

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Correlações de Longo Alcance e
Distribuições de Caudas Grossas em Séries
Temporais Fracamente Não-Estacionárias

HÉLCIO BESERRA DO NASCIMENTO JÚNIOR

INSTITUTO DE FÍSICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Correlações de Longo Alcance e
Distribuições de Caudas Grossas em Séries
Temporais Fracamente Não-Estacionárias

HÉLCIO BESERRA DO NASCIMENTO JÚNIOR

Dissertação de Mestrado apresentada
ao Instituto de Física da Universidade
Federal de Alagoas como parte dos
requisitos para a obtenção do título de
Mestre em física.

Orientador: Prof. Madras Viswanathan Gandhi Mohan

Maceió- Alagoas - Brasil

Janeiro - 2008

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus por todas as suas ações em meu cotidiano. Agradeço especialmente aos meus pais, pois sem seu apoio e incentivo, jamais teria passado por essa fase em minha vida.

Agradeço ao Professor Gandhi pela orientação e incentivo na condução de minha vida profissional, nestes anos todos. Sou profundamente grato aos professores do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, com os quais tive oportunidade de enriquecer minha bagagem acadêmica.

Agradeço aos meus amigos e colegas de curso, especialmente César Nascimento. Gostaria de agradecer também aos meus amigos Italo Oliveira e Pedro Valentin.

Agradeço a FAPEAL e a CAPES pela ajuda de custos que proporcionou a realização deste trabalho.

Resumo

Um problema tradicional na física é a origem das distribuições de caudas grossas geradas por sistemas complexos. Tais distribuições de caudas grossas são observadas nas flutuações de preços em mercados financeiros. Pesquisas para modelar tais caudas grossas em termos das distribuições de Lévy levaram a progressos importantes, mas a origem das caudas grossas ainda continua controversa. Nesta dissertação de mestrado estudamos as distribuições de retornos financeiros medidos em diferentes intervalos de tempo τ nas bolsas de valores como também no mercado de câmbio. Usamos técnicas de emaranhamento para estudar o efeito de diferentes tipos de correlações na distribuição de retornos agregados. Usando essas técnicas, encontramos que a origem das caudas grossas no mercado acionário é causada pela conhecida correlação de longo alcance da volatilidade. Por outro lado, encontramos um comportamento mais complexo nos dados de alta frequência do mercado de câmbio. Discutimos o significado físico desses resultados quantitativos. Finalmente, abordamos o tema em termos de impactos sócio-econômicos e de políticas econômicas.

Abstract

A traditional problem in physics is the origin of fat tailed distributions generated by complex systems. Such fat tailed distributions are observed in price fluctuations in financial markets. Research to model such fat tails in terms of Lévy distributions led to important progress, but the origin of the fat tails continues to be controversial. In this masters thesis we study the distribution of financial returns measured over different time intervals τ in stock markets as well as in the currency market. We use shuffling methods to study the effect of different types of correlations on the distributions of aggregate returns. Using these techniques, we find that the origin of fat tails in stock markets is caused by the known long range volatility correlations. On the other hand, we find a more complex behavior in the high frequency data for the currency market. We discuss the physical significance of these quantitative results.

Sumário

Folha de rosto	i
Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Resumo	iv
1 Introdução	3
1.1 Física Estatística e Sistemas Complexos	3
1.2 Econofísica	4
1.3 Propriedades emergentes	5
1.4 Fractalidade nas Correlações	6
2 Distribuições de probabilidades e correlações	8
2.1 Distribuição normal	8
2.2 Teorema do Limite Central	11
2.3 Distribuições de Caudas Grossas	12
2.4 Teorema do Limite Central Generalizado	15
2.5 Distribuição Gradualmente Truncada	15
2.6 Efeito das Correlações	17
2.7 Processos Estocásticos Estacionários	17
2.8 Correlações de Curto e Longo Alcance	19
3 Análise de Séries Temporais em Econofísica	26
3.1 Definição e terminologia das séries temporais	26

3.2	O conceito e definição de retorno financeiro	27
3.3	Agregação de Retornos	29
3.4	Distribuições dos Retornos	31
3.5	Autocorrelação dos Retornos	33
3.6	Memória da Volatilidade	34
4	Caudas Grossas e memória de Longo Alcance nas Bolsas de Valores	42
4.1	Índices das principais Bolsas de Valores	42
4.2	Memória nas bolsas de valores	44
4.3	Porque as Bolsas de Valores quebram?	46
5	Efeitos de Memória do Mercado de Câmbio	52
5.1	Séries de Alta Frequência da Taxa de Câmbio e Efeito das Correlações	52
5.2	Distribuições dos Retornos para o Mercado de Câmbio	53
6	Conclusão	58
6.1	Conclusão e Discussão	58
	Referências	60

Capítulo 1

Introdução

1.1 Física Estatística e Sistemas Complexos

Porque sistemas complexos, tal como ecossistemas, tem algo em comum com a física estatística? A principal tarefa da física estatística é lidar com sistemas macroscópicos que resultam de interações microscópicas entre muitos componentes individuais. Considere o movimento de um objeto, tal como uma rolha dentro de um fluido turbulento, como o oceano. O comportamento de uma rolha é influenciada por colisões sofridas a cada picosegundo por 10^{10} moléculas microscópicas da água. Conceitos e técnicas originadas da física estatística são idéias úteis para a análise quantitativa de sistemas complexos [1, 2].

Como um exemplo ilustrativo, considere um sistema complexo de interesse em economia, tal como o mercado ações. Aqui o valor das ações são influenciadas pelos investidores (indivíduos que compram e vendem ações), pois se um grupo de investidores decidem comportar-se em uma certa direção os valores das ações irão mudar. Assim, podemos tratar as ações de uma maneira parecida como tratamos a rolha no oceano. Nós não sabemos muito sobre a conexão completa entre as quantidades microscópicas e macroscópicas observadas, por exemplo no índice Ibovespa

ou as regras individuais seguidas pelos investidores. Similarmente, nós não sabemos o comportamento exato das 10^{10} moléculas da água que colidem com a rolha a cada picosegundo.

Desde que a física estatística visa explicar o comportamento macroscópico que são resultantes de muitas interações microscópicas dos seus componentes, consequentemente isto é bem ajustado para o problema geral que procura melhor entender os sistemas complexos.

1.2 Econofísica

Um ramo da teoria dos sistemas complexos que vem recebendo cada vez mais atenção nos últimos anos é a Econofísica que, como o nome sugere, procura compreender o comportamento de mercados financeiros e de outros aspectos da economia.

Neste trabalho nós discutiremos a aplicação na economia de conceitos tais como distribuições, correlações, séries temporais e processos aleatórios. Durante os últimos trinta anos foram obtidos resultados importantes no campo de transições de fase, mecânica estatística e sistemas desordenados. Nestes campos, distribuições de lei de potência estão presentes e as interpretações atuais feitas pelos físicos são frequentemente obtidas usando estes conceitos. O problema da distribuição da variação dos preços tem sido considerada por vários autores desde 1900, no qual foi o período quando matemáticos mostraram interesse em modelar preços do mercado financeiro. Bachelier propôs originalmente que a distribuição da variação dos preços era uma distribuição Gaussiana [3].

Entre os modelos propostos, o mais polêmico foi desenvolvido por Mandelbrot, no qual a distribuição da variação de preços segue uma distribuição de Lévy estável [4]. As variáveis estáveis de Lévy são processos estocásticos que seguem o teorema do limite central generalizado. A forma generalizada do teorema do limite

central possui um número interessante de propriedades. Elas são estáveis (como são a maioria dos processos Gaussianos), isto é, a soma de dois processos estocásticos independentes x_1 e x_2 caracterizadas pela mesma distribuição de Lévy de índice α é um processo estocástico caracterizado pela distribuição de Lévy com o mesmo índice α .

A partir da propriedade descrita acima podemos fazer uma generalização, a soma de variáveis estocásticas distribuídos idênticamente independentes $S_n \equiv \sum_{i=1}^n x_i$ caracterizado por uma função densidade de probabilidade com lei de potência na cauda,

$$P(x) \sim x^{-(1+\alpha)}, \quad (1.1)$$

convergir, para um processo estocástico de estável de Lévy com índice α quando n tende ao infinito [5]. Esta propriedade nos diz que a distribuição estável de Lévy é uma distribuição lei de potência para grandes valores da variável estocástica x .

1.3 Propriedades emergentes

Um comportamento emergente ou propriedade emergente pode aparecer quando uma quantia de entidades (agentes) simples operam em um ambiente, formando comportamentos complexos no coletivo. A propriedade em si é comumente imprevisível e impredicável, e representa um novo nível de evolução dos sistemas. O formato e o comportamento dos bandos de pássaros é um bom exemplo de uma propriedade emergente.

Uma razão pela qual o comportamento emergente ocorre é o número de interações entre os componentes de um sistema, que aumenta combinatoriamente com o mesmo, então permitindo potencialmente que uma série de novos e diferentes tipos de comportamentos apareçam. Por exemplo, as possíveis interações entre

grupos de moléculas crescem enormemente com o número de moléculas de modo que é impossível para um computador contar o número de arranjos possíveis mesmo para um sistema com apenas 20 moléculas.

Por outro lado, apenas a existência de um grande número de interações não é o suficiente para garantir o comportamento emergente; muitas das interações podem ser previsíveis ou irrelevantes, e muitas podem cancelar as outras. Em alguns casos, um grande número de interações pode de fato trabalhar contra a emergência de comportamentos interessantes, criando uma grande quantidade de "ruído" que elimina qualquer "sinal" emergente. Portanto não é apenas o número de conexões que motiva a emergência, também deve ser considerado o modo como estas conexões estão organizadas. Uma organização hierárquica é um exemplo que pode gerar um comportamento emergente (um burocrata pode agir de um modo diferente do resto da população que não é burocrata); mas talvez mais interessante, o comportamento emergente pode também surgir de estruturas organizacionais mais descentralizadas, como no mercado financeiro. Em muito casos, o sistema tem que alcançar um nível de diversidade, organização e conectividade antes do comportamento emergente ocorrer.

Em física, a emergência é usada para descrever uma propriedade, lei ou fenômeno que ocorre em escala macroscópica (em tempo ou espaço) mas não em escalas microscópicas, devido ao fato de um sistema microscópico poder ser visto como um grande conjunto de sistemas microscópicos.

1.4 Fractalidade nas Correlações

Um sistema que apresenta correlação de longo alcance com decaimento tipo lei de potência $R(\tau) \sim \tau^{-\gamma}$, onde γ é chamado de expoente crítico, pode-se dizer que é "livre de escala" desde que não existe escala característica associada com uma simples lei de potência [1]. Esses sistemas que não possuem comprimento característico ou escala temporal, apresentam fractalidade ou, mais geralmente, apresentam pro-

priedades de auto-afinidade (uma “janela” qualquer do sistema aparenta-se com o sistema inteiro). Assim, as propriedades fractais de diferentes sistemas, apresentam diferentes natureza, origem e aparência.

Capítulo 2

Distribuições de probabilidades e correlações

2.1 Distribuição normal

Uma variável aleatória $x(k)$ é um conjunto de funções por pontos K de um espaço amostral (ou $x(t)$ por tempo t para o caso de uma série temporal), onde $x(k)$ é um número real entre $-\infty$ e ∞ que é associado a cada ponto amostral K que poderá ocorrer [6]. Um exemplo de variável aleatória é dado a seguir. Suponhamos um espaço amostral S e que a cada ponto amostral seja atribuído um número. Assim, se o espaço amostral relativo ao “lançamento simultâneo de duas moedas” é $S = (\text{cara, cara}), (\text{cara, coroa}), (\text{coroa, cara}), (\text{coroa, coroa})$ e se x representa o “número de caras” que aparecem, a cada ponto amostral podemos associar um número para x , de acordo com a tabela abaixo (x é a variável aleatória associada ao número de caras observado):

Ponto Amostral	x
(cara,cara)	2
(cara,coroa)	1
(coroa,cara)	1
(coroa,coroa)	0

Logo podemos escrever:

Numero de caras (x)	Probabilidade P(x)
2	1/4
1	2/4
0	1/4
Total	4/4=1

Na tabela acima x representa o número de caras (variável aleatória) e P(x) a probabilidade (frequência) com que o número de caras ocorre no experimento. A esse experimento podemos relacionar uma distribuição de probabilidade.

A distribuição de probabilidade mais familiar é a distribuição normal e também uma das mais importantes na estatística. No século XVIII, a distribuição Normal foi considerada como uma aproximação da distribuição Binomial, já no século XIX, esta distribuição foi reconhecida devido ao trabalho de Laplace e Gauss [9]. Na física a distribuição Normal é conhecida como distribuição Gaussiana. A Figura 2.1 mostra a distribuição Normal que tem forma de sino.

A equação da curva Normal é especificada usando 2 parâmetros: o valor médio μ , e o desvio padrão do sistema σ . Dada uma amostra de n valores da variável x, as estimativas de μ e σ são, respectivamente:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \quad (2.1)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \mu)^2} \quad (2.2)$$

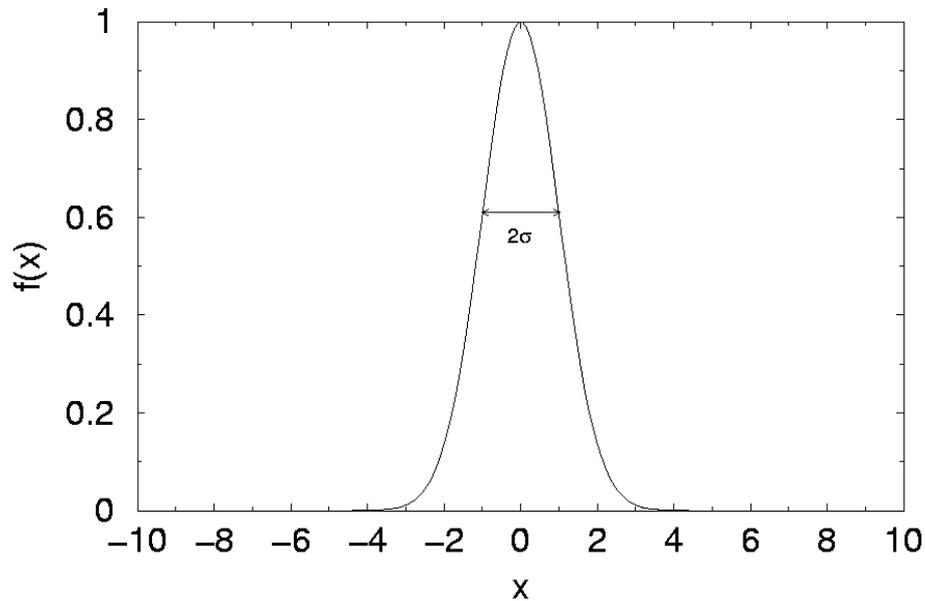


Figura 2.1: Mostra a curva de uma distribuição Normal

Denotamos $N(\mu, \sigma^2)$ à curva Normal com valor médio μ e desvio padrão σ^2 . O valor médio refere-se ao centro da distribuição e o desvio padrão à largura da curva. A distribuição normal é simétrica em torno do valor médio. A mediana e a moda são todas coincidentes. Para referência, a equação da curva é

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (2.3)$$

A área sob a curva normal (na verdade abaixo de qualquer função de densidade de probabilidade normalizada) é 1. Então, para quaisquer dois valores específicos podemos determinar a proporção de área sob a curva entre esses dois valores. Para a distribuição Normal, a proporção de valores caindo dentro de um, dois, ou três desvios padrão da média são:

Intervalo	Proporção
$\mu \pm 1\sigma$	68,3 %
$\mu \pm 2\sigma$	95,5 %
$\mu \pm 3\sigma$	99,7 %

Este resultado é usado da seguinte maneira. Suponha que os comprimentos de um particular tipo de peixe podem ser descritos por uma distribuição normal, com média $140mm$ e desvio padrão $15mm$. Podemos calcular a proporção dos peixes que têm comprimentos entre $110mm$ e $170mm$, por exemplo, como a proporção da área sob a curva entre $110mm$ e $170mm$. Então em nosso exemplo, cerca de 95% dos peixes tem comprimentos entre $110mm$ e $170mm$. Na prática desejamos calcular probabilidades para diferentes valores de μ e σ . Para isso, a variável x cuja distribuição é $N(\mu, \sigma^2)$ é transformada numa forma padronizada U com distribuição $N(0,1)$ (distribuição normal padrão) pois tal distribuição é tabelada. A quantidade U é dada por

$$U = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (2.4)$$

onde $P(U)$ é dado por:

$$P(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}U^2\right) \quad (2.5)$$

que é a função de densidade de probabilidade normal com média zero e desvio padrão um. É também conhecida como distribuição Gaussiana unitária

2.2 Teorema do Limite Central

Um dos teoremas mais importantes sobre as distribuições estatísticas é o teorema do limite central [15]. Pelo teorema, se $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são valores independentes de uma variável x , com valor médio e desvio padrão finitos (condição

necessária para vários sistemas naturais), então a distribuição de S , onde

$$S = \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.6)$$

tende à uma distribuição Normal para grandes valores de n , isto é, as distribuições estatísticas convergem para a normal quando o número de elementos amostrais n , tende à infinito.

A distribuição da soma de duas variáveis é dada pela convolução de cada uma das distribuições originais (Figura (2.2)):

$$P(x_1 + x_2) = P(x_1) \otimes P(x_2), \quad (2.7)$$

onde o símbolo \otimes denota a convolução e pode ser escrito da forma:

$$f \otimes g = \int g(y)f(x - y)dy. \quad (2.8)$$

2.3 Distribuições de Caudas Grossas

Em 1879, Galton [8] demonstrou que se $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são variáveis aleatórias positivas independentes, então a distribuição do $\log(T_n)$ onde T_n é dado por

$$T_n = \prod_{j=1}^n x_j = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \quad (2.9)$$

possui uma distribuição Normal para n grande, pois

$$\log(T_n) = \log(x_1) + \log(x_2) + \log(x_3) + \dots + \log(x_n) \quad (2.10)$$

e se o teorema do limite central é válido para a variável aleatória independente $\log(x_j)$, a distribuição de $\log(T_n)$ possuirá distribuição Normal para valores de n muito grandes. Então, considerando $x = T_n$, a distribuição é dada por

$$P(\log x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[\frac{-1}{2} \left(\frac{\log x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (2.11)$$

onde μ e σ são a média e o desvio padrão de $\log(x)$. Mc-Allister [20] obteve as expressões para a média e outros parâmetros da distribuição. Kapteyn e Van Uen [21] apresentaram um método gráfico para obter os valores dos parâmetros da distribuição. Gibrat [10] mostrou que esta distribuição também podia ser aplicada em economia, no estudo do faturamento de empresas. A distribuição Log-Normal tem sido aplicada em várias áreas, como por exemplo na física, economia, medicina, agricultura e meio ambiente [10, 27].

Devido a interação entre seus elementos, os sistemas complexos podem exibir um comportamento catastrófico ou cooperativo, onde uma parte do sistema pode afetar a outra, em um efeito dominó. Este mecanismo é o de realimentação positiva, em que quando acontece um evento, há um outro elemento que ajuda a aumentar a magnitude deste evento. Por exemplo, quando uma pessoa joga bem futebol, a sociedade em volta dela nota essa qualidade e fornece a essa pessoa melhores condições para ela praticar o futebol. Este comportamento catastrófico poderia ser explicado pela distribuição Lei de Potência [22].

Pareto [16] estudando a distribuição dos rendimentos pessoais propôs que

$$N = Ax^{-\alpha} \quad (2.12)$$

onde N é o número de pessoas com rendimento maior ou igual a x , A e α são constantes da distribuição. Propôs ainda que esta lei é devido à Realimentação Positiva, isto é, pessoas com rendimento pessoal maiores conseguem em suas aplicações financeiras maiores taxas de retorno, conseguindo dessa forma um rendimento pessoal ainda maior. Pareto sugeriu que a Distribuição Lei de Potência pudesse ser utilizada na descrição de vários sistemas.

Em geral, a densidade da probabilidade desta distribuição é dada por

$$P(x) = \frac{C_1 P(x_m)}{C_1 + (|x + x_m|)^{1+\alpha}} \quad (2.13)$$

onde x_m é o valor de x para a probabilidade máxima e C_1 é uma constante.

Esta distribuição foi observada em vários sistemas complexos [23], como por exemplo o estudo da energia liberada por um terremoto, de um tornado, da variação de preços de algodão, da extinção de espécies e da biodiversidade da Floresta Amazônica. Assim, quando o valor de x é grande em relação a x_m , $P(x)$ pode ser aproximada por

$$P(x) = \text{const.} \frac{1}{x^{1+\alpha}} \quad (2.14)$$

Um exemplo importante proposto por P. Lévy [11] que tem comportamento assintótico de lei de potência é a distribuição de Lévy. A função de distribuição simétrica de Lévy é dada pela transformada de Fourier da função característica:

$$L_\alpha(x, \Delta t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \exp(-\gamma \Delta t q^\alpha) \cos(qx) dq \quad (2.15)$$

onde α ($0 < \alpha \leq 2$) é o índice de Lévy, γ é o fator de escala ($\gamma > 0$) e Δt é o tempo entre observações sucessivas. Mandelbrot propôs que tal distribuição descreve por exemplo a variação de valor da ação de uma empresa ou conjunto de empresas na bolsa de valores ao longo do tempo. Para grandes valores de x , a distribuição de Lévy se aproxima da distribuição Lei de Potência [5].

A distribuição de Lévy é uma generalização da distribuição Gaussiana e Cauchy, com índices $\alpha = 2$ e $\alpha = 1$ respectivamente Fig. (2.3)

2.4 Teorema do Limite Central Generalizado

A soma renormalizada de variáveis distribuídas idênticamente independentes Δx_i , converge para uma lei de Lévy estavel L_α [5, 17, 28, 29]

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{\Delta x_i - a(N)}{b(N)} = L_\alpha \quad (2.16)$$

L_α so depende de três parâmetros, o mais importante e o índice de Lévy, usualmente denotado por $\alpha (\leq 2)$, que descreve na verdade como o desvio padrão diverge. Mais precisamente corresponde a ordem crítica de divergência do momento de (Δx_i) .

2.5 Distribuição Gradualmente Truncada

A Distribuição Lei de Potência pode possuir desvio padrão infinito ($1 + \alpha < 3$, então $\sigma \rightarrow \infty$), mas geralmente os sistemas físicos reais possuem desvio padrão finito. Por isso ao aplicarmos a distribuição de Lévy ou Pareto, ou ainda Log-Normal, aos sistemas físicos reais, precisamos truncar as distribuições após um determinado valor, a fim de evitar um desvio padrão infinito. Os sistemas complexos possuem várias interações e grande número de componentes interagindo de maneira diferente, portanto esperamos que o truncamento desta realimentação positiva seja gradual após um passo crítico. Baseado neste aspecto, Gupta e Campanha [12] desenvolveram uma nova distribuição conhecida como Distribuição de Lévy Gradualmente Truncada, introduzindo um fator $f(x)$ para essa capacidade física do componente ou sistema, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq x_c \\ \exp \{ -[(x - x_c)/k]^B \} & \text{se } |x| > x_c \end{cases} \quad (2.17)$$

onde $B = (2 - a)$, x_c é o ponto crítico onde começa o truncamento gradual devido ao limite físico do sistema e k uma constante de truncamento gradual. Para valores pequenos de k , o truncamento da realimentação positiva será maior.

Esta distribuição tem desvio padrão finito, e no limite obtém-se uma Distribuição Normal como exigido pelo teorema do limite central [13]. Esta distribuição também obedece a Lei de Potência em sua parte central e decaimento exponencial nos valores extremos de x . A Distribuição Gradualmente Truncada torna mais simples a extração de informações úteis que descrevem o sistema real. Gupta e Campanha também desenvolveram o truncamento para a Distribuição Log-Normal [14]. Usando o fator de truncamento, temos as seguintes distribuições:

A) Distribuição Lei de Potência Gradualmente Truncada:

$$P(x) = \frac{C_1 P(x_m)}{C_1 + (|x + x_m|)^{1+\alpha}} * f(x) \quad (2.18)$$

B) Distribuição de Lévy Gradualmente Truncada:

$$P(x_\alpha) = CL_\alpha(x, \Delta t) f(x) \quad (2.19)$$

onde C é a constante de normalização de tal maneira que:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} P(x) dx = 1 \quad (2.20)$$

C) Distribuição Log-Normal Gradualmente Truncada

$$P(\ln x) = \text{const.} \left[\frac{-1}{2} \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \cdot f(x) \quad (2.21)$$

2.6 Efeito das Correlações

As variáveis correlacionadas causam problemas na convergência esperada para a distribuição Gaussiana (devido ao Teorema do Limite Central), a partir deste efeito a distribuição Gaussiana pode aparentar outras distribuições (Lévy, Lei de potência, Log-normal, etc.). O mesmo efeito ocorre na convergência esperada para a distribuição de Lévy (devido ao Teorema do Limite Central Generalizado).

O problema de convergência é eliminado com o embaralhamento das variáveis correlacionadas que passarão a não serem mais correlacionadas e também com o embaralhamento só dos sinais (mas não do valor absoluto) da variáveis correlacionadas [24, 25, 26].

2.7 Processos Estocásticos Estacionários

Um processo estocástico $\{x_k(t)\}$, $-\infty < t < \infty$ é um conjunto de funções reais (ou complexas), o qual pode ser caracterizado através de estruturas de probabilidades [18]. Por conveniência, a variável t será interpretada como tempo na discussão seguinte. Cada função $x_k(t)$, onde t é variável e k é fixo, é chamada de função modelo. Na prática uma função modelo pode ser pensada como um resultado de um simples experimento. Os possíveis números de experimentos representam um espaço modelo de índice k , o qual pode ser contável ou não contável. Para qualquer número N e qualquer tempos fixos t_1, t_2, \dots, t_N , as quantidades $x_k(t_1), x_k(t_2), \dots, x_k(t_N)$, representam N variáveis aleatórias sobre o índice k . Neste caso é necessário que exista uma distribuição de probabilidades bem definida para todo N .

Uma particular função modelo $x_k(t)$, em geral, não será adequada para representar um processo estocástico $\{x_k(t)\}$ na qual ela pertence. Para a situação de um par de processos estocásticos $\{x_k(t)\}$ e $\{y_k(t)\}$, o problema é estimar as propri-

idades estatísticas articuladas do par de processos estocásticos a partir da análise de um par arbitrário de funções modelo $x_k(t)$ e $y_k(t)$. Este problema será discutido com mais detalhes na seção seguinte.

Um processo estocástico $x(t)$ é estacionário se a função densidade de probabilidade $P[x(t)]$ é invariante sobre uma mudança temporal. Esta definição é frequentemente considerada pelos físicos como sendo muito restrita. Existe, na verdade, definições menos restritas para um processo estocástico estacionário [6]. Exemplos são dados a seguir:

(a) Processos estocásticos estacionários são definidos em três condições:

$$\mu = \langle x(t) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, t) dx, \quad (2.22)$$

onde $f(x, t)$ é a função densidade de probabilidade de observação da variável aleatória x no tempo t e μ é o valor médio.

$$R(t_1, t_2) = \langle x(t_1), x(t_2) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2, \quad (2.23)$$

onde $f(x_1, x_2, t_1, t_2)$ é a função densidade de probabilidade articulada que x_1 é observada no tempo t_1 , x_2 é observada no tempo t_2 e $R(t_1, t_2) = R(\tau)$ é uma função de $\tau \equiv t_2 - t_1$, com

$$E[x^2(t)] = \langle x^2(t) \rangle = R(0). \quad (2.24)$$

Esta é o desvio padrão do processo, $R(0) - \mu^2$, que é independente do tempo. As notações $E[\]$ e $\langle \ \rangle$ mostradas acima representam o valor esperado sobre o índice t do termo que está dentro dos parênteses.

(b) Processos estocásticos estacionários assintóticos são observados quando as variáveis aleatórias $x(t_1 + c), \dots, x(t_n + c)$ não dependem de c se c é grande.

(c) Processos estocásticos estacionários de ordem N originam-se quando a densidade de probabilidade articulada

$$f(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = f(x_1, \dots, x_n; t_1 + c, \dots, t_n + c) \quad (2.25)$$

não é conservada para todos os valores de n , mas só para $n \leq N$.

(d) Processos estocásticos estacionários em um intervalo são encontrados quando a Eq. (2.25) conserva todos t_i e $t_i + c$ no intervalo considerado.

2.8 Correlações de Curto e Longo Alcance

Em estatística, correlação é uma medida que mostra como fortemente são relacionadas duas (ou “n”) variáveis aleatórias (conjunto de números) A e B. Nós dizemos que duas variáveis estão positivamente correlacionadas se os números são caracterizados por comportamentos, parecidos. As duas variáveis $A = (1, 2, 3, 4, 3, 2, 1)$ e $B = (3, 5, 7, 9, 7, 5, 3)$ estão fortemente (e positivamente) correlacionadas, desde que $A_i > A_{i-1}$ implica em $B_i > B_{i-1}$ e $A_i < A_{i-1}$ implica em $B_i < B_{i-1}$. Em outras palavras, conhecendo A podemos prever B. O coeficiente de correlação será definido tal que os valores para as duas variáveis deverão ter uma forte correlação positiva. Se nós invertermos uma das variáveis, teremos uma correlação negativa, desde que $A_i > A_{i-1}$ agora implica em $B_i < B_{i-1}$. Conhecendo A neste caso podemos também prever B, mas com o coeficiente de correlação negativo. Se a relação $A_i > A_{i-1}$ não nos informa nada sobre a relação entre B_i e B_{i-1} , então não existe associação entre as variáveis, portanto elas são descorrelacionadas e seu coeficiente de correlação será zero.

A autocorrelação $R(t_1, t_2)$ (ver Eq.2.23) é sensível para o valor médio dos processos estocásticos. Para processos estocásticos com valor médio diferente de zero é útil considerar a autocovariança:

$$C(t_1, t_2) \equiv R(t_1, t_2) - \mu(t_1)\mu(t_2) \quad (2.26)$$

Para processos estacionários, a autocovariança é dada por:

$$C(\tau) = R(\tau) - \mu^2 \quad (2.27)$$

A forma típica de $C(\tau)$ para variáveis estocásticas positivamente correlacionadas é uma função decrescente, começando de $C(0) = \sigma^2$ e terminando em $C(\tau) \simeq 0$ para valores grandes de τ . Vamos considerar um processo estocástico com média zero e desvio padrão um, $\mu = 0$ e $\sigma^2 = R(0) = 1$. Com esta escolha, a autocorrelação e a autocovariança são as mesmas.

Agora vamos considerar um tipo de memória temporal que pode ser observada em processos estocásticos. Uma importante questão diz respeito a escala típica (memória temporal) da autocorrelação. Para processos estacionários, nós podemos responder esta questão considerando a integral de $R(\tau)$. A área abaixo de $R(\tau)$ pode ser considerada em três possíveis valores [18].

$$\int_0^\infty R(\tau) d\tau = \begin{cases} \textit{finita} \\ \textit{infinita} \\ \textit{indeterminada} \end{cases} \quad (2.28)$$

onde se $\int_0^\infty R(\tau) d\tau$ é finita, existe uma típica memória temporal τ_0 que é chamada de comprimento de correlação do processo. Os exemplos dos três casos citados acima são dados a seguir:

Caso (a): $R(\tau) = \exp[-\tau/\tau_0]$:

$$\int_0^\infty \exp[-\tau/\tau_0] d\tau = \tau_0 \quad (2.29)$$

Caso (b): $R(\tau) = \exp[-\tau^\nu/\tau_0]$:

$$\int_0^\infty \exp[-\tau^\nu/\tau_0] d\tau = \frac{\tau_0^{1/\nu}}{\nu} \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right) \quad (2.30)$$

Caso (c): $R(\tau) \sim \tau^{\eta-1}$, onde, se $0 < \eta \leq 1$,

$$\int_{t_1}^{\infty} \tau^{\eta-1} d\tau \rightarrow \infty. \quad (2.31)$$

A correlação cruzada para processos estocásticos estacionários é dada por:

$$R(t_1, t_2) = \langle x(t_1)x(t_2) \rangle \quad (2.32)$$

onde $R(t_1, t_2) = R(\tau)$ é uma função de $\tau = t_2 - t_1$. A covariância cruzada está relacionada com a correlação cruzada pela equação,

$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - \mu_x \mu_y, \quad (2.33)$$

onde a correlação cruzada será idêntica a covariância cruzada quando o valor médio for zero. Notamos que, pela definição, dois processos estocásticos estacionários são não-correlacionados se $C(\tau) = 0$ para todo τ . Isto ocorre, da Equação (2.33), sempre que $R(\tau) = \mu_x \mu_y$ para todo τ . Portanto, dois processos serão não-correlacionados quando $R(\tau) = 0$ para todo τ somente se μ_x ou μ_y forem iguais a zero [7].

A autocorrelação mede como dois pontos em tempos em t_1 e t_2 estão relacionados, Eq.(2.23). Da mesma forma, as correlações de n-pontos medem efeitos com mais termos, assim:

$$R(t_1, t_2, \dots, t_n) = \langle x_1 x_2 \dots x_n \rangle \quad (2.34)$$

onde $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$ e $\tau_n = t_{n-1} - t_n$.

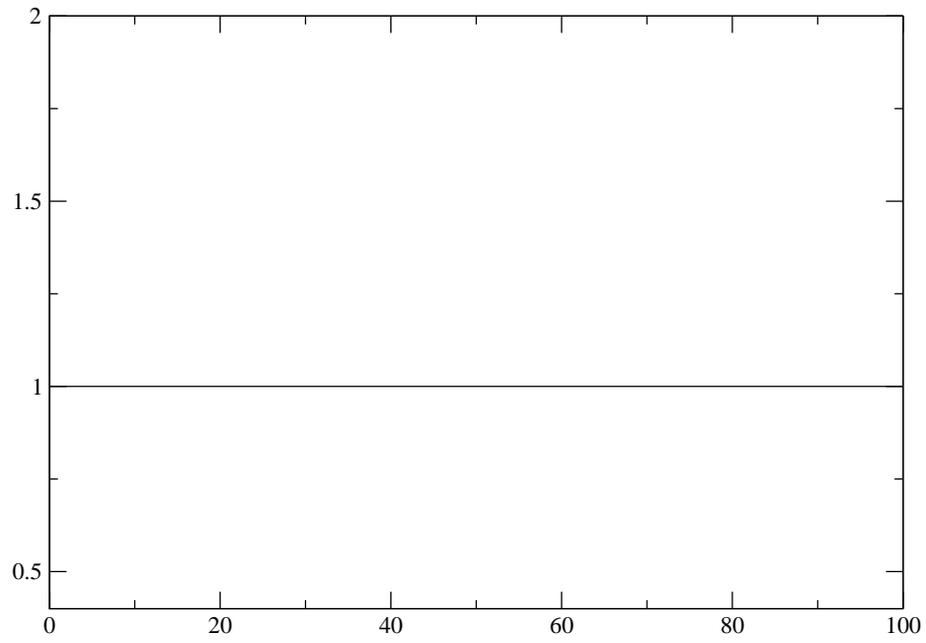
A correlação de curto alcance é caracterizada por uma típica memória temporal [18]. Um exemplo simples é dado por um processo estocástico tendo uma função de autocorrelação com decaimento exponencial Eq. (2.29). Esta forma descreve, por exemplo, a memória da velocidade $v(t)$ de uma partícula Browniana, com a autocorrelação de $v(t)$ sendo

$$R(\tau) = \sigma^2 \exp(-|\tau|/\tau_0). \quad (2.35)$$

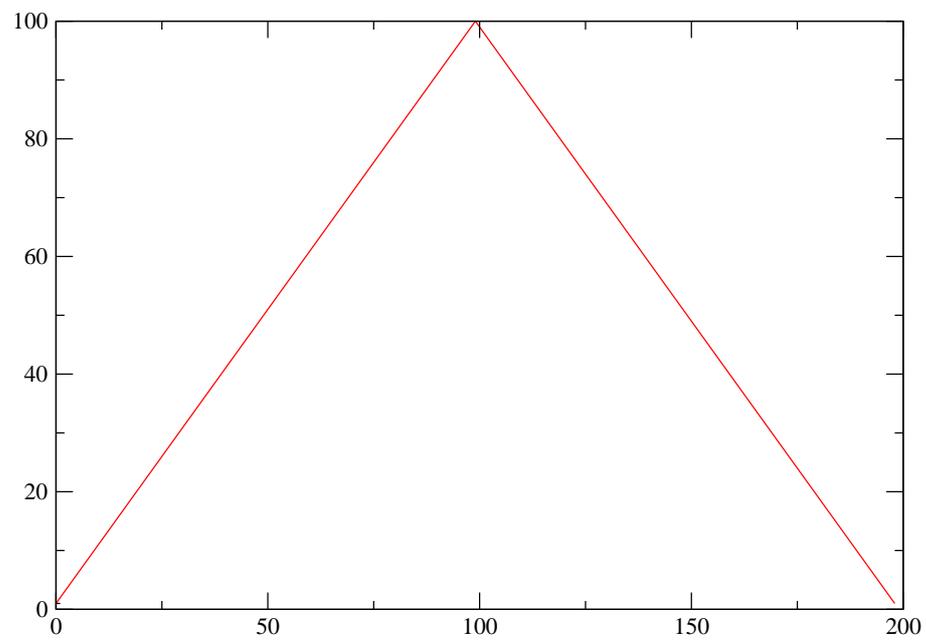
Neste caso vemos que o comprimento de correlação é finito $\langle \tau \rangle = \tau_0$.

Os processos estocásticos caracterizados por uma autocorrelação com lei de potência (ver Eq.(2.31)) podem possuir correlação de longo alcance não-trivial [18]. A função de autocorrelação com lei de potência é observada em muitos sistemas-físicos, biológicos e econômicos. Neste caso vemos que o comprimento de correlação pode divergir $\langle \tau \rangle \rightarrow \infty$.

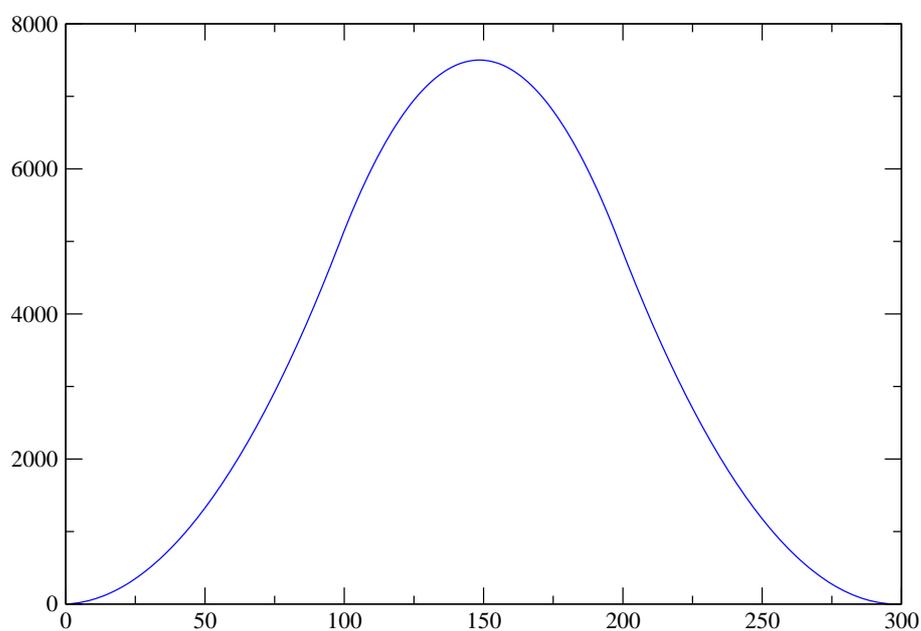
(a)



(b)



(c)



(d)

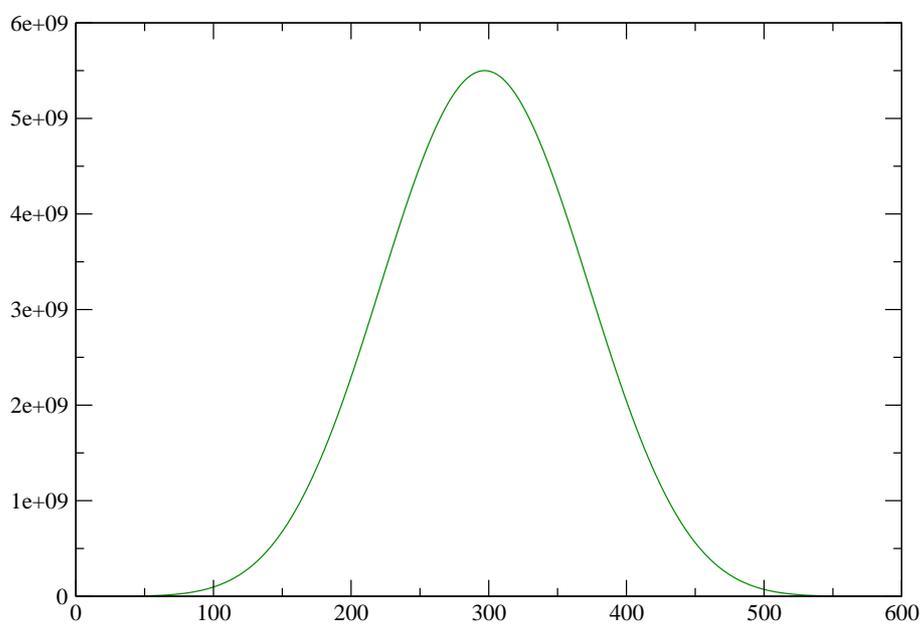
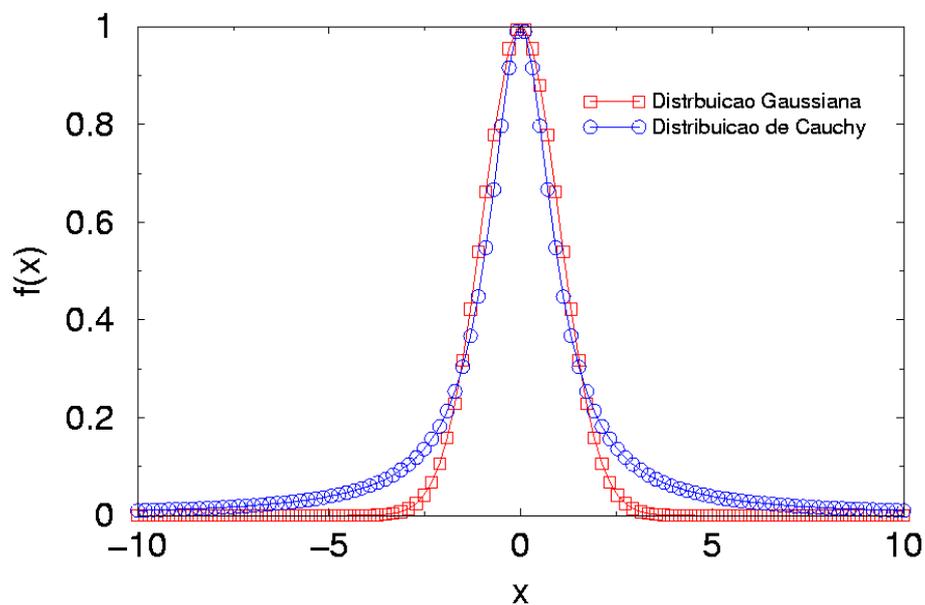


Figura 2.2: Função densidade de probabilidade para a soma de uma, duas, três e várias variáveis uniformemente distribuídas. Observamos que as distribuições convergem para uma Gaussiana, devido à convoluções repetidas.

(a)



(b)

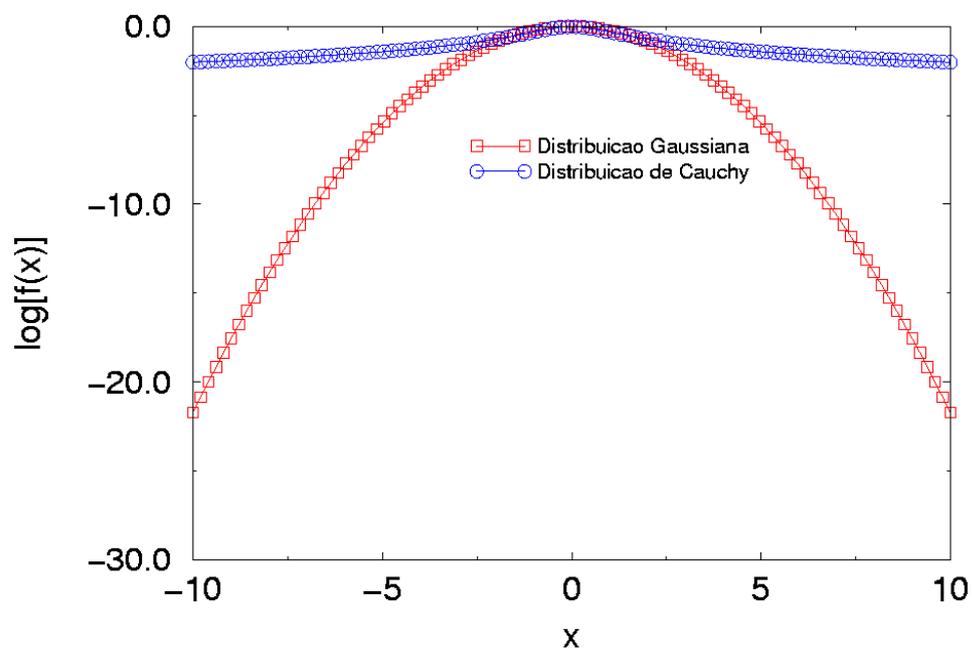


Figura 2.3: (a) Gráfico da distribuição Gaussiana e de Cauchy. (b) Gráfico da distribuição Gaussiana e de Cauchy em semi-log.

Capítulo 3

Análise de Séries Temporais em Econofísica

3.1 Definição e terminologia das séries temporais

Uma série temporal é uma coleção de observações feitas sequencialmente ao longo do tempo Fig. (3.1). As características mais importantes deste tipo de dados são as correlações e a distribuição de probabilidades. Sabemos que as correlações estão relacionadas com a dependência entre as observações vizinhas, e estamos interessados em analisar e modelar esta dependência. Enquanto que em técnicas de regressão, por exemplo, a ordem das observações é irrelevante para a análise, já em séries temporais a ordem dos dados é crucial. Vale notar também que o tempo pode ser substituído por outra variável como espaço, profundidade, etc. Como a maior parte dos procedimentos estatísticos foi desenvolvido para analisar observações independentes, o estudo de séries temporais requer o uso de técnicas específicas. Dados de séries temporais surgem em vários campos do conhecimento, tais como a Economia (preços diários de ações, taxas mensais de desemprego, produção industrial), Medicina (eletrocardiogramas, eletroencefalogramas), Epidemiologia (número men-

sal de novos casos de meningite), Meteorologia (precipitação pluviométrica, temperatura diária, velocidade do vento), etc. Algumas características são particulares a este tipo de dados, por exemplo,

- Observações correlacionadas são mais difíceis de analisar e requerem técnicas específicas.
- Precisamos levar em conta a ordem temporal das observações.
- A seleção de modelos pode ser bastante complicada, e as ferramentas podem ser de difícil interpretação.

Uma série temporal fica completamente quantificada estatisticamente quando se conhece as propriedades de correlação e a função densidade de probabilidade (PDF).

3.2 O conceito e definição de retorno financeiro

Em física o problema das unidades é considerado básico para os trabalhos experimentais e teóricos. Esforços são feitos para encontrar as melhores unidades e aperfeiçoar a precisão da sua determinação. Um ramo da física, metrologia, é exclusivamente voltada para essa questão, e instituições especializadas em metrologia existem no mundo inteiro. Em finanças, o caso é oposto. As escalas usadas são frequentemente em unidades (moedas) que flutuam no tempo e as transações ocorrem em tempos aleatórios com intensidades aleatórias. Por este motivo, grande cuidado deve ser tomado em selecionar a variável mais apropriada para estudar.

Um dos objetivos em finanças é a avaliação de rentabilidade e de riscos de uma carteira de ativos financeiros. Essas quantidades são frequentemente medidas em termos de variações de preços dos ativos. Denotemos por P_t o preço de um ativo no instante t , normalmente um dia de negócio. Suponha, primeiramente, que não haja dividendos pagos no período. A variação de preços entre os instantes $t - 1$ e t é dada por $\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$, e a variação relativa de preços ou retorno líquido simples

deste ativo entre os mesmos instantes é definido por

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}} \quad (3.1)$$

Note que $R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$. Chamamos $1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}$ de retorno bruto simples. Usualmente expressamos R_t em porcentagem, ou seja, perdas e ganhos em um dado período (um dia, um mês, um ano, etc). É também chamado simplesmente de retorno. Denotando $p_t = \log P_t$, definimos o log-retorno como

$$r_t = \log \frac{P_t}{P_{t-1}} = \log(1 + R_t) = p_t - p_{t-1}. \quad (3.2)$$

Esta definição será utilizada neste trabalho e, muitas vezes, r_t será chamado de retorno Fig.(3.2) [18]. Note que, de (3.2), obtemos $R_t = \exp(r_t) - 1$. Na prática é preferível trabalhar com retornos, que possuem processos multiplicativos e podemos tratar com mais facilidade a média e o desvio padrão, do que com preços que possuem processos aditivos. Note também que, para u pequeno, $\ln(1 + u) \approx u$, isto mostra que os retornos simples R_t e os log-retornos r_t serão em geral valores próximos. Podemos também definir retornos multiperíodos. O retorno simples de período k , entre os instantes $t-k$ e t é dado por

$$R_t[k] = \frac{P_t - P_{t-k}}{P_{t-k}}. \quad (3.3)$$

Em termos de retornos de um período podemos escrever (3.3) como

$$R_t[k] = \frac{P_t}{P_{t-k}} - 1. \quad (3.4)$$

Para facilitar comparações em horizontes diferentes é comum “anualizar” os retornos simples, considerando

$$R_t[k] \text{ anualizado} = \left[\prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{t-j}) \right]^{1/k} - 1, \quad (3.5)$$

que pode ser aproximado por $(1/k) \sum_{j=0}^{k-1} R_{t-j}$, usando uma expansão de Taylor até a primeira ordem. Por sua vez, o log-retorno de período k fica

$$r_t[k] = \log \frac{P_t}{P_{t-k}} = \sum_{j=0}^{k-1} r_{t-j}. \quad (3.6)$$

Por exemplo, um mês compreende normalmente cerca de 21 dias de transações, de modo que o log-retorno continuamente composto em um mês é dado por

$$r_t(21) = r_t + r_{t-1} + \dots + r_{t-20}, \quad (3.7)$$

para todo t . A expressão (3.6) é interessante do ponto de vista estatístico, pois para k relativamente grande a soma pode ser aproximada por uma v.a. normal, usando o teorema do limite central. Se houver pagamento de dividendos D_t no período, então os retornos ficam, respectivamente,

$$R_t = \frac{P_t + D_t}{P_{t-1}} - 1, \quad (3.8)$$

$$r_t = \log(1 + R_t) = \log(P_t + D_t) - \log P_{t-1}. \quad (3.9)$$

Vemos que r_t é uma função não linear de log-preços e log-dividendos.

3.3 Agregação de Retornos

Na Equação (3.6) temos o que se chama de agregação temporal dos retornos. O log-retorno em um intervalo multiperíodo é a soma dos log-retornos dos períodos constituintes. Podemos ter, também, uma agregação “cross-section”, para diversos ativos de uma carteira de investimentos, c . Suponha que esta contenha N instrumentos A_1, \dots, A_N , com pesos w_1, \dots, w_N , com $\sum_{i=1}^N w_i = 1$. Denotemos por R_i os retornos simples e por r_i os log-retornos desses ativos, $i = 1, \dots, N$. Se P_0 indicar o

preço inicial da carteira após um período, conseqüentemente teremos para retornos continuamente compostos,

$$\frac{P_1}{P_0} = \sum_{i=1}^N w_i \exp(r_i). \quad (3.10)$$

O log-retorno da carteira é $r_c = \log \frac{P_1}{P_0}$, logo obtemos

$$r_c = \log \sum_{i=1}^N w_i \exp(r_i), \quad (3.11)$$

enquanto que o retorno simples da carteira é

$$R_c = \frac{P_1}{P_0} - 1 = \sum_{i=1}^N w_i \exp(r_i) - 1 = \sum_{i=1}^N w_i (1 + R_i) - 1, \quad (3.12)$$

ou seja,

$$R_c = \sum_{i=1}^N w_i R_i. \quad (3.13)$$

No caso de decomposição discreta teremos

$$\frac{P_1}{P_0} \approx \sum_{i=1}^N w_i (1 + r_i), \quad (3.14)$$

de modo que o retorno simples da carteira é $R_c = (P_1 - P_0)/P_0$, ou seja,

$$R_c \approx \sum_{i=1}^N w_i (1 + r_i) - 1 \approx \sum_{i=1}^N w_i r_i. \quad (3.15)$$

Vemos, pois, de (3.13) e (3.15), que no caso de decomposição, o retorno simples é uma soma ponderada de retornos simples, e uma soma ponderada de log-retornos, no caso de decomposição discreta. De modo geral podemos ter:

(i) Agregação temporal: para $i = 1, \dots, N$,

$$R_i[k] = \prod_{i=0}^{k-1} (1 + R_{i,t-j}) - 1, \quad (3.16)$$

$$r_{i,t} = \sum_{j=0}^{k-1} r_{i,t-j}, \quad (3.17)$$

para retornos simples e log-retornos, respectivamente.

(ii) Agregação “cross-section”: para a carteira c e período t ,

$$R_{c,t} = \sum_{i=1}^N w_i R_{i,t}, \quad (3.18)$$

$$r_{c,t} = \log \left(\sum_{i=1}^N w_i \exp(r_{i,t}) \right). \quad (3.19)$$

Para agregação temporal é mais conveniente trabalhar com log-retornos, enquanto que para agregação de ativos os retornos simples são mais convenientes. Como já salientamos trabalharemos normalmente com log-retornos, e a expressão (3.19) é aproximada por

$$r_{c,t} \approx \sum_{i=1}^N w_i r_{i,t}. \quad (3.20)$$

3.4 Distribuições dos Retornos

A natureza das distribuições em mercados financeiros é um problema aberto em finança, que vem sendo estudado durante um século. Em 1900, Bachelier [3] propôs o primeiro modelo para o processo estocástico dos retornos — uma caminhada aleatória não correlacionada com variáveis aleatórias distribuídas idênticamente independentes. Este modelo é natural se considerarmos o retorno em relação a uma escala de tempo Δt , sendo este o resultado de muitos “choques” independentes, onde o retorno agregado é conduzido pelo teorema do limite central para uma distribuição Gaussiana. Contudo, estudos empíricos mostram que a distribuição de retornos tem cauda pronunciada com notável contraste com a distribuição Gaus-

siana Fig. (3.3) e (3.4). Em relação a este fato empírico, a presunção Gaussiana para a distribuição de retornos é extensamente usada em finança teórica, devido as simplificações fornecidas em cálculo analítico.

Em sua análise pionéira do preço do algodão, Mandelbrot [4] observou que além da distribuição dos retornos não ser Gaussiana, o processo de retornos mostra mais uma propriedade interessante: “lei de escala temporal” — ou seja, a distribuição de retornos para várias escolhas de Δt , com alcance de um dia ou de um mês possui forma funcional similar, motivo que causa a cauda pronunciada (ou cauda grossa), e também uma forma funcional estável para diferentes escalas de tempo. Portanto, Mandelbrot propôs que a distribuição de retornos fosse consistente com a distribuição estável de Lévy [4]. Hoje em dia sabe-se que a cauda pronunciada não é mais causada pela distribuição de retornos em si e sim pelas correlações [24, 25, 26].

3.5 Autocorrelação dos Retornos

Correlações de dois pontos podem ser estudados usando a autocorrelação Fig. (3.5). O objetivo de medir a autocorrelação é descobrir se existe persistência na relação entre os retornos da mesma série ou não.

A autocorrelação dos log-retornos é uma função que decai rapidamente e é usualmente caracterizada por uma correlação temporal muito menor do que um dia de transação na bolsa de valores. Uma avaliação precisa da correlação temporal é possível pela análise de dados de alta frequência (a cada 15 segundos), por exemplo podemos detectar uma correlação temporal realizada em poucos minutos no mercado financeiro pela análise de dados de alta frequência da variação temporal da bolsa de valores. Dessa maneira dados de alta frequência podem ser utilizados para dominar problemas associados com não-estacionariedade de flutuações de indicadores econômicos. Outro teste, eficiente na detecção de correlação de longo alcance, que foi desenvolvido por Hurst [32], é baseado na investigação da evolução temporal do desvio padrão $\sigma(t)$ da variação do preço. Em geral

$$\sigma(t) \sim t^\nu, \quad (3.21)$$

onde $\nu = 1/2$ para variações independentes dos preços. Investigações empíricas da evolução temporal do desvio padrão da variação do preço estão recentemente sendo executadas. O comportamento empírico detectado em dados do mercado financeiro são descritos pela Eq. (3.21) com valores de $\nu \approx 0.5$ numa “janela” de tempo de aproximadamente 30 minutos de transações na bolsa de valores para 100 dias de transações. O valor de ν é especificado por especulações no mercado financeiro. Os valores obtidos para ν nas bolsas de valores mostram a presença de uma fraca correlação de longo alcance (os valores de ν são suavemente maiores do que 0.5). A intensidade da correlação de longo alcance é dependente do mercado financeiro e parece ser maior para mercados financeiros menos eficientes.

Usando dados de alta frequência para um índice financeiro, foi descoberto que $\sigma(t)$ tem dois regimes. Para pequenos tempos ($t < 30$ minutos no mercado financeiro) um comportamento superdifusivo ($\nu > 0.5$) é observado, enquanto que em tempos longos o comportamento é aproximadamente difusivo ($\nu = 0.5$). No regime de pequenos tempos $\nu \approx 0.8$, este comportamento superdifusivo é provavelmente adequado ao fato que a série temporal tem uma memória de poucos minutos. No regime de tempos longos $\nu \approx 0.5$ existe uma fraca correlação de longo alcance.

3.6 Memória da Volatilidade

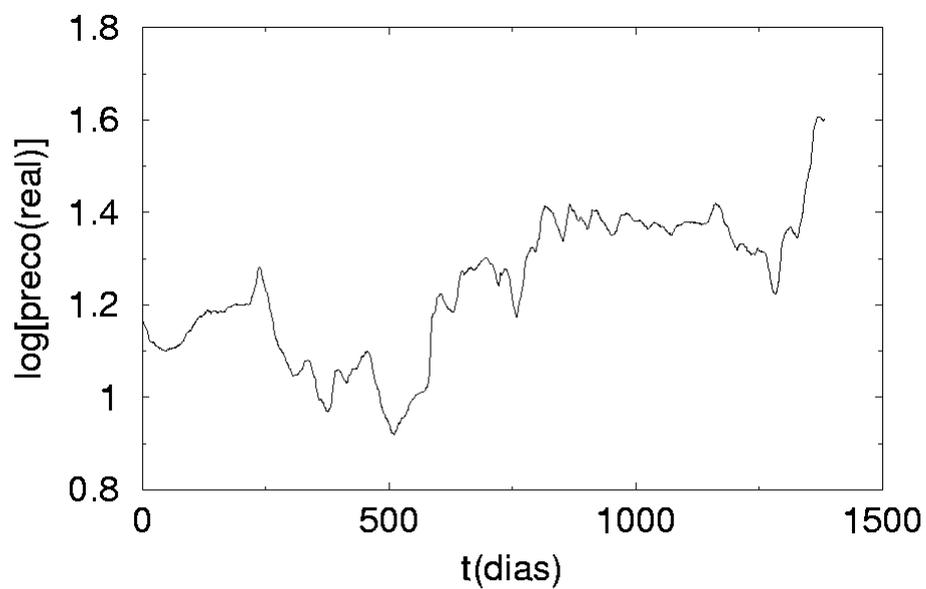
A autocorrelação da série dos retornos tem decaimento exponencial com pequenos tempos característicos. Portanto, pares de variáveis aleatórias independentes não implicam diretamente que a série dos retornos sejam variáveis aleatórias independentes. Vários estudos feitos por economistas e físicos tem mostrado que a autocorrelação da série de funções não lineares dos retornos tem uma memória temporal muito extensa. Realmente, funções não lineares como o valor absoluto (ou quadrado) sofrem correlações de longo alcance para os índices dos mercados de ações.

A presença de correlação de longo alcance no quadrado da série, ou seja, no segundo momento dos retornos sugere que possa existir alguns outros processos estocásticos fundamentais no processo de agregação dos retornos. Este processo é frequentemente chamado de volatilidade. A volatilidade é uma medida da velocidade do mercado, mercados que se movem lentamente são mercados de baixa volatilidade e os que se movem rapidamente são mercados de alta volatilidade. Frequentemente a volatilidade é estimada para calcular o desvio padrão da série dos retornos em uma apropriada “janela” de tempo [18]. Podemos usar outro caminho para estimar a volatilidade, por exemplo pela média do valor absoluto da série dos retornos. Existem várias motivações para considerar as propriedades estatísticas da volatilidade:

A volatilidade pode ser diretamente relacionada com a quantidade de informações que chegam no mercado financeiro em um dado tempo. Por exemplo, se existir uma grande quantidade de informações chegando no mercado financeiro, os acionistas irão comprar e vender ações em grande quantidade, resultando em geral, numa volatilidade maior. A partir de uma visão prática, a volatilidade é um parâmetro chave na medida do risco de um investimento financeiro.

A autocorrelação da volatilidade, estimada como uma média local do valor absoluto da série dos retornos ou pelo desvio padrão local, é bem descrita por um decaimento de lei de potência. A figura (3.6) mostra a autocorrelação para o valor absoluto para a série dos retornos do logaritmo do preço do açúcar em real. Neste caso, o decaimento de lei de potência com um expoente $\gamma \approx 0.6$ é um bom “fit” para a autocorrelação.

(a)



(b)

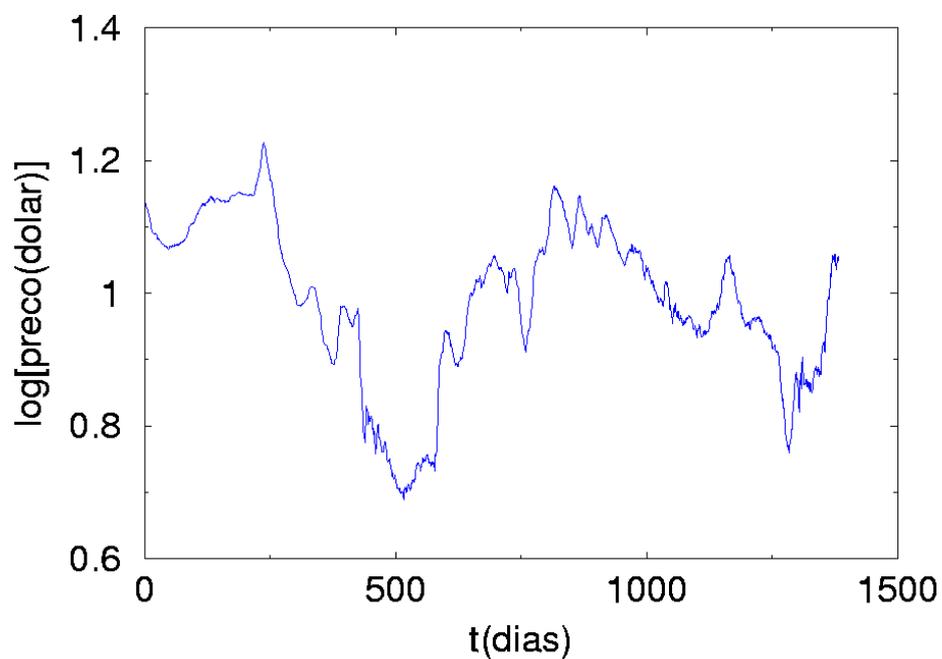
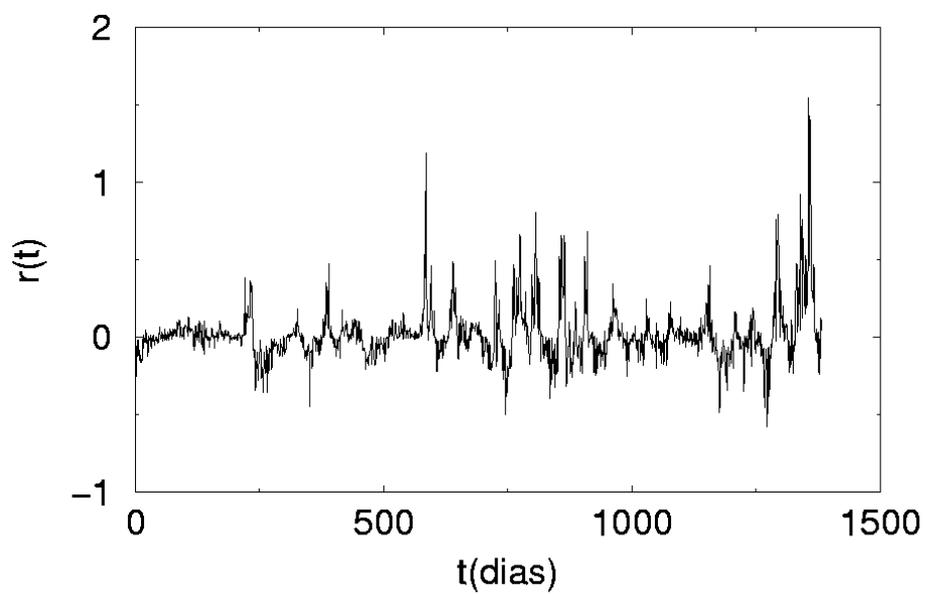


Figura 3.1: (a) Série temporal do logaritmo do preço do açúcar em real. (b) Série temporal do logaritmo do preço do açúcar em dólar.

(a)



(b)

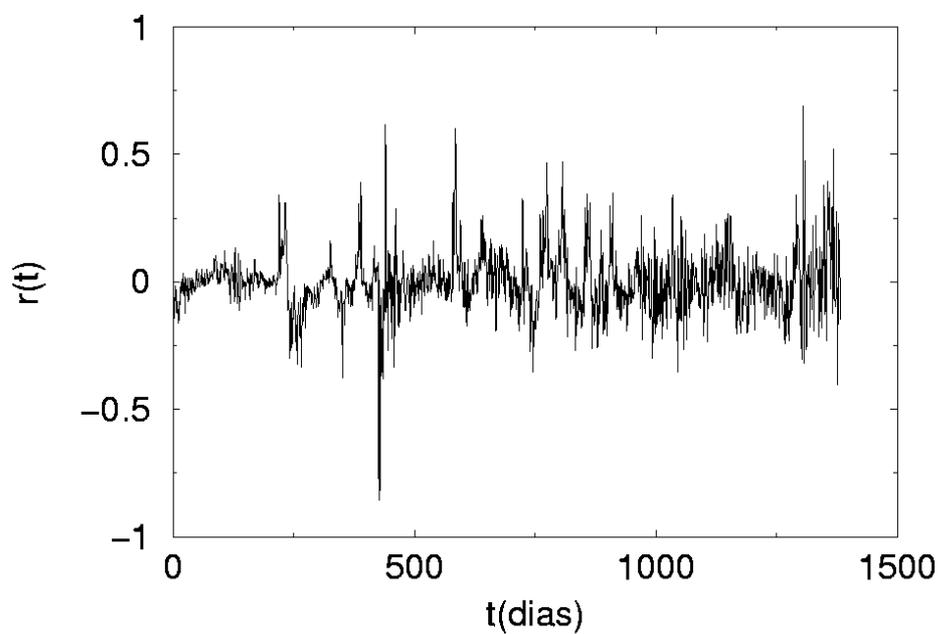
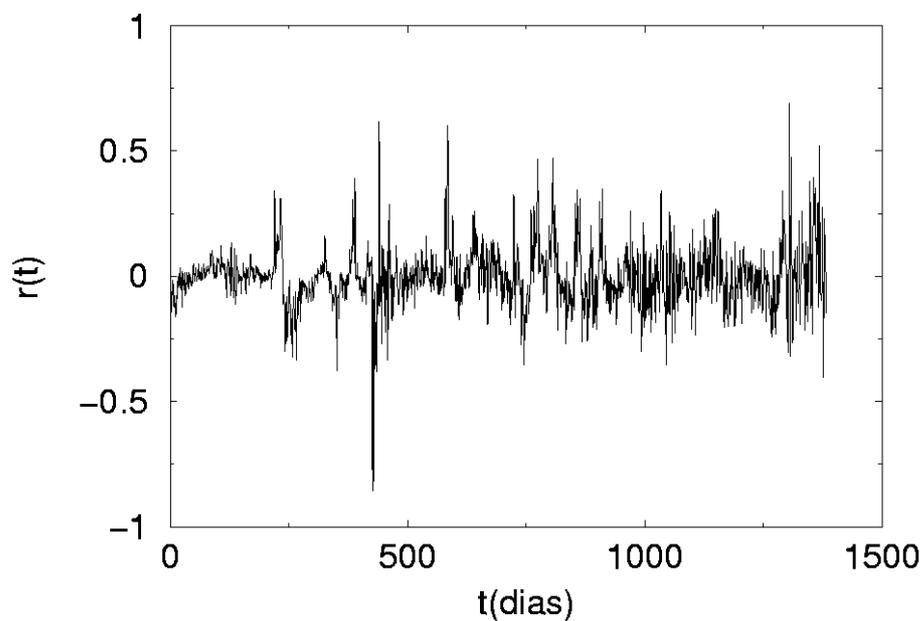


Figura 3.2: (a) Log- retornos do açúcar com preço em real. (b)Log- retornos do açúcar com preço em dólar.

(a)



(b)

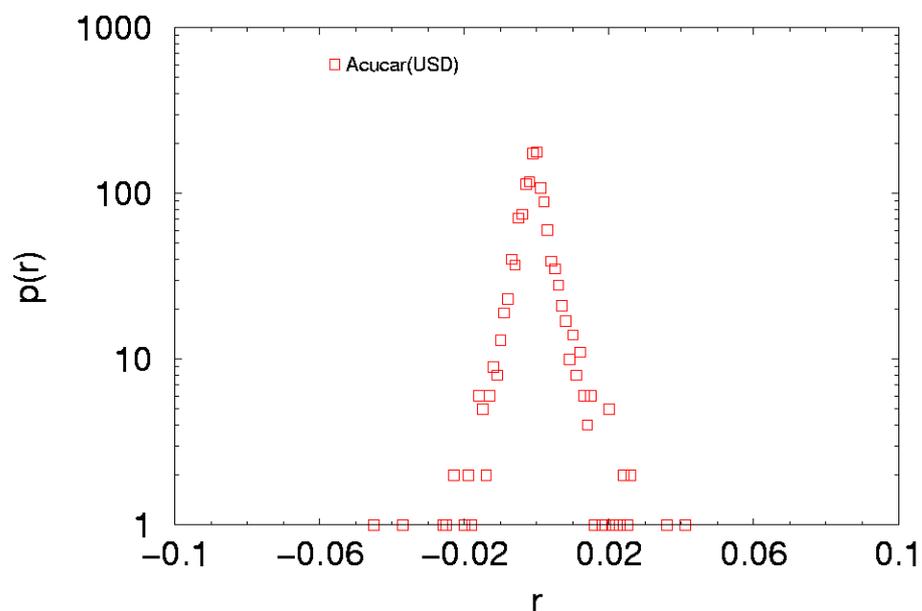
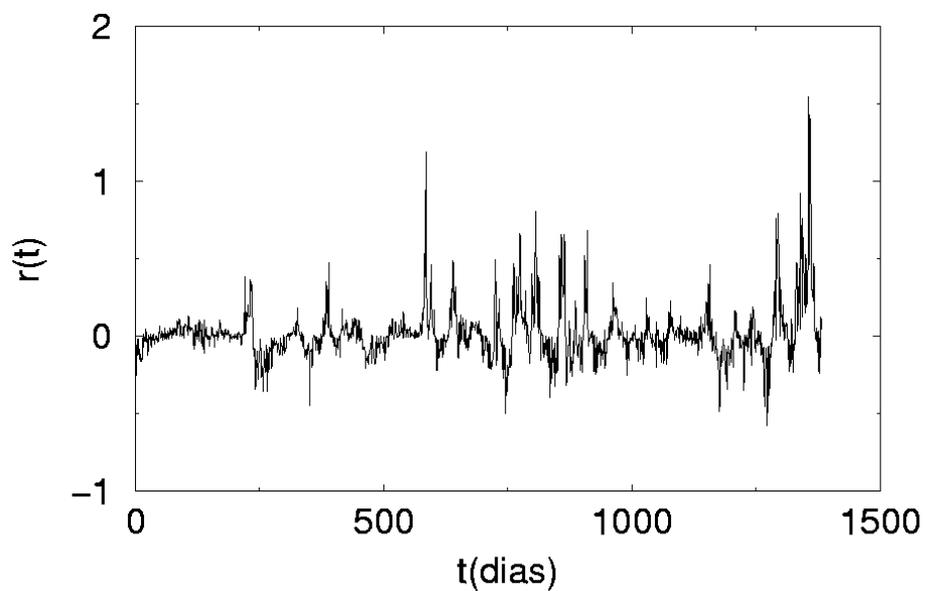


Figura 3.3: (a) Série dos retornos do açúcar com preço em dólar. (b) Histograma da série dos retornos do açúcar com preço em dólar. Observamos na figura (b) que a distribuição tem cauda grossa. O comportamento não é Gaussiano, o que levaria a parábolas e não a formas piramidais.

(a)



(b)

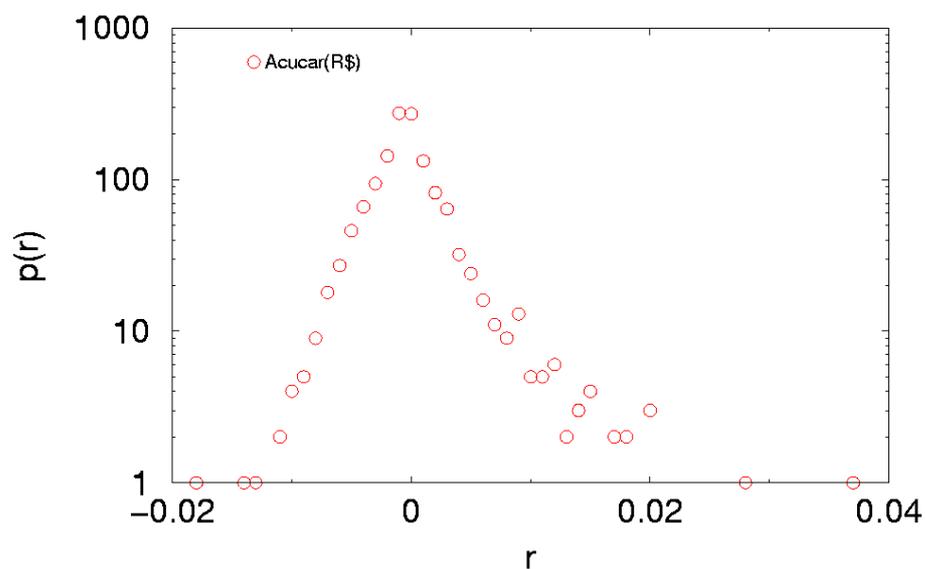


Figura 3.4: (a) Série dos retornos do açúcar com preço em real. (b) Histograma da série dos retornos do açúcar com preço em real. Observamos na figura (b) que a distribuição é não-Gaussiana.

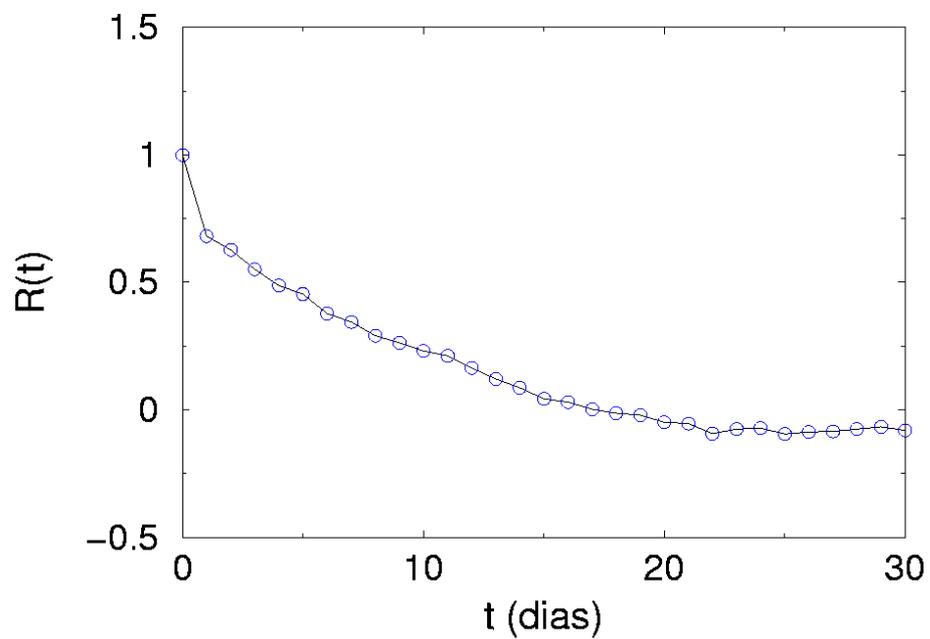


Figura 3.5: Autocorrelação da série dos retornos do logaritmo dos preços para valores diários do açúcar em real. Notamos que o decaimento parece ser exponencial ou similar. O decaimento é suficientemente lento para que seja violada a hipótese do mercado eficiente.

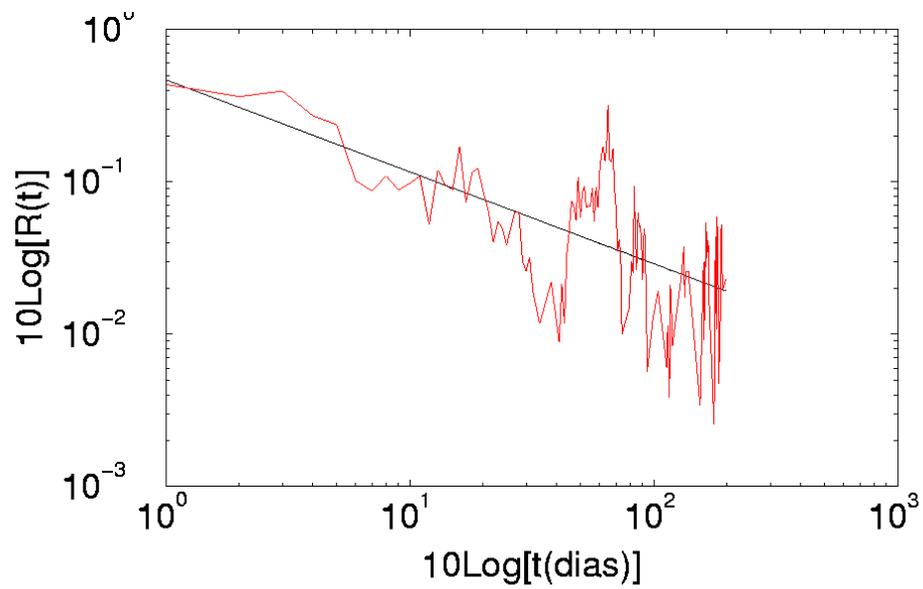


Figura 3.6: Gráfico log-log da autocorrelação da volatilidade usando o logaritmo da série temporal do açúcar com preço em real. A linha sólida é uma regressão lei de potência, na qual dá um expoente estimado da lei de potência $\gamma \approx 0.6$ que quantifica a correlação de longo alcance na função de autocorrelação.

Capítulo 4

Caudas Grossas e memória de Longo Alcance nas Bolsas de Valores

4.1 Índices das principais Bolsas de Valores

Ultimamente diversos progressos foram feitos para descrever fenômenos não-Gaussianos, incluindo os fenômenos observados em sistemas econômicos [35] e sociais [36], que são tipicamente caracterizados pela presença de distribuições de caudas grossas [37]. O comportamento do mercado financeiro tem recentemente [35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47] se tornado um foco de interesse para físicos tão bem como uma área de pesquisa ativa devido a sua dinâmica rica e complexa [48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63]. Uma questão que está em aberto diz respeito a distribuição dos retornos em mercados de ações. Sabemos muito bem que o modelo Gaussiano [64] não é bom para descrever probabilidades de grandes eventos, como por exemplo quebras nas bolsas de valores. De fato a distribuição dos retornos possui caudas grossas [35, 47, 48]. Tais caudas gros-

sas podem surgir devido à distribuição de Lévy. De acordo com o teorema do limite central generalizado, a soma de τ variáveis aleatórias independentes de Lévy (isto é, não correlacionadas) apresenta também distribuição de Lévy, tal que a persistência das caudas grossas para grandes τ surge unicamente da distribuição original de Lévy ($\tau = 1$). Além disso, quando $\tau = 1$ a distribuição é de Lévy com truncamento exponencial na cauda, esperamos ainda um certo grau de persistência das caudas grossas [65]. Por outro lado, as caudas grossas podem persistir [44] para $\tau > 1$ a partir de correlações de longo alcance em uma “variável oculta” [42] tal como a volatilidade (isto é, medida local do desvio padrão) [40]. Assim as correlações de longo alcance frequentemente podem gerar caudas grossas [62]. Sabemos que os retornos não possuem correlações de longo alcance, porém o valor absoluto dos retornos possui correlações de longo alcance [42, 43, 45, 66, 67, 68, 69]. O valor absoluto dos retornos são correlacionados com expoentes de escalas não-único [42, 45] (ou seja, multifractais). Neste trabalho nós estudamos como testar a hipótese (ver a ref. [44]) que a correlação de longo alcance da volatilidade é a origem das caudas grossas.

Mostraremos que para retornos no mercado de ações, a persistência das caudas grossas para grandes τ não pode ser explicada sem a correlação de longo alcance da volatilidade. Por isso utilizamos modelos já conhecidos de embaralhamento dos retornos no intuito de estudar a origem das caudas grossas. Primeiramente embaralhamos os retornos diários, assim destruimos todas as correlações sem mudar a distribuição $\tau = 1$ d . Para os dados embaralhados, mostraremos que a distribuição é de cauda grossa para $\tau = 1$ d mas não para $\tau > 1$ d . Assim, descobriremos que as correlações na volatilidade são mais apropriadas para explicar a origem das caudas grossas do que a distribuição de Lévy para $\tau = 1$ d , que são responsáveis pela existência das caudas grossas para grandes τ . Posteriormente, mostraremos que embaralhando só os sinais dos retornos, as caudas grossas irão persistir para $\tau > 1$ d e a distribuição não convergirá para a Gaussiana. Estes resultados provam que as correlações de longo alcance da volatilidade (em vez das correlações de curto alcance dos sinais [46]) são responsáveis pelas caudas grossas para qualquer $\tau > 1$ d . Nós

também mostraremos que as correlações de curto alcance dos sinais (1–2 d) representam um papel importante nas propriedades da distribuição de pequenas variações de preços. Vamos ainda explicar porque os dados Gaussianos são mais apropriados para pequenos retornos do que para grandes retornos.

Nosso grupo de dados consiste nos log-retornos gerados a partir de 59 índices do mercado de ações (obtidos a partir do site yahoo.com: AEX, AORD, ATG, ATX, BFX, BSESN, BVL30, BVSP, CCSI, DJA, DJI, DJT, DJU, DOT, FCHI, FTSE, HEX, HSI, IBC, IGRA, IIX, IPSA, IXIC, JKSE, KFX, KLSE, KS11, KSE, MERV, MID, MTMS, MXX, N225, NDX, NTOT, NYA, NZ40, OEX, PSE, PSI, PX50, RUA, RUI, RUT, SAX, SETI, SML, SMSI, SOOX, SPC, SSEC, SSMI, STI, TA100, TSE, TWII, VLIC, XMI, XU100).

4.2 Memória nas bolsas de valores

Os retornos $r(t)$ são definidos em termos dos preços $P(t)$ por

$$r(t) \equiv \log_{10} \frac{P(t)}{P(t-1)} . \quad (4.1)$$

Normalizamos os retornos para obter variância unitária, com isso somos capazes de comparar retornos medidos em diferentes escalas de tempo. Também definimos um retorno renormalizado r_τ :

$$r_\tau(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{t'=t-\tau+1}^t r(t') , \quad (4.2)$$

com τ medido em dias e $r_1 = r$. Os retornos diários e renormalizados representam um papel similar a aqueles representados pelas quantidades “bare” e “dressed” em teoria de campos. Notamos que para retornos Gaussianos unitários não-correlacionados (independentes), suas variâncias serão idênticas de acordo com o teorema do limite central: $\sigma(r_1) = \sigma(r_\tau) = 1$. Similarmente, se $r_1(t)$ apresenta distribuição de Lévy,

então $r_\tau(t)$ também apresentará uma distribuição de Lévy.

Mesmo para retornos Gaussianos, entretanto, a presença de correlações pode conduzir a comportamentos anômalos, tal que r_1 e r_τ podem ter distribuições não idênticas. Portanto desenvolvemos um método para “subtrair” os efeitos das correlações. Para cada uma das 59 séries temporais, geramos uma série temporal modificada, embaralhando a ordem dos retornos diários (Fig. 4.1). Este modelo que embaralha os retornos diários (ERD) terá distribuição idêntica aos dados reais para $\tau = 1$ d, mas sem possuir nenhum tipo de correlação. Portanto, para $\tau > 1$ d os dados reais e o modelo ERD irão gerar distribuições não idênticas (Fig. 4.2) a não ser que os dados sejam descorrelacionados. Consequentemente, temos agora uma maneira de testar a hipótese de que as caudas grossas em $p(\tau)$ persistem unicamente devido às correlações. Se a densidade de probabilidade $p(r_\tau)$ possui caudas grossas para os dados reais mas não para o modelo ERD, podemos concluir que as caudas grossas em $p(\tau)$ surgem devido às correlações.

Ao embaralharmos os dados, destruímos todos os tipos de correlações, dessa maneira os dados tornam-se números independentes. Especificamente, o embaralhamento destrói as correlações de longo alcance na volatilidade dos retornos tão bem como as correlações de curto alcance nos sinais dos retornos. Portanto desenvolvemos agora um método para “subtrair” só as correlações nos sinais dos retornos $r_1(t)$, enquanto preservamos as correlações no valor absoluto dos retornos (volatilidade) $|r_1(t)|$ (Fig. 4.1). Para cada uma das 59 séries temporais, geramos uma segunda série temporal modificada, embaralhando a ordem dos sinais, mas não do valor absoluto dos retornos diários. Este modelo que embaralha os sinais dos retornos (ESR) terá uma distribuição simetrizada idêntica aos dados reais e ao modelo ERD para $\tau = 1$ d, mas não necessariamente para $\tau > 1$ d.

4.3 Porque as Bolsas de Valores quebram?

Posteriormente estudamos a função densidade de probabilidade simetrizada $p(r_\tau)$ dos retornos r_τ a partir dos 59 índices dos mercados de ações e comparamos estes aos modelos ERD e ESR. Focamos nosso estudo nas regiões de caudas grossas da distribuição, utilizando uma função característica modificada definida por

$$f(\tau) = \int dr_\tau p(r_\tau) \exp[-(|r_\tau| - r_0)^2] \quad (4.3)$$

$$\simeq (1/N) \sum_t \exp[-(|r_\tau| - r_0)^2] \quad , \quad (4.4)$$

onde t é o tempo em dias. Para estudar a região de caudas grossas e manter boas estatísticas, escolhemos um valor $r_0 = 5$ que corresponde a 5 desvios padrões. Similarmente, para estudar a região central da distribuição, definimos uma segunda função

$$g(\tau) = \int dr_\tau p(r_\tau) \exp(-r_\tau^2) \simeq (1/N) \sum_t \exp(-r_\tau^2) \quad , \quad (4.5)$$

onde $N = \sum_t 1$. Na prática, calculamos estas funções diretamente dos retornos e não a partir da distribuição, obtendo assim uma melhor estatística.

Descobrimos assim que as caudas grossas quase desaparecem para $\tau > 1$ d no modelo ERD, mostrando que as correlações são necessárias para manter as caudas grossas para $\tau > 1$. Estes resultados são consistentes com aqueles relatados na ref. [44] e elimina a possibilidade que a distribuição de Lévy seja responsável pela persistência das caudas grossas. Na realidade, se isto fosse verdadeiro, as caudas grossas teriam que persistir para $\tau > 1$ d mesmo depois de embaralhar a ordem dos retornos $r_1(t)$, que contradiria nossos resultados. Consequentemente, concluímos que as caudas grossas surgem principalmente das correlações. Notamos, portanto, que no modelo ERD, as caudas grossas não desaparecem completamente e $p(r_\tau)$ nunca torna-se Gaussiana mesmo para $\tau \rightarrow 100$ d (dias úteis no mercado de ações), dessa maneira a distribuição de Lévy truncada de $r_1(t)$ pode em princípio surgir

para $\tau = 1$ d [47, 62]. Também pode surgir a distribuição sugerida na ref. [42]

Nossa descoberta mais importante é que as caudas grossas permanecem completamente intactas para o modelo ESR, mostrando que as caudas grossas podem persistir para $\tau > 1$ d, quando os dados são descorrelacionados nos sinais mas possuem correlação de longo alcance no valor absoluto. Esta descoberta prova que seja qual for a escolha da distribuição dos retornos diários $p(r_1)$, as correlações de longo alcance na volatilidade são necessárias para explicar o comportamento de $p(r_\tau)$. Uma importante consequência deste resultado é que devemos tomar muito mais cuidado ao estudar as distribuições $p(r_\tau)$ independentemente das correlações.

Nós também descobrimos que a região central da distribuição dos retornos é mais similar ao modelo ERD do que ao modelo ESR para $\tau > 1$, mostrando que nesta região os dados reais são mais parecidos a uma Gaussiana e que a correlação Markoviana dos sinais nos retornos são importantes para manter a aparência Gaussiana. Finalmente, descobrimos que o comportamento da distribuição $p(r_\tau)$ é bastante parecido para diferentes τ .

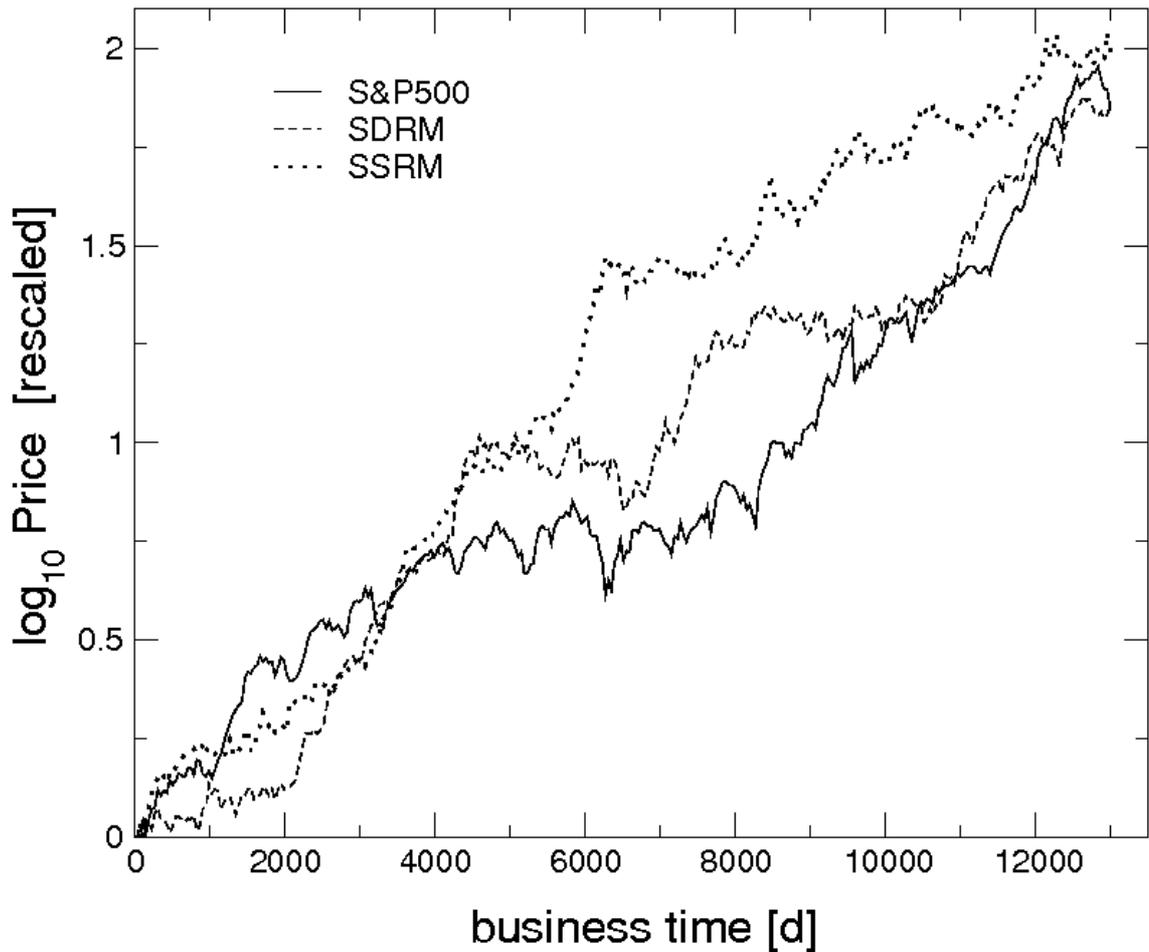


Figura 4.1: Índice S&P 500, mostrado em escala logarítmica. Também são mostrados os modelos ERD, no qual os retornos são completamente decorrelacionados mas com uma distribuição $\tau = 1$ d idêntica, e o modelo ESR, o qual possui uma distribuição do valor absoluto dos retornos diários idêntica, mas sem a correlação dos sinais [24, 25, 26].

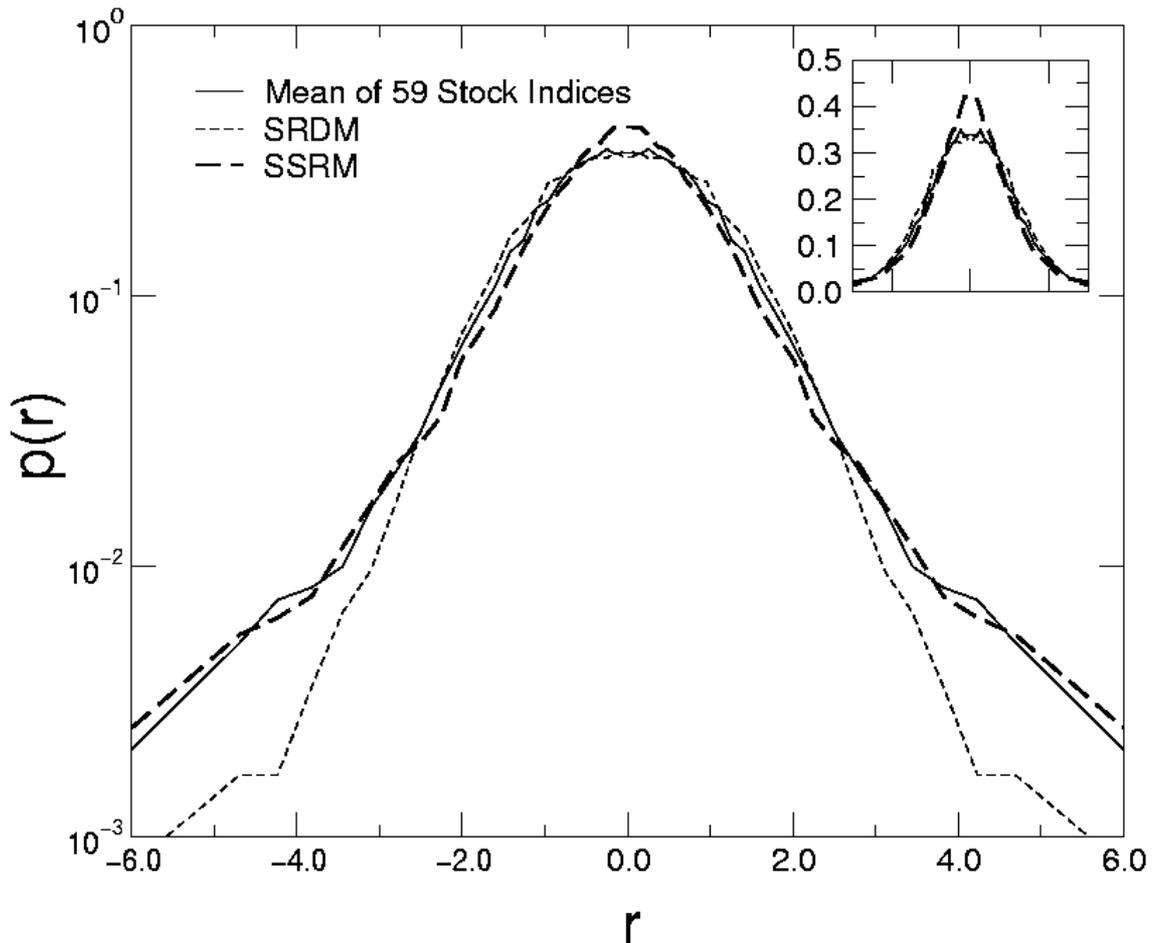


Figura 4.2: Distribuição densidade de probabilidade simetrizada $p(r)$ dos retornos r_τ medida em um período de $\tau = 10$ d para 59 índices do mercados de ações. Também mostramos os modelos ERD e ESR para $\tau = 10$ d [24, 25, 26]. Essas distribuições são típicas para $\tau > 1$ d. Nós descobrimos que existe caudas grossas no modelo ESR mas não no modelo ERD, indicando que a origem das caudas grossas é causada pela correlação de longo alcance no valor absoluto dos retornos. O gráfico menor segue uma escala linear (não semilog). A distribuição de r_1 foi normalizada para obter variância unitária. Para $\tau = 1$ d todas as três distribuições são idênticas (não mostrado).

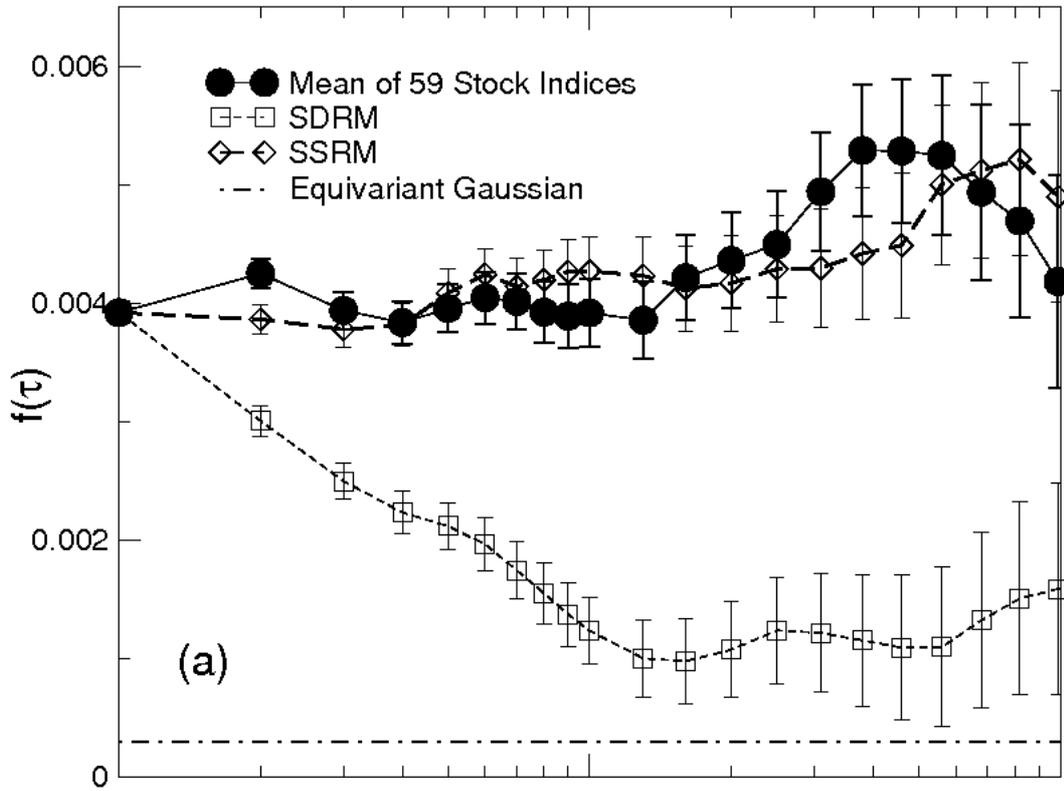


Figura 4.3: Função característica média $f(\tau)$ para os 59 índices do mercado de ações, no gráfico podemos ver também os modelos ERD e ESR. Os valores para o modelo ERD tornam-se muito pequenos com τ , indicando que as caudas são menos grossas para os dados embaralhados. Os valores para o modelo ESR, conseqüentemente, são consistentes com os dados originais, mostrando que a correlação de longo alcance da volatilidade é a causa real da distribuição de caudas grossas [24, 25, 26]. A perda da cauda no modelo ERD exclui a possibilidade da distribuição ser de Lévy estável. (b) Função característica média $g(\tau)$ para o mesmo grupo de dados. Notamos que no modelo ESR existem muito mais retornos próximos de zero para $\tau > 1$ d, conduz a um maior valor de g . Este resultado mostra que as correlações dos sinais nos dados reais representam um papel importante, neutralizando as correlações da volatilidade. Um outro resultado que pode ser visto em (a) e (b) é que uma aproximação Gaussiana é extremamente melhor para pequenos r (como podemos ver a partir de $\Delta g/g \simeq 20\%$), mas muito pior para grandes r (desde que $\Delta f/f \simeq 1000\%$), uma descoberta potencialmente importante para teoria de opções de preços.

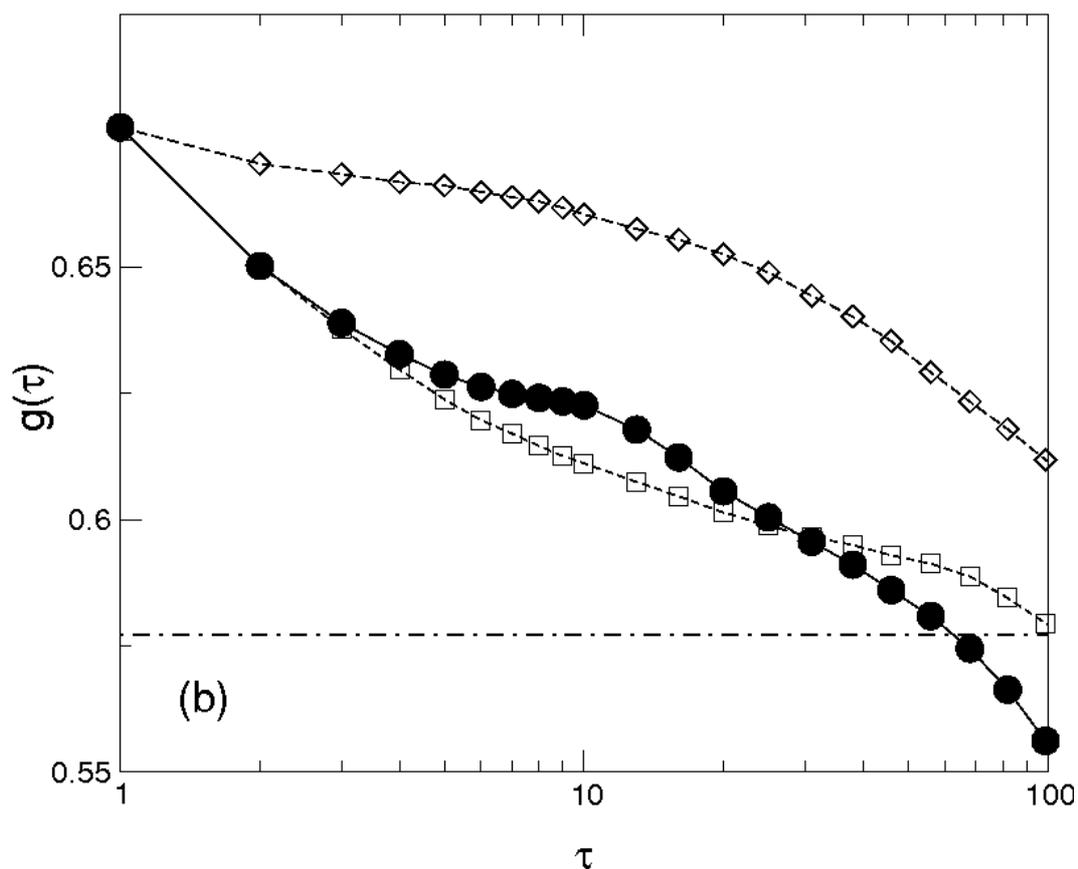


Figura 4.4: Função característica média $g(\tau)$ para o mesmo grupo de dados. Notamos que no modelo ESR existem muito mais retornos próximos de zero para $\tau > 1$ d, conduz a um maior valor de g . Este resultado mostra que as correlações dos sinais nos dados reais representam um papel importante, neutralizando as correlações da volatilidade. Um outro resultado que pode ser visto em (a) e (b) é que uma aproximação Gaussiana é extremamente melhor para pequenos r (como podemos ver a partir de $\Delta g/g \simeq 20\%$), mas muito pior para grandes r (desde que $\Delta f/f \simeq 1000\%$), uma descoberta potencialmente importante para teoria de opções de preços.

Capítulo 5

Efeitos de Memória do Mercado de Câmbio

5.1 Séries de Alta Frequência da Taxa de Câmbio e Efeito das Correlações

Dados financeiros de alta frequência são observações em variáveis financeiras tomadas diariamente ou em uma pequena escala de tempo, e frequentemente é irregularmente espaçada no tempo. Ultimamente esses grupos de dados está crescendo e ficando cada vez mais acessível aos pesquisadores, podemos citar como exemplo os dados "tick-by-tick" que serão utilizados em nossos estudos. Nosso grupo de dados consiste nos log-retornos gerados a partir da série de alta frequência DEM/USD. Os retornos $r(t)$ são definidos em termos dos preços $P(t)$ por

$$r(t) \equiv \log_{10} \frac{P(t)}{P(t-1)} . \quad (5.1)$$

com τ medido em operações no mercado de câmbio e $r_1 = r$.

Neste caso os retornos são correlacionados, o que pode ocasionar comporta-

mentos anômalos. Portanto desenvolvemos um método para “subtrair” os efeitos das correlações. Para a série de alta frequência DEM/USD, geramos uma série temporal modificada, embaralhando a ordem dos retornos. Este modelo que embaralha os retornos diários (ERD) terá distribuição idêntica aos dados reais para $\tau = 1$ operação, mas sem possuir nenhum tipo de correlação.

Ao embaralharmos os dados, destruímos todos os tipos de correlações, dessa maneira os dados tornam-se números independentes. Especificamente, o embaralhamento destrói as correlações de longo alcance na volatilidade dos retornos tão bem como as correlações de curto alcance nos sinais dos retornos. Portanto desenvolvemos agora um método para “subtrair” só as correlações nos sinais dos retornos $r_1(t)$, enquanto preservamos as correlações no valor absoluto dos retornos (volatilidade) $|r_1(t)|$. Para a série de alta frequência DEM/USD, geramos uma segunda série temporal modificada, embaralhando a ordem dos sinais, mas não do valor absoluto dos retornos.

5.2 Distribuições dos Retornos para o Mercado de Câmbio

Para $\tau > 1$ operações os dados reais e o modelo ERD irão gerar distribuições não idênticas (Fig. 5.2,5.3,5.4) a não ser que os dados sejam descorrelacionados. Consequentemente, temos agora uma maneira de testar a hipótese de que as caudas grossas em $p(\tau)$ persistem unicamente devido as correlações. Se a densidade de probabilidade $p(r_\tau)$ possui caudas grossas para os dados reais mas não para o modelo ERD, podemos concluir que as caudas grossas em $p(\tau)$ surgem devido às correlações.

Já o modelo que embaralha os sinais dos retornos (ESR) terá uma distribuição idêntica aos dados reais e ao modelo ERD para $\tau = 1$ operação (Fig. 5.1) , mas não necessariamente para $\tau > 1$ operações (Fig. 5.2,5.3,5.4).

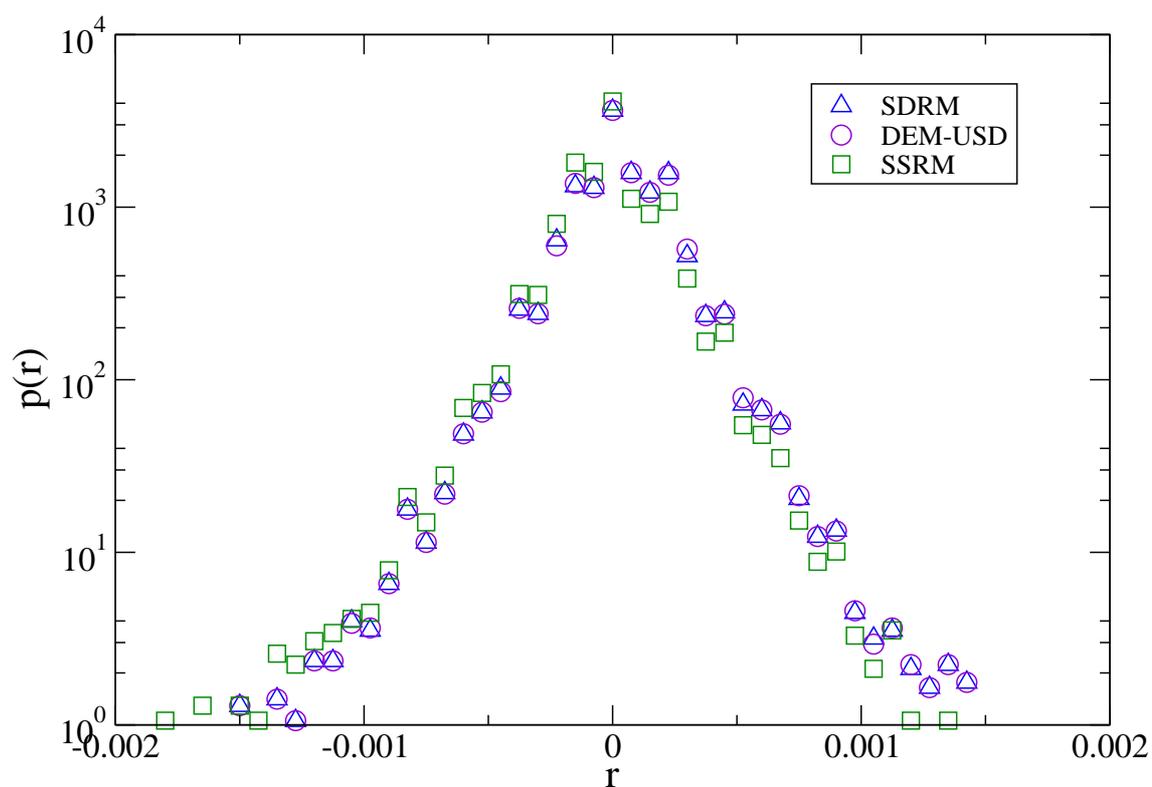


Figura 5.1: PDF $p(r)$ dos retornos r_τ mostrado para série de alta frequência DEM/USD medida em um período $\tau = 1$ operação no mercado de câmbio. Também mostramos os modelos ERD e ESR para $\tau = 1$ operação, respectivamente. Para $\tau = 1$ operação vemos que as três curvas tem um comportamento similar, como esperado.

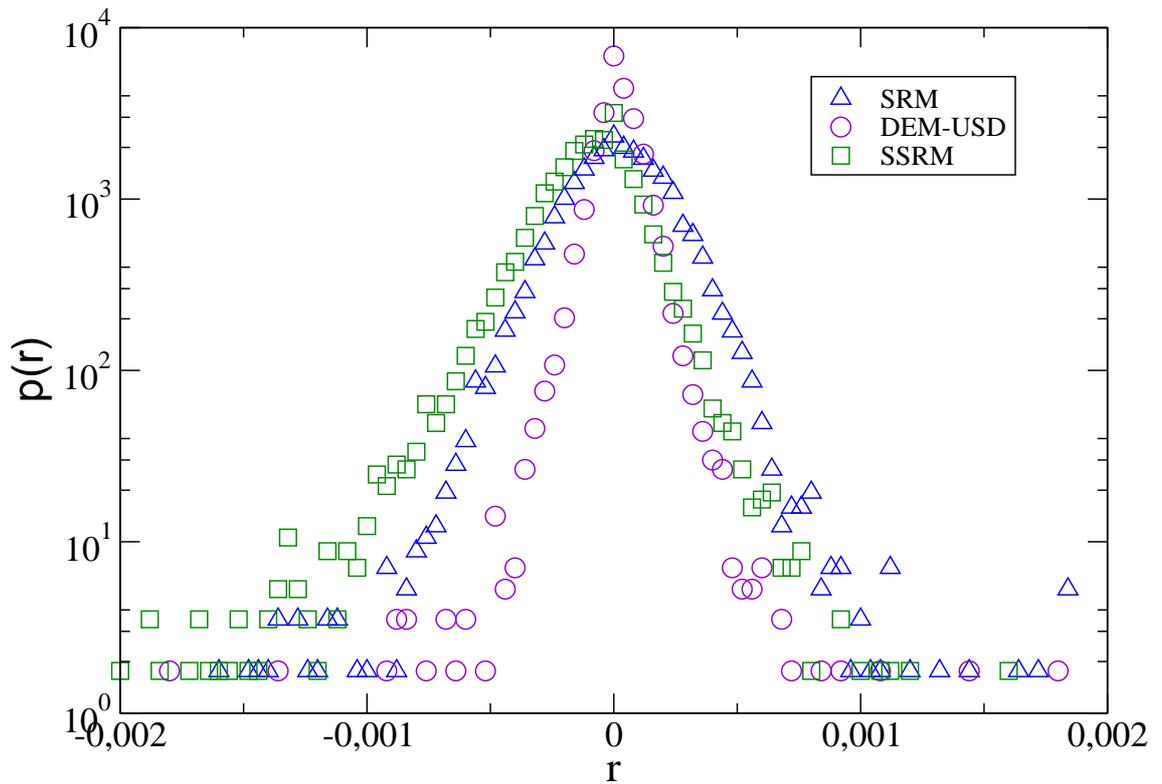


Figura 5.2: PDF $p(r)$ dos retornos r_τ mostrado para série de alta frequência DEM/USD medida em um período $\tau = 8$ operações no mercado de câmbio, respectivamente. Também mostramos os modelos ERD e ESR para $\tau = 8$ operações. Para $\tau > 1$ operação as distribuições para o modelo ERD no mercado de câmbio apresenta comportamento diferente para aquele encontrado no mercado acionário, isto ocorre devido as anti-correlações na série de retornos DEM/USD.

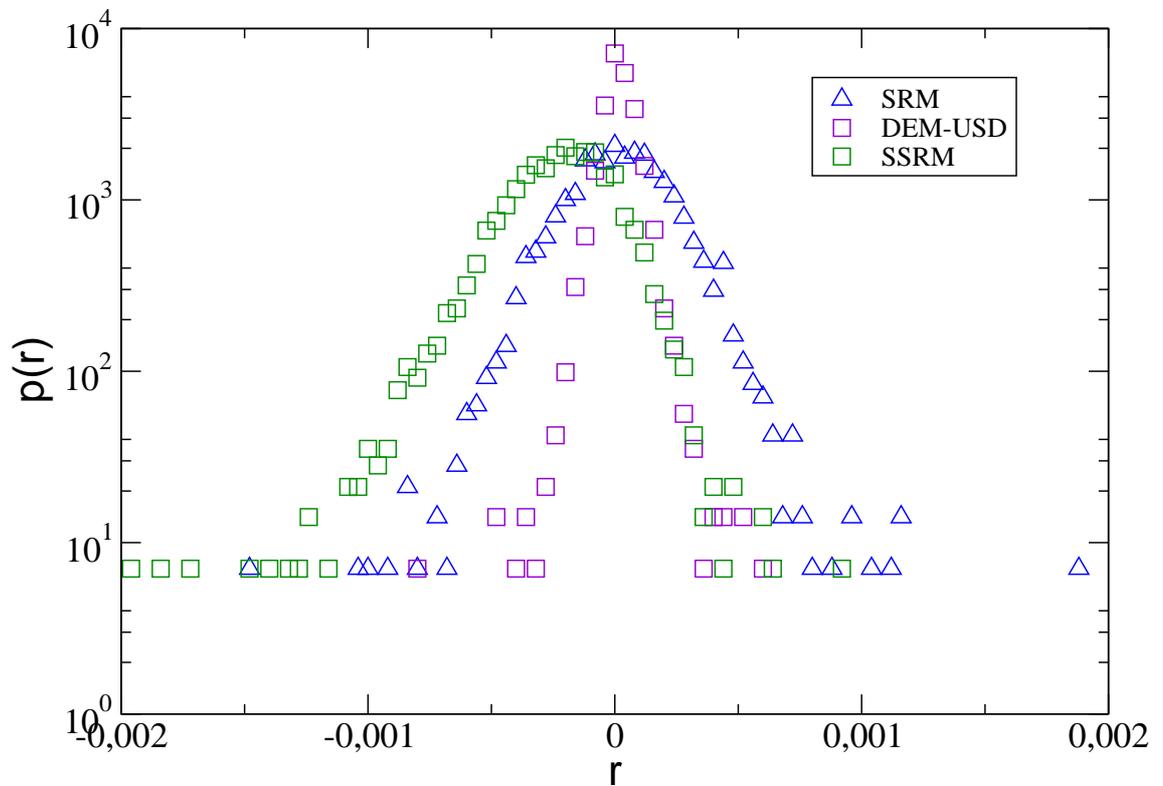


Figura 5.3: PDF $p(r)$ dos retornos r_τ mostrado para série de alta frequência DEM/USD medida em um período $\tau = 32$ operações no mercado de câmbio. Também mostramos os modelos ERD e ESR para $\tau = 32$ operações, respectivamente.

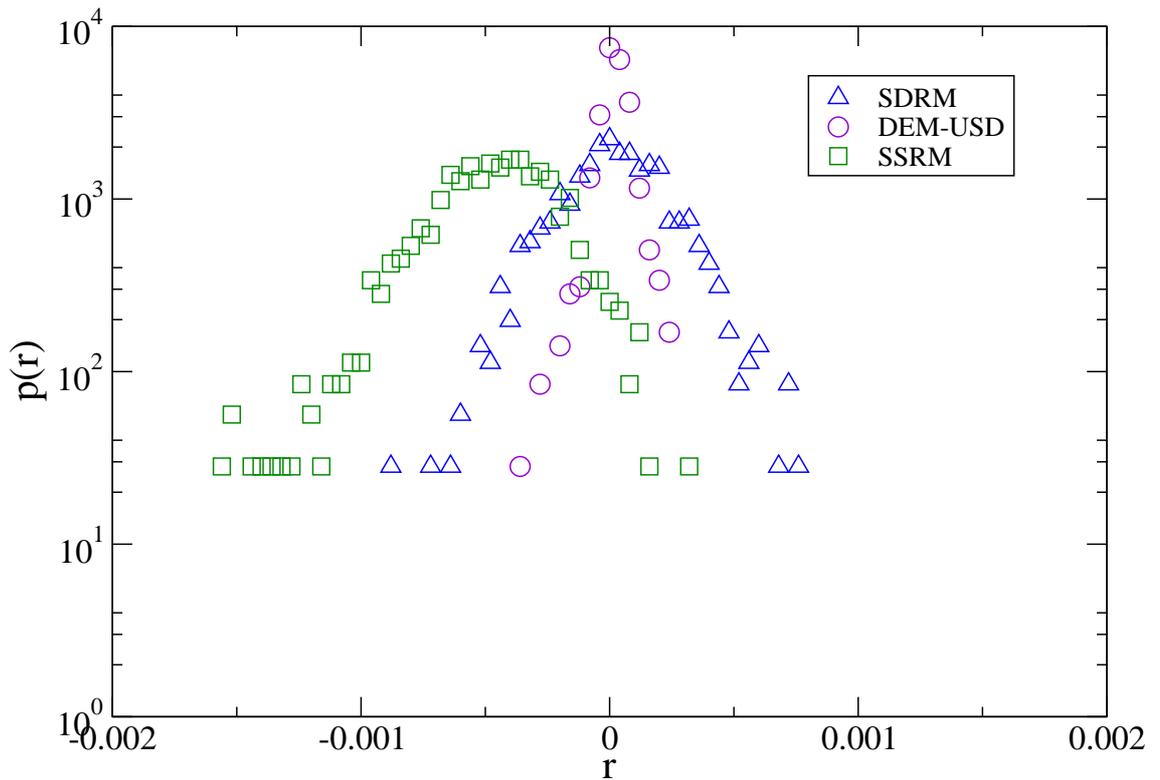


Figura 5.4: PDF $p(r)$ dos retornos r_τ mostrado para série de alta frequência DEM/USD medida em um período $\tau = 128$ operações no mercado de câmbio. Também mostramos os modelos ERD e ESR para $\tau = 128$ operações, respectivamente. Podemos ver mais claramente a diferença entre as distribuições no mercado de câmbio e no mercado acinário para o modelo ERD quando o intervalo de tempo τ vai até 128 operações .

Capítulo 6

Conclusão

6.1 Conclusão e Discussão

Os novos resultados relatados aqui são de grande interesse e cientificamente importantes devido a presença das correlações de longo alcance e das distribuições de caudas grossas em diversos fenômenos físicos, químicos e biológicos. Além disso, os preços da maioria dos derivativos financeiros dependem da distribuição dos retornos. A existência da correlação de longo alcance na volatilidade e a distribuição de caudas grossas em séries temporais financeiras já são conhecidas por algum tempo. O que não foi completamente entendido é a origem das caudas grossas. Notamos que as correlações com decaimento exponencial (isto é, não sendo lei de potência) não podem produzir caudas grossas em grandes intervalos. Um estudo sistemático do índice S&P 500 *et al.* [44] encontrou que na escala da distribuição surgem dependências temporais. Aqui, mostramos que embaralhando só os sinais, mas não o valor absoluto, dos retornos as caudas grossas persistem, provando que as caudas grossas surgem das correlações da volatilidade e não de qualquer outro tipo de dependência temporal.

Comentamos sobre os resultados notando que os dados reais são mais pare-

cidos ao modelo ERD na região central da curva. Já o modelo ESR é mais parecido na região das caudas grossas. Fig. 4.4 mostra que a ausência de correlações na volatilidade causa um colapso das caudas grossas no modelo ERD, mas que a ausência de correlações nos sinais causa grande desvio da região central da curva no modelo ESR, para $\tau > 1$. Os dados reais aparecem qualitativamente em algum lugar entre os modelos ERD e ESR. Isto implica que o erro de desprezar a correlação dos sinais pode de algum modo compensar o erro de ignorar a correlação de longo alcance da volatilidade para uma pequena variação de preços. Para $\tau > 1$ d tiramos como um resultado interessante que a região central é enganosamente bem descrita por uma Gaussiana. Os dois erros cancelam-se um ao outro, por este motivo a teoria Gaussiana para retornos de ações foi um sucesso. (A afirmação de que a distribuição dos retornos era Gaussiana, foi entretanto a base do prêmio Nobel de Economia em 1997.) O principal erro da teoria Gaussiana é que ela não pode explicar eventos raros ou grandes eventos, tal como a grande quebra de 1987. Existem outros fenômenos conhecidos na qual o cancelamento de dois erros conduz a bons modelos, um exemplo clássico sendo a teoria de polímeros de Flory [70], no qual o erro em estimar as energias repulsivas e atrativas cancelam um ao outro, tal que o modelo torna-se melhor do que esperado.

Em resumo, nossos resultados indicam que as distribuições de caudas grossas dos retornos surgem principalmente da correlação da volatilidade. Mais geralmente, mostramos que as distribuições de caudas grossas podem ter origem a partir da correlação de longo alcance no valor absoluto de qualquer série temporal. Notamos que as técnicas de embaralhamento que revisamos aqui são gerais e podem ser aplicadas ao estudo de séries temporais geradas por outros sistemas complexos similares.

Referências Bibliográficas

- [1] Stanley, H.E., L.A.N. Amaral, S.V. Buldrev, A.L. Goldberg, S. Havlin, H. Leschhorn, P. Maass, H. Makse, C.-K. Peng, M.A. Salinger, M.H.R. Stanley and G.M. Viswanathan, *Scaling and Universality in Animate and Inanimate Systems*, Physica. A **231**, 20 (1996).
- [2] Stanley, H.E., L.A.N. Amaral, S.V. Buldrev, A.L. Goldberg, S. Havlin, H. Leschhorn, P. Maass, C.-K. Peng, M.A. Salinger, M.H.R. Stanley and G.M. Viswanathan, *Fractals* **4**, 427 (1996). 673 (1979).
- [3] Bachelier, L., *Théorie de la spéculation* [Ph.D thesis in mathematics], *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure* **III-17**, 21 (1900).
- [4] Mandelbrot, B.B., *The Variation of Certain Speculative Prices*, J. Business **36**, 394 (1963).
- [5] Gnedenko, B.V., Kolmogorov A.N. *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variable* (Addison-Wesley, Cambridge MA, 1954).
- [6] Papoulis, A., *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, New York (1965).
- [7] Bendat, J.S., Piersol A.G., *Analysis and Measurement Procedures*, (Wiley-Interscience, New York, 1986).
- [8] Galton, F., *The geometric mean in vital and social statistics*, Royal Society of London **29**, 365 (1879).

-
- [9] Gauss, C. F., *Bestimmung der genauigkeit der beobachtungen*, *Zeitschrift für Astronomie*, Berlin, **1**, 185 (1816).
- [10] Gibrat, R., *Les inégalites économiques*, Libraire du Recueil Sirey, Paris (1931).
- [11] Lévy, P., *Théorie de L'addition des Variables Aléatoires*, Gauthier-Villars, Paris (1937).
- [12] Gupta, H. M., Campanha J. R., *The gradually truncated Lévy flight: stochastic process for complex systems*, *Physica A* **268**, 231 (1999).
- [13] Gupta, H. M., Campanha J. R., *Tsallis statistics and gradually truncated Lévy flight distribution of an economical index*, *Physica A* **275**, 531 (2000).
- [14] Gupta, H.M., Campanha J.R., *Gradually truncated log-normal distribution - size distribution of firms*, arXiv.org e-Print archive **1**, 30 nov. 2001. Disponível em:<http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0111579>.
- [15] Feller, W., *An introduction to probability theory and its applications*, Wiley, New York (1971).
- [16] Pareto, V., *Cours d'économie politique*, Rouge, Lausanne (1896).
- [17] Gnedenko, B.V., *On the Theory of Domains of Attravtion of Stable Laws*, *Uchenye Zapiski Moskov. Gos. Univ. Matematkia* **45**, 61 (1940).
- [18] Mantegna, R., Stanley H.E., *An introduction to Econophysics, correlations and complexity in finance*, Cambridge University Press, Gambridge (2000).
- [19] Peng, C.-K., S.V.Buldrev, S. Havlin, M. Simons, Stanley H.E. and A.L. Goldberg, *Phys. Rev. E* **49**, 1691 (1994).
- [20] Mc-Allister, D., *The law of the geometrical mean*, Royal Society of London **29**, 369 (1879).

-
- [21] Kapteyn, J. C., Van Uen, M. J., *Skew frequency curves in biology and statistics*, Astronomical Laboratory at Groningen, Groningen (1916).
- [22] Gutenberg, B., Richter, C. F. *Seismicity the earth* Princeton, Princeton University Press (1949).
- [23] Tsallis, C , *Nonextensive statistics: theoretical, experimental and computational evidences and connections*, Brazilian Journal of Physics **29**, 1 (1999).
- [24] Viswanathan, G.M., Fulco U. L. , Lyra M. L., Serva M., *The origin of fat tailed distributions in financial time series*, Physica A **329**, 273 (2003).
- [25] Nascimento H. B. Jr., Fulco U. L. , Lyra M. L., Serva M., Viswanathan, G. M., *Porque as bolsas de valores quebram: a origem das caudas grossas nas distribuições de retornos* RBEF **29**, 341 (2007).
- [26] Nascimento C. M., Nascimento H. B. Jr., Jennings H. D., Serva M., Gleria Iram, Viswanathan, G. M., *Multifractality and heteroscedastic dynamics: An application to time series analysis* EPL **81** (2008).
- [27] Bliss, C. I., *The method of probits*, Science **79**, 38 (2002).
- [28] Figueiredo, A., Gleria I., Matsushita R., Silva S., *Lévy flights, autocorrelation, and slow convergence*, Physica A **337**, 369 (2004).
- [29] Faustino C. L., Da Silva L. R., Da Luz M. G. E., Raposo E. P., Viswanathan, G. M., *Search dynamics at the edge of extinction: Anomalous diffusion as a critical survival state* EPL **77** (2007).
- [30] Fama, E. F., *Efficient Capital Markets: A review of Theory and Empirical Work*, J. Finance **25**, 383 (1970)
- [31] Pasquini, M. and M. Serva, *Multiscale Behavior of Volatility Autocorrelations in a Financial Market*, Economics Letters **65**, 275 (1999).

-
- [32] Hurst, H. E., *Long-term storage capacity of reservoirs*, Transactions of the American Society of Civil Engineers, **116**, 770 (1951).
- [33] Samuelson, Paul A., *Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly*, Industrial Management Review **6**, 9 (1965).
- [34] Mandelbrot, B.B., *Forecasts of Future Prices, Unbiased Markets, and Martingale Models*, Journal of Business **39**, 242 (1966).
- [35] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [36] E. W. Montroll and W. W. Badger, *Introduction to Quantitative Aspects of Social Phenomena* (Gordon and Breach, New York, 1974).
- [37] M. F. Shlesinger, G. Zaslavsky and U. Frisch, eds., *Lévy Flights and Related Topics in Physics* (Springer, Berlin, 1995).
- [38] J.-P. Bouchaud, A. Matacz and M. Potters, Phys. Rev. Lett. **87**, 228701 (2001).
- [39] V. M. Eguiluz and M. G. Zimmermann, Phys. Rev. Lett. **85**, 5659 (2000).
- [40] B. Podobnik, P. Ch. Ivanov, Y. Lee, A. Chessa and H. E. Stanley, Europhys. Lett. **50(6)**, 711 (2000).
- [41] B. Podobnik, P. Ch. Ivanov, Y. Lee and H. E. Stanley, Europhys. Lett. **52**, 491 (2000).
- [42] M. Pasquini and M. Serva, Euro. Phys. J. B **16**, 195 (2000).
- [43] Y. Liu, P. Gopikrishnan, P. Cizeau, M. Meyer, C.-K. Peng and H. E. Stanley, Phys. Rev. E. **60**, 1390 (1999).

-
- [44] P. Gopikrishnan, V. Plerou, L. A. N. Amaral, M. Meyer, and H. E. Stanley, Phys. Rev. E **60**, 5305 (1999).
- [45] M. Pasquini and M. Serva, Econ. Lett., **65**, 275 (1999).
- [46] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, Nature **383**, 587 (1996).
- [47] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, Nature **376**, 46 (1995).
- [48] B. B. Mandelbrot, J. Bus. **36**, 394 (1963).
- [49] L. P. Kadanoff, Simulation **16**, 261 (1971).
- [50] R. N. Mantegna, Physica A **179**, 232 (1991).
- [51] W. Li, Int. J. Bifurcation and Chaos **1**, 583 (1991).
- [52] H. Takayasu, H. Miura, T. Hirabayashi and K. Hamada, Physica A **184**, 127 (1992).
- [53] P. Bak, K. Chen, J. A. Scheinkman and M Woodford, Ricerche Economiche **47**, 3 (1993).
- [54] J.-P. Bouchaud and D. Sornette, J. Phys. I France **4**, 863 (1994).
- [55] S. Ghashghaie, W. Breymann, J. Peinke, P. Talkner and Y. Dodge, Nature **381**, 767 (1996).
- [56] M. Mevy and S. Solomon, Int. J. Mod. Phys. C **7**, 595 (1996).
- [57] S. Gallucio, G. Caldarelli, M. Marsili and Y.-C. Zhang, Physica A **245**, 423 (1997).
- [58] P. Bak, M. Paczuski and M. Shubik, Physica A **246**, 430 (1997).
- [59] N. Vandewalle and M. Ausloos, Physica A **246**, 454 (1997).

-
- [60] Y. Liu, P. Cizeau, M. Meyer, C.-K. Peng and H. E. Stanley, *Physica A* **245**, 437 (1997).
- [61] P. Cizeau, Y. Liu, M. Meyer, C.-K. Peng and H. E. Stanley, *Physica A* **245**, 441 (1997).
- [62] B. Podobnik, K. Matia, A. Chessa, P. Ch. Ivanov, Y. Lee and H. E. Stanley, *Physica A* **300**, 300 (2001).
- [63] J. E. Ingersoll, *Theory of Financial Decision Making* (Rowman & Littlefield, Savage, 1987).
- [64] L. Bachelier, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **17**, 21 (1900).
- [65] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2946 (1994).
- [66] M. Greene and B. Fielitz, *J. Financial Econ.* **4**, 339 (1977).
- [67] V. Akgiray, *J. Bus.* **62**, 55 (1989).
- [68] A. W. Lo, *Econometrica* **59**, 1279 (1991).
- [69] N. Crato and P. Rothman, *Econ. Lett.* **45**, 287 (1994).
- [70] P. J. Flory, *Principles of Polymer Chemistry* (Cornell University Press, New York, 1953).