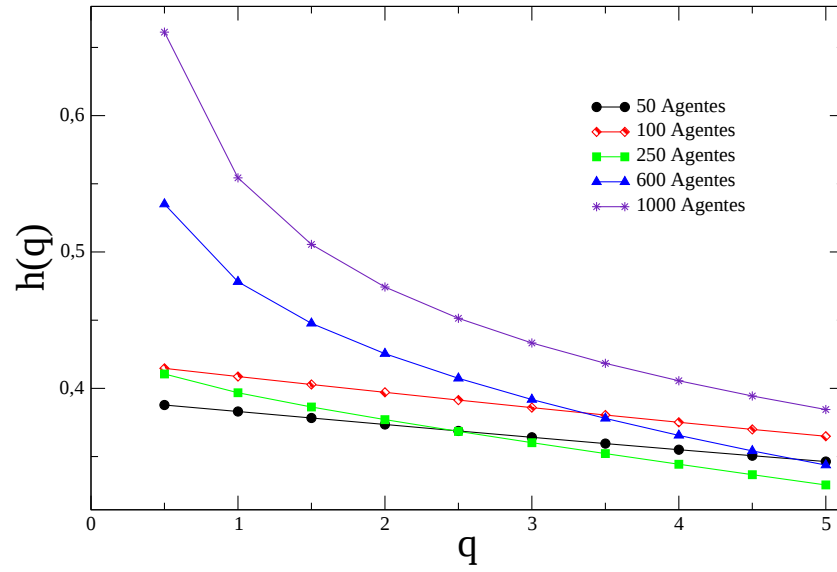


Figura 4.16: Dependência do expoente de Hürst com o momento q .

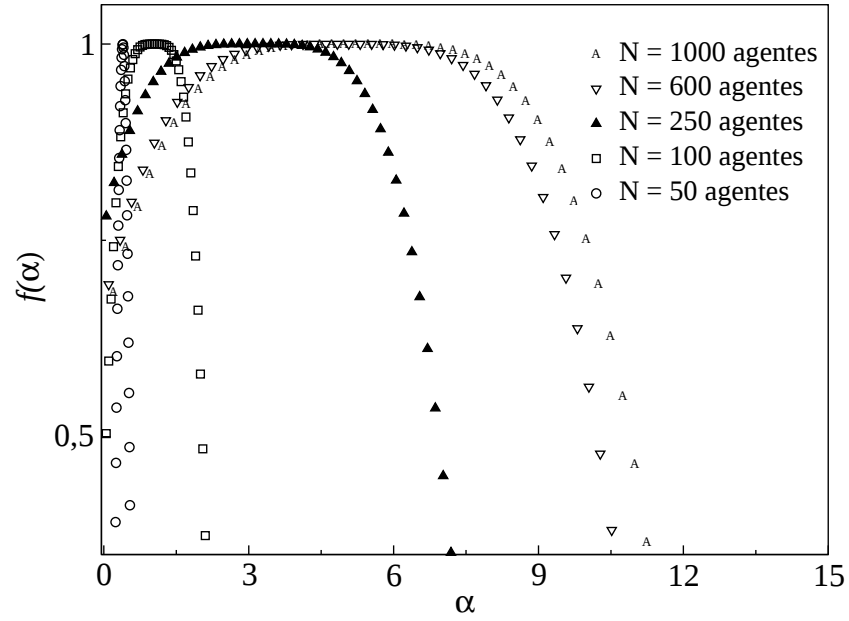


Figura 4.17: Ajuste do espectro multifractal $f(\alpha)$ vs expoente α de Hölder

Com relação a multifractalidade, vemos que todos os sistemas independentemente do número de agentes apresenta algum grau de multifractalidade. O padrão multifractal se torna muito mais claro com mais agentes inseridos no sistema. Na

figura 4.16 podemos perceber que a relação entre o expoente de Hürst e o momento estatístico se torna mais complexo a medida que N cresce. Uma outra maneira de perceber esse fato é que o espectro multifractal apresenta um gráfico mais largo, com o aumento do número de agentes, o que caracteriza um sistema “mais” multifractal.

Para ter uma visão completa dos fatos estilizados que apresentamos ainda falta apresentar as correlações que existem nas séries de retorno e de volatilidade. Como sabemos dos fatos estilizados discutidos anteriormente as séries de retorno são praticamente descorrelacionadas e as séries de volatilidade tem correlações que decaem como lei de potência. As figuras 4.18 e 4.19 mostram os dados apresentados pelo nosso modelo.

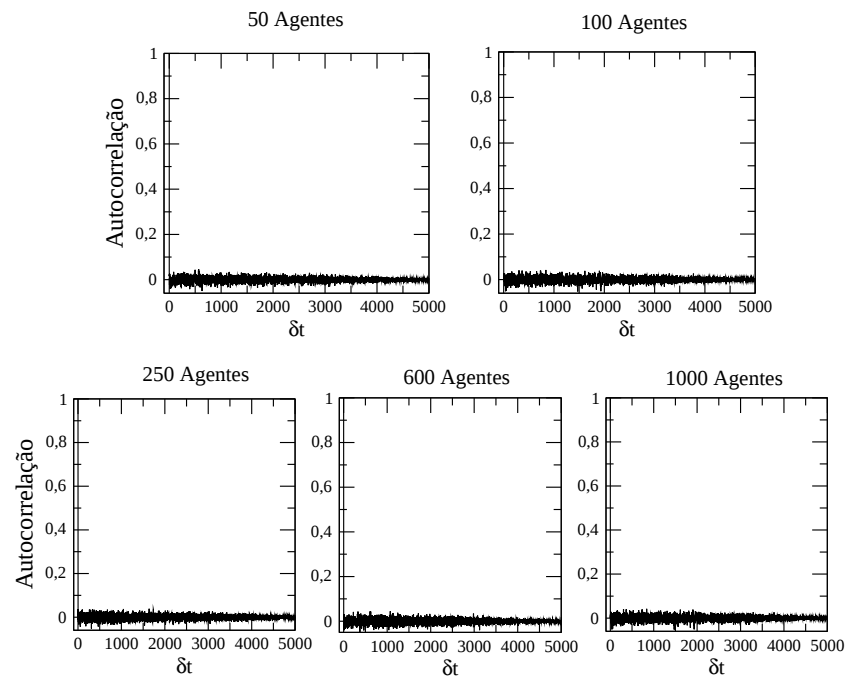


Figura 4.18: Autocorrelação das séries de retorno para diferentes números de agentes.

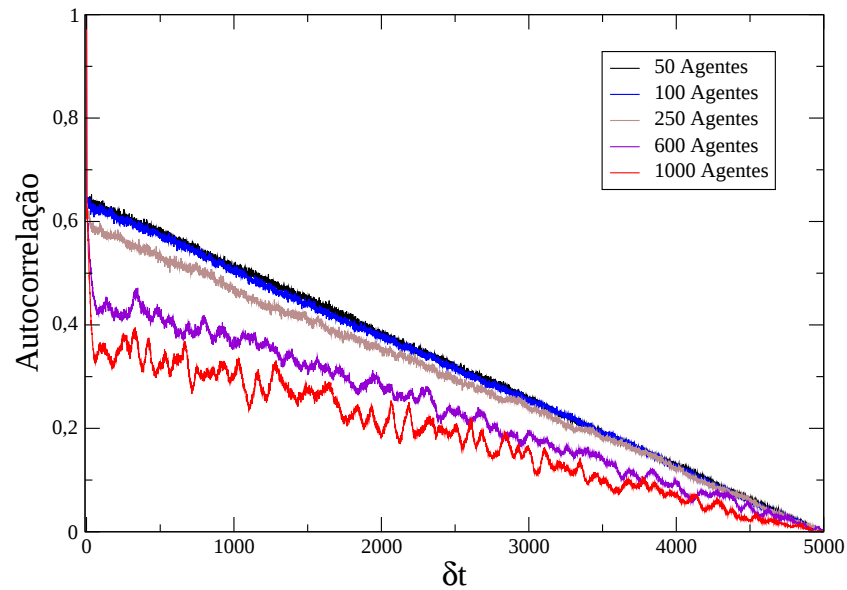


Figura 4.19: Autocorrelação das séries de volatilidade para diferentes números de agentes

Acerca das correlações presentes nas nossas séries, podemos perceber que o modelo reproduz o mercado real para qualquer número de agentes que estejam inseridos no sistema.

Então podemos concluir que quando N tende a um número muito grande, temos a reprodução completa de toda a complexidade existente em um mercado real. Um ponto que pode ser levantado agora é a respeito de alguns dos parâmetros que foram fixados, tais como o intervalo em que o preço base se encontra.

Para verificar a dependência do modelo com o tamanho do intervalo do preço base nós simulamos vários limites diferentes do que foi feito anteriormente, com o limite do tipo 1:4. Testamos também 1:2, 1:6, 1:10, 1:50 e 1:100. As distribuições de retornos para os diferentes números de agentes praticamente não sofreram mudanças como podemos observar nas figuras 4.20-4.24.

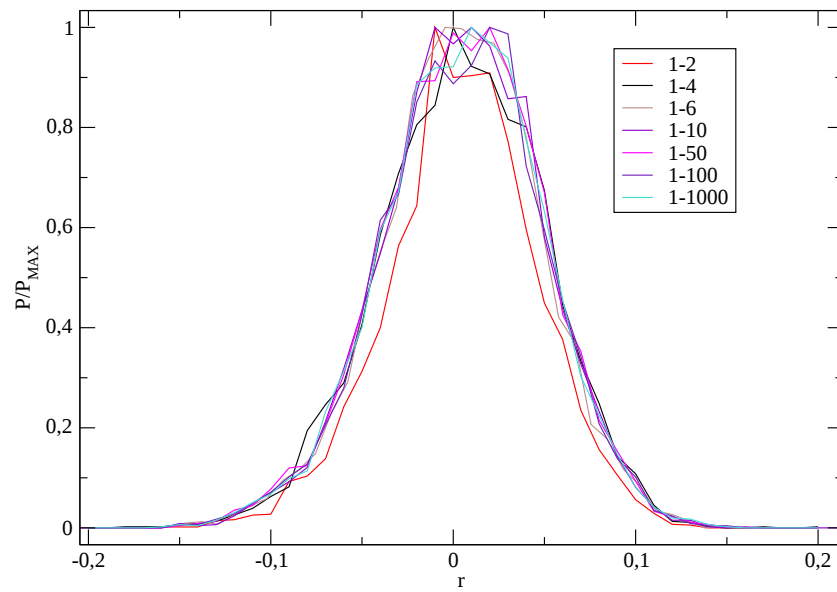


Figura 4.20: Plot de diversos intervalos para o preço base para 50 Agentes.

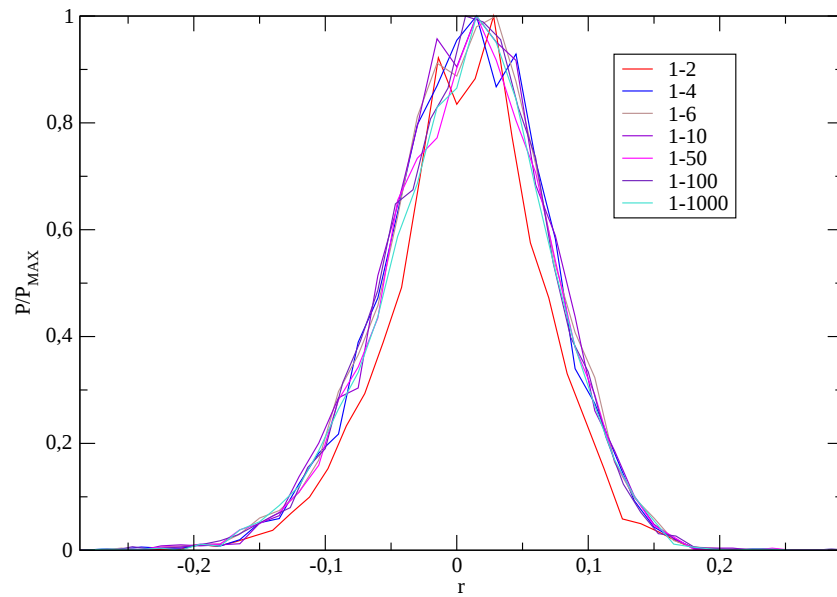


Figura 4.21: Plot de diversos intervalos para o preço base para 100 Agentes.

Na figura 4.25 mostramos como o desvio padrão de cada distribuição varia conforme o intervalo em que o preço base, ou preço justo de cada agente. A variação é muito pequena para qualquer número de agentes, e quase nula para poucos

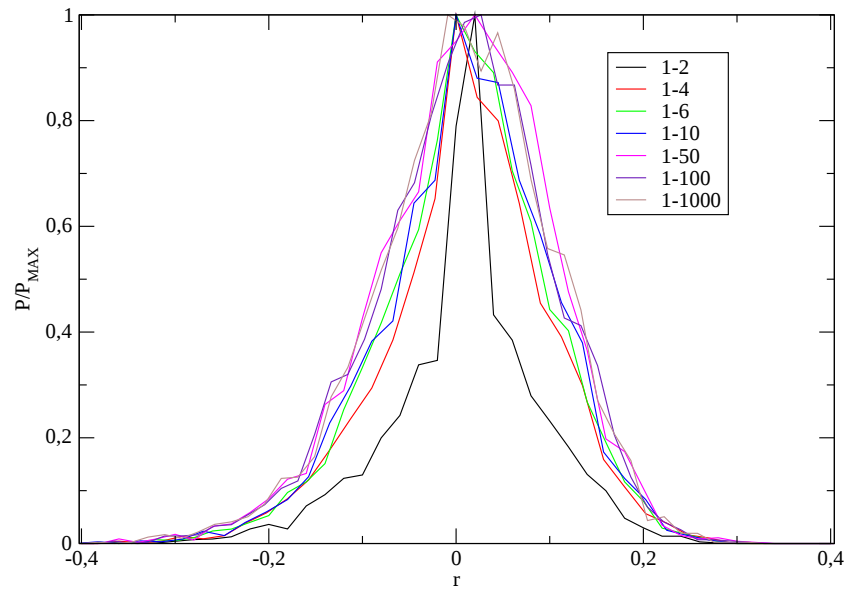


Figura 4.22: Plot de diversos intervalos para o preço base para 250 Agentes.

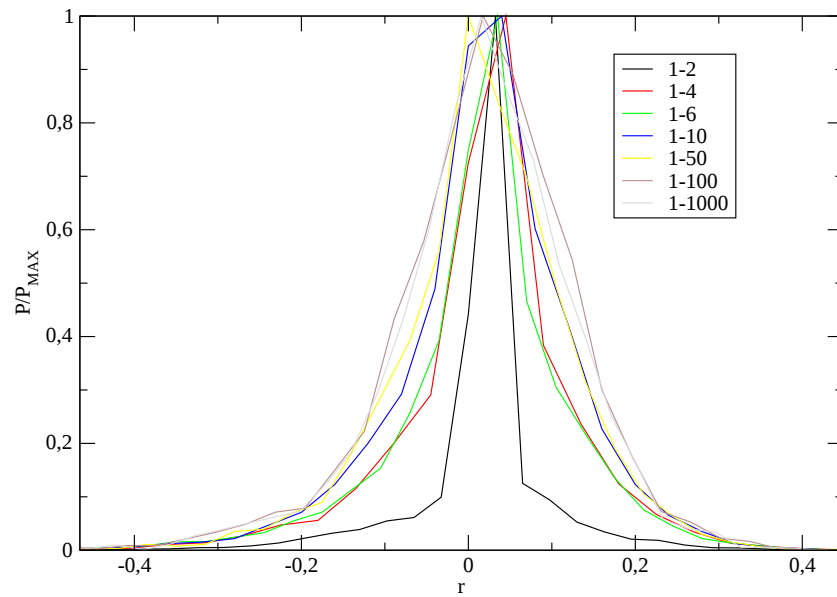


Figura 4.23: Plot de diversos intervalos para o preço base para 600 Agentes.

agentes. Dessa maneira pode-se afirmar que aparentemente o sistema não depende do tamanho do intervalo em que o preço base está contido.

Outro parâmetro relevante do modelo é o fator de impacto, como o fator de

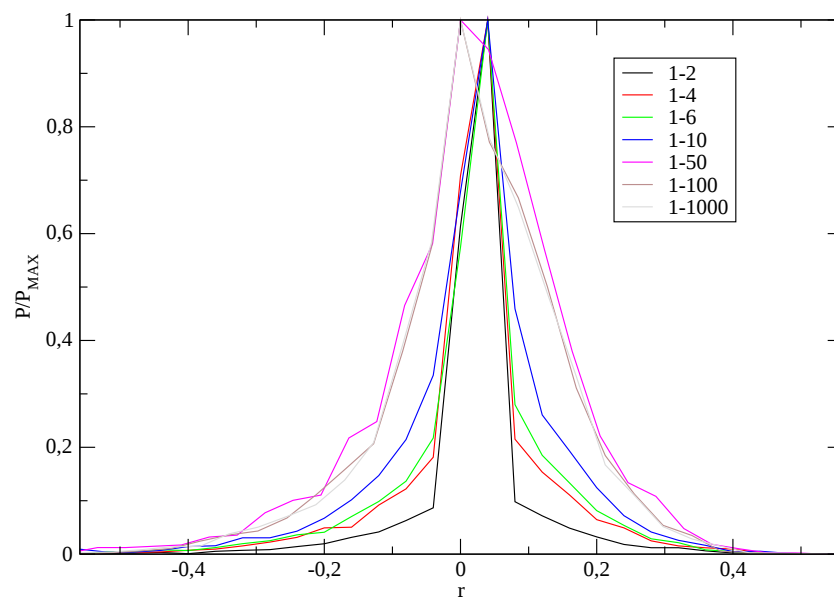


Figura 4.24: Plot de diversos intervalos para o preço base para 1000 Agentes.

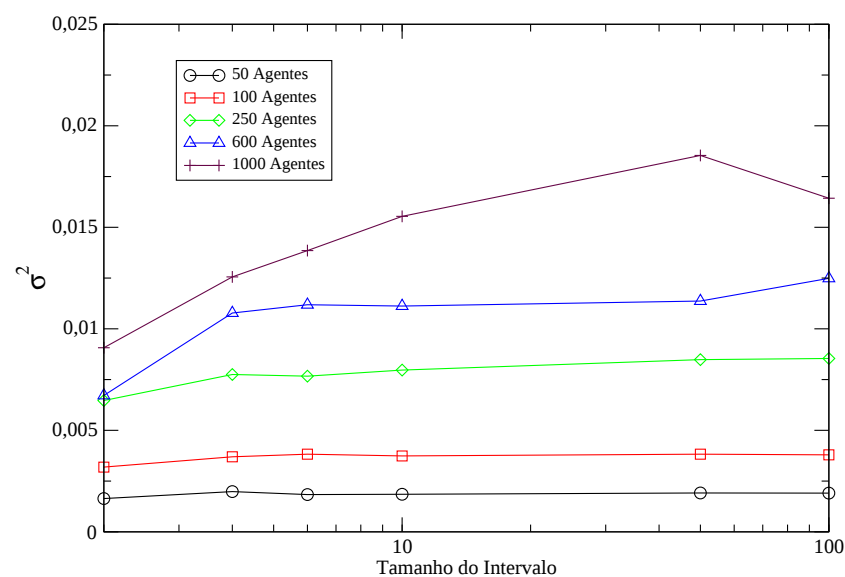


Figura 4.25: Desvio padrão das distribuições em função do tamanho do intervalo do preço base.

impacto de cada agente influência o resultado apresentado, é um questionamento plausível. O fator de impacto introduzido no modelo é quem introduz a hetero-

geneidade dos agentes, cada agente recebe um fator de impacto que simboliza os seus recursos financeiros.

Para compreender a influência do intervalo em que f se encontra, nas propriedades do emergentes do modelo, montamos uma pequena tabela com alguns valores para o número de agentes, os intervalos e o valor da kurtosis para cada série de retorno gerada com alta frequência, $\Delta t = 1$. Nosso interesse na kurtosis é ter uma noção de quando estamos tratando de uma distribuição próxima da gaussiana e quando estamos com uma distribuição leptokurtica, característica de séries de retornos de alta frequência.

Tabela 4.1: Valores para a kurtosis dependendo do número de agentes e do fator de impacto

$I \backslash N$	600	1000	2500
$[10^{-3}, 10^{-2}]$	7.39	8.52	17.07
$[10^{-4}, 10^{-2}]$	4.21	6.07	9.78
$[10^{-5}, 10^{-2}]$	5.54	5.39	7.58
$[10^{-4}, 10^{-3}]$	3.09	3.30	5.56
$[10^{-5}, 10^{-4}]$	3.12	3.21	3.61

Através dos valores da kurtosis podemos perceber que quando temos valores muito pequenos para o fator de impacto a contribuição dos agentes se torna muito inferior, dessa maneira, grandes eventos se tornam cada vez mais raros e as distribuições se tornam mais gaussianas. A consequência disso é que precisaremos

de mais agentes para observar os fatos que foram mostrados anteriormente. Logo, o preço base serve de ajuste para determinarmos a quantidade mínima de agentes para observarmos os fatos estilizados com mais clareza, dessa forma quando tivermos um número muito grande de agentes o valor do preço base se torna irrelevante, porque mesmo sendo pequeno o preço base, teremos muitos agentes que acabam gerando os padrões que estudamos.

5

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste trabalho nós apresentamos algumas ferramentas matemáticas para o estudo de séries temporais presentes em muitos dos sistemas complexos existentes na natureza. Um desses sistemas foi o foco dos nossos estudos, uma vertente da física estatística que se chama Econofísica. No capítulo 3 nós apresentamos algumas das propriedades mais importantes que esse sistema possui, os chamados fatos estilizados de mercado.

Muitos modelos na literatura vêm tentando compreender como essas propriedades, os fatos estilizados, emergem da dinâmica do sistema econômico. Alguns desses modelos são preocupados em entender as interações existentes no nível mais fundamental do sistema, os agentes que compõem o mesmo.

No capítulo 4 nós apresentamos um modelo de agentes heterogêneos, não interagentes que até então é o modelo mais simples que podíamos conceber, e muito mais simples que outros modelos existentes na literatura. Mesmo tendo um modelo extremamente simples, fomos capazes de reproduzir vários dos fatos estilizados com excelente precisão a medida que o número de agentes dentro do sistema crescia.

O sistema também apresentou uma invariância em relação ao preço justo,

ou preço base, que os agentes julgavam ser o preço que deveria ser pago por um dado ativo financeiro. Outro parâmetro que é relevante ao modelo, consiste no fator de impacto, um número associado a cada agente individualmente, que garante a heterogeneidade do modelo. Vimos que o valor do fator apenas modifica o número de agentes necessários para que os fatos estilizados sejam observados. Caso tenhamos um número de agentes muito grande, o valor do fator não apresenta uma limitação.

Por fim podemos concluir que, por mais simples que o modelo possa ser, quando o número de agentes se torna grande o modelo se torna próximo a um mercado real, muitas das suas características e propriedades, independente de outros parâmetros.

Alguns detalhes podem ser adicionados ao modelo para que ele se torne um pouco mais consistente e possa apresentar algumas outras propriedades interessantes de mercado, como bolhas e crashes. Uma crítica pertinente ao modelo é o fato de que a cada passo da simulação os agentes escolhem aleatoriamente o preço justo a ser pago seguindo uma distribuição uniforme. Isso não representa uma decisão real, o que mais se aproximaria do real é que cada agente decidisse no primeiro passo um preço justo médio, e nos outros passos ele tivesse algumas variações seguindo uma distribuição bem definida, Gauss, Levy, etc.

Outro ponto relevante diz respeito ao fator de impacto que também é uniformemente distribuído. Uma distribuição interessante para testar esse fenômeno, além da uniforme, seria a distribuição de Pareto para as riquezas. Acerca do poder aquisitivo dos agentes, seria relevante também testar a conservação dos recursos, ao invés de ter um sistema dentro de um "banho" de ações.

REFERÊNCIAS

- [1] Gregoire Nicolis and Catherine Nicolis. Foundations of complex systems. *European Review*, **17(02)**, 237–248, 2009.
- [2] Aristóteles. *Metafísica, livro 8.6.1045a:8-10*.
- [3] George Henry Lewes. *Problems of life and mind*. Houghton, Osgood and company, 1879.
- [4] P.A. Corning. *Complexity*, **7**, 18, 2002.
- [5] John Stuart Mill. *Essays on Some Unsettled Questions of Political Economy*.
- [6] Vilfredo Pareto. *Cours d'économie politique*. Université de Lausanne, 1896.
- [7] Louis Bachelier. *Théorie de la Spéculation*. 1900.
- [8] B. B. Mandelbrot. *Journal of Business*, **36(4)**, 394, 1963.
- [9] R.N. Mantegna and H.E. Stanley. *Nature*, 376:46, 1995.
- [10] Fischer Black and Myron Scholes. *Journal of Political Economy*, **81**, 637–654, 1973.

-
- [11] Robert C. Merton. *Bell Journal of Economics and Management Science*, **4**, 141–183, 1973.
- [12] K. Sznajd-Weron and R. Weron. *International Journal of Modern Physics C*, **11**, 1157, 2000.
- [13] Cesar Ivan Nunes Sampaio Filho. Econofísica: Dinâmica de agentes heterogêneos no estudo da volatilidade. Tese de Mestrado, UFPE, 2008.
- [14] Nicholas Kaldor. '*Capital Accumulation and Economic Growth*'. 1961.
- [15] R.N. Mantegna and H.E. Stanley. *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [16] Z. Ding, R. Engle, and C. Granger. *Journal Empirical Finance*, **1**, 83, 1993.
- [17] P. Lévy. *Calcul des probabilités*. Gauthier-Villars, Paris, 1925.
- [18] J. P. Nolan. *Stable Distributions - Models for Heavy Tailed Data*. Birkhauser, 2011. Em progresso, Capítulo 1 online em <http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/stable.html>.
- [19] B. B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*. Freeman, New York, 1982.
- [20] J. Feder. *Fractals*. Plenum Press, New York, 1988.
- [21] Edward Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1 edition, 1993.
- [22] Iram Gleria, Raul Matsushita, and Sergio Da Silva. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, **26**, 99, 2004.

-
- [23] A.-L. Barabási and H.E. Stanley. *Fractal Concepts in Surface Growth*. Cambridge University Press, Cambridge, 1 edition, 1995.
- [24] H.E. Stanley and P. Meakin. *Nature*, **335**,405, 1988.
- [25] H. E. Hurst. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116:770, 1951.
- [26] B. B. Mandelbrot and J. Wallis. *Water Resources Research*, **5**,967, 1969.
- [27] C.-K. Peng, S. V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H. E. Stanley, and Goldberger. *Phys. Rev. E*, **49**,1685, 1994.
- [28] H Eugene Stanley. *Introduction to phase transitions and critical phenomena*. Oxford University Press, 1971.
- [29] Thomas C. Halsey, Mogens H. Jensen, Leo P. Kadanoff, Itamar Procaccia, and Boris I. Shraiman. *Phys. Rev. A*, **33(2)** , 141, 1986.
- [30] J.W. Kantelhardt, S.A. Zschiegner, E. Koscielny-Bunde, S. Havlin, A. Bunde, and H.E. Stanley. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **316**,87, 2002.
- [31] B. Podobnik, P. Ch. Ivanov, Y. Lee, and H. E. Stanley. *Europhys. Lett.*, **52**,491, 2000.
- [32] Iram Gleria, Raul Matsushita, and Sergio Da Silva. *Economics Bulletin*, **7**,1–12, 2002.
- [33] Annibal Figueiredo, Iram Gleria, Raul Matsushita, and Sergio Da Silva. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **323**,601, 2003.

-
- [34] H. E. Stanley and R.N. Mantegna. *Physical Review Letters*, **73**,2946, 1994.
- [35] Rosane Rieira Freire. Notas de aula do curso de econofísica da vii escola do cbpf. 2009.
- [36] J. P. Bouchaud, M. Potters, and A. Matacz. *Physical Review Letters*, **87**,228701, 2001.
- [37] J. P. Bouchaud and M. Potters. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 299:60, 2001.
- [38] C. M. Nascimento, H. B. N. Júnior, H. D. Jennings, M. Serva, Iram Gleria, and G. M. Viswanathan. *Europhys. Lett.*, **81**,18002, 2008.
- [39] F.Slanina. *Eur. Phys. J. B*, **61**,225, 2008.
- [40] S.Maslov. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **278**,571, 2000.
- [41] T.Preis, S. Golke, W. Paul, and J. J. Schneider. *Europhys. Lett.*, **75**,510, 2006.
- [42] Marco Raberto, Silvano Cincotti, Sergio M. Focardi, and Michele Marchesi. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **299**,319, 2001.
- [43] F.F. Ferreira, V.M. de Oliveira, A.F. Crepaldi, and P.R.A. Campos. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **357**,534, 2005.
- [44] Jie-Jun Tseng, Chih-Hao Lin, Chih-Ting Lin, Sun-Chong Wang, and Sai-Ping Li. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **389**,1699, 2010.
- [45] P. Bak, M. Paczuski, and M. Shubik. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **246**,430, 1997.

-
- [46] G. Qiu, D. Kandhai, and P. M. A. Sloot. *Phys. Rev. E*, **75**,046116, 2007.
- [47] Tetsuya Shimokawa, Kyoko Suzuki, and Tadanobu Misawa. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **379**,207, 2007.
- [48] Ulrich Horst. *Economic Theory*, **25**,917, 2005.
- [49] F.S.Passos, C.M. Nascimento, Iram Gleria, Sergio da Silva, G. M. Viswanathan
Europhysics Letters, **93**, 58006, 2011