

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA

JOÃO PAULO DE AMARAL

GERAÇÃO EXPERIMENTAL DE SPECKLES COM  
ESTATÍSTICA DA INTENSIDADE WEIBULL

Maceió

2016

JOÃO PAULO DE AMARAL

GERAÇÃO EXPERIMENTAL DE SPECKLES COM  
ESTATÍSTICA DA INTENSIDADE WEIBULL

Dissertação apresentado no Instituto de Física  
da Universidade Federal de Alagoas, como parte  
parte dos requisitos para a obtenção do título de  
Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Alcenísio José  
de Jesus Silva

Maceió

2016

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

A485g Amaral, João Paulo de.  
Geração experimental de speckles com estatística de intensidade Weibull /  
João Paulo de Amaral. . – 2016.  
60 f. : il., grafs.

Orientador: Alcenísio José de Jesus Silva.

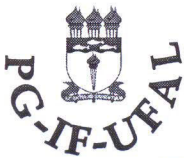
Coorientador: Eduardo Jorge da Silva Fonseca.

Dissertação (mestrado em Física da Matéria Condensada) – Universidade  
Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2016.

Bibliografia: f. 57-60.

1. Speckle Rayleigh. 2. Speckle não-Rayleigh. 3. Superfície rugosa.  
4. Espalhamento de partículas. I. Título.

CDU: 535.3



**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE**  
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

***“Geração experimental de Speckles com estatística de  
intensidade Weibull”***

**por**

**João Paulo de Amaral**

A Banca Examinadora composta pelos professores Alcenísio José de Jesus Silva (orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Solange Bessa Cavalcanti, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas e Willamys Cristiano Soares Silva, do Campus Arapiraca da Universidade Federal de Alagoas consideram o candidato aprovado com grau “A”.

Maceió, 26 de fevereiro de 2016

  
Prof. Dr. Alcenísio José de Jesus Silva

  
Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Solange Bessa Cavalcanti

  
Prof. Dr. Willamys Cristiano Soares Silva

”Os grandes feitos são conseguidos não  
pela força, mas pela perseverança.”

Samuel Johnson

## AGRADECIMENTOS

- Primeiramente aos "meus pais" por toda a base familiar que me proporcionaram;
- À minha filha amada, Yara Rayanne, a quem dedico todo meu esforço e perseverança durante estes anos.
- Ao professor Alcenísio pelo apoio e toda ajuda fornecida;
- Aos meus amigos, em especial ao Cleberson Alves e Job Saraiva, pelos "ensinamentos".

# RESUMO

Atualmente há muitas pesquisas que buscam produzir padrões de speckles com estatística que se desvie da estatística Rayleigh, os chamados speckles não-Rayleigh. Neste trabalho, usamos um holograma de fase gerado por computador para codificar a fase e amplitude de uma potência do campo de speckle Rayleigh. Este método nos permite gerar padrões de speckles com aumento ou diminuição do contraste sem qualquer processo de otimização. Exploramos os speckles não-Rayleigh com o intuito de desvendar, teórica e experimentalmente, suas propriedades estatísticas de primeira ordem. A obtenção desses speckles pode encontrar aplicações em sínteses de potenciais ópticos desordenados de átomos frios e partículas coloidais, em imagem de iluminação por speckles, e em interferência de ondas estudada através de correlação de intensidade espacial. Frisando que nossos resultados são embasados por um modelo teórico baseado em uma transformação da amplitude do campo de speckle Rayleigh através de uma exponenciação mantendo a fase do campo intocada.

**Palavras-chave:** Speckle Rayleigh, Speckle não-Rayleigh, Superfície rugosa, Estatística de speckles, Speckle ópticos, Espalhamento, Óptica estatística.

# ABSTRACT

Currently there are many studies that seek to produce patterns of speckles with statistics that deviates from the Rayleigh statistics, the so-called speckles non-Rayleigh. In this job we use a phase only computer-generated hologram to code both phase and amplitude of a power of Rayleigh speckles. This method allows us to generate speckles with enhanced and reduced contrast without any optimization process. We explore non-Rayleigh speckles and unveil, theoretically and experimentally, its first order statistical properties. These speckles may find applications in syntheses of disordered optical potentials for cold atoms and colloidal particles, in speckle illumination imaging, and in wave interference studied through spatial intensity correlation. Stressing that our results are grounded by a theoretical model based on a transformation of the amplitude of Rayleigh speckle field an exponenciação, maintaining the phase of the field untouched.

**Keywords:** Rayleigh speckle, Non-Rayleigh speckle, rough surfaces, Speckle estatistic, Optics speckle, Scattering, estatistic optical.



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>ESTATÍSTICA DE <i>SPECKLE</i></b>	<b>8</b>
2.1	Introdução . . . . .	8
2.2	Caminhada Aleatória e Fenômeno de <i>Speckle</i> . . . . .	8
2.3	Estatística da Amplitude do Campo Complexo . . . . .	10
2.3.1	Primeiro e Segundo Momento das Partes Real e Imaginária do Fasor Resultante . . . . .	11
2.3.2	Funções Densidade de Probabilidade . . . . .	14
2.4	Soma de Fasores Aleatórios com um Fasor Constante . . . . .	17
2.5	Estatística de Primeira Ordem da Intensidade . . . . .	22
2.6	Holografia . . . . .	25
2.7	Conclusão . . . . .	33
<b>3</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>35</b>
3.1	Introdução . . . . .	35
3.2	Modelo Teórico . . . . .	35
3.3	Experimento . . . . .	39

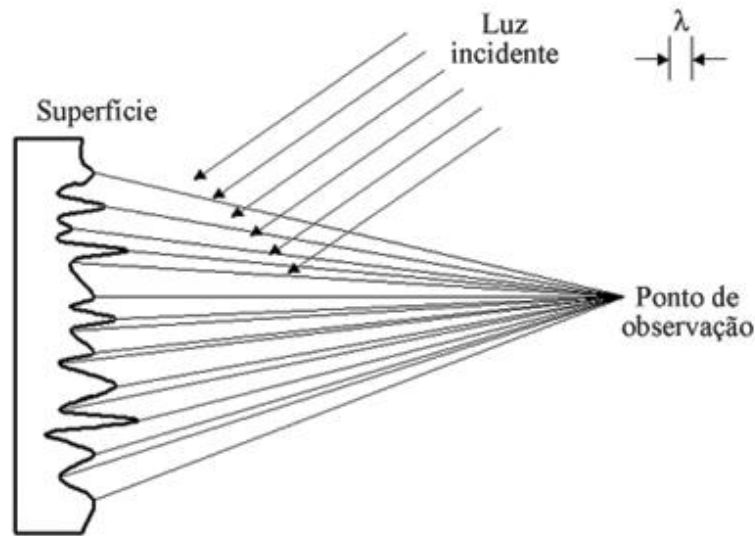
3.3.1	Metodologia e Procedimentos . . . . .	39
3.3.2	Resultados Experimentais . . . . .	44
3.4	Conclusão . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Conclusão Geral</b>	<b>54</b>

# 1. INTRODUÇÃO

Um fenômeno que é observado desde a época de Isaac Newton, mas só passou a ser estudado mais intensamente a partir da década de 1960, graças ao advento do laser de onda contínua, é o fenômeno de *speckle*. Naquele período, estudando a propagação de luz coerente, os pesquisadores observaram que a luz do laser ao ser refletida a partir de uma superfície, tal como a parede do laboratório ou um papelão, formava um padrão granular com alto contraste quando era observada por uma pessoa olhando para o local de espalhamento. Além disso, a medição da intensidade refletida a partir de tal ponto mostrou que estas flutuações existem no espaço mesmo que a iluminação do local seja relativamente uniforme [1].

Padrões de *speckles* aparecem sempre que uma onda coerente incide sobre uma amostra espalhadora, sendo, portanto, um fenômeno essencialmente ondulatório, podendo ocorrer para diversos tipos de ondas. Assim, quando a luz coerente incide sobre a superfície opticamente rugosa, esta é espalhada dando origem a uma grande quantidade de ondas parciais que interferem entre si em um determinado ponto, como se pode ver na Fig.1.1. Logo, notou-se que o padrão de *speckles* possui informação da superfície espalhadora. O padrão resultante observado consiste de pontos brilhantes e pontos escuros, os quais são aleatoriamente distribuídos e têm tamanhos variáveis, que é o padrão de *speckles*, como podemos ver na Fig.1.2. Algo que é de fundamental importância no estudo dos Padrões de *speckles*, é o fato de que estes apresentam propriedades estatísticas universais conhecidas como estatística Rayleigh [2]. Esta estatística é observada sob certas condições que serão mostradas no capítulo 2 desta dissertação. Neste caso, as amplitudes do campo de

Figura 1.1: Ilustração das várias contribuições de frentes de ondas espalhadas interferindo no ponto de observação.



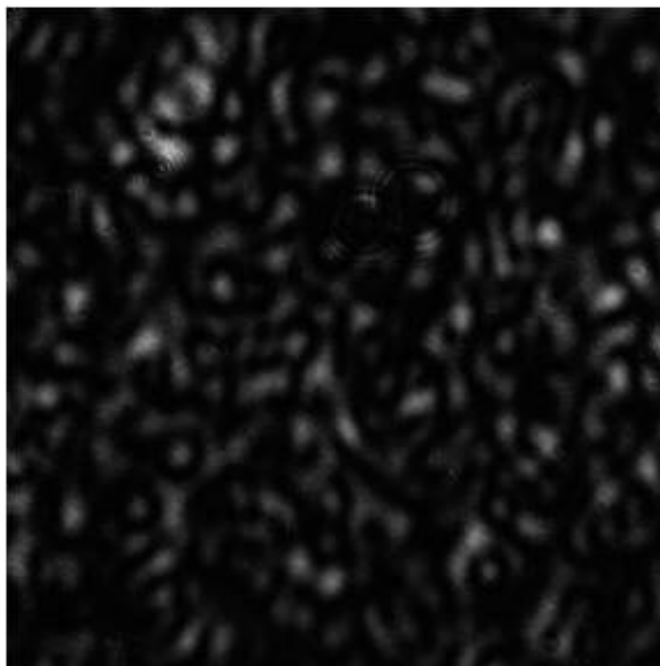
Fonte: SILVA, Emerson Rodrigo da, M. Muramatsu, 2007

*speckles* são distribuídas de acordo com a distribuição de Rayleigh, resultando numa distribuição de intensidade exponencial negativa.

O estudo deste fenômeno é muito importante devido a sua aplicabilidade para várias situações físicas que se verifica nas diversas áreas da ciência. Podemos citar, como exemplo, imagem de radar na região de microondas do espectro, imagens médicas de ultrassom de órgãos do corpo humano [1], etc. As pesquisas mais recentes buscam, da melhor maneira possível, adaptar padrões de *speckles* com estatística que se desvie das estatística Rayleigh, os chamados *speckles* não-Rayleigh.

Existem várias propostas de geração de padrões de *speckles* não-Rayleigh em sistemas ópticos. Por exemplo, a verificação experimental das estatísticas da intensidade Rician em distorções induzidas por turbulência parcialmente compensadas [3], e medições de distribuição de intensidade Gama de padrões de *speckles* na to-

Figura 1.2: Ilustração de um padrão de speckles.



Fonte: Autor

mografia por coerência óptica [4]. Há também resultados que mostram desvios das estatísticas Rayleigh no regime de baixa dispersão e com um pequeno número de ondas parciais dispersas [5-7].

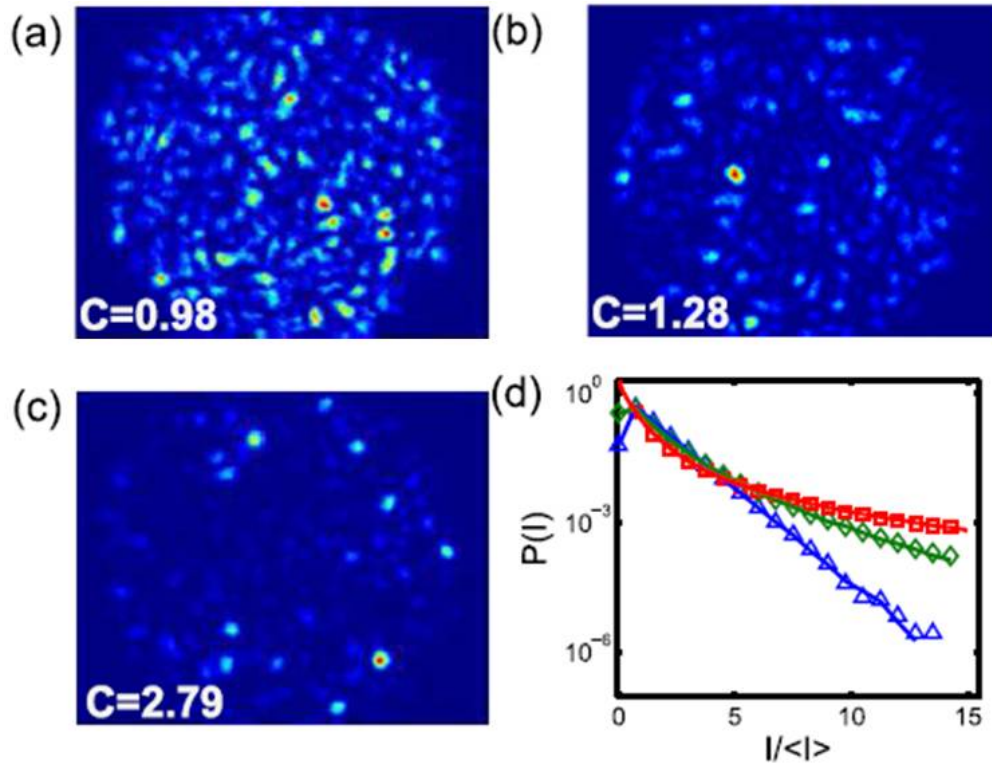
A possibilidade de gerar padrões de *speckles* com estatística controlada pode ser muito atraente para vários campos da pesquisa. Por exemplo, o estudo de armadilha óptica aleatória para átomos frios e partículas coloidais [8-10], em microscopia com iluminação estruturada [11-14], e em imagens foto-acústica com iluminação de *speckle* dinâmico [15]. Os padrões de *speckles* com nova estatística podem violar a bem conhecida relação Siegert [16] para a correlação de intensidade de *speckles* Gaussiano, o que poderia afetar os resultados experimentais envolvendo interferência de ondas obtidas a partir da correlação espacial da intensidade [17,18].

Uma das propostas mais recentes para a obtenção de padrão de *speckles* com estatística não-Rayleigh foi implementada por Y. Bromberg e H. Cao [2]. Eles mostraram que é possível gerar padrões de *speckles* com desvio das estatísticas Rayleigh através do aumento ou diminuição do contraste de maneira controlada utilizando um modulador espacial de luz de fase (SLM). Estes cientistas lançam a hipótese de que o responsável pelo o desvio da estatística Rayleigh é uma dependência estatística entre as amplitudes complexas das diversas ondas parciais.

Segundo Bromberg e Cao, a obtenção de padrões de *speckles* não-Rayleigh se dá via uma transformação não linear em relação ao campo de *speckles* Rayleigh gerado numericamente, assim, pode-se gerar um padrão de *speckles* com alto contraste, fazendo-se uma transformação do tipo  $E_{Ray}^2$ . Para tal, eles usaram um holograma de fase para gerar estes padrões de *speckles* e os chamam de *speckles* super-Rayleigh. Para codificar o campo transformado em um holograma de fase, os autores simplesmente fizeram uma transformada de Fourier inversa do campo e utilizaram a fase do resultado como o referido holograma. E os padrões experimentais obtidos, bem como os histogramas que mostra a propabilidade em função da intensidade, como mostrado na Fig.1.3. A linha de triângulos azuis corresponde a distribuição de intensidade do campo de *speckles* Rayleigh.

No entanto, para obter um outro tipo de padrão de *speckles* que os autores chamaram de sub-Rayleigh, eles utilizaram um outro tipo de transformação  $\sqrt{1 - e^{|E_{Ray}|^2}} e^{i\theta_{Ray}}$ . Para codificar a informação deste novo campo em um holograma, eles submetem o referido campo a um processo iterativo, o algoritmo de Gershberg-Saxton, que consiste em propagar o campo para frente e para trás entre o plano do SLM e o plano de Fourier do mesmo. A cada passo da iteração a amplitude é fixada a ser, no plano de Fourier,  $\sqrt{1 - e^{|E_{Ray}|^2}}$ , deixando a fase do

Figura 1.3: Ilustração dos padrões de speckles super-Rayleigh obtidos experimentalmente: a) para o campo Rayleigh elevado ao quadrado; b) para o campo Rayleigh elevado a quarta potência; e c) os respectivos hitogramas da probabilidade em função das intensidades.

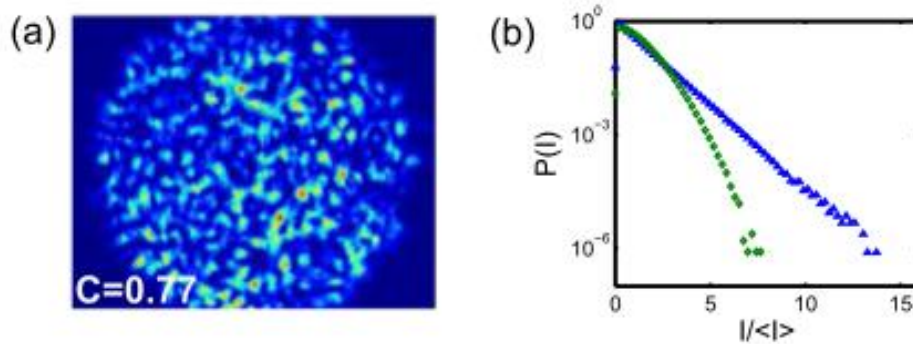


Fonte: Bromberg e Cao, 2014.

campo intocada. Tal procedimento otimiza a fase no plano do SLM, de modo que depois de um determinado número de passos o algoritmo converge para um padrão de speckle sub-Rayleigh no plano de Fourier e uma correspondente matriz de fase no SLM, o holograma. O padrão experimental obtido é mostrado na Fig.1.4. Novamente, A linha de triângulos azuis corresponde a distribuição de intensidade do campo de *speckles* Rayleigh.

Contudo, os autores não fornecem um modelo teórico que vos permita explicar os resultados experimentais. Deste modo, tais resultados obtidos pelos mesmos são puramente experimentais e tal lacuna somada com o fato de que eles não têm

Figura 1.4: Ilustração (a) do padrão de speckles sub-Rayleigh obtidos experimentalmente; (b) os respectivos hitogramas da probabilidade em função das intensidades.



Fonte: Bromberg e Cao, 2014.

uma transformação baseada em um único parâmetro que possa gerar *speckles* com contraste aumentado e/ou reduzido nos motivou a propor uma nova técnica de geração de *speckle* não-Rayleigh e embasados em uma teoria baseado em um único parâmetro.

O método para geração dos hologramas que utilizamos nos dá como vantagem a eliminação do uso de algoritmo, como o Gershberg-Saxton, por exemplo, usado em [2] para obter *speckle* não-Rayleigh (sub-Rayleigh). Deste modo, nossa proposta se mostra mais vantajosa devido requerer menos tempo na produção dos hologramas e dos diversos padrões de *speckles*.

Um complemento importante para nossos estudos é a noção dos fundamentos básicos de holografia e construção de hologramas. Assim, no capítulo 2, apresentamos os fundamentos básicos de holografia tanto do ponto de vista clássico, utilizando interferência com uma onda de referência, quanto do ponto de vista mais moderno, holografia de fase.

No capítulo 4, mostraremos os resultados teóricos e experimentais de nossa



investigação, e veremos que a distribuição de intensidade nossos padrões de *speckles* não-Rayleigh obedecem a uma função densidade de probabilidade (FDP) Weibull. No capítulo 5 apresentaremos as conclusões gerais do trabalho.

## 2. ESTATÍSTICA DE *SPECKLE*

### 2.1 Introdução

Depois de termos dado uma explanação a respeito da origem e manifestação dos *speckles*, neste capítulo nos aventuraremos numa análise mais detalhada das propriedades estatísticas deste fenômeno. Iremos nos deter às propriedades estatísticas de primeira ordem, ou seja, as propriedades estatísticas em um ponto  $\mathbf{P}(x,y)$ .

Iniciaremos tratando da estatística das partes real e imaginária da amplitude complexa de um campo em um determinado ponto. Este campo é a resultante de várias ondas espalhadas, as quais para determinadas condições obedecem estatística Gaussiana. Desta forma, introduziremos de maneira simplificada, uma representação matemática do fenômeno de *speckle* a qual será semelhante à caminhada aleatória.

### 2.2 Caminhada Aleatória e Fenômeno de *Speckle*

Consideremos, então, que  $u(x,y,z,t)$  seja a representação de uma única componente do campo elétrico polarizado em um ponto de observação  $(x,y,z)$  em um dado tempo  $t$ . No caso de uma onda monocromática, o sinal é representado por

$$u(x,y,z,t) = \mathbf{A}(x,y,z) \exp(i2\pi\nu t), \quad (2.1)$$

onde  $\nu$  representa a frequência óptica, e  $\mathbf{A}(x,y,z)$  representa a amplitude complexa do campo dada por

$$\mathbf{A}(x,y,z) = |\mathbf{A}(x,y,z)| \exp[i\theta(x,y,z)], \quad (2.2)$$

onde  $\theta(x,y,z)$  é a fase espacial do campo. Assim, a intensidade da onda é dada como,

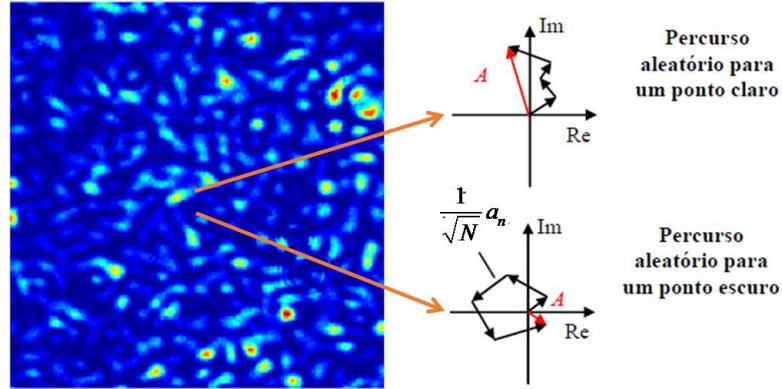
$$I(x,y,z) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |u(x,y,z,t)|^2 dt = |\mathbf{A}(x,y,z)|^2. \quad (2.3)$$

Quando o fenômeno de *speckle* ocorre, o campo em um dado ponto do espaço em um dado tempo tem uma representação complexa composta de uma superposição de um grande número de componentes de fases aleatórias elementares. Assim, num único ponto no espaço-tempo, a amplitude do campo pode ser expressa como uma soma de fasores aleatórios

$$\mathbf{A} = A e^{i\theta} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \mathbf{a}_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n e^{i\phi_n}, \quad (2.4)$$

onde  $\mathbf{a}_n$  é a n-ésima componente da soma, tendo módulo  $a_n$  e fase  $\phi_n$ . O fator  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  é introduzido para preservar o segundo momento da soma quando o número de componentes se aproxima do infinito. Portanto, assume-se que a contribuição do campo de luz espalhada em um ponto  $\mathbf{P}(x,y,z)$  deve ser a soma de um grande número  $N$  de componentes, no qual o padrão de *speckles* formado representa a contribuição de todos os pontos na superfície de dispersão. Portanto, temos a seguinte ilustração, Fig.2.1, que representa o padrão de *speckles* do ponto de vista dos caminhos aleatórios. A amplitude complexa na Eq.(2.4) pode ainda ser decomposta em suas partes real e imaginária,

Figura 2.1: Ilustração esquemática do processo de formação do granulado óptico.



Fonte: Autor

$$A_R = \text{Re}\{\mathbf{A}\} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \cos \phi_n, \quad (2.5)$$

$$A_I = \text{Im}\{\mathbf{A}\} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \sin \phi_n. \quad (2.6)$$

Desta forma, vemos que a descrição matemática dos *speckles* é similar à descrição da caminhada aleatória.

## 2.3 Estatística da Amplitude do Campo Complexo

Nesta seção passamos a examinar as propriedades estatísticas de primeira ordem da amplitude complexa do campo, em um determinado ponto do espaço. Todavia, antes de iniciarmos a análise quantitativa das propriedades estatísticas da amplitude complexa do campo, faremos três suposições a respeito das estatísticas dos fasores componentes que compõem a soma. Consideremos, então, as partes real e imaginária,

$$A_R = \text{Re}\{\mathbf{A}\} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \cos \phi_n,$$

$$A_I = \text{Im}\{\mathbf{A}\} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \sin \phi_n.$$

As suposições são as seguintes:

1. As amplitudes e as fases  $a_n$  e  $\phi_n$  são estatisticamente independentes de  $a_m$  e  $\phi_m$  para  $n \neq m$ . Isto é, o conhecimento dos valores da amplitude ou/e da fase de um dos fasores não implica ter conhecimento da amplitude e da fase de qualquer outro fasor componente aleatório;
2. Para qualquer  $n$ ,  $a_n$  e  $\phi_n$  são estatisticamente independentes um do outro. Isto é, o conhecimento da fase de um fasor componente não implica no conhecimento dos valores de amplitude do mesmo fasor, e vice-versa;
3. A fase  $\phi_m$  é uniformemente distribuídas no intervalo  $(-\pi, \pi)$ . Isto é, todos os valores de fases são igualmente prováveis.

Todas estas suposições são relativas à estatística Rayleigh, contudo, a caminhada aleatória também satisfaz estas suposições.

### 2.3.1 Primeiro e Segundo Momento das Partes Real e Imaginária do Fasor Resultante

As três suposições, citadas acima, têm certas implicações sobre a média e a variância de  $Re$  e  $Im$ . Em particular, as médias são facilmente calculadas,

$$\langle A_R \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \cos \phi_n \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \langle a_n \rangle \langle \cos \phi_n \rangle.$$

Dos postulados acima, temos que  $\langle a_n \cos \phi_n \rangle = \langle a_n \rangle \langle \cos \phi_n \rangle$ , assim, já que  $\langle \cos \phi_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\phi_n) d\phi_n = 0$ , então

$$\langle A_R \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \langle a_n \rangle \langle \cos \phi_n \rangle = 0, \quad (2.7)$$

similarmente,

$$\langle A_I \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \sin \phi_n \right\rangle = 0. \quad (2.8)$$

Sabendo que os segundos momentos de  $A_R$  e  $A_I$  são dados por

$$\begin{aligned} \langle A_R^2 \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a_n a_m \cos \phi_n \cos \phi_m \right\rangle \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \langle a_n a_m \cos \phi_n \cos \phi_m \rangle \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \langle a_n a_m \rangle \langle \cos \phi_n \cos \phi_m \rangle, \end{aligned} \quad (2.9)$$

para  $n \neq m$ , temos que

$$\langle \cos \phi_n \cos \phi_m \rangle = \langle \cos \phi_n \rangle \langle \cos \phi_m \rangle = 0,$$

que implica em

$$\langle A_R^2 \rangle = 0. \quad (2.10)$$

De maneira análoga, teremos

$$\langle A_I^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \langle a_n a_m \rangle \langle \sin \phi_n \sin \phi_m \rangle = 0,$$

como consequência, apenas o termo para  $m = n$  sobrevive em Eq.(2.9),

$$\langle A_R^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \langle a_n^2 \rangle \langle \cos^2 \phi_n \rangle.$$

Usando a seguinte identidade trigonométrica,

$$\cos^2 \phi = \frac{1 + \cos 2\phi}{2},$$

teremos

$$\begin{aligned} \langle A_R^2 \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \langle a_n^2 \rangle \left\langle \frac{1 + \cos 2\phi_n}{2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left[ \langle a_n^2 \rangle \left\langle \frac{1}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{\cos 2\phi_n}{2} \right\rangle \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\langle a_n^2 \rangle}{2}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Similarmente

$$\langle A_I^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\langle a_n^2 \rangle}{2}. \tag{2.12}$$

Das Eqs.(2.7), (2.8), (2.11) e (2.12), e usando a definição de variância  $\sigma^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$ , concluímos então que a variância de  $A_R$  e  $A_I$  são iguais aos segundos momentos, pois sendo  $\phi_n$  uniformemente distribuída no intervalo  $[-\pi, \pi]$ ,  $2\phi_n$  também é uniformemente distribuído nesse intervalo, de modo que a média de

$\langle \cos 2\phi_n \rangle = 0$ , e assim,

$$\sigma^2 = \sigma_R^2 = \sigma_I^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\langle a_n^2 \rangle}{2}. \quad (2.13)$$

E portanto, as médias e as variâncias das partes real e imaginária do fasor resultante são idênticas.

Como

$$\Gamma_{R,I} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \langle a_n^2 \rangle \langle \cos \phi_n \sin \phi_n \rangle = 0 \quad (2.14)$$

desde que

$$\langle \cos \phi_n \sin \phi_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \phi_n \sin \phi_n d\phi_n = 0. \quad (2.15)$$

Dos resultados acima, nota-se que não há correlação entre as partes real e imaginária do fasor resultante.

### 2.3.2 Funções Densidade de Probabilidade

Uma função  $f(x)$  definida como a função densidade de probabilidade (FDP) de uma variável aleatória contínua  $X$  deve satisfazer a seguintes propriedades:

1.  $f_X(x) \geq 0$ ;
2.  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$
3.  $P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$ .

Assim, se considerarmos o caso em que a quantidade  $N$  de contribuições de fasores componentes é muito grande, de modo que as partes real e imaginária do campo sejam expressas por uma soma de muitas variáveis aleatórias, segue que



do teorema do limite central [19,20], para  $N \rightarrow \infty$ ,  $A_R$  e  $A_I$  são assintoticamente Gaussianas. E ligando este fato com os resultados nas Eqs.(2.7), (2.8) e (2.13), conclui-se que a função densidade de probabilidade conjunta das partes real e imaginária do campo,  $A_R$  e  $A_I$ , é dada assintoticamente, por

$$\rho_{R,I}(A_R,A_I) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A_R^2 + A_I^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.16)$$

onde  $\sigma^2 = \sigma_R^2 = \sigma_I^2$ .

Tal função de densidade é comumente conhecida como uma função de densidade Gaussiana circular, uma vez que os contornos de densidade de probabilidade constante são círculos no plano complexo.

Outro ponto de interesse, são as estatísticas da amplitude  $A$  e da fase  $\theta$  do fasor resultante. A função densidade de probabilidade conjunta, da amplitude e da fase, pode ser obtida usando as regras da teoria da probabilidade para transformação de variáveis [1,11],

$$\begin{cases} A = \sqrt{(A_R^2 + A_I^2)} \\ \theta = \arctan\left(\frac{A_I}{A_R}\right) \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} A_R = A \cos \theta \\ A_I = A \sin \theta \end{cases} \quad (2.18)$$

A função densidade de probabilidade conjunta de  $A$  e  $\theta$  está relacionada com  $A_R$  e  $A_I$  através da relação

$$\rho_{A,\theta}(A,\theta) = \rho_{R,I}(A_R,A_I)||J|| \quad (2.19)$$

onde  $||J||$  representa o jacobiano da transformação entre os dois conjuntos de

variáveis,

$$|J| = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial A_R}{\partial A} & \frac{\partial A_R}{\partial \theta} \\ \frac{\partial A_I}{\partial A} & \frac{\partial A_I}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

e portanto,

$$||J|| = A. \quad (2.21)$$

E segue que a função densidade de probabilidade conjunta da amplitude e da fase do fasor resultante é dada por

$$\rho_{A,\theta}(A,\theta) = \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.22)$$

para  $(A \geq 0)$  e  $[-\pi \leq \theta \leq \pi]$ , e zero caso contrário.

O fato de  $A$  e  $\theta$  serem estatisticamente independentes, nos possibilita encontrar a estatística marginal de  $A$  e, em seguida, de  $\theta$ . Focando primeiro na amplitude  $A$ , obtemos

$$\rho_A(A) = \int_{-\pi}^{\pi} \rho_{A,\theta}(A,\theta) d\theta = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.23)$$

para  $A \geq 0$ . Este resultado é conhecido como a função densidade de probabilidade Rayleigh. Assim, vemos que a amplitude do fasor resultante é uma variável Rayleigh. Os momentos da variável aleatória amplitude são de algum interesse, e podem ser encontrados por

$$\langle A^q \rangle = \int_0^{\infty} A^q \rho_A(A) dA = 2^{\frac{q}{2}} \sigma^q \Gamma\left(1 + \frac{q}{2}\right) \quad (2.24)$$

onde  $\Gamma(\dots)$  é a função gama [1]. Os primeiro e segundo momentos, bem como a variância são dados por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle A \rangle = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \\ \langle A^2 \rangle = 2\sigma^2 \\ \sigma_A^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma^2 \end{array} \right. \quad (2.25)$$

A função densidade de probabilidade da fase é encontrada integrando (2.22) com respeito a amplitude,

$$\rho_\theta(\theta) = \int_0^\infty \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) dA = \frac{1}{2\pi} \quad (2.26)$$

para  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ . Deste resultado, notamos que a integral de  $\rho_A(A)$  é unitária, portanto,  $\rho_A(A)$  está normalizada. Vale ressaltar que tal fato também é válido para  $\rho_\theta(\theta)$ .

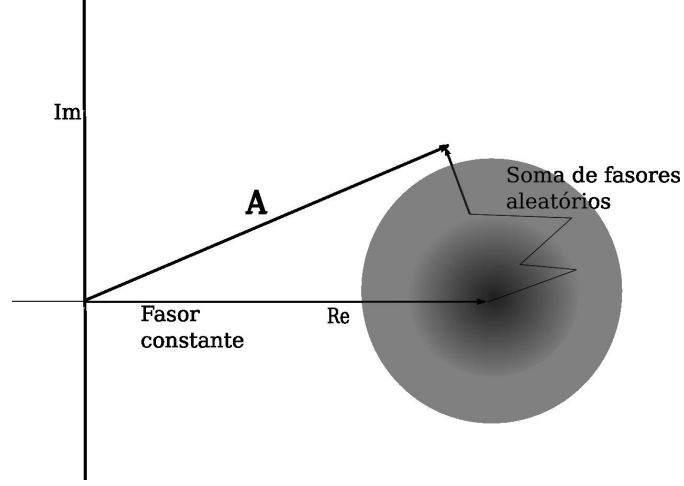
Observa-se imediatamente que a função densidade de probabilidade conjunta para  $A$  e  $\theta$ , na Eq.(2.22), é um produto de  $\rho_A(A)$  por  $\rho_\theta(\theta)$ .

## 2.4 Soma de Fasores Aleatórios com um Fasor Constante

Agora vamos considerar o caso em que o fasor resultante é a soma de um fasor constante conhecido com uma soma de fasores aleatórios. A geometria é ilustrada na Fig.2.2. Por simplicidade, mas sem perda de generalidade, assumimos que o fasor constante reside ao longo do eixo real no plano complexo, de modo que as partes real e imaginária do fasor resultante podem ser escritas como

$$A_R = \text{Re}\{\mathbf{A}\} = A_0 + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \cos \phi_n, \quad (2.27)$$

Figura 2.2: Soma de um fasor constante com uma soma de fasores aleatórios.



Fonte: Autor

$$A_I = \text{Im}\{\mathbf{A}\} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \sin \phi_n, \quad (2.28)$$

onde  $A_0$  representa o tamanho do fasor constante.

O efeito da presença do fasor conhecido é adicionar uma média conhecida à parte real do fasor resultante [1]. Então, para um grande número de passos na soma de fasores aleatórios, a estatística das parte real e imaginária do fasor resultante é novamente assintoticamente Gaussiana, com função densidade de probabilidade conjunta dada por

$$\rho_{R,I}(A_R, A_I) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(A_R - A_0)^2 + (A_I)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.29)$$

E através de uma transformação de variáveis, similar à utilizada para obtermos Eq.(2.22), encontramos a FDP conjunta em termos da amplitude e da fase do fasor resultante,

$$\rho_{A,\theta}(A, \theta) = \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{A^2 + A_0^2 - 2AA_0 \cos \theta}{2\pi\sigma^2}\right] \quad (2.30)$$

válida para  $A \geq 0$  e  $\theta$  contido no intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

Para acharmos a densidade de probabilidade marginal de  $A$  e  $\theta$ , integra-se  $\rho_{A,\theta}(A,\theta)$ , similarmente ao que foi feito anteriormente. Então,

$$\rho_A(A) = \int_{-\pi}^{\pi} \rho_{A,\theta}(A,\theta) d\theta$$

$$\rho_A(A) = \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2 + A_0^2}{2\sigma^2}\right) \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(\frac{AA_0 \cos \theta}{\sigma^2}\right) d\theta,$$

usando a seguinte identidade,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{b \cos t} dt = 2\pi I_0(b), \quad (2.31)$$

onde  $I_0(\dots)$  é uma função de Bessel modificada de primeiro tipo e de ordem zero, obtemos

$$\rho_A(A) = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{A^2 + A_0^2}{2\sigma^2}\right] I_0\left(\frac{AA_0}{\sigma^2}\right), \quad (2.32)$$

válida para  $A \geq 0$ . Esta densidade é conhecida como a função densidade Rician. Notemos que para  $A_0/\sigma = 0$ , a densidade Rician assume a mesma forma que a densidade Rayleigh, como é de se esperar. Quando  $A_0/\sigma$  cresce, a PDF Rician assume uma forma mais simétrica, assemelhando-se gradualmente à função densidade Gaussiana. Isto pode, de fato, ser mostrado sempre que  $A_0/\sigma$  é muito grande, de modo que o resultado é assintoticamente Gaussiano.

O  $q$ -ésimo momento de  $A$  é, neste caso, dado por

$$\langle A^q \rangle = (2\sigma^2)^{\frac{q}{2}} e^{-\frac{A_0^2}{2\sigma^2}} \Gamma\left(1 + \frac{q}{2}\right) {}_1F_1\left(1 + \frac{q}{2}, 1, \frac{A_0^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2.33)$$

onde  ${}_1F_1(\alpha, \beta, x)$  representa a função hipergeométrica. Os primeiro e segundo

momentos são dados por

$$\langle A \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma^2}} e^{-\frac{A_0^2}{4\sigma^2}} \left[ (A_0^2 + 2\sigma^2) I_0 \left( \frac{A_0^2}{4\sigma^2} \right) + A_0^2 I_1 \left( \frac{A_0^2}{4\sigma^2} \right) \right] \quad (2.34)$$

$$\langle A^2 \rangle = A_0^2 + 2\sigma^2 \quad (2.35)$$

Vejamos agora a estatística da fase, já que a mesma também é de interesse. Encontrar a função densidade de probabilidade em função de  $\theta$  requer a solução da seguinte integral

$$\rho_\theta(\theta) = \frac{e^{-\frac{A_0^2}{2\sigma^2}}}{2\pi\sigma^2} \int_0^\infty A \exp \left[ -\frac{A^2 - 2AA_0 \cos \theta}{2\sigma^2} \right] dA, \quad (2.36)$$

que através da técnica de completar quadrado, podemos reescrevê-la da seguinte forma

$$\rho_\theta(\theta) = \frac{e^{-\frac{A_0^2}{2\sigma^2}}}{2\pi\sigma^2} \exp \left( \frac{A_0^2 \cos^2 \theta}{2\sigma^2} \right) \int_0^\infty A \exp \left[ -\left( \frac{A - A_0 \cos \theta}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \right] dA, \quad (2.37)$$

então

$$\rho_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left( -\frac{A_0^2 - A_0^2 \cos^2 \theta}{2\sigma^2} \right) \int_0^\infty A \exp \left[ -\left( \frac{A - A_0 \cos \theta}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \right] dA.$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis  $u = A - A_0 \cos \theta$  isso implica que  $du = dA$ ,

assim

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty A \exp \left[ - \left( \frac{A - A_0 \cos \theta}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \right] dA = \\
&= \int_0^\infty (u + A_0 \cos \theta) \exp \left[ - \left( \frac{u}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \right] du \\
&= \int_0^\infty u \exp \left[ - \left( \frac{u}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \right] du + \int_0^\infty A_0 \cos \theta \exp \left[ - \left( \frac{u}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \right] du, \quad (2.38)
\end{aligned}$$

e usando o resultado seguinte

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = \sqrt{\pi} \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n+1} \quad (2.39)$$

e

$$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = \frac{n!}{2} a^{2n+2}, \quad (2.40)$$

obtemos que

$$\int_0^\infty A \exp \left[ - \left( \frac{A - A_0 \cos \theta}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \right] dA = \sigma^2 + A_0 \cos \theta \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma. \quad (2.41)$$

Substituindo o resultado obtido na Eq.(2.41) na Eq.(2.37), temos que

$$\begin{aligned}
\rho_\theta(\theta) &= \frac{e^{-\frac{A_0^2}{2\sigma^2}}}{2\pi\sigma^2} \exp \left( \frac{A_0^2 \cos^2 \theta}{2\sigma^2} \right) \left( \sigma^2 + A_0 \cos \theta \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \right) \\
&= \frac{e^{-\frac{A_0^2}{2\sigma^2}}}{2\pi} \exp \left( \frac{A_0^2 - A_0^2 \sin^2 \theta}{2\sigma^2} \right) \left( 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{A_0}{\sigma} \cos \theta \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \exp \left( -\frac{A_0^2 \sin^2 \theta}{2\sigma^2} \right) \left( 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{A_0}{\sigma} \cos \theta \right) \quad (2.42)
\end{aligned}$$

é uma solução válida apenas se  $(-\pi \leq \theta \leq \pi)$ .

A partir destes resultados, notamos que para  $A_0/\sigma = 0$  a fase é uniformemente distribuída, mas no caso em que  $A_0/\sigma$  cresce de maneira acentuada, a distribuição de fase se agrupa em torno da fase do fasor constante, ou seja,  $\theta \ll 1$ . Portanto, quando  $A_0/\sigma$  é muito grande,  $\rho_\theta(\theta)$  se aproxima de uma função distribuição Gaussiana [1],

$$\rho_\theta(\theta) = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{\theta^2}{2(\sigma/A_0)^2} \right] \quad (2.43)$$

cuja média é zero e o desvio padrão é  $\sigma/A_0$ .

## 2.5 Estatística de Primeira Ordem da Intensidade

Já sabemos que para um campo polarizado, a intensidade é dada por

$$I(x,y) = |A(x,y)|^2$$

No entanto, como explicitar uma função densidade de probabilidade para a variável aleatória  $I$ ? A resposta para esta questão é encontrada se utilizarmos uma transformação monotônica  $v = f(u)$ , onde temos a relação de uma variável aleatória  $v$  com outra variável aleatória  $u$ . Assim, de um resultado já bem conhecido da teoria da probabilidade [20], temos a possibilidade de encontrar uma  $\rho_V(v)$  dado  $\rho_U(u)$  através da seguinte transformação

$$\rho_V(v) = \rho_U(f^{-1}(v)) \left| \frac{du}{dv} \right|. \quad (2.44)$$



Para nosso caso, fazendo  $v$  igual a intensidade,  $v = I$ , e  $u = |A| = A$ , temos então que

$$I = f(A) = A^2, \quad (2.45)$$

de maneira que, como conhecemos  $\rho_A(A)$ , então  $\rho_I(I)$  é facilmente determinada. Aqui temos que  $f^{-1}(I) = \sqrt{I} = A$ , de modo que teremos

$$\rho_I(I) = \rho_A(\sqrt{I}) \left| \frac{dA}{dI} \right| = \frac{1}{2\sqrt{I}} \rho_A(\sqrt{I}). \quad (2.46)$$

De posse deste resultado, podemos escrever a densidade de probabilidade da intensidade para todos os casos nos quais a FDP da amplitude é dada. Como estamos trabalhando com soma de fasores aleatórios a qual é constituída por um grande número de contribuições, cujas fases são uniformemente distribuídas no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , então temos que

$$\rho_A(A) = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right).$$

Podemos então escrever a Eq.(2.46) da seguinte forma

$$\rho_I(I) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{I}{2\sigma^2}\right), \quad (2.47)$$

válida para  $I \geq 0$ .

Os momentos para a distribuição na Eq.(2.47) são achados por integração direta, de modo que

$$\langle I \rangle = \int_0^\infty I \rho_I(I) dI = 2\sigma^2, \quad (2.48)$$

$$\langle I^2 \rangle = \int_0^\infty I^2 \rho_I(I) dI = 2(2\sigma^2)^2, \quad (2.49)$$

e de maneira geral, temos

$$\langle I^q \rangle = \int_0^\infty I^q \rho_I(I) dI = (2\sigma^2)^q q!. \quad (2.50)$$

Como  $\langle I \rangle = 2\sigma^2$ , logo, podemos reescrever a Eq.(2.47) da seguinte maneira,

$$\rho_I(I) = \frac{1}{\langle I \rangle} \exp\left(-\frac{I}{\langle I \rangle}\right). \quad (2.51)$$

*Speckles* com esse tipo de distribuição para intensidades são muitas vezes referidos como *speckles* totalmente desenvolvidos [1]. O segundo momento, a variância e o desvio padrão, neste caso, são

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle I^2 \rangle = 2\langle I \rangle^2 \\ \sigma_I^2 = \langle I \rangle^2 \\ \sigma_I = \sqrt{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2} = \langle I \rangle \end{array} \right. . \quad (2.52)$$

Outra quantidade muito importante para o estudo do fenômeno de speckle é o contraste  $C$ , que é definido como

$$\begin{aligned} C = \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle} &= \frac{\sqrt{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}}{\langle I \rangle} \\ &= \sqrt{\frac{\langle I^2 \rangle}{\langle I \rangle^2} - 1}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Assim, o contraste é uma medida de quão forte é a flutuação de intensidade do

padrão de speckle comparado com a média da intensidade.

Em aplicações como no tratamento de problemas de visão com a utilização de laser, há a possibilidade indesejada de haver dano ocular devido ao excesso de potência óptica incidente sobre a retina ou outro tecido sensível, e tal fato é motivo de preocupação. Assim, é importante saber a probabilidade que a intensidade exceda uma certa intensidade limite  $I_t$  (threshold). Esta quantidade pode ser calculada da seguinte forma,

$$\begin{aligned} P(I \geq I_t) &= \int_{I_t}^{\infty} \rho_I(I) dI \\ &= \int_{I_t}^{\infty} \frac{1}{\langle I \rangle} \exp\left(-\frac{I}{\langle I \rangle}\right) dI \\ &= \exp\left(-\frac{I_t}{\langle I \rangle}\right). \end{aligned} \tag{2.54}$$

Assim, nota-se que a probabilidade de a intensidade exceder um threshold  $I_t$  cai exponencialmente com a relação  $I_t/\langle I \rangle$ .

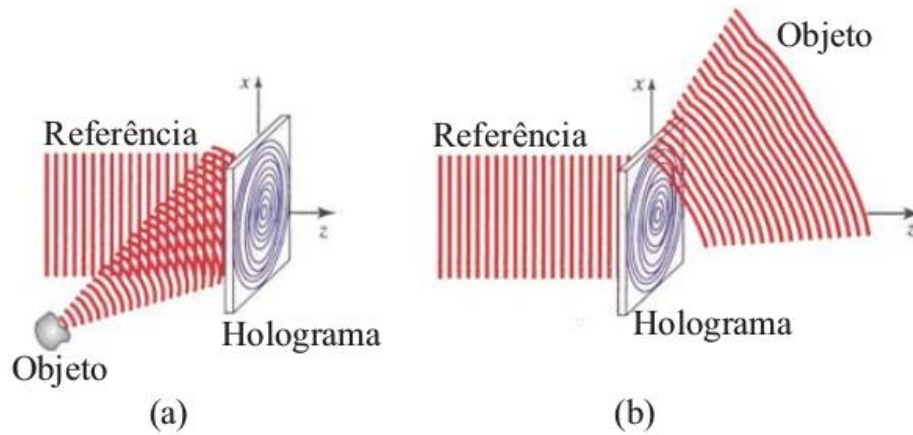
## 2.6 Holografia

A holografia é um método único de armazenamento e reconstrução de toda a informação, como amplitude e fase, contida na luz que é dispersa a partir de um corpo iluminado [21]. Esta técnica é usualmente datada de 1948, quando Dennis Gabor a criou para melhorar a utilidade da microscopia. No entanto, foi a partir da década de 60 que se teve bastantes avanços nessa área, pois a invenção do laser deu aos pesquisadores uma fonte de luz altamente coerente, dando início a holografia interferométrica.

Nesta seção mostraremos alguns fundamentos da holografia, e nos atentaremos

no método de construção de um holograma através do registro da amplitude e da fase de ondas monocromáticas. Tal holograma é obtido lançando mão da interferência de uma onda objeto  $U_o(x,y)$  com uma onda referência  $U_r(x,y)$ , de modo que se registre o padrão de interferência em um dispositivo de gravação, como uma transparência. Em seguida, ilumina-se o dispositivo com  $U_r(x,y)$  para se obter a reconstrução (vê Fig.2.3(a)).

Figura 2.3: (a) Um holograma é uma transparência sobre a qual o padrão de interferência entre a onda inicial (onda objeto) e uma onda de referência é registrado. (b) A onda inicial é reconstruída, iluminando o holograma com a onda de referência.



Fonte: Saleh, 2007.

O tratamento quantitativo pode ser obtido considerando que tal transparência tenha uma transmitância  $t(x,y)$ , desta maneira, supondo que  $t(x,y)$  seja proporcional à intensidade do padrão de interferência das ondas objeto e de referência, ou seja,  $t \propto |U_o + U_r|^2$ , então

$$\begin{aligned} |U_o + U_r|^2 &= |U_r|^2 + |U_o|^2 + U_r^*U_o + U_rU_o^* \\ &= I_r + I_o + U_r^*U_o + U_rU_o^* \end{aligned}$$

e portanto,

$$t \propto I_r + I_o + 2 \cos[\text{Arg}\{U_r\} - \text{Arg}\{U_o\}] \quad (2.55)$$

onde  $I_r$  e  $I_o$  são as intensidades das ondas referência e objeto, respectivamente. A transparência é o que chamamos de holograma, e claramente vemos que a mesma contém informação de amplitude e fase das ondas objeto e referência.

A reconstrução da onda objeto se dá através da incidência da onda de referência sobre o holograma, como mostrado na Fig.2.3(b). O resultado é uma onda com amplitude complexa dada por

$$U(x,y) = tU_r \propto (I_r + I_o)U_r + I_rU_o + U_r^2U_o^* \quad (2.56)$$

Como consequência do exposto acima, nota-se que no plano do holograma, assumido estar em  $z = 0$ , o terceiro termo na Eq.(2.56) é a própria onda objeto multiplicada pela intensidade da onda referência. Desde que  $I_r$  não dependa de  $x$  e  $y$ , o termo  $I_rU_o$  constitui a onda desejada reconstruída. O quarto termo é a onda objeto conjugada, no entanto, modulada por  $U_r^2$ . O primeiro e segundo termo representam a onda referência modulada pela soma das intensidades das ondas referência e objeto.

Uma suposição usual é que a onda referência é da forma  $U_r = \sqrt{I_r} \exp(-ikz)$ , de modo que em  $z = 0$ ,  $U_r(x,y) = cte$ , tal como  $U_r(x,y) = \sqrt{I_r}$ , assim, ao dividirmos a Eq.(2.56) por  $U_r(x,y) = \sqrt{I_r}$ , obtemos

$$U(x,y) \propto I_r + I_o(x,y) + \sqrt{I_r}U_o(x,y) + \sqrt{I_r}U_o^*(x,y) \quad (2.57)$$

Como ilustração, pode-se supor que a onda objeto seja uma onda plana oblíqua

da forma  $U_0 = \sqrt{I_0} \exp(-ikx \sin \theta)$ , de modo que

$$U(x,y) \propto I_r + I_o + \sqrt{I_r I_o} \exp(-ikx \sin \theta) + \sqrt{I_r I_o} \exp(ikx \sin \theta) \quad (2.58)$$

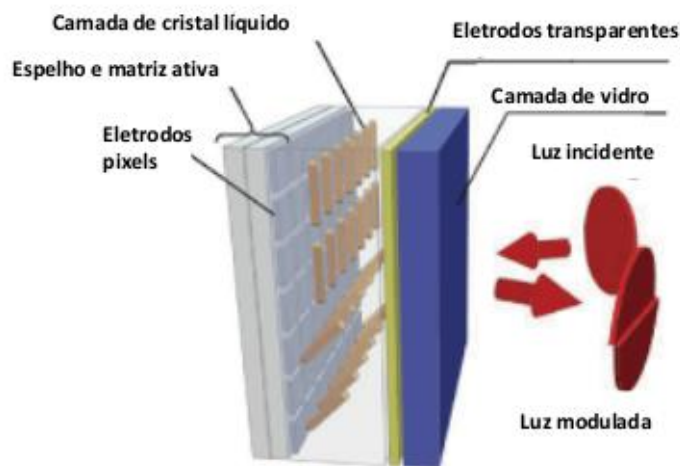
Desde que  $I_r$  e  $I_o$  sejam constantes, estes dois primeiros termos representam uma onda que se propaga na direção  $z$ . O terceiro termo representa a onda reconstruída, enquanto que o quarto termo representa a onda conjugada, viajando em um ângulo  $-\theta$ . É notório, portanto, que a onda objeto é separável das demais ondas. Este holograma é apenas uma gravação do padrão de interferência formado a partir de duas ondas planas em um ângulo oblíquo  $\theta$  como visto anteriormente, o qual serve como uma rede de difração senoidal que divide uma onda de referência incidente em três ondas em ângulos  $0$ ,  $\theta$  e  $-\theta$  [22].

Tudo que abordamos até agora a respeito de holografia, está no contexto clássico deste assunto, já que a construção do holograma se dá pela gravação da intensidade de um padrão de interferência. No entanto, podemos produzir um holograma usando um modulador espacial de luz (SLM), o qual impõe uma variação na modulação espacial de fase do feixe. Com este dispositivo, pode-se controlar a amplitude e fase, ou até mesmo os estados de polarização da luz [23]. No que diz respeito a construção de holograma, o método clássico difere dos hologramas gerados por computador (CGH), com o uso do SLM, principalmente no processo de gravação, pois no primeiro caso devemos gravar um padrão de intensidade em uma transparência, enquanto que no segundo caso usamos o cristal líquido do SLM para gravar o holograma calculado numericamente.

Um modulador espacial de luz de fase é composto por um espelho e em cima

deste é colocado uma fina camada constituída de pixels eletrodos referida como matriz ativa, logo após, tem-se uma camada de cristal líquido, em seguida uma camada de pixels eletrodos transparente e por fim uma camada de vidro transparente. Cada pixel controla seu próprio potencial elétrico de forma independente, assim, o campo elétrico através da camada de cristal líquido pode ser controlado pixel a pixel. Inicialmente as moléculas de cristal líquido estão alinhadas em paralelo, no entanto, quando os eletrodos são submetidos a uma diferença de potencial as moléculas do cristal líquido se inclinam de acordo com o campo elétrico, de modo que a fase de luz pode ser modulada. A diferença nos índices de refração do cristal líquido ocorre em diferentes ângulos de inclinação. Isto altera o comprimento do percurso óptico na camada de cristal líquido e assim provoca uma diferença de fase na luz refletida. Para um melhor entendimento, representaremos de maneira esquemática o SLM na Fig.2.4.

Figura 2.4: Ilustração de uma modulador espacial de luz.



Fonte: Hamamatsu, 2014.

Atualmente, um dos métodos mais usados para construção de hologramas com

codificação de amplitude e fase é o proposto por Victor Arrizón [24], o qual propõe que para gerar um campo arbitrário, cuja modulação de amplitude e fase sejam especificadas de maneira independente, dado por

$$S(x,y) = a(x,y)e^{i\phi(x,y)}, \quad (2.59)$$

onde  $a(x,y)$  e  $\phi(x,y)$  tomam valores nos intervalos  $[0,1]$  e  $[-\pi,\pi]$ , respectivamente, é necessário que os valores das amplitudes complexas da função  $S(x,y)$  pertençam a um conjunto de números complexos de módulos menor ou igual a 1, designado por  $\Omega_s$ . De modo que a tarefa é condicionar o campo  $S(x,y)$  por meio de uma transmitância de fase (CGH). Mas em geral, um holograma que codifica a modulação complexa arbitrária  $S(x,y)$  tem uma transmitância complexa restrita a valores no subconjunto  $\Omega_s$ . No caso de um holograma de fase, este subconjunto é formado pelos pontos complexos de módulo unitário. A transmitância de fase (CGH) expressa como uma função explicitamente dependente da amplitude e da fase do campo codificado é dada por

$$h(x,y) = \exp[i\psi(a,\phi)] \quad (2.60)$$

onde  $\psi(a,\phi)$  é a modulação de fase (CGH).

O que se faz, agora, é estabelecer funções de fase que satisfaçam a Eq.(2.60), as quais fornecem a codificação apropriada do campo  $S(x,y)$  [24]. Um método útil para determinar formas adequadas de  $\psi(a,\phi)$ , é representarmos  $h(x,y)$  como uma



série de Fourier no domínio de  $\phi$ , de acordo com Arrizón et al, teremos

$$h(x,y) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} h_q(x,y) \quad (2.61)$$

onde

$$h_q = C_q^a e^{iq\phi} \quad (2.62)$$

e

$$C_q^a = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i[\psi(a,\phi) - q\phi]} d\phi. \quad (2.63)$$

É uma consequência notória que, quando integramos a Eq.(2.63),  $C_q^a$  continua explicitamente como função de  $a$ , de modo que os coeficientes  $C_q^a$  têm uma dependência implícida nas coordenadas  $(x,y)$ . Assim, o sinal  $S(x,y)$  é representado a partir do termo de primeira ordem  $h_1(x,y)$  na série da Eq.(2.61), se a identidade

$$C_1^a = Aa \quad (2.64)$$

é satisfeita para uma constante  $A$ . Referimo-nos a Eq.(2.64) como condição de codificação do sinal, de modo que as condições suficientes e necessárias para satisfazer a Eq.(2.64) são dadas por

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin[\psi(\phi,a) - \phi] d\phi = 0, \quad (2.65)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos[\psi(\phi,a) - \phi] d\phi = 2\pi Aa. \quad (2.66)$$

As equações Eq.(2.65) e Eq.(2.66) fornecem uma base útil para a determinação dos (CGH), já que as funções de fase,  $\psi(\phi,a)$ , que obedecem a essas equações definem

uma classe específica de fases de (CGH). Impomos ainda que o máximo da integral na Eq.(2.66) seja  $2\pi$ , de modo que o valor máximo da constante  $A$  na condição de codificação seja um. Este resultado fornece um limite para a eficiência dos (CGH) que pertencem a esta classe. Victor Arrizón [24], propõe três tipos de (CGH) de fase, todos com eficiência diferentes. Por conveniência, focaremos no (CGH) de fase de tipo 3, já que este será o utilizado em nosso trabalho.

Consideremos a seguinte modulação de fase

$$\psi(\phi, a) = f(a) \sin(\phi). \quad (2.67)$$

Para obtermos a série de Fourier e os coeficientes correspondentes para este (CGH), utilizamos a identidade de Jacobe-Anger,

$$e^{iz \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z) e^{in\theta}, \quad (2.68)$$

$$e^{iz \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\theta}, \quad (2.69)$$

onde  $J_n$  é o  $n$ -ésima função de Bessel. Logo, vemos que

$$e^{if(a) \sin \phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n[f(a)] e^{in\phi}, \quad (2.70)$$

de maneira que fazendo  $n = q$  e comparando a Eq.(2.70) com as equações Eq.(2.60) e Eq.(2.61), obtemos

$$C_q^a = J_q[f(a)] \quad (2.71)$$

e a condição de codificação é satisfeita no caso de  $f(a)$  ser invertida a partir da

relação

$$J_1[f(a)] = Aa. \quad (2.72)$$

A inversão é realizada numericamente, e uma das vantagens deste (CGH) é que pode ser implementado em um domínio reduzido, ou seja, menor que  $[-\pi, \pi]$ . Assim, ao tomarmos a transformada de Fourier  $h(x, y)$  [25], teremos

$$H(u, v) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_q(x, y) \exp[-i2\pi(ux + vy)] dx dy. \quad (2.73)$$

Como nosso campo deve estar na primeira ordem de difração, então

$$H(u, v) = \dots + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x, y) \exp[-i2\pi(ux + vy)] dx dy + \dots, \quad (2.74)$$

de modo que este é nosso campo no plano de Fourier, o qual se localiza na primeira ordem de difração da série de Fourier.

## 2.7 Conclusão

Neste capítulo vimos que dado um campo complexo em que sua amplitude é um fasor resultante composto por uma soma de vários fasores componentes, mostramos que as partes real e imaginária do fasor resultante obedecem estatística gaussiana e a amplitude do fasor resultante obedece estatística Rayleigh. Notamos, também, que ao somarmos um fasor constante (localizado no eixo real, neste caso) à uma soma de fasores aleatórios, obtemos uma FDP Rician para a amplitude, de modo que esta pode tender a uma distribuição Rayleigh ou a uma distribuição Gaussiana, dependendo se  $A_0/\sigma$  tende a zero ou se cresce acentuadamente, respectivamente.

Outra observação, é que a distribuição de fase tende a uma distribuição uniforme ou a uma distribuição Gaussiana, à medida que  $A_0$  tende a zero ou cresce de maneira acentuada, respectivamente.

Para um campo em que sua amplitude possa ser representada por uma soma de fasores aleatórios e que as amplitudes componentes sejam estatisticamente independentes das fases componentes, as partes real e imaginária obedecem estatística Gaussiana, a amplitude obedece a uma distribuição Rayleigh, e a intensidade tenha distribuição exponencial negativa é chamado de campo Rayleigh, e o padrão de speckle formado a partir deste é chamado de padrão de speckle Rayleigh. Além disso, mostramos os fundamentos da holografia e o processo de construção de hologramas.

# 3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

## 3.1 Introdução

Neste capítulo, vamos expor e discutir os resultados experimentais os quais são explicados utilizando-se um modelo teórico. Tais resultados são frutos de um trabalho no qual investigamos os padrões de *speckles* não-Rayleigh em busca de desvendar, teórica e experimentalmente, suas propriedades estatísticas de primeira ordem. Utilizamos, aqui, hologramas de fase que codificam a fase e a amplitude de potências reais positivas de um campo de speckles Rayleigh. Estas potências são responsáveis pela transformação de um regime Rayleigh em um não-Rayleigh com aumento ou diminuição do contraste.

Já sabemos que padrões de *speckles* resultam de fenômenos puramente ondulatórios, os quais aparecem sempre que luz com alto grau de coerência, de qualquer natureza, incide sobre uma superfície opticamente rugosa. Por opticamente rugosa, nos referimos às superfícies que tem rugosidades da ordem do comprimento de onda da luz. Normalmente os padrões de speckles mostram propriedades estatísticas universais, conhecidas como estatísticas de Rayleigh [2].

## 3.2 Modelo Teórico

No nosso trabalho, iniciamos mostrando que é possível realizar cálculos analíticos para as estatísticas de potências de speckle Rayleigh. Suponhamos, então,

que o padrão de speckle Rayleigh seja dado por um campo complexo da forma

$$\psi(x,y) = |\psi| \exp[i\phi(x,y)], \quad (3.1)$$

consequentemente, a intensidade correspondente é dada por

$$I(x,y) = |\psi(x,y)|^2. \quad (3.2)$$

Se considerarmos a seguinte transformação na amplitude,  $|\psi| \longrightarrow |\psi|^\alpha$ , mantendo a fase do campo intacta, teremos que o campo resultante será

$$\psi'(x,y) = |\psi|^\alpha \exp[i\phi(x,y)], \quad (3.3)$$

de modo que a intensidade também será transformada, e dada por

$$W = |\psi|^{2\alpha}, \quad (3.4)$$

onde  $\alpha$  é um número real positivo. A variável aleatória  $W$  é relacionada com a variável aleatória  $I$  através da relação  $W = f(I) = I^\alpha$ .

Se duas variáveis aleatórias são conectadas através de uma função monotônica  $f$ , as funções densidade de probabilidade destas variáveis aleatórias estão relacionadas pela Eq.(2.44), que para o presente caso tem a seguinte forma,

$$\rho_W(W) = \rho_I(f^{-1}(W)) \left| \frac{dI}{dW} \right|, \quad (3.5)$$

onde  $\rho_I(I) = (1/2\sigma^2) \exp(-I/2\sigma^2)$  é a função densidade de probabilidade da in-

tensidade do campo de speckles Rayleigh.  $\rho_W(W)$  representa a nova (FDP) que é dada por,

$$\rho_W(W) = \frac{1}{2\alpha\sigma^2} W^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \exp\left(-\frac{W^{1/\alpha}}{2\sigma^2}\right), \quad (3.6)$$

que é conhecida como função densidade de probabilidade Weibull. Portanto, a distribuição de intensidade de nosso novo campo obedece a distribuição Weibull.

Aqui,  $\sigma$  é o desvio padrão das partes real ou imaginária do campo Rayleigh [1]. Notamos imediatamente que para  $\alpha = 1$ , a Eq.(3.6) se reduz a distribuição de intensidade do campo Rayleigh, para o qual o desvio padrão da intensidade é dado por  $\sigma_I = \langle I \rangle = 2\sigma^2$  como mostra as Eq.(2.48) e Eq.(2.52). Assim, para qualquer valor diferente de  $\alpha = 1$ , temos padrões de *speckles* não-Rayleigh, os *speckles* Weibull, e a função na Eq.(3.6) não é uma FDP do tipo exponencial negativa.

Podemos analisar esse mesmo comportamento através do parâmetro  $C$ , referido como contraste, definido de acordo com a Eq.(2.53),

$$C = \frac{\sigma_W}{\langle W \rangle} = \sqrt{\frac{\langle W^2 \rangle}{\langle W \rangle^2} - 1} \quad (3.7)$$

onde o primeiro e o segundo momento são dados, respectivamente, por  $\langle W \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W \rho_W(W) dW$  e  $\langle W^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W^2 \rho_W(W) dW$ , de modo que

$$\langle W \rangle = (2\sigma^2)^\alpha \Gamma(\alpha + 1) \quad (3.8)$$

e

$$\langle W^2 \rangle = (2\sigma^2)^{2\alpha} \Gamma(2\alpha + 1), \quad (3.9)$$

onde  $\Gamma(\cdot)$  é a função gama. A generalização para o  $n$ -ésimo momento é dada por

$$\langle W^n \rangle = (2\sigma^2)^{n\alpha} \Gamma(n\alpha + 1). \quad (3.10)$$

Substituindo as Eq.(3.8) e Eq.(3.9) na Eq.(3.7), encontramos o contraste como

$$C = \sqrt{\frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{[\Gamma(\alpha + 1)]^2} - 1}, \quad (3.11)$$

demonstrando que  $C$  pode ser maior ou menor do que 1, dependendo do valor de  $\alpha$ , o que caracteriza, realmente, o regime não-Rayleigh. No caso do regime Rayleigh, implica em  $\alpha = 1$  e conseqüentemente  $C = 1$ . Também é importante notar que na Eq.(3.11)  $C$  não depende de  $\sigma$ . Deste modo, nosso modelo sugere que podemos controlar a estatística dos padrões de speckles apenas variando o parâmetro  $\alpha$ .

Outra quantidade de interesse é a probabilidade da intensidade total exceder uma dada intensidade limite (*threshold*), ou seja,  $P(W \geq W_t)$ . Esta probabilidade pode ser calculada da seguinte forma,

$$P(W \geq W_t) = \int_{W_t}^{\infty} \rho_W(W) dW$$

$$P(W \geq W_t) = \exp\left(-\frac{W_t^{1/\alpha}}{2\sigma^2}\right) \quad (3.12)$$



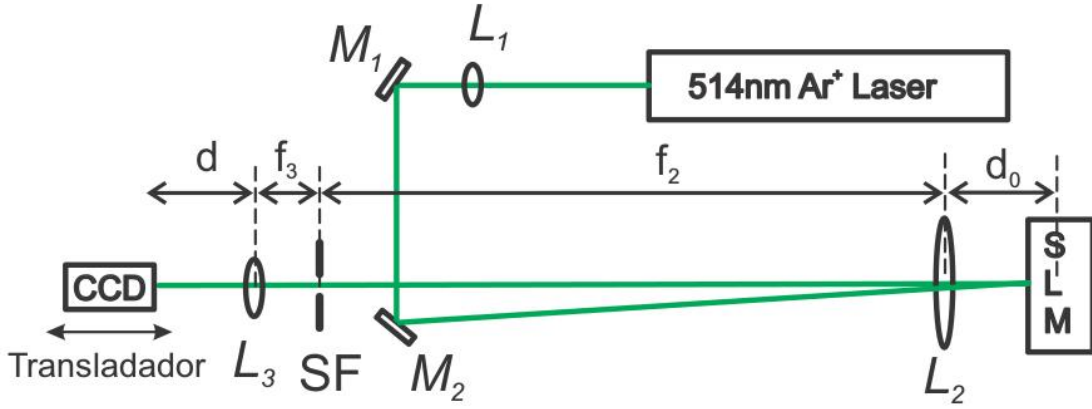
## 3.3 Experimento

### 3.3.1 Metodologia e Procedimentos

Agora vamos analisar os parâmetros teóricos apresentados acima e compará-los com os dados experimentais. Mas antes disso, faremos uma breve explanação dos métodos e procedimentos utilizados para obtê-los. A Fig.3.1 ilustra o aparato experimental: onde um feixe que emerge de laser de argônio,  $Ar^+$ , operando em  $514nm$ , é expandido por duas lentes,  $L_1$  e  $L_2$ , cofocal uma com a outra, as quais têm comprimentos focais  $f_1 = 31,7mm$  e  $f_2 = 1000mm$ , respectivamente. O feixe expandido forma uma onda plana que ilumina uniformemente um modulador espacial de luz (SLM) Hamamatsu, modelo X10468-01, colocado a uma distância  $d_0 = 20mm$  da lente  $L_2$ . Um filtro espacial (SF) é colocado no plano de Fourier da lente  $L_2$ . Cofocal com  $L_2$  está uma lente  $L_3$  de comprimento focal  $f_3 = 100mm$ , a qual é usada para formar a imagem do campo de speckle que está contido em um holograma inserido no (SLM). Em seguida colocamos uma câmera CCD de 16 bits, acoplada sobre um transladador, para capturar o campo gerado no (SLM). O transladador é usado para ajustar a CCD, de maneira precisa, ao ponto da imagem. A função dos espelhos  $M_1$  e  $M_2$  é de levar o feixe até o modulador de luz.

Utilizamos hologramas de fase tipo 3 [24] gerados por computador, tais hologramas codificam amplitude e fase do campo calculado na Eq.(3.3). Um ponto chave foi a utilização deste holograma capaz de codificar campos complexos em um holograma de fase. O holograma foi inserido no display do SLM. Como  $L_2$  e  $L_1$  são cofocais, assim o feixe, no caminho entre  $L_2$  e o SLM, é colimado. O feixe refletido no SLM é submetido a uma transformada de Fourier pela lente  $L_2$  e um

Figura 3.1: Ilustração do aparato experimental



Fonte: Autor

filtro espacial (SF) é usado para selecionar o campo desejado que é espalhado na primeira ordem de difração no plano de Fourier de  $L_2$ . Uma lente  $L_3$  de comprimento focal  $f_3$ , e cofocal com  $L_2$ , é usada para formar a imagem em uma câmera CCD de 16 bits, que é montada em cima de um translador. Uma imagem do campo no SLM é formada a uma distância  $d$  da lente  $L_3$ , e chamamos este plano de plano  $z = 0$ .

Para gerarmos speckle não-Rayleigh, primeiro obtemos o campo de speckle Rayleigh, numericamente, realizando-se uma transformada de Fourier inversa de uma matriz de fase aleatória não correlacionada. Então aplicamos uma transformação de potência para obtermos a amplitude do novo campo de speckles  $|\psi| \rightarrow |\psi|^{\alpha_h}$ , deixando sua fase intocada.  $\alpha_h$  se refere ao valor do parâmetro codificado no holograma. Codificamos este novo campo no holograma de fase, que é exibido no SLM. Calculamos o campo de *speckles* e seus hologramas em uma matriz de  $600 \times 792$  que corresponde ao tamanho de SLM.

Um questão que pode ser levantada é no que diz respeito à configuração ex-

perimental, pois no nosso aparato experimental a lente  $L_2$  está a uma pequena distância  $d_0$  do SLM, no entanto, sabe-se que se  $d_0 = f_2$  o termo de fase quadrática na integral de propagação de Fresnel seria eliminado [25]. Como não é o caso, temos que verificar a influência deste termo no processo de formação de imagem no plano da CCD.

Para uma melhor compreensão da configuração experimental, consideramos a propagação óptica paraxial do plano do SLM ao plano da CCD. Cada um dos elementos individuais que compõem o sistema óptico pode ser descrito por uma matriz de transferência de raio  $ABCD$ , no entanto, a matriz para uma sucessão de sistemas ópticos é o produto das matrizes de cada sistema óptico individual [22,27]. No nosso caso, temos cinco sistemas onde se verifica propagação paraxial: a propagação no espaço livre do SLM à lente  $L_2$ , separados pela distância  $d_0$ , cuja matriz de transferência é

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & d_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (3.13)$$

propagação através de  $L_2$ , cuja matriz de transferência é

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{bmatrix}; \quad (3.14)$$

em seguida, outra propagação no espaço na região entre as lentes  $L_2$  e  $L_3$  de distância  $f_2 + f_3$ , e a matriz de transferência é dada por

$$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 1 & f_2 + f_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (3.15)$$

então, uma propagação através da lente  $L_3$  de matriz de transferência

$$\mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_3} & 1 \end{bmatrix}; \quad (3.16)$$

e finalmente, uma última propagação no espaço livre, da lente  $L_3$  à câmera CCD, de distância  $d$  de matriz de transferência

$$\mathbf{M}_5 = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

De maneira que a matriz  $ABCD$  resultante é

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{M}_5 \mathbf{M}_4 \mathbf{M}_3 \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \\ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & f_2 + f_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, teremos que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_3/f_2 & -d(f_2/f_3) - d_0(f_3/f_2) + f_2 + f_3 \\ 0 & -f_2/f_3 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

O campo que emerge do holograma pode ser expresso como uma série de Fourier (na variável que expressa a fase do campo codificado) de quem o termo de primeira ordem é o campo de *speckles* não-Rayleigh codificado e espacialmente separado ao

longo da propagação como a primeira ordem de difração [24]. O filtro espacial (SF), colocado no foco da lente  $L_2$ , seleciona espacialmente este campo das outras ordens de difração indesejadas. Portanto, podemos escrever a campo no plano da CCD, usando a integral de Collin [28], como segue

$$E(x,y) = \frac{ike^{-ikL}}{2\pi B} \times \int \int h_1(x_0,y_0) \exp \left\{ \left( -\frac{ik}{2B} \right) [D(x^2 + y^2) - 2xx_0 - 2yy_0 + A(x_0^2 + y_0^2)] \right\} dx_0 dy_0, \quad (3.19)$$

onde  $h_1(x_0,y_0)$  é o termo de primeira ordem da série de Fourier do holograma, correspondendo ao termo de primeira ordem de difração selecionado pelo SF, e  $L$  é a distância óptica axial entre o SLM e a CCD.

A condição para a formação de uma imagem na posição da CCD é dada tomando o limite de  $B \rightarrow 0$  [29]. Usando esta aproximação para  $B$  na Eq.(3.18), obtemos que

$$-d(f_2/f_3) - d_0(f_3/f_2) + f_2 + f_3 = 0$$

$$d = (f_2 + f_3) \frac{f_3}{f_2} - d_0 \frac{f_3^2}{f_2^2}. \quad (3.20)$$

Notamos que para  $d_0 = 0$  e  $f_2 \gg f_3$ , tem-se que  $d = (f_2 + f_3) \frac{f_3}{f_2} \approx f_3$ , e para  $d_0 = f_2$  obtemos  $d = f_3$ . Usando os valores do experimento obtemos  $d = 109,8mm$ , confirmando que uma imagem é formada a uma distância ligeiramente maior que a distância focal da lente  $L_3$ .

Observamos também que no caso limite de  $B \rightarrow 0$  (condição para formação de

imagem), a Eq.(3.19) se reduz [29],

$$E(x,y) = \frac{\exp(-ikL)}{A} h_1 \left( \frac{x}{A}, \frac{y}{A} \right) \exp \left[ -i \frac{kC}{2A} (x^2 + y^2) \right], \quad (3.21)$$

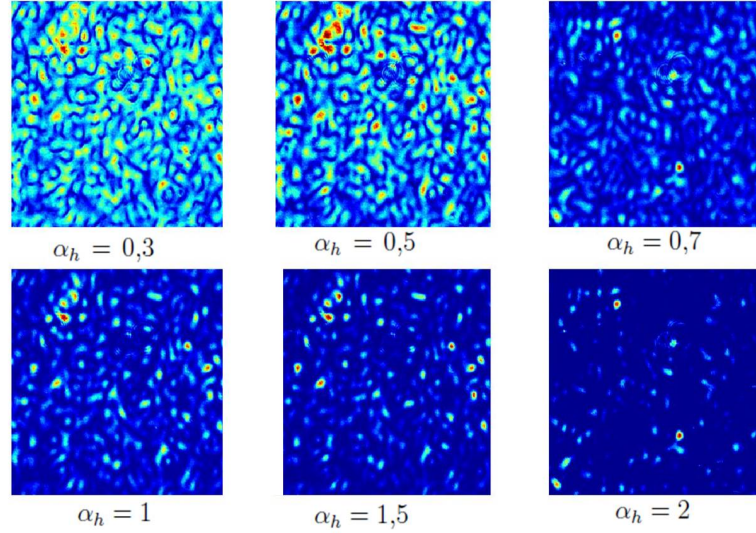
e como, da Eq.(3.18), vemos que  $C = 0$ , implicando que há apenas o campo de speckle no plano da CCD, isto é, o termo de fase quadrática não aparece, e o termo  $A = -f_3/f_2$  é o fator de ampliação.

### 3.3.2 Resultados Experimentais

De posse do modelo teórico e dos hologramas para os diversos valores de  $\alpha_h$  codificados, obtemos os vários padrões de *speckles* não-Rayleigh. Assim, apresentaremos agora os resultados experimentais obtidos, e compararemos os resultados experimentais com a teoria na qual são embasados. Devemos salientar que trabalhamos com seis conjuntos, cada qual constituído por mil padrões de *speckles* para seus respectivos valores de  $\alpha_h$  codificados. Na Fig.3.2 é mostrado seis padrões de *speckles*, um para cada valor de  $\alpha_h$  codificado, os quais representam um única realização de cada conjunto e na Fig.3.3 é mostramos um exemplo de holograma utilizado.

Iniciamos fazendo uma comparação das imagens dos padrões medidos no plano da imagem, ( $z = 0$ ), com as imagens destes mesmos padrões agora transladados de uma determinada distância  $z$  do plano da imagem. As Figs.3.4(A), 3.4(B) e 3.4(C) mostram os padrões medidos, no plano da imagem, e as Figs.3.4(D), 3.4(E) e 3.4(F) mostram os padrões de *speckles* distante do plano da imagem de uma distância  $z = 4,5mm$ . As Figs.3.4(A) e 3.4(C) mostram os padrões de *speckles* medidos para  $\alpha_h = 0,3$ , e  $\alpha_h = 2$ , respetivamente, enquanto que a Fig.3.4(B) corresponde

Figura 3.2: Ilustração dos representantes dos seis conjuntos de padrões de speckles medidos para seus respectivos valores de  $\alpha_h$  codificados.

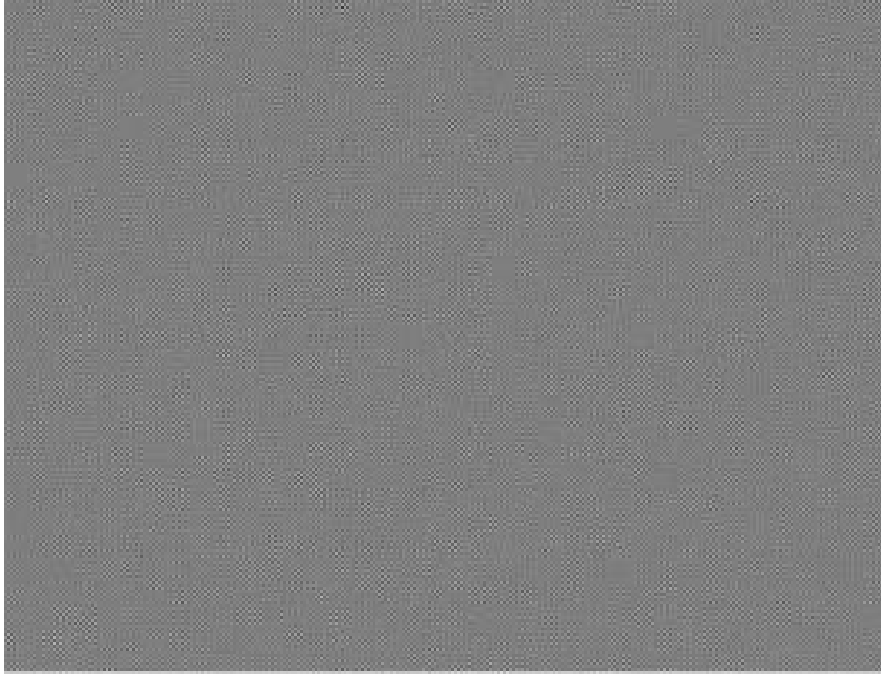


Fonte: Autor

ao padrão de *speckles* Rayleigh com  $\alpha_h = 1$ . O comportamento Rayleigh ou não-Rayleigh dos padrões de *speckles* é evidenciado através do cálculo do contraste usando a Eq.(3.7), onde o cálculo da média foi feito sobre todos os pixels e sobre todas as medidas do ensemble.

Notamos que os padrões gerados a partir de  $\alpha_h = 0,3$  e  $\alpha_h = 2$  apresentam, claramente, estatística não-Rayleigh no plano de imagem. No entanto, distante do plano  $z = 0$ , observamos que a estatística dos padrões de *speckles* se assemelha com a estatística Rayleigh. Por outro lado, nas Figs.3.3(B) e 3.4(E) há apenas uma mudança na posição dos grãos de *speckles*, contudo, a distribuição entre os mesmos permanece constante, logo, a estatística continua sendo Rayleigh. Deste modo, os padrões com estatística não-Rayleigh são observados apenas nas proximidades do plano da imagem. Este fato ficará mais claro na medição do contraste como uma função da distância de propagação apresentado mais adiante nesta seção.

Figura 3.3: Exemplo do holograma utilizado para gerar os padrões de speckles experimentais.



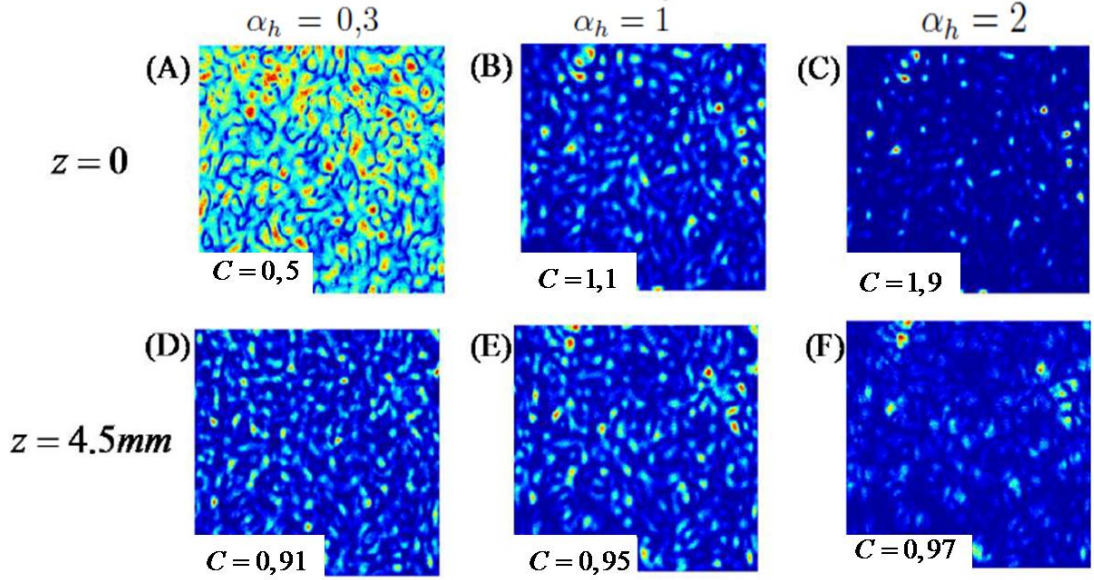
Fonte: Autor

Agora, através da construção dos histogramas da distribuição de intensidade dos padrões de *speckles* para os diversos valores de  $\alpha_h$  codificados, analisamos, experimentalmente, se é constatado desvio da estatística Rayleigh. Portanto, a Fig.3.5 apresenta os histogramas médios da intensidade calculados numericamente para 1000 padrões de *speckles* (quadrados brancos). A intensidade medida foi normalizada pela intensidade média correspondente. Os histogramas experimentais também foram normalizados de modo que a área total sob os mesmos seja um. As Figs.3.5(A-F) mostram os histogramas médios dos *speckles* para diferentes valores do parâmetro  $\alpha_h$  codificado no holograma: 3.5(A),  $\alpha_h = 0,3$ ; 3.5(B),  $\alpha_h = 0,5$ ; 3.5(C),  $\alpha_h = 0,7$ ; 3.5(D),  $\alpha_h = 1$ ; 3.5(E),  $\alpha_h = 1,5$ ; e 3.5(F),  $\alpha_h = 2$ .

Fizemos o *fit* das FDPs experimentais com a Eq.(3.6) (linha vermelha), em que



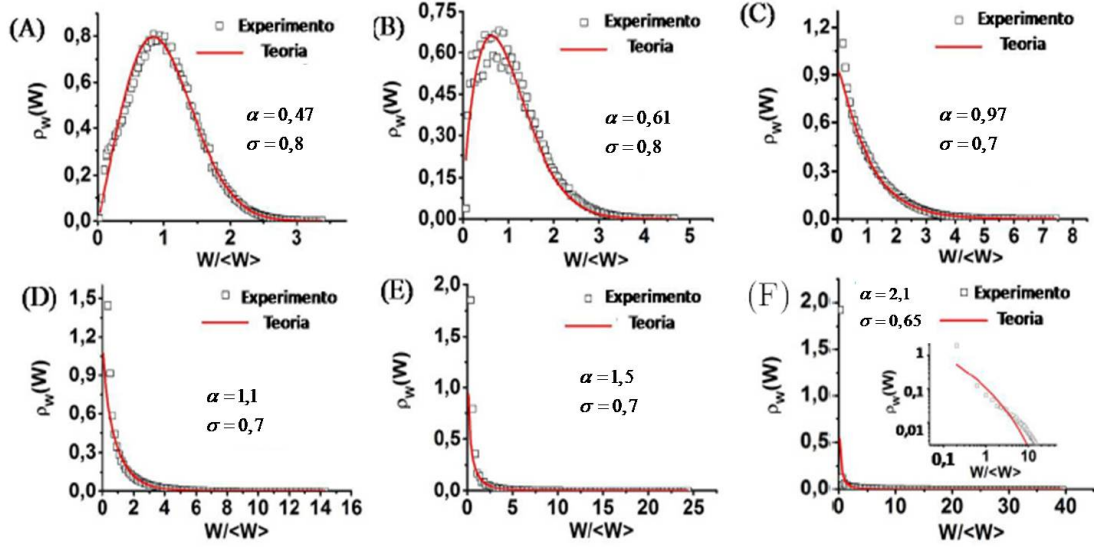
Figura 3.4: Padrões de speckles no plano da imagem em  $z = 0$ , e transladados de  $z = 4,5mm$  do plano da imagem.



Fonte: Autor

$\alpha$  e  $\sigma$  mostrados na Fig.3.5 são os valores obtidos no *fit* a partir desta equação. Observa-se que os parâmetros  $\alpha$  obtidos a partir do *fit* nem sempre correspondem aos codificados no holograma  $\alpha_h$ . Isto acontece porque o holograma gera várias ordens de difração, e o sinal é filtrado espacialmente no plano de Fourier do holograma durante o processo de reconstrução óptica, conseqüentemente, uma parte do sinal é perdido. Este efeito é mais evidente para  $\alpha < 1$ , já que neste caso o campo desejado é fortemente espalhado no plano de Fourier, tornando difícil filtrá-lo espacialmente sem perder parte do sinal. Contudo, para  $\alpha \geq 1$ , o campo desejado não é espalhado tão fortemente, assim, existe uma boa correspondência entre os valores dos parâmetros obtidos no *fit* e os codificados no holograma. É importante notar que o valor de  $\sigma$  depende da intensidade média  $\langle I \rangle$  da estatística

Figura 3.5: Histogramas médios da intensidade para 1000 realizações dos padrões de speckle para os vários valores de  $\alpha_h$  codificados.



Fonte: Autor

Rayleigh, uma vez que  $\sigma_I = \langle I \rangle = 2\sigma^2$ , de acordo com as (2.52) e (2.48). Portanto,  $\sigma$  deve ter o mesmo valor na Fig.3.5, mas observamos que em alguns momentos os valores de  $\sigma$  não corresponde com o esperado, tal situação é causada pela alteração da potência do laser durante as medições devido aos diferentes  $\alpha_h$ , mas os valores ainda são muito próximos do esperado.

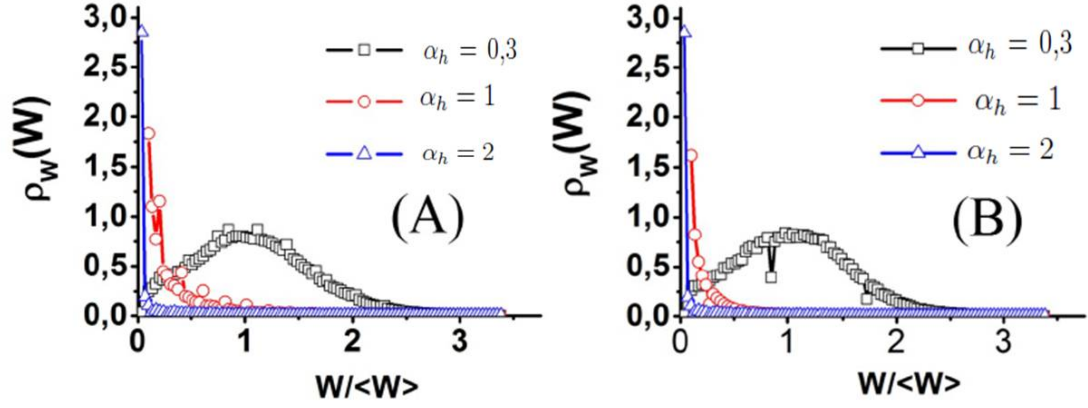
Mesmo que não possamos obter exatamente o campo codificado, somos capazes de obter speckle não-Rayleigh para  $\alpha \neq 1$ , onde as FDPs se desviam da distribuição exponencial negativa, como pode ser visto comparando a exponencial negativa apresentada na Fig.3.5(D) com as outras distribuições da Fig.3.5. Nesta mesma figura observamos que para  $\alpha < 1$  há uma alta probabilidade de se encontrar valores de intensidade distante de zero, como mostra a Fig.3.5(A) por exemplo, onde a FDP indica maior probabilidade de encontrarmos valores de intensidade

normalizados entre 0,5 e 1,5. Por outro lado, para  $\alpha > 1$  as FDPs mostram que há alta probabilidade de se detectar pequenos valores de intensidade, como mostrado pelo pico estreito em torno de pequenos valores de intensidades (vê Fig.3.5(E)), por exemplo. No entanto na Fig.3.5(F), notamos que há poucos pontos, tanto no eixo  $W$  quanto no eixo  $\rho_W(W)$ , para localizar os dados experimentais, assim, extraímos um sub-plot dimensionado em escala logarítmica o qual evidencia bem mais pontos referentes aos dados experimentais.

Até agora, temos analisado os histogramas de intensidade em todo o plano da imagem na média do ensemble. Isso, no entanto, não exclui a possibilidade de que as estatísticas sejam localmente estatísticas Rayleigh [2]. Para esclarecer este ponto, a Fig.3.6(A) mostra o histograma coletado de uma matriz de  $5 \times 5$  pixels da CCD, no centro do plano da imagem e calculado sobre 1000 diferentes medidas. Esta matriz corresponde a uma região menor do que a área de um único *speckle*. Contudo, notamos que esta intensidade local segue estatísticas com a mesma forma daquelas constatadas na Fig.3.5. Além disso, a Fig.3.6(B) mostra os histogramas para a distribuição da intensidade de um padrão de *speckles* que constitui uma única realização. Assim, notamos que os padrões de *speckles* não-Rayleigh gerados experimentalmente resultam da redistribuição da intensidade entre os grãos de *speckles*, não sendo, entretanto, devido às flutuações na intensidade total de diferentes realizações de *speckles*. Para verificar isto, comparamos o histograma de uma única realização de *speckles*, Fig.3.6(B), com histograma médio de 1000 realizações, Figs.3.5(A), (D) e (F), e vemos que eles têm o mesmo comportamento.

Outra maneira de analisar os desvios da estatística Rayleigh, é através do contraste. E a Fig.3.7(A) mostra o contraste dos padrões de *speckles* codificados como

Figura 3.6: Histogramas para estudo das propriedades estatísticas locais, (A) da média de 1000 realizações e (B) para uma única realização

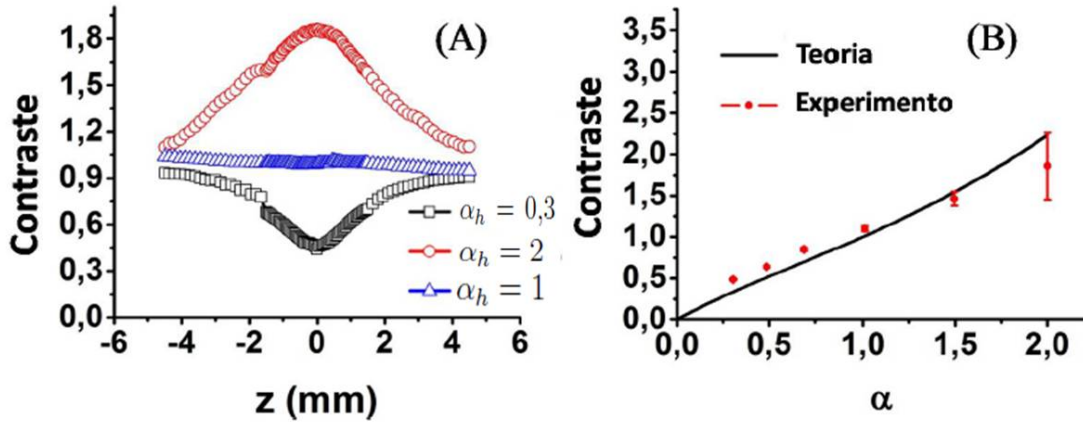


Fonte: Autor

uma função da distância entre o plano da imagem do SLM ( $z = 0$ ) e o plano em que o padrão de intensidade de speckles é medido pela câmara CCD. Para obter esse contraste medimos um único padrão de speckle em algumas posições ao longo de  $z$ , e em cada posição usamos a Eq.(3.7) para calcular o contraste em termos das médias das intensidades de todos os pixels. Novamente, observamos que o comportamento não Rayleigh é verificado apenas em torno do ponto da imagem, e, portanto, estes resultados demonstram que o contraste dos *speckles* não-Rayleigh são axialmente dependentes, enquanto que o contraste dos *speckles* Rayleigh permanece constante. Quando aplicamos a transformação potência,  $|\psi| \rightarrow |\psi|^\alpha$ , para a amplitude do campo de *speckles* preservando sua fase, a propagação do campo aleatório resultante gera *speckles* Rayleigh [2]. A Fig.3.7(B) mostra o contraste dos *speckles* medidos experimentalmente no plano da imagem do SLM (pontos vermelhos) e o contraste teórico (linha preta), calculado a partir da Eq.(3.11), ambos em função do parâmetro  $\alpha$ . Salientamos que na Fig.3.7(B) não há *fit*, apenas traçamos

os dois gráficos na mesma figura.

Figura 3.7: Gráficos que mostram o contraste, (A) como função da distância  $z$  ao plano da imagem e (B) como função do parâmetro  $\alpha$  no plano da imagem.



Fonte: Autor

Para obter o contraste experimental na Fig.3.7(B), tomamos a média da intensidade de 1000 padrões de speckles, bem como sobre todos os pixels. Notamos, portanto, que o contraste aumenta com o aumento de  $\alpha$ . Uma observação importante é que as barras de erro são fornecidas pelos resultados experimentais. Para  $\alpha < 1$  os erros são devidos, principalmente, o processo de filtragem na geração experimental do campo, como já anteriormente mencionado no presente texto. Como resultado, observa-se que as barras de erro são muito pequenas e o desvio a partir da teoria corresponde a erros sistemáticos no processo de filtragem. Para  $\alpha > 1$ , os erros são devidos, principalmente, ao processo de detecção na CCD, ou seja, erros radômicos, ocasionados pelo fato de a maioria dos pontos terem baixa intensidade. No caso de usarmos  $\alpha \gg 1$ , o contraste irá ser ainda mais elevado, mas Eq.(3.6) nos diz que o padrão tende a ser um pico estreito perto de zero, o que significa que quase todas os valores de intensidades são zero.

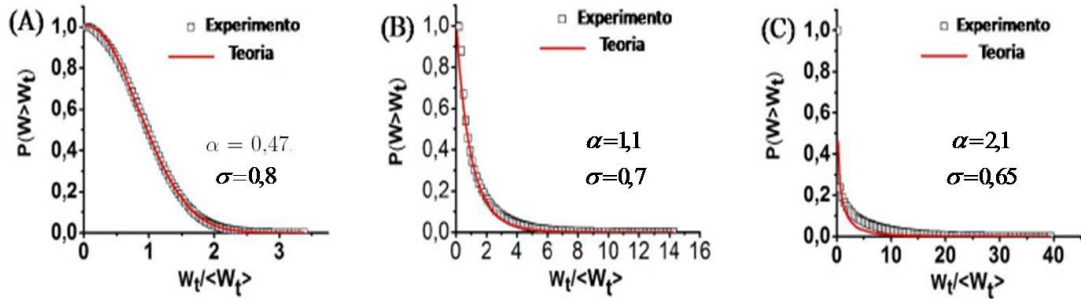
Finalmente, passamos a analisar os resultados experimentais e sua comparação com os resultados teóricos para a probabilidade de a intensidade total normalizada exceder uma intensidade limite (threshold),  $W_t$ . Tais resultados estão ilustrados na Fig.3.8. Os resultados teóricos, linha vermelha, são traçados usando a Eq.(3.12) e os parâmetros obtidos no *fit* na Fig.3.5. Os resultados experimentais, quadrados brancos, são obtidos utilizando integração numérica dos histogramas correspondentes aos resultados experimentais apresentados também na Fig.3.5.

Observa-se que para  $\alpha = 0,47$ , Fig.3.8(A), existe uma probabilidade muito pequena de a intensidade exceder valores superior a 2, de modo que há uma alta probabilidade de encontramos pontos com baixa intensidade. Para  $\alpha = 2,1$  a luz é concentrada em alguns pontos nos padrões, o que significa que a maior parte dos pontos têm baixa intensidade, implicando que há uma probabilidade bem maior de se encontrar pontos com alta intensidades do que no caso de  $\alpha = 0,47$ . Quando  $\alpha = 1,1$ , a análise não nos mostra nada novo, pois é o caso da estatística Rayleigh, em que não há tendência de se obter maior ou menor probabilidade para pontos de máximos ou de mínimos, já que os grãos de *speckles* são aleatoriamente distribuídos.

### 3.4 Conclusão

Portanto, além de nossos resultados experimentais concordarem muito bem com o modelo teórico, calculamos campos de *speckles* não-Rayleigh e para tal usamos hologramas de fase para codificar amplitude e fase deste campo. Os cálculos de tais hologramas não requerem nenhuma otimização, não sendo demorada a produção de grandes conjuntos de amostras de *speckles*, o que nos deixa com vantagem em

Figura 3.8: Probabilidade de a intensidade total normalizada exceder uma determinada intensidade limite  $W_t$  (A) para  $\alpha = 0,47$ ; (B) para  $\alpha = 1,1$ ; e (C) para  $\alpha = 2,1$ .



Fonte: Autor

relação a outros métodos de geração de campos de speckles não-Rayleigh, já que alguns trabalhos lançam mão de otimização como o algoritmo de Gershberg-Saxton [2]. Além disso, agora podemos aumentar ou diminuir o contraste dos padrões de *speckles* variando apenas o parâmetro  $\alpha$ .

Por fim, vamos considerar algumas aplicações para esses novos campos de *speckles*: movimento dos átomos e de partículas coloidais [31-32] iluminados por *speckles* com estatística controlada pode apresentar novas propriedades física interessantes; além disso, através da medição simultânea da intensidade e do campo de speckles, poderíamos ser capazes de investigar a relação entre as funções de correlação da intensidade e do campo, e, portanto, investigar a validade da relação Siegert para speckles não-Rayleigh, em experimentos envolvendo correlação espacial [33,34].

## 4. Conclusão Geral

Iniciamos nossos estudos com uma explanação introdutória que visa dar uma ideia geral do fenômeno de speckle. Procuramos englobar os aspectos de surgimento e manifestação do fenômeno de speckles, dando ênfase às estatísticas universais, conhecidas como estatísticas Rayleigh. Explanamos também sobre as teorias que embasam este fenômeno, que é o caso da teoria da estatística de speckle. No caso de configurações ópticas para formação de imagens e reconstrução óptica, focamos para o conhecimento sobre holografia. Vimos que muitos estudos e aplicações dos *speckles* estão voltados para investigações de métodos de geração de padrões com desvio das estatísticas Rayleigh.

No segundo capítulo desta dissertação, abordamos sobre a estatística de speckles. Mostramos que a função densidade de probabilidade conjunta das partes real e imaginária do campo complexo dado por uma somatória de fasores obedece estatística Gaussiana. E que a amplitude deste mesmo campo obedece a uma distribuição Rayleigh. Mostramos também que o simples fato de adicionarmos um fasor constante a uma soma aleatória de fasores, é suficiente para termos uma mudança na estatística do fasor resultante desta operação. E, a partir da teoria estatística mostramos o processo de obtenção da função densidade de probabilidade da intensidade.

De posse dos conceitos e teoria de estatística de *speckle*, e holografia, construímos todo um modelo teórico e os métodos para posterior experimentação e comprovação do modelo, para um problema até então puramente experimental [2]. Além do mais, ao contrário de [2], construímos holograma, para geração dos



padrões de speckles, sem processos iterativos, o que nos dá grande economia de tempo.

No terceiro capítulo, mostramos todo o caminho para construção do modelo teórico e todos os métodos e procedimentos para a obtenção dos dados experimentais. Assim, na seção 3.2, detalhamos todo nosso modelo teórico, o qual é obtido a partir de uma transformação na amplitude de um campo Rayleigh do tipo  $|\psi| \rightarrow |\psi|^\alpha$ , deixando a fase do campo intocada. No processo de teorização, constatamos que uma das quantidades mais importante é o contraste, pois nos mostra que, pelo menos no plano da imagem, podemos gerar speckles com estatística não-Rayleigh.

Já na seção 3.3, mostramos os resultados experimentais. Neste ponto, geramos os padrões de *speckles* de modo que a estatística destes padrões está de acordo com nosso modelo teórico e, a partir destes, construímos figuras com os histogramas da distribuição de intensidade, do contraste como função da distância  $z$  e como função de  $\alpha$ , os quais nos dizem que, realmente, conseguimos obter experimentalmente padrões de speckles com estatística não Rayleigh. E a obtenção destes tipos de padrões é muito relevante, pois no caso específico em que se lança mão da técnica de ultrassom para obtenção de imagens médicas de determinadas partes internas do corpo, os parâmetros das distribuições não-Rayleigh podem ser usados para a caracterização de tecidos, indicando possivelmente os tecidos sadios e doentes [35].

- [1], J. W. Goodman, *Speckle Phenomena in Optics: Theory and Applications*, Roberts and Co., 2007.
- [2], Yaron Bromberg; Hui Cao, *Generating Non-Rayleigh Speckles with Tailored Intensity Statistics*, *Phys Rev Lett* 112,213904 (2014).
- [3], M. P. Cagigal; V. F. Canales, "Experimental checking of the Rician statistics in partially compensated wavefronts", *Opt Eng* 40, 2690-2697, 2001.
- [4], M. Y. Kirillin; G. Farhat; E. A. Sergeeva; M. C. Kolios; A. Vitkin, "Speckle statistics in OCT images: Monte Carlo simulations and experimental studies", *Opt Lett* 39, 3472-3475, 2014.
- [5], J. J. Greffet; R. Carminati, "Relationship between the near-field speckle pattern and the statistical properties of a surface", *Ultramicroscopy* 61, 43-50 (1995).
- [6], A. Apostol; A. Dogariu, "Non-Gaussian statistics of optical near-fields", *Phys Rev E* 72, 025602(R) (2005).
- [7], J. W. Goodman, "Speckle with a finite number of steps," *Appl Optics* 47, A111-A118 (2008).
- [8], D. G. Grier; Y. Roichman, "Holographic optical trapping", *Appl Optics* 45, 880-887 (2006).
- [9], J. Billy; V. Josse; Z. C. Zuo; A. Bernard; B. Hambrecht; P. Lugan; D. Clement; L. Sanchez-Palencia; P. Bouyer; A. Aspect, "Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder", *Nature* 453, 891-894 (2008).
- [10], K. M. Douglass; S. Sukhov; A. Dogariu, "Superdiffusion in optically controlled active media," *Nat Photonics* 6, 833-836 (2012).
- [11], R. Heintzmann; M. G. L. Gustafsson, "Subdiffraction resolution in continuous samples," *Nat Photonics* 3, 362-364 (2009).

- [12], G. Maire; F. Drsek; J. Girard; H. Giovannini; A. Talneau; D.Konan; K. Belkebir; P. C. Chaumet; A. Sentenac, "Experimental Demonstration of Quantitative Imaging beyond Abbe's Limit with Optical Diffraction Tomography", *Phys Rev Lett* 102, 213905 (2009).
- [13], E. Mudry; K. Belkebir; J. Girard; J. Savatier; E. Le Moal; C. Nicoletti; M. Allain; A. Sentenac, "Structured illumination microscopy using unknown speckle patterns,"*Nat Photonics* 6, 312-315 (2012).
- [14], S. S. Ulyanov, "High-resolution speckle-microscopy: study of the spatial structure of a bioflow,"*Physiol Meas* 22, 681-691 (2001).
- [15], J. Gateau; T. Chaigne; O. Katz; S. Gigan; E. Bossy, "Improving visibility in photoacoustic imaging using dynamic speckle illumination,"*Opt Lett* 38, 5188-5191 (2013).
- [16], B. A. v. Tiggelen; S. E. Skipetrov, *Wave scattering in complex media : from theory to applications* (Kluwer Academic Publishers, 2003).
- [17], S. H. Zhang; L. Gao; J. Xiong; L. J. Feng; D. Z. Cao; K. Wang, "Spatial Interference: From Coherent to Incoherent,"*Phys Rev Lett* 102, 073904 (2009).
- [18], A. J. Jesus-Silva; J. M. Hickmann; E. J. S. Fonseca, "Strong correlations between incoherent vortices,"*Opt Express* 20, 19708-19713 (2012).
- [19], L. E. REICHL, *A Modern Course in Statistical Physics. 2nd Edition*, A Wiley-Interscience Publication JOHN WILEY SONS, INC.
- [20], J. W. Goodman, *Statistical Optics*. JOHN WILEY SONS, New York. NY, 1985.
- [21], Gary L. Cloud, *OPTICAL METHODS OF ENGINEERING ANALYSIS*, Cambridge University Press, New York, 1995.
- [22], B. E. A. SALEH; M. C. TEICH, *FUNDAMENTALS OF PHOTONICS*, SE-

COND EDITION, New Jersey, 2007.

[23], R. L. Eriksen; P. C. Mogensen; J. Glückstad, Elliptical polarisation encoding in two dimensions using phase-only spatial light modulator, *Opt. Com.* 187, 325-336, 2001.

[24], V. Arrizon; U. Ruiz; R. Carrada; L. A. Gonzalez, "Pixelated phase computer holograms for the accurate encoding of scalar complex fields", *J Opt Soc Am A* 24 3500-3507, 2007.

[25], J. W. Goodman, Introduction to Fourier Optics, 2.ed. Stanford University, McGraw-Hill, 1996.

[26], Hector J. Rabat; Roberto A. Braga Jr, Dynamic laser speckle and applications, CRC Press, 2009.

[27], Ting-Chung Poon; Taegeun Kim, ENGINEERING OPTICS WITH MATLAB, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2006.

[28], S. A. Collins, Lens-System Diffraction Integral Written in Terms of Matrix Optics, *J Opt Soc Am* 60, 1168 (1970).

[29], A. Yariv, Imaging of coherent fields through lenslike systems, *Opt. Lett.* 19, 1607 (1994).

[30], David G. Grier; Yael Roichman, Holographic optical trapping, *Appl. Opt.* 45, 880 (2006).

[31], J. Billy et al, Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder, *Nature (London)* 453, 891 (2008).

[32], K. M. Douglass, S. Sukhov, and A. Dogariu, Superdiffusion in optically controlled active media, *Nat. Photonics* 6, 834 (2012).

[33], S. H. Zhang; L. Gao; J. Xiong; L. J. Feng; D. Z. Cao; K. Wang,, Spatial Interference: From Coherent to Incoherent, *Phys. Rev. Lett.* 102, 073904 (2009).

[34], A. A. Jesus-Silva; J. M. Hickmann; E. J. S. Fonseca, Strong correlations between incoherent vortices, *Optics Express* 20, 19708 (2012).

[35], C. D. Maciel; W. C. A. Pereira, MODELAGEM E PROCESSAMENTO DE SPECKLE EM IMAGEM ULTRA-SÔNICA: UMA REVISÃO, *RBE - Caderno de Engenharia Biomédica*, v. 13, n. 1, p. 71-89, jan/jun 1997.