

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Superdifusão de Caminhadas Markovianas
e não-Markovianas

Marcelo Felisberto de Lima

MARCELO FELISBERTO DE LIMA

Superdifusão de Caminhadas Markovianas
e não-Markovianas

Dissertação apresentada ao Instituto
de Física da Universidade Federal
de Alagoas como pré-requisito para
obtenção do título de Mestre em Física.

Orientadora: Prof(a). Dra. Solange Bessa Cavalcanti

Co-orientador: Prof. Dr. M. Viswanathan Gandhi Mohan

Maceió - Alagoas - Brasil

Maio - 2007

BANCA EXAMINADORA

1^o Examinador

2^o Examinador

3^o Examinador

Maceió - Alagoas - Brasil

Maio - 2007

Dedico este trabalho aos meus pais, a
meus amigos, e a minha esposa, peças fundamentais na
minha formação e opção profissional.

AGRADECIMENTOS

De coração, eu agradeço a minha mãe e a meu pai por me darem a valiosa oportunidade de estudar. Meus pais foram fundamentais em todos os passos dados na minha vida, são os responsáveis por tudo. Nada que eu faça pagará o que eles fizeram e fazem por mim. Obrigado Pai e Obrigado Mãe vocês são especiais. Agradeço também a meu irmão Eduardo e a minha irmã Patricia, pelo companheirismo. Aos meus amigos do peito, jadi, Jorge Paulo, Agnaldo, ao Fred, aos brothers do Piauí Ricardo, Adelino e Ildemir. Sou muitíssimo grato aos meus orientadores professores Gandhi e Solange pela paciência que tiveram comigo, pela oportunidade de fazer o mestrado ao concordarem em me orientar. todos foram, são, e serão grandes companheiros de trabalhos e vivência. Obrigado a todos.

Uma pessoa em especial que merece muito do meu agradecimento é minha esposa marina. Você foi crucial para eu pudesse terminar meu trabalho.

Como de costume, Gostaria também de agradecer ao National Geographic Channel (NGC) e ao Discovery Channel, por se empenharem em transmitir as pessoas informações de alta qualidade e valor científico.

“Quando somos crianças, somos um pouco de cada coisa. Artista, cientista, atleta, erudito. Às vezes parece que crescer é desistir destas coisas, uma a uma. Todos nos arrependemos por coisas das quais desistimos. Algo de que sentimos falta. De que desistimos por sermos muito preguiçosos, ou por não conseguirmos nos sobressair, ou por termos medo”.

(Kevin Arnold, no episódio “Coda” de Anos Incríveis)

Resumo

Caminhadas aleatórias são ferramentas usadas na física estatística para descrever quantitativamente a evolução de sistemas dinâmicos. Tais sistemas existem na natureza e cada sistema requer uma abordagem única. Modelos de movimento de organismos biológicos são construídos baseados na aleatoriedade observada em estratégias de busca. Modelos Markovianos tentam fielmente reproduzir o comportamento do movimento de animal, por exemplo a tendência para reter memória direcional. São conhecidos dois modelos de caminhadas aleatórias que, independentemente, descrevem buscas aleatórias. Caminhadas aleatórias correlacionadas (CRW, Correlated Random Walk) descrevem eventos de re-orientação via uma distribuição de ângulos de rotação entre os sucessivos passos. Ao contrário, uma caminhada de Lévy (LW, Lévy Walk) usa uma distribuição uniforme de ângulos de rotação para os eventos de re-orientação com uma distribuição tipo lei de potência (i.e. para a cauda) para o tamanho dos passos. Nesta dissertação, nós introduzimos um novo modelo híbrido chamado caminhada Lévy Correlacionado (CLW, Correlated Lévy Walk). Esse modelo usa tanto distribuição não uniforme de ângulos de rotação para os eventos de re-orientação como uma distribuição de tamanho de passos com cauda seguindo uma lei de potência. Nós aplicamos este modelo para descrever movimento animal e discutir as propriedades estatísticas de tais caminhadas. Em uma segunda parte desta dissertação, nós revisamos uma importante classe de processos estocásticos não-Markovianos, baseado em estudos recentes de caminhadas com memória ilimitada gerada através de um processo de decisão binária com memória parcial ou completa da história do sistema.

Abstract

Random walks are tools used in statistical physics to quantitatively describe the evolution of dynamical systems. Such systems are ubiquitous in Nature and each system requires a unique approach. Models of the motion of biological organisms are constructed based on the randomness observed in search strategies. Markovian models attempt to faithfully reproduce the movement behavior of animals, for example the tendency to retain directional memory. Two independent Markovian models are known that describe random searches. Correlated Random Walks (CRW) describe re-orientation events via a distribution of turning angles between successive steps. In contrast, a Lévy Walk (LW) uses a uniform turning angle distribution with a power law tailed distribution for the step lengths. In this thesis, we introduce a new hybrid model called Correlated Lévy Walk (CLW). This model uses both a nonuniform turning angle distribution as well as a power law tailed step length distribution. We apply this model to describe animal movement and discuss the statistical properties of such walks. In the second part of this thesis, we review an important class of stochastic non-Markovian processes, based on recent studies of walks with unlimited memory generated from a binary decision process with partial or complete recall of the history of the system.

Conteúdo

Folha de rosto	i
Dedicatória	iii
Agradecimentos	iv
Resumo	v
Abstract	vi
1 Aleatoriedade e Probabilidade	3
1.1 Probabilidade como limite de frequência	3
1.2 Variáveis Aleatórias	4
1.3 Função Densidade de Probabilidade	7
1.4 Teorema do Limite Central	10
1.5 Processos de Caminhadas Aleatórias	12
2 Caminhadas Aleatórias Correlacionadas	15
2.1 Histórico	15
2.2 Memória direcional	17
2.3 Tamanho característico de passos	21
2.4 Deslocamento médio quadrático assintótico	24

3	Caminhadas Aleatórias de Lévy	26
3.1	A Distribuição Lévy	26
3.2	Re-orientações aleatórias não persistentes	31
3.3	Distribuição de Passos Lévy	31
3.4	Deslocamento médio quadrático superdifusivo	34
4	Caminhadas Lévy Correlacionadas	36
4.1	Caminhadas de Lévy com Memória	36
4.2	Memória direcional	38
4.3	Distribuição dos passos Lévy	38
4.4	Superdifusão	44
5	Propriedades Estatísticas de Caminhadas não-Markovianas	47
5.1	Introdução	47
5.2	O Modelo do “Elefante” Caminhante	48
5.3	Leis de escala e Colapso de Dados	50
5.4	Efeitos de Limitação de Memória	51
5.5	Discussão	53
6	Conclusões e Perspectivas	63
6.1	Conclusões	63
6.2	Percepções e Contextualização	65
	Referências Bibliográficas	68

Capítulo 1

Aleatoriedade e Probabilidade

1.1 Probabilidade como limite de frequência

A teoria de probabilidade descreve os modelos matemáticos dos processos aleatórios em termos das distribuições de probabilidades de variáveis aleatórias. Elas descrevem como um “evento aleatório” é mais frequente que outro. No sentido Bayesiano, a probabilidade é uma medida de nossa ignorância, dando significado quantitativo para afirmações qualitativas, do tipo, “provavelmente vai chover amanhã”. A teoria de probabilidade é importãnte na mecânica quântica e na mecânica estatística. Para um matemático, probabilidade baseia-se em axiomas, mas nós iremos discutir aqui uma abordagem prática. Os experimentos nas ciências estão sempre vulneráveis a erros. Assim, as teorias de propagação de erros envolvem probabilidades. Em estatística, lidamos com as aplicações da teoria da probabilidade em dados experimentais.

Definimos a probabilidade teórica P de um evento x qualquer ocorrer como:

$$P(x) \equiv \frac{\text{numero de resultados de eventos } x}{\text{numero total de todos os eventos}} \quad (1.1)$$

Mas, quando o número total de eventos não é bem definido a definição chamada experimental,

$$P(x) \equiv \frac{\text{numero de vezes que o eventos } x \text{ ocorre}}{\text{numero total de tentativas}} \quad (1.2)$$

é mais apropriada.

1.2 Variáveis Aleatórias

Variáveis aleatórias são resultados numéricos de eventos não determinísticos e independentes. Um evento é chamado aleatório se é praticamente impossível de ser previsto a partir do estágio inicial. Um exemplo clássico de variáveis aleatórias são os valores que obtemos ao lançarmos um dado, e dessa forma nós temos os possíveis valores $x_i = 1, 2, 3, 4, 5, \text{ ou } 6$, com probabilidade $1/6$, e possibilidades $i = 1, 2, 3, \dots$. Assim x_i é uma variável aleatória discreta que toma valores de 1 a 6 com uma probabilidade definida $P(x_i) = 1/6$. As variáveis aleatórias x_i são independentes e identicamente distribuídas (*I.I.D.*). Ao medirmos x N vezes obtemos o valor x_i , com valor médio;

$$\langle x \rangle = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \\ \int x f(x) dx \end{cases} \quad (1.3)$$

e densidade de probabilidade continua $f(x)$. estas representações são discretas e contínuas respectivamente, e também são conhecidas como valor esperado. A razão pela

qual a média aritmética é adequada está no fato dela minimizar o desvio quadrático, $\sum_i (\langle x \rangle - x_i)^2$. Além disso, não há uma boa razão para a soma do desvio absoluto linear da média $\frac{1}{n} \sum_i^n |x_i - \langle x \rangle|$ selecionar sempre uma medida central como o melhor valor. A definição mais usada da representação é o desvio padrão:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i (x_i - \langle x \rangle)^2}. \quad (1.4)$$

Agora podemos generalizar a representação em um conjunto de n medidas com igual probabilidade $1/n$, para a variância σ^2 de uma distribuição de probabilidade arbitrária. Para uma variável aleatória discreta x com probabilidade P_i em $x = x_i$, nós definimos a variância, e similarmente para uma distribuição de probabilidade contínua

$$\sigma^2 = \begin{cases} \sum_j (x_j - \langle x \rangle)^2 P_j \\ \int (x - \langle x \rangle)^2 f(x) dx \end{cases} \quad (1.5)$$

Agora generalizamos o valor médio para altos momentos da distribuição de probabilidade relativo ao valor médio $\langle x \rangle$.

$$\langle (x - \langle x \rangle)^k \rangle = \begin{cases} \sum_j (x_j - \langle x \rangle)^k P_j \\ \int (x - \langle x \rangle)^k f(x) dx \end{cases} \quad (1.6)$$

A função geradora dos momentos

$$\langle e^{tx} \rangle = \int e^{tx} f(x) dx = 1 + t \langle x \rangle + \frac{t^2}{2!} \langle x^2 \rangle + \dots \quad (1.7)$$

é uma soma ponderada de momentos de variáveis aleatórias contínuas x , substituindo a expansão de Taylor de funções exponenciais. Assim $\langle x \rangle = \left. \frac{d}{dt} \langle e^{tx} \rangle \right|_{t=0}$, e note que os momentos não são relativos ao valor esperado; eles são chamados momentos generalizados. O n -ésimo momento central, $\langle x^n \rangle = \left. \frac{d^n}{dt^n} \langle e^{tx} \rangle \right|_{t=0}$ é dado pela n -ésima derivada da função geradora de momento em $t=0$. Por uma mudança no parâmetro

$t \rightarrow it$ a função geradora de momentos é relacionada à função característica $\langle e^{itx} \rangle$, que é proporcional à transformada de Fourier da função densidade de probabilidade $f(x)$. Além do mais, o valor médio, os momentos e a variância todos podem ser definidos similarmente via distribuições de probabilidade que dependem de muitas variáveis aleatórias. Por simplicidade, vamos restringir a duas variáveis aleatórias contínuas x e y e listar as quantidades correspondentes:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy \quad (1.8)$$

$$\langle y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy \quad (1.9)$$

$$\sigma^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 f(x, y) dx dy \quad (1.10)$$

$$\sigma^2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - \langle y \rangle)^2 f(x, y) dx dy \quad (1.11)$$

Duas variáveis aleatórias são ditas independentes se a densidade de probabilidade $f(x, y)$ fatoriza em um produto de $f(x)g(y)$ de distribuições de probabilidade de uma variável aleatória cada. A covariância, definida como

$$cov(x, y) = \langle (x - \langle x \rangle)(y - \langle y \rangle) \rangle \quad (1.12)$$

É uma medida de como as variáveis aleatórias x e y são correlacionadas (ou relacionadas): Esta é zero para variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (I.I.D.). A Covariância normalizada $\frac{cov(x, y)}{\sigma(x)\sigma(y)}$, a qual possui valores entre -1 e $+1$, é frequentemente chamada por correlação.

1.3 Função Densidade de Probabilidade

Na matemática, uma função densidade de probabilidade serve para representar uma distribuição de probabilidade em termos de integral. Uma densidade de probabilidade é não negativa em todo lugar e sua integral de $-\infty$ a ∞ é igual a 1. Se uma distribuição de probabilidade tem densidade $f(x)$, então intuitivamente a probabilidade de se obter uma medida entre x e $x + dx$ tem probabilidade $f(x)dx$. Informalmente uma densidade de probabilidade pode ser estimado a de um histograma: se alguém empiricamente mede valores de uma variável aleatória continua repetidamente e produz um histograma descrevendo frequências relativas de resultados, então o histograma assemelhar-se-á à densidade de probabilidade da variável aleatória.

Formalmente, a distribuição de probabilidade tem densidade $f(x)$ se $f(x)$ é uma integral de Lebesgue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a probabilidade no intervalo $[a, b]$ é dada por,

$$\int_a^b f(x)dx \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad (1.13)$$

Isto implica que a integral total de $f(x)$ tem que ser 1. Inversamente, qualquer função integral de Lebesgue não negativa com integral 1 é a densidade de probabilidade de uma distribuição definida apropriadamente. Simplificando, uma densidade de probabilidade $f(x)$ é $\geq 0 \forall x$, e a área total sob o gráfico é 1, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

A distribuição normal foi primeiramente introduzida por Abraham de Moivre em um artigo de 1734, mas foi Carl Friedrich Gauss, em 1805, um matemático alemão usando o método desde 1794 que a justificou rigorosamente, assumindo uma

distribuição normal de erros. Desde então passou a ser chamada como distribuição Gaussiana e é uma das mais importantes distribuições de probabilidade. Esta é uma família de curvas com a mesma forma geral, diferenciada apenas em sua localização e em seus parâmetros de escala: μ and σ^2 , média e variância respectivamente, (Figura 1.1).

Existem várias maneiras de se caracterizar uma distribuição de probabilidades. A mais visual é a função densidade de probabilidade, que representa cada variável aleatória. A distribuição cumulativa é uma maneira conceitual de especificar a mesma informação, mas que é muito menos informativa. A densidade de probabilidade da distribuição normal é um exemplo de função Gaussiana com $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$.

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{[x - \mu]^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.14)$$

Para indicar que uma variável aleatória x tem a distribuição cuja função densidade é $f(x; \mu, \sigma)$, nós escrevemos $x \sim N(\mu, \sigma^2)$.

A distribuição cumulativa é definida como a probabilidade que uma variável X tenha um valor menor ou igual a x , e esta é expressa em termos da função densidade como;

$$F(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{[u - \mu]^2}{2\sigma^2}\right) du \quad (1.15)$$

A função cumulativa normal é convencionalmente denotada por Φ , seu gráfico pode ser visto na Figura 1.2, e sendo representada por

$$\Phi(x) = F(x; 0, 1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \quad (1.16)$$

sendo $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$. Esta pode ser expressa em termos de uma função especial chamada de função erro, apresentada da seguinte forma

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \right]. \quad (1.17)$$

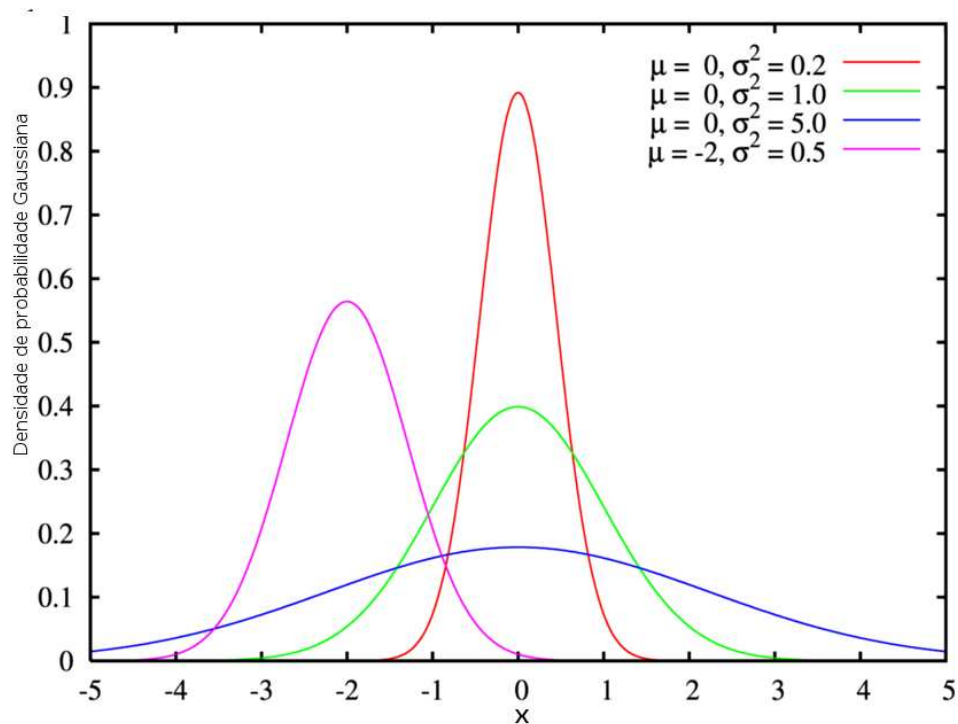


Figura 1.1: Curvas Gaussianas com variações de seus parâmetros. [42]

A função geradora do momento é definida como o valor esperado de e^{tx} . Para uma distribuição Gaussiana, pode ser mostrada que a função geradora do momento é

$$\begin{aligned}
 M_x(t) &= E[e^{tx}] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) e^{tx} dx \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{t\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{v^2 - 2\sigma^2 tv}{2\sigma^2}\right)\right) dv \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{t\mu} e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{\sigma} - t\sigma\right)^2\right) dv \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{t\mu} e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty-t\sigma}^{\infty-t\sigma} e^{-u^2/2\sigma^2} du \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{t\mu} e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} \sigma\sqrt{2\pi} = e^{\left(t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

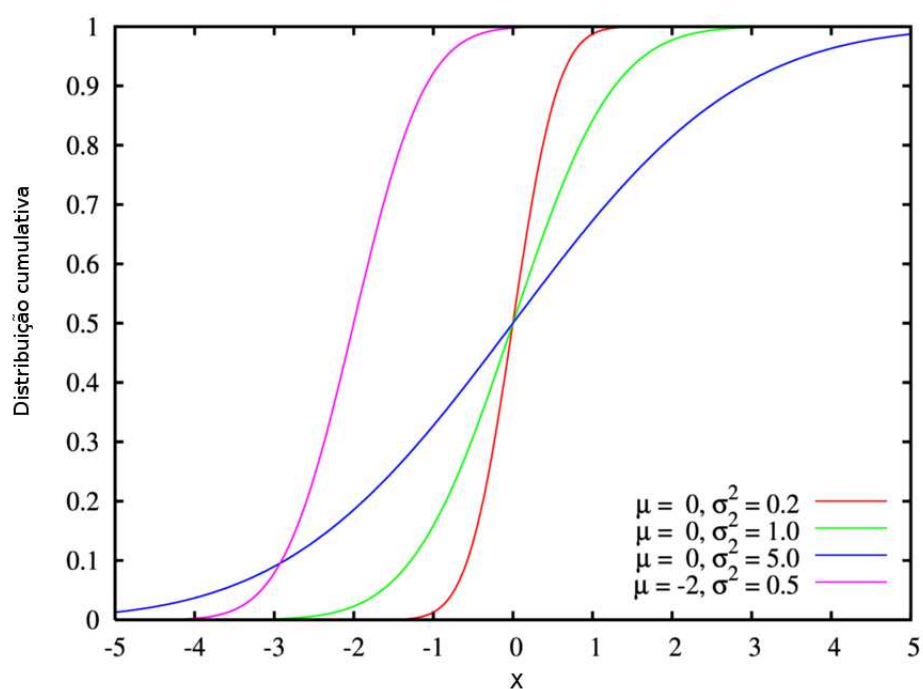


Figura 1.2: Gráfico da distribuição cumulativa com variações de seus parâmetros. [42]

1.4 Teorema do Limite Central

Teorema 1.4.1 *A soma de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (I.I.D.) com média e variância finita converge para uma distribuição Gaussiana.*

Muitas generalizações para a variância finita existem e não requerem distribuição idêntica, mas incorporam algumas condições que garantem que nenhuma das variáveis exerçam maior influência do que as outras. Duas destas condições são; condição de Lyapunov e a condição de Lindeberg [21].

Existe também uma generalização devido a Gnedenko e a Kolmogorov [13], sobre a soma de um número de variáveis aleatórias com distribuição com cauda

de lei de potência caindo com $\frac{1}{|x|^{\alpha+1}}$ com $0 < \alpha < 2$ e portanto havendo variância infinita. A soma tenderá a uma distribuição estável de Lévy.

Agora apresento a prova para o teorema do limite central usando funções características. Vamos definir x_1, x_2, x_3, \dots uma sequência de variáveis aleatórias (I.I.D.) definidas no mesmo espaço de probabilidades compartilhando a mesma distribuição. Para qualquer variável aleatória y , com média zero e variância unitária, a função característica de y é:

$$\varphi_y(t) = \langle e^{ity} \rangle = \langle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ity)^n}{n!} \rangle = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad t \rightarrow 0 \quad (1.18)$$

Temos $y_i = (x_i - \mu)/\sigma$ sendo o desvio padronizado de x_i , e z_n a soma renormalizada de y_i .

$$z_n = \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sigma\sqrt{n}} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sqrt{n}} \quad (1.19)$$

assim, a função característica de z_n será

$$\varphi_{z_n}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{y_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left[\varphi_y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n \quad (1.20)$$

logo teremos;

$$\begin{aligned} \left[\varphi_y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n &= \left[1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[\frac{-t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \left[\frac{-t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^k \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{z_n}(t) &= e^{-\frac{t^2}{2}} \end{aligned} \quad (1.21)$$

onde este limite é a função característica de uma distribuição normal:

$$\begin{aligned}
 \varphi_G(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{2itx\sigma^2 - x^2}{2\sigma^2}} dx \\
 &= e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{x}{\sigma} - it\sigma)^2/2} dx \\
 &= e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty - it\sigma}^{\infty - it\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz \\
 &= e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz \\
 &= e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \sigma\sqrt{2\pi}
 \end{aligned}$$

1.5 Processos de Caminhadas Aleatórias

Um processo que fornece valores aleatórios para uma variável que representa posição, gera o que é conhecido como uma caminhada aleatória. Processos de caminhadas aleatória estão estabelecidos na física estatística no propósito de modelar diversos tipos de fenômenos. Estes fenômenos podem ser correlacionados ou não, e podem apresentar comportamentos peculiares de difusão. Caminhadas são mudanças de posição ao longo do tempo. A distancia entre duas sucessivas posições é chamado de passo ou deslocamento. Quando há persistencia na direção dos passos, a caminhada é correlacionada, caso contrário a caminhada é puramente aleatória. Em caminhadas, a correlação tem uma importante influência na distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias. O grau de dependência de uma variável com a outra, ou o quanto relacionadas estão, pode mudar a forma da distribuição de probabilidade destas. Este grau de dependência é conhecido como “correlação” entre

as variáveis. A correlação existente entre os ângulos de sucessivos vetores de passo numa caminhada aleatória pode alterar a distribuição dos passos levando a um processo de difusão anômala. Difusão é uma característica intrínseca aos processos de caminhadas aleatórias, surgindo quando o deslocamento médio quadrático comporta-se de forma linear ou não com o tempo (i.e., t^{2H}). H é o expoente de Hurst e para $H = 1/2$ a difusão é normal, e a distribuição de probabilidade da posição é tipicamente Gaussiana. Este tipo de difusão possui correlação apenas para um número finito de passos, assim como ocorre nos processos Markovianos. Uma caminhada Markoviana é aquela que depende estritamente de um número n finito de passos anteriormente dado. Agora para $H \neq 1/2$ (nos restringiremos aqui a $H > 1/2$) a difusão recebe o nome de anômala originando caminhadas superdifusivas. Ao contrário de uma caminhada Markoviana, uma caminhada com correlação de longo alcance é uma das características de uma caminhada não-Markoviana. Entre outras, memória ilimitada dos passos dados é mais uma destas características.

Paul Pierre Lévy foi um matemático francês que trabalhou principalmente na área de teoria de probabilidades e introduziu a classe de estratégias de apostas baseada em processos estocásticos martingales; vôos de Lévy; processos de Lévy; a distribuição de Lévy; a “distribuição assimétrica alfa-estável de Lévy” etc. Durante a 1ª guerra mundial Lévy fez análises matemáticas para a artilharia francesa. Em 1920 tornou-se professor de análises na escola politécnica, e entre seus alunos estava Benoît Mandelbrot, que percebeu na natureza os padrões fractais [39]. De 1920 a 1930 esteve preocupado com a questão de quando uma soma de variáveis aleatórias independentes e idênticamente distribuídas (I.I.D.) tem a mesma distribuição de probabilidade que qualquer uma das variáveis da soma. Esta é uma questão de *sca-*

ling e é o paradigma dos fractais. Lévy resolveu o problema para variáveis (I.I.D.). A distribuição resultante da soma é chamada lei estável de Lévy. As leis de Lévy lidam com densidades de probabilidades que possuem momentos infinitos e assim não apresentam escala bem definida. A dinâmica de Lévy é aplicada para descrever Processos difusivos que estão presentes em muitos campos da física, química e biologia, assim, atraem a atenção de teóricos e experimentais. O processo de difusão mais frequente encontrado é o movimento Browniano, caracterizado por um deslocamento médio quadrático $\langle r^2(t) \rangle \sim t^{2H}$, que aumenta linearmente com o tempo ou seja $H = 1/2$. No regime $H \neq 1/2$ a difusão é anômala, e é para $H > 1/2$ que os processos de Lévy ocorrem.

Em resumo, nesta dissertação eu estudo como o deslocamento médio quadrático e o expoente de Hurst dependem das propriedades de caminhadas aleatórias Markovianas como também não-Markovianas.

Capítulo 2

Caminhadas Aleatórias Correlacionadas

2.1 Histórico

Alguns fenômenos naturais são fáceis de serem observados. Fenômenos tão diversos como a variação de altura das pessoas, a concentração de melanina na pele em um dado grupo humano e as intensidades de vários sons naturais seguem todos uma mesma lei estatística, a distribuição Gaussiana [12]. Uma das distribuições gaussianas mais importantes na física descreve o movimento térmico de átomos e moléculas. As partículas se deslocam através de pequenas distâncias antes de se chocarem umas com as outras, levando a um movimento aleatório que resulta na difusão normal. Esse processo explica porque uma colher de açúcar adoça toda uma xícara de café. Contudo, se a xícara de café fosse agitada energeticamente, turbulência poderia ocorrer e o açúcar se dispersaria mais rapidamente, nesse caso o movimento

da partícula não poderia mais ser descrito em termos de uma distribuição gaussiana [12]. Evidências recentes, provenientes de experimentos feitos em alguns fluídos específicos, sugerem que o movimento pode, ao contrário, seguir uma distribuição que foi introduzida, em 1937, pelo matemático francês Paul Lévy.

Em 1828, Robert Brown estudou o movimento de grãos de pólen em um meio fluido, fornecendo forte evidência de que o movimento térmico de moléculas seria aleatório. Mas foi Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier [36], um matemático francês, a primeira pessoa a modelar o movimento Browniano em 1900. Bachelier é considerado o pioneiro no estudo de matemática financeira e processos estocásticos. E em 1905 Albert Einstein apresentou uma base teórica para o movimento browniano [9].

Modelos de caminhadas aleatória correlacionadas são ferramentas da física estatística utilizadas na tentativa de se modelar o comportamento animal. De modo geral, o comportamento animal é regido por um conjunto de interações com o meio. A princípio o grau em que as interações ocorrem, a ponto de alterar o comportamento animal pode ser desconhecido. Cientes da complexidade envolvida neste propósito, modelos de movimento animal como o de caminhadas correlacionadas restringem-se a se adequar a interações do tipo busca por alimentos, parceiros reprodutivos, ninhos para reprodução, entre outros.

Do ponto de vista macroscópico, uma caminhada correlacionada corresponde a um processo Markoviano que por natureza não pode gerar correlação de longo alcance no movimento. No limite de longa escala temporal o deslocamento médio quadrático aumenta linearmente com o tempo.

2.2 Memória direcional

Caminhadas aleatórias correlacionadas também conhecidas como *Correlated Random Walks* (CRW), aparecem em ecologia na análise de dados de movimento animal de curta e meia escala. Em experimentos com formigas, besouros e borboletas, ecologistas perceberam a necessidade de adicionar memória direcional a caminhada aleatória pura, para reproduzir o movimento animal de maneira realística [7]. Mais recentemente as propriedades matemáticas de uma caminhada aleatória correlacionada foram usadas para explorar o elo entre movimento animal individual e padrões espaciais populacionais.

Memória direcional é vista como o grau de direcionalidade ou sinuosidade de uma caminhada aleatória correlacionada. A caminhada correlacionada descreve os eventos de re-orientação por uma função densidade de probabilidade angular não-uniforme, construída a partir de uma densidade de probabilidade *wrapped*, (envolvida), definida a partir de.

$$f_{wrap.}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\theta + 2k\pi), \quad \theta \in [-\pi, \pi] \quad (2.1)$$

Entre as mais importantes distribuições circular que possuem forma analítica está a *Wrapped Cauchy Distribution* (WCD), distribuição envolvida de Cauchy, que se apresenta abaixo.

$$f_{WCD}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta)}, \quad \rho \in [0, 1] \quad (2.2)$$

esta distribuição controla a memória direcional através da distribuição de probabilidade do ângulo de re-orientação θ , via a largura da distribuição envolvida de

Cauchy, ao mudarmos os valores do parâmetro ρ . Uma imagem 3D e outra 2D da distribuição angular podem ser visualizadas através das figuras abaixo.

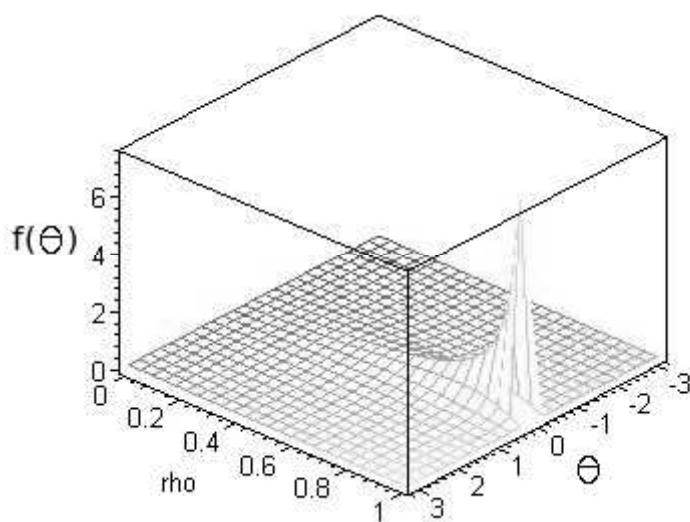


Figura 2.1: Observe que para $\rho = 1$ o ângulo de re-orientação (θ) é persistentemente zero.

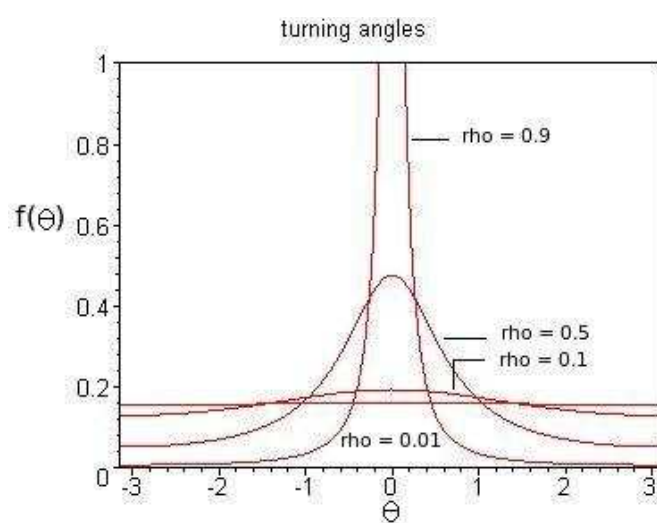


Figura 2.2: $f_{WCD}(\theta)$ para diferentes valores de ρ .

Movimento balístico é encontrado para $\rho = 1$ (Figura 2.2), sendo a sua distribuição uma delta, levando a caminhada a uma reta. Para $\rho = 0$ não há correlação (Figura 2.4), tornando a distribuição uniforme e surgindo assim o movimento Browniano. Em todas as ocorrência a variável λ representará o tempo da caminhada.

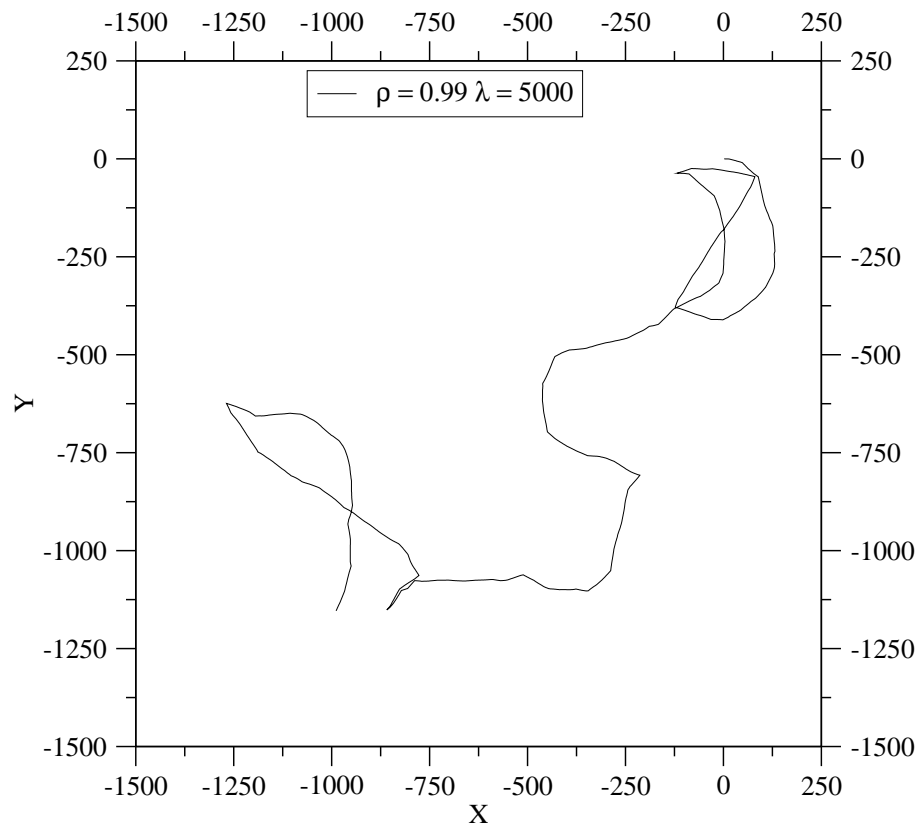


Figura 2.3: Caminhada correlacionada, ocorrência de caminhada superdifusiva local.

De interesse particular para distribuições circulares são as funções características circulares, dadas em termos da n -ésimo ordem do valor esperado $\phi_n \equiv \langle \exp(in\theta) \rangle = \alpha_n + i\beta_n$. Para o caso simétrico estas funções tornam-se iguais ao momento do cosseno, ou seja, $\phi_n = \alpha_n \equiv \langle \cos(n\theta) \rangle$. O primeiro momento do cosseno $\alpha_1 = \langle \cos(\theta) \rangle$ é especialmente relevante para caracterizar as propriedades difusivas da caminhada aleatória [10].

Um modelo de caminhada aleatória consistindo de incrementos com variância finita não pode conduzir a uma genuína superdifusão invariante sob escala a menos que as correlações sejam não-Markoviana. Portanto, para caminhada correlacionada um comprimento de correlação (τ) existe necessariamente além do qual o comportamento tende a movimento Browniano. Aqui nós revisaremos as principais ideias e a expressão final. Suponha que para um passo j de uma caminhada correlacionada a distribuição do r_j não dependa do ângulo de re-orientação ou dos outros r'_i s. Define-se então

$$C(1) = \langle \cos(\theta) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta) f_{wrap.}(\theta) d\theta \quad (2.3)$$

Onde θ representa o ângulo entre dois sucessivos vetores de passo. Portanto, “somente as orientações relativas”, mas não o ângulo de re-orientação atual possui correlação. Desde que a caminhada seja Markoviana,

$$C(t/t_0) \sim [C(1)]^{t/t_0} = \exp [(t/t_0) \ln[\langle \cos(\theta) \rangle]] \quad (2.4)$$

onde t_0 é o tempo de um passo. Definindo τ como o comprimento de correlação adimensional tal que $C(\tau) = e^{-1}$ [11].

$$\tau = -\frac{1}{\ln \langle \cos(\theta) \rangle} \quad (2.5)$$

Esta expressão estende-se para todos os modelos de caminhadas Markovianas de um passo. Para escalas com ordem de magnitude duas vezes ou mais, maiores do que τ , a caminhada correlacionada torna-se Browniana pois o modelo não mantém correlações de longa escala. Desta forma, τ pode ser útil para determinar se contém informação suficiente para prever propriedades difusivas de longo termo. De forma sucinta, ou uma caminhada suporta superdifusão genuína ou significa uma caminhada apenas localmente superdifusiva (Figura 2.8).

2.3 Tamanho característico de passos

Modelos de caminhadas aleatórias correlacionadas tem uma Gaussiana ou outra lei de decaimento exponencial para a distribuição dos comprimentos dos passos. Nas figuras abaixo podemos ver como a caminhada muda em função da memória direcional (Figuras 2.4 a 2.6).

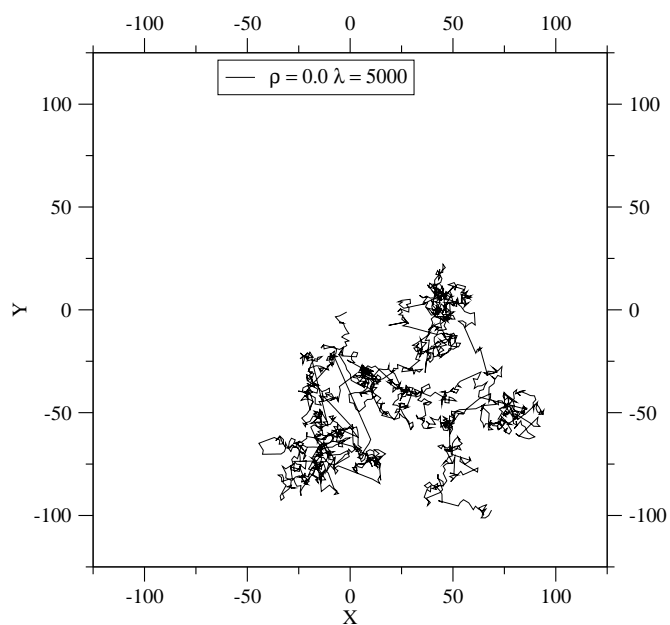


Figura 2.4: Caminhada aleatória podendo também ser chamada como caminhadas des-correlacionadas.

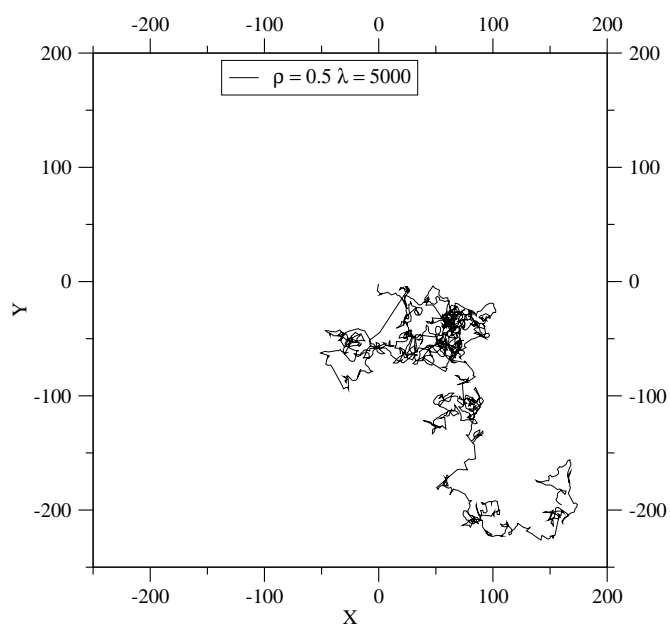


Figura 2.5: Caminhada correlacionada com memória direcional.

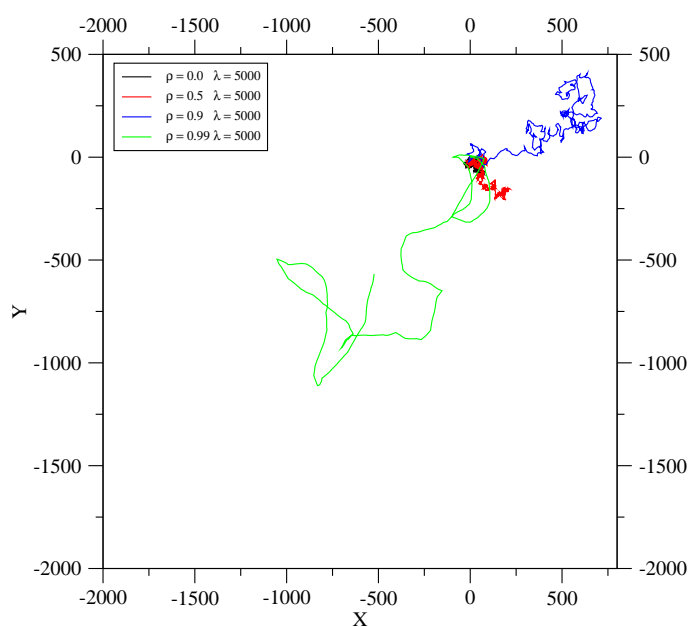


Figura 2.6: Aumento gradual no grau de correlação de uma caminhada.

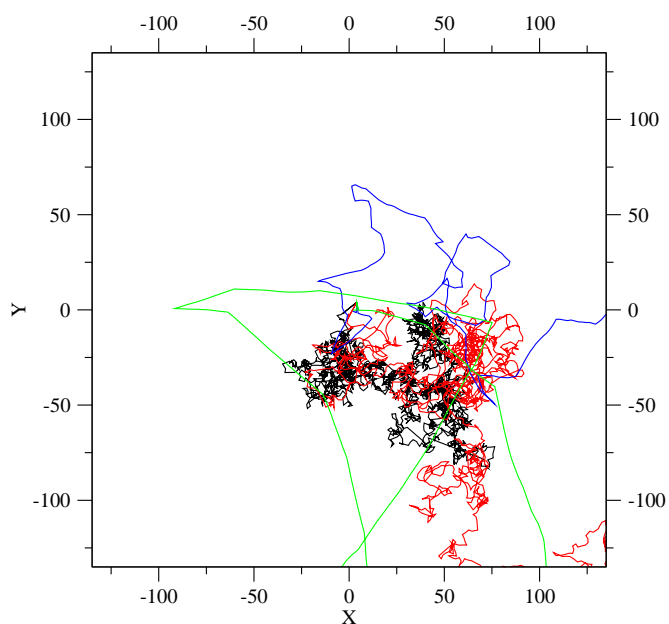


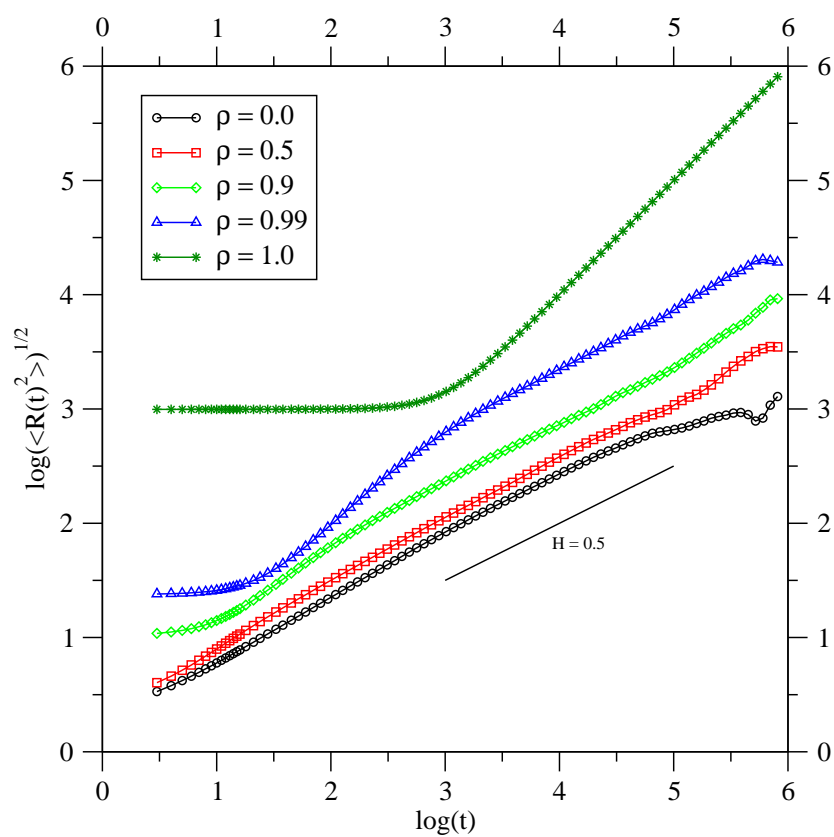
Figura 2.7: Zoom da figura 2.6.

2.4 Deslocamento médio quadrático assintótico

Para uma caminhada aleatória correlacionada, Kareiva e Shigesada [7] derivaram em 1983 que o deslocamento médio quadrático em relação a um ponto inicial é dado por

$$\langle R(t)^2 \rangle = l^2 \frac{(1 - \rho^2)}{(1 - \rho)^2} \left[t - \frac{2\rho}{(1 - \rho^2)} (1 - \rho^t) \right] \quad (2.6)$$

onde, n é o número de passos dado por um caminhante, l é o tamanho médio de cada passo, e $\rho = \langle \cos(\theta) \rangle$, θ é o ângulo entre dois sucessivos vetores de passos. Sua distribuição obedece a distribuição angular não uniforme Eq. 2.2. O cálculo numérico nos permite gerar os gráficos da raiz do deslocamento médio quadrático i.e., $\log \sqrt{\langle R(t)^2 \rangle} \sim t^H$ No gráfico abaixo podemos ver o comportamento sob escala de uma caminhada. Lembrando que no limite longa escala temporal caminhadas correlacionadas não sustentam superdifusão, tendendo assim ao movimento Browniano.

Figura 2.8: Comportamento difusivo além do comprimento de correlação τ .

Capítulo 3

Caminhadas Aleatórias de Lévy

3.1 A Distribuição Lévy

Em teoria de probabilidades e estatística, a distribuição de Lévy é uma das distribuições “estáveis”. Distribuições estáveis representam uma opção atrativa para modelagem. A soma de variáveis aleatórias conservará a forma da distribuição original, e esta é conhecida como sendo a propriedade de estabilidade. Isto é desejável para modelagem de fenômenos que são superposição de um grande número de eventos aleatórios [6]. As distribuições estáveis com índice de estabilidade Lévy $\alpha \in (0, 2]$ necessitam de uma forma fechada para a função densidade de probabilidade. Porém, os casos como o Gaussiano ($\alpha = 2$), Cauchy ($\alpha = 1$) e Lévy ($\alpha = 1/2$) são uma exceção. Em particular, a variância destas variáveis aleatórias é infinita, exceto para o caso da distribuição Gaussiana normal. O índice α é o parâmetro mais interessante nesta aplicação de modelagem, pois determina como pesada a cauda é.

Todas as três distribuições são casos especiais da *Lévy skew alpha-stable*

distribution (Distribuição assimétrica alfa-estável de Lévy), desenvolvida por Paul Lévy. É uma família de distribuições de probabilidade caracterizada por quatro parâmetros, $\alpha \in (0, 2]$, assimetria $\beta \in [-1, 1]$, shift μ e escala c . Quando $\beta = 0$ a distribuição é simétrica em torno de μ e é referida como distribuição simétrica alfa estável de Lévy. A distribuição é definida pela transformada inversa de Fourier de sua função característica $\varphi(t)$

$$f(x; \alpha, \beta, c, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-itx} dt \quad (3.1)$$

onde,

$$\varphi(t) = \exp [it\mu - |ct|^\alpha (1 - i\beta \text{sign}(t)\Phi)] \quad (3.2)$$

e Φ é dada por,

$$\Phi = \begin{cases} \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) & \forall \alpha \neq 1 \\ -\left(\frac{2}{\pi}\right) \log |t| & \alpha = 1 \end{cases} \quad (3.3)$$

O fator de escala c fornece a medida da largura da distribuição. O expoente $\alpha < 2$ especifica o comportamento assintótico da distribuição “de cauda grossa”, e isto faz com que a variância da distribuição de Lévy seja infinita. A função $\text{sign}(t)$ assume

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ +1 & t > 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Seu gráfico aparece na Figura 3.1. Os gráficos da distribuição simétrica e assimétrica aparecem nas Figuras 3.2 e 3.3.

A função densidade de probabilidade da distribuição de Lévy para $\alpha = 1/2$ é encontrada após tomarmos a transformada inversa de Fourier de sua nova função

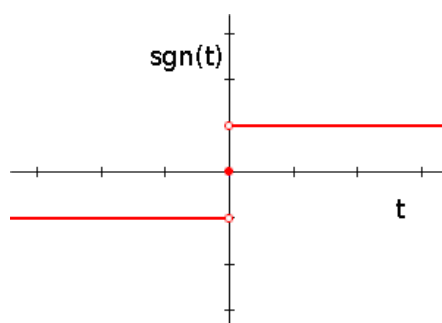
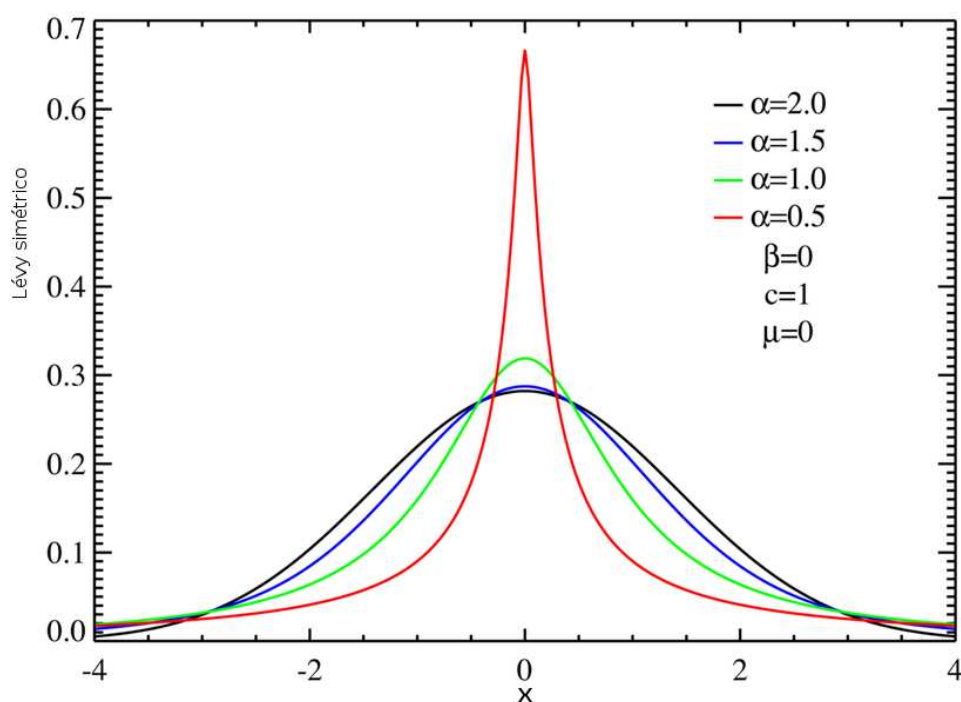


Figura 3.1: função sinal.

Figura 3.2: Densidade de probabilidade da Lévy simétrica $f(x; \alpha, 0, 1, 0)$. [43]

característica, sobre o domínio $x \geq 0$ e $\mu = 0$.

$$f(x; c) = \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \frac{e^{-c/2x}}{x^{3/2}} \quad (3.5)$$

Na Figura 3.4 vemos o gráfico da densidade de probabilidade da distribuição de Lévy para $\alpha = 1/2$.

O n -ésimo momento de uma distribuição de Lévy é formalmente definida por:

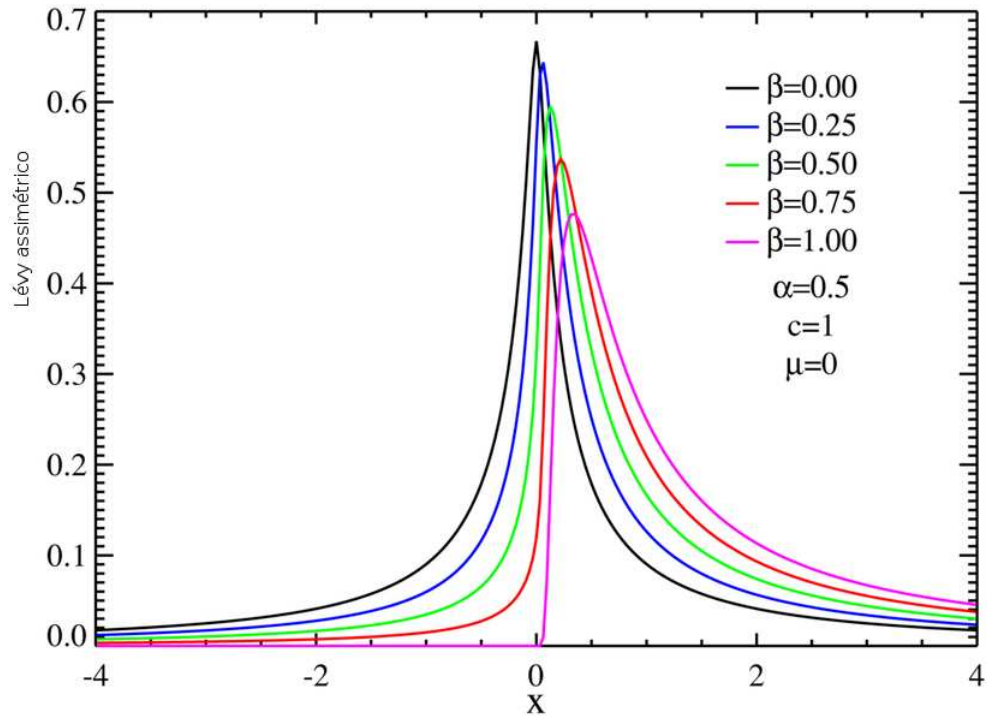


Figura 3.3: Densidade de probabilidade da Lévy assimétrica $f(x; 1/2, \beta, c, 0)$. [43]

$$m_n \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-c/2x}}{x^{3/2}} x^n dx \quad (3.6)$$

no qual diverge para todo $n > 0$, então, os momentos da distribuição de Lévy não existem. Assim não possuem escala bem definida. A função geradora do momento é rigorosamente definida como:

$$M(t; c) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-c/2x+tx}}{x^{3/2}} dx \quad (3.7)$$

que diverge para $t > 0$ e é portanto não definida em um intervalo em torno de zero, de modo que a função geradora do momento não seja definida por si própria. Na cauda da distribuição (Figura 3.5), a densidade de probabilidade exibe o comportamento de cauda grossa, de acordo com a Eq. 3.8;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x; c) = \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \frac{1}{x^{3/2}} \quad (3.8)$$

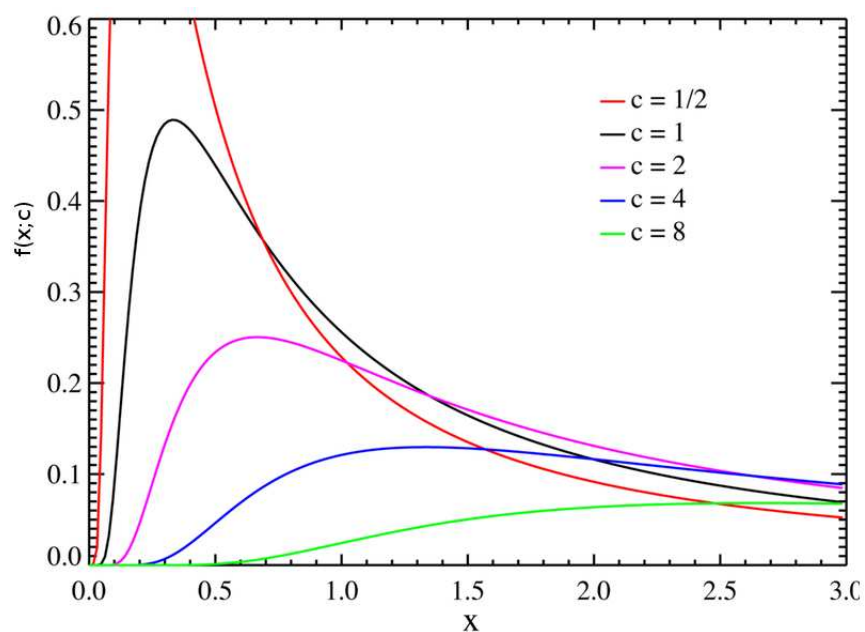


Figura 3.4: Wikipedia. Distribuição assimétrica de Lévy para o domínio $x \geq 0$.

$f(x; 1/2, 1, c, 0)$. [43]

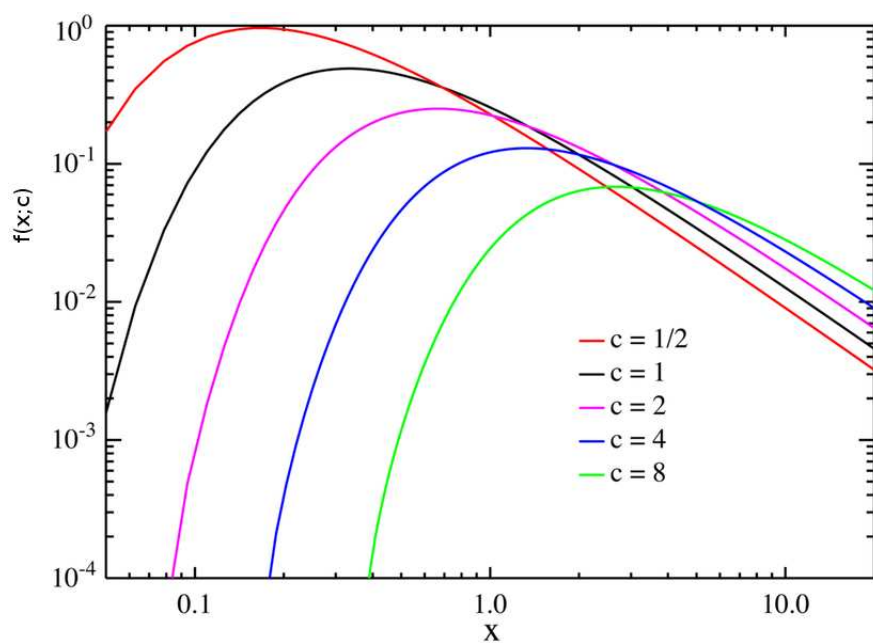


Figura 3.5: Wikipedia. Distribuição assintótica de Lévy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x; 1/2, 1, c, 0)$. [43]

3.2 Re-orientações aleatórias não persistentes

É descrito aqui o modelo conhecido como Caminhadas de Lévy [2], e este tipo de caminhada tem como uma das suas principais características uma distribuição uniforme para seus eventos de re-orientação, ou seja, qualquer direção tem igual probabilidade de ser sorteada durante a caminhada.

3.3 Distribuição de Passos Lévy

Uma segunda propriedade fundamental de uma caminhada tipo Lévy está na distribuição que representa o tamanho de seus passos, uma distribuição tipo de lei de potência Eq. 3.9, representando o que também é chamado como caminhada de Lévy ou *Lévy Walk*. O expoente desta lei de potência é $\mu = \alpha + 1$ onde α é o índice de Lévy. O valor μ encontra-se no intervalo $1 < \mu \leq 3$, permitindo uma rica variedade de variações de caminhos que vão desde movimento Browniano [5] ($\mu \geq 3$) (Figura 3.9), até movimento balístico, ($\mu \rightarrow 1$) (Figura 3.6). Este tipo de comportamento caracteriza super-difusividade, ou difusividade anômala, e invariância de escala, permitindo uma alta eficiência nos cenários de busca aleatória [25, 4].

$$P(l) \sim l^{-\mu} \tag{3.9}$$

$P(l)$ é a probabilidade de dar passos de tamanho l . Nas Figuras, os gráficos representam as caminhadas de Lévy, ao variarmos μ .

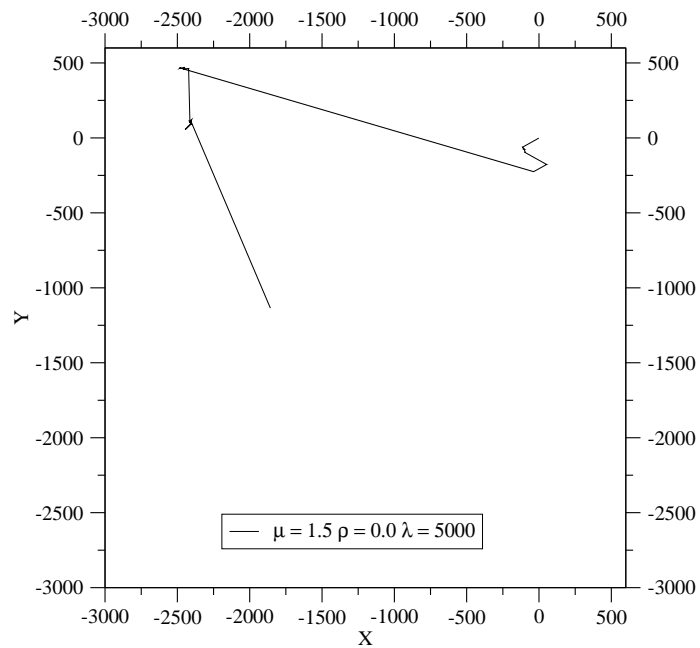


Figura 3.6: Comportamento Balístico.

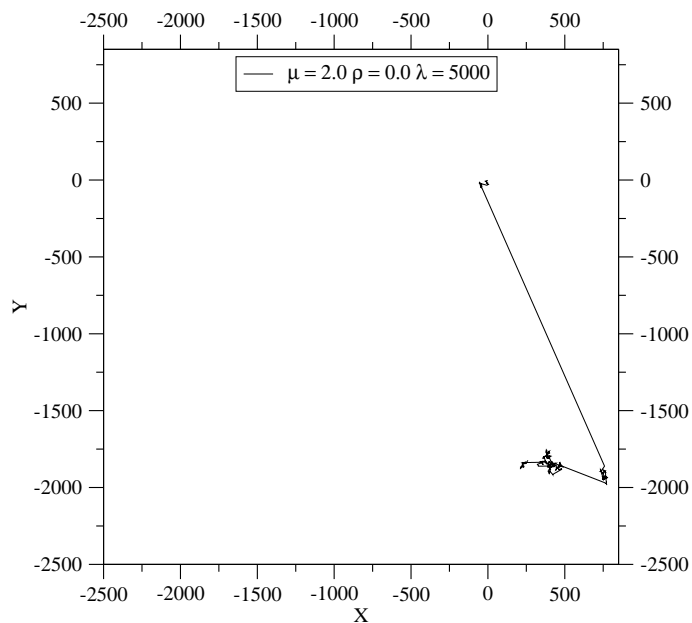


Figura 3.7: Caminhada de Lévy pura (CL), animais como albatrozes desenvolveram a performance das CL [4].

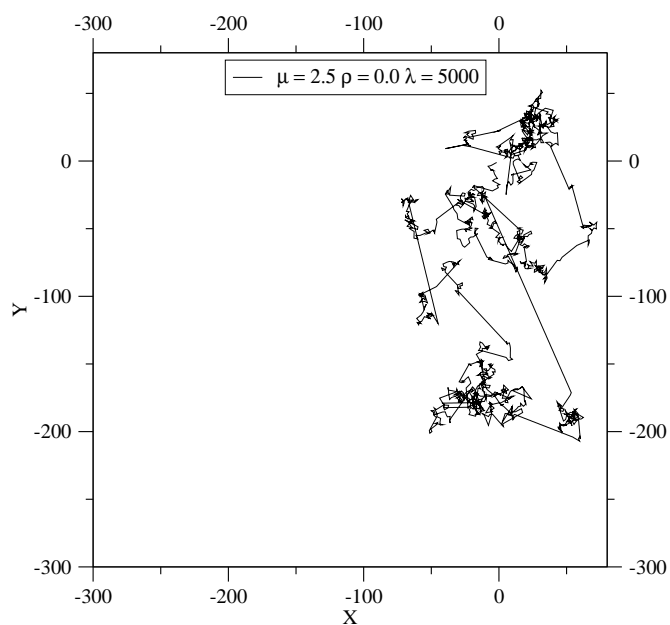


Figura 3.8: Caminhada de Lévy.

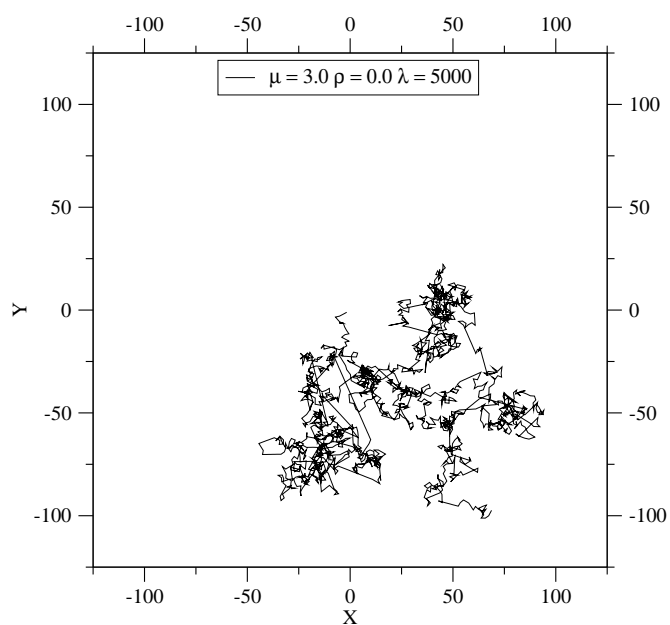


Figura 3.9: Movimento Browniano, estudos mostram que proteínas do olho realizam Mov. Browniano em doentes de catarata.

3.4 Deslocamento médio quadrático superdifusivo

Num processo anômalo como do tipo Lévy a variância não é finita, embora apresente um índice bem definido que caracteriza tal processo Eq. 3.10.

$$\langle R(t)^2 \rangle \rightarrow t^{2H} \quad (3.10)$$

Nesta classificação H é conhecido como expoente de *Hurst* e quando $H > 1/2$ temos um processo superdifusivo, $H < 1/2$ subdifusivo e $H = 1/2$ descreve uma difusão normal. De maneira geral, difusão é um fenômeno comum na natureza, ocorre quando um sistema encaminha-se para o estado de equilíbrio. No nível macroscópico, conjuntos de elementos individuais realizando trajetórias aleatórias, apresentam grande regularidade em seu comportamento e seguem leis dinâmicas bem definidas.

Na Figura 3.10 temos a raiz do deslocamento médio quadrático de caminhadas de Lévy. Esta nos diz através do expoente de Hurst o tipo de difusão que está ocorrendo ao variarmos μ .

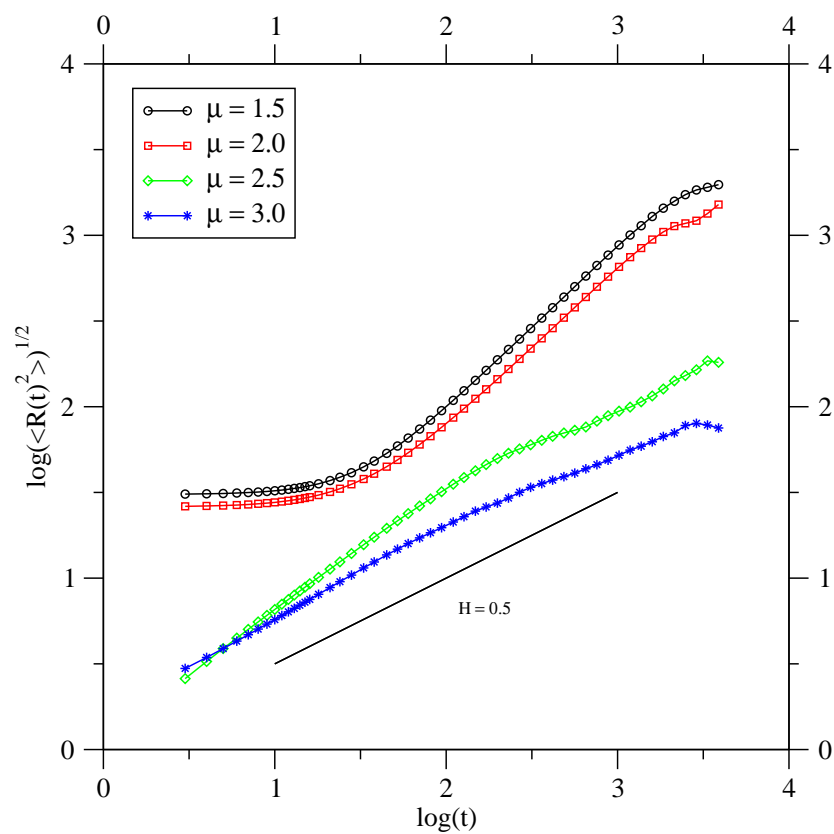


Figura 3.10: Difusão anômala para $1 < \mu < 3$ e normal para $\mu = 3$

É interessante observar os valores de Hurst H . Veja que para os valores de $\mu = 1.5, 2.0$ e 2.5 temos $H > 1/2$ representando superdifusão. Para $\mu = 3$ temos $H \approx 1/2$ representando difusão normal, como esperado.

Capítulo 4

Caminhadas Lévy Correlacionadas

4.1 Caminhadas de Lévy com Memória

São conhecidos atualmente dois modelos que descrevem independentemente as características aleatórias de uma caminhada. Propomos aqui um modelo “híbrido”.

De modo geral, os modelos procuram estabelecer relações de difusão na dinâmica da caminhada aleatória. Para tempos t suficientemente longos a raiz do deslocamento médio quadrático da caminhada escala com t^H . Se ocorrer difusão normal temos, $H = 1/2$, caso seja superdifusivo, $H > 1/2$, o caso subdifusivo ocorre para $H < 1/2$. Diferentes valores de H induzem diferentes padrões de caminhadas, tais como caminhadas aleatórias correlacionadas e de Lévy. Caminhadas aleatórias correlacionadas são caracterizadas pela retenção de memória direcional. Mas Devido a sua natureza Markoviana, tende assintoticamente a difusão Browniana para tempos maiores do que o comprimento de correlação temporal τ . Pelo aspecto dos processos difusivos, caminhadas de Lévy permitem o surgimento de comportamento

superdifusivo genuíno ($H > 1/2$), mesmo quando $t \gg \tau$. Diferentemente do modelo de caminhadas correlacionadas, a caminhada de Lévy usa uma distribuição lei de potência para o tamanho dos passos.

Os dois modelos de caminhadas aleatórias, caminhadas correlacionadas e de Lévy, possuem um alto grau de poder explicativo em muitos casos concretos. Mas exatamente qual escolhermos dependerá das propriedades estatísticas distintas, e das de escala do sistema. Considere movimento animal por exemplo. Tomado como um todo, ambos caminhadas correlacionadas e de Lévy podem adequadamente auxiliar na descrição do movimento animal. Entretanto, em busca aleatória existem certos mecanismos que em casos específicos podem fornecer os indícios necessários para a identificação do modelo, resultando na melhor estratégia de busca. Em estudos ecológicos o mesmo conjunto de dados pode conduzir a uma concordância aparente com ambos os tipos de modelos de caminhadas.

Por essas e outras razões introduzimos o modelo híbrido de caminhadas aleatórias denominado *Correlated Lévy Walk* (CLW), caminhadas de Lévy correlacionadas. Este modelo usa tanto as características do modelo de caminhada correlacionada como as de caminhada de Lévy. O modelo de caminhadas de Lévy correlacionadas é completo e poderá ser usado para a construção de teorias sobre comportamento animal.

4.2 Memória direcional

Caminhadas de Lévy Correlacionadas governam os eventos de re-orientação através de uma função densidade de probabilidade circular de ângulos de re-orientação não uniforme, conhecida como distribuição envolvida de Cauchy.

4.3 Distribuição dos passos Lévy

O modelo Lévy correlacionado usa uma distribuição lei de potência para o tamanho da caminhada Eq. 3.9. Com base na distribuição assintóticas de Lévy e na distribuição envolvida de Cauchy, utilizamos as Eqs. 4.1 e 2.2 para gerarmos numericamente, variedades de caminhos aleatórios baseados no expoente da lei de potência μ , e no parâmetro direcional ρ .

$$l = l_0 x^{1/(1-\mu)} \quad (4.1)$$

μ esta definido no intervalo $(1, 3]$, e x é uma variável aleatória entre 0 e 1. Encontramos diferentes tipos de caminhadas ao alterarmos o valor de μ , podemos assim gerar caminhadas aleatórias com as características dos modelos de caminhadas correlacionadas (Figuras 4.2, 4.3, 4.4, e 4.5) e caminhadas de Lévy (Figuras 4.6, 4.7, 4.8, e 4.9), mudando apenas o parâmetro de memória direcional referente aos relativos ângulos entre sucessivos passos, e mantendo fielmente suas propriedades estatísticas de escala (i.e., long-term limit, larga escala espacial e longa escala temporal).

Nos gráficos de caminhadas aleatórias balísticas (Figura 4.1), percebemos como a forma da caminhada muda com o aumento da persistência ou memória

direcional (i.e., *turning angle*). Este mesmo fenômeno ocorre para todas as demais caminhadas geradas pelo modelo híbrido representando caminhadas correlacionadas e de Lévy.

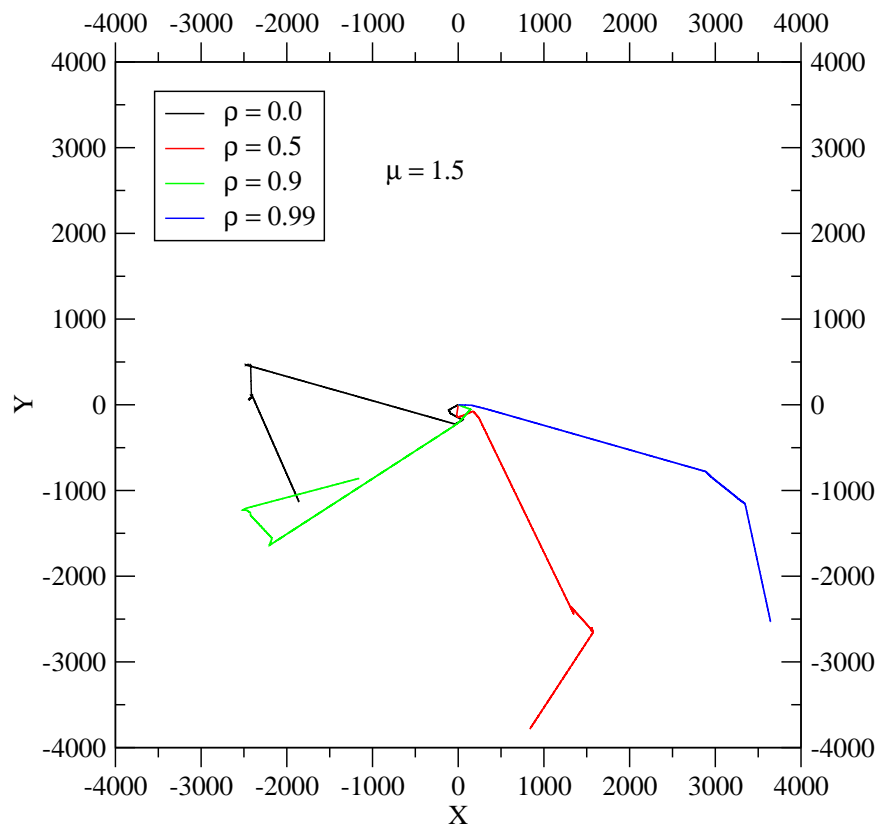


Figura 4.1: Movimento balístico gerado por um modelo de caminhada Lévy correlacionado, variando o parâmetro de memória direcional ρ .

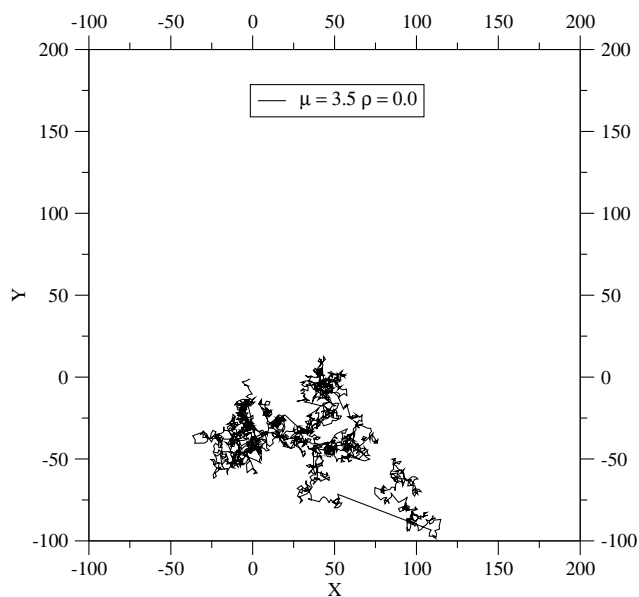


Figura 4.2: Movimento Browniano puro, gerado pelo modelo híbrido com parâmetro de memória direcional ρ .

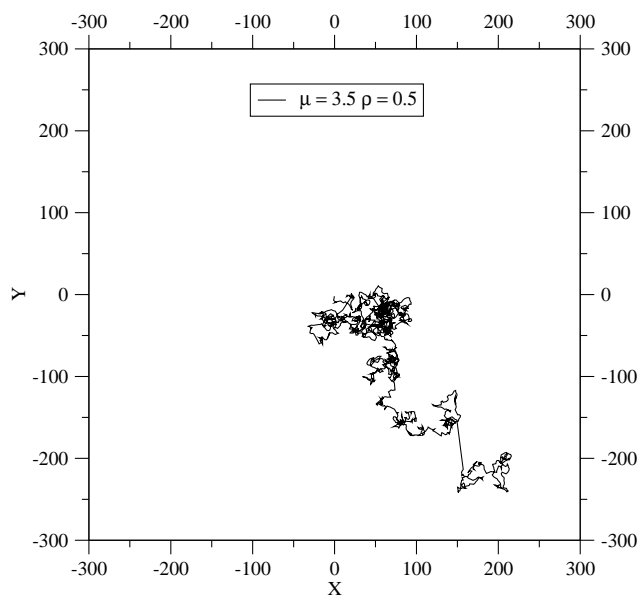


Figura 4.3: Aumento do parâmetro de memória direcional.

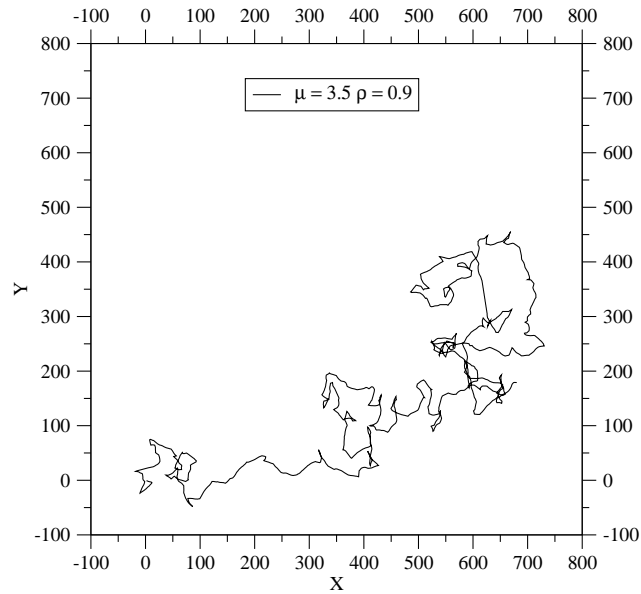


Figura 4.4: A persistência direcional muda a forma e o tipo da caminhada.

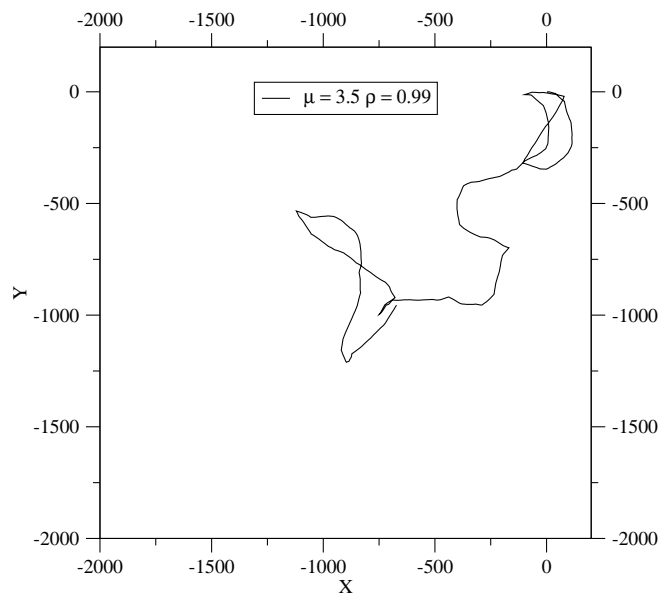


Figura 4.5: Em curta escala, Lévy correlacionado reproduz uma caminhada correlacionada superdifusiva $\rho = 0.99$.

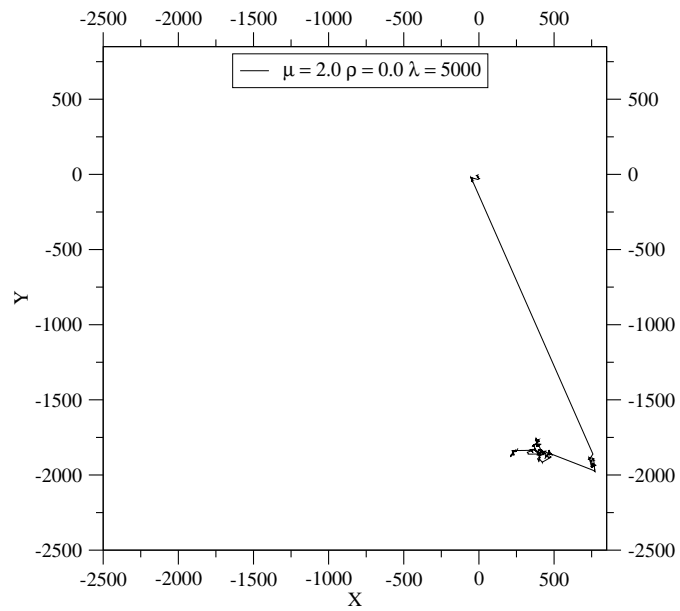


Figura 4.6: Caminhada de Lévy pura, ausente de correlação angular.

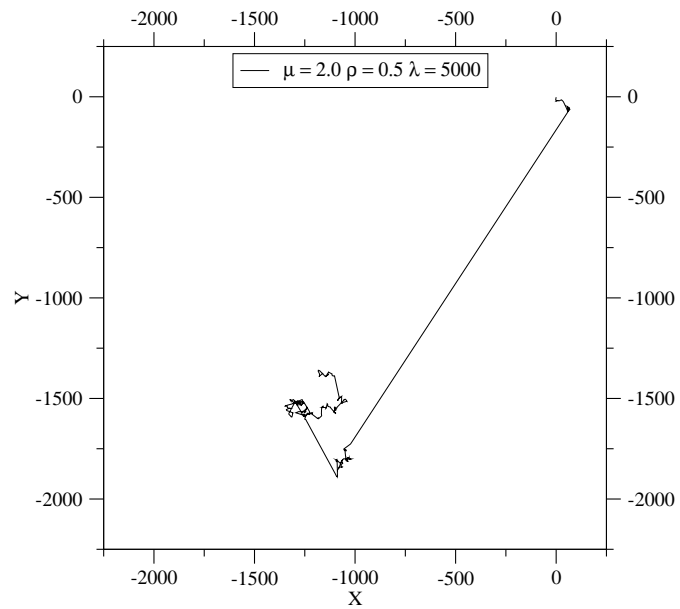


Figura 4.7: Durante a caminhada a distribuição dos ângulos de re-orientação é não-uniforme.

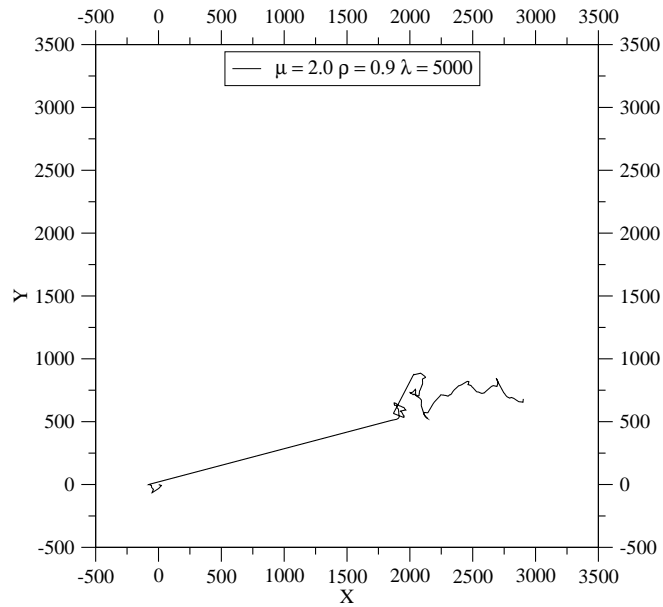
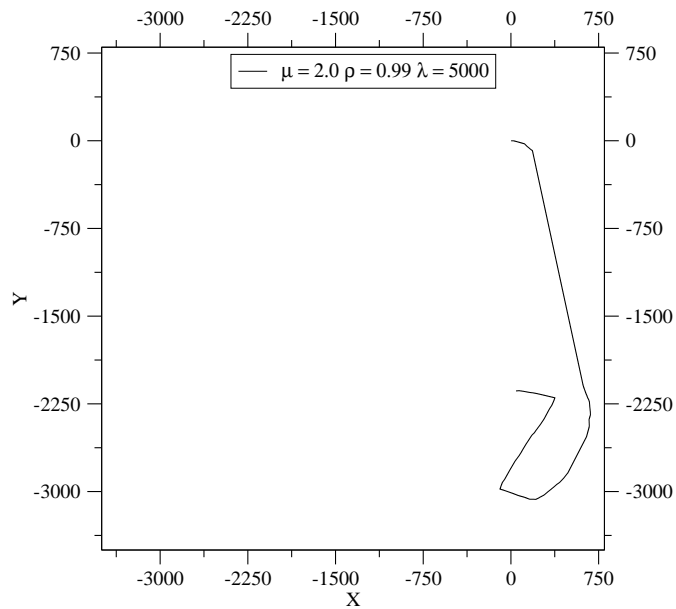


Figura 4.8: Caminhada de Lévy correlacionada.

Figura 4.9: Caminhada Lévy correlacionada com máxima persistência direcional $\rho = 0.99$.

4.4 Superdifusão

Com os dados obtidos numericamente podemos checar as propriedades difusivas de todas as caminhadas aleatórias geradas pelo modelo híbrido de caminhadas Lévy correlacionadas. Quando persistência surge em caminhadas com distribuição lei potência para o tamanho dos passos, em vez de correlações angulares Markovianas de curto alcance, uma nova propriedade emerge devido à correlações de longo alcance no comprimento do movimento. Uma mudança gradual no expoente μ corresponde a uma mudança gradual nas propriedades difusivas da caminhada. Podendo ou não desaparecer no limite de longa escala temporal. Uma transição gradual de difusão normal ($\mu \geq 3$) (Figura 2.8), para movimento balístico ($\mu \rightarrow 1$), torna-se possível para caminhadas de Lévy correlacionadas (Figura 4.10 e 4.11).

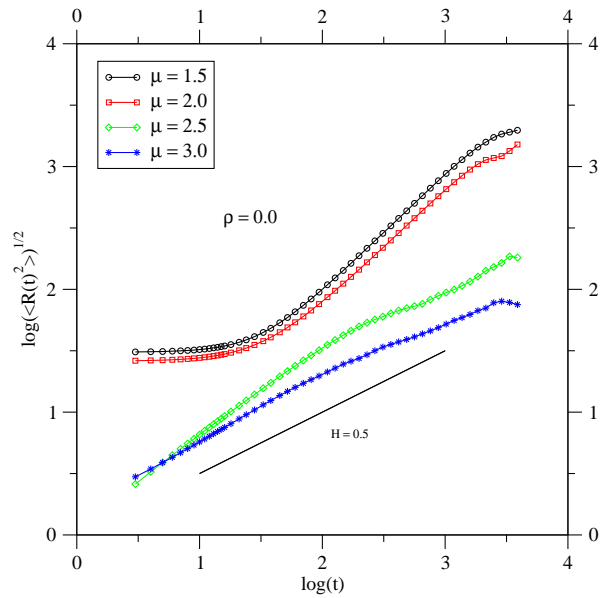


Figura 4.10: Raiz do deslocamento médio quadrático para caminhadas sem persistência direcional.

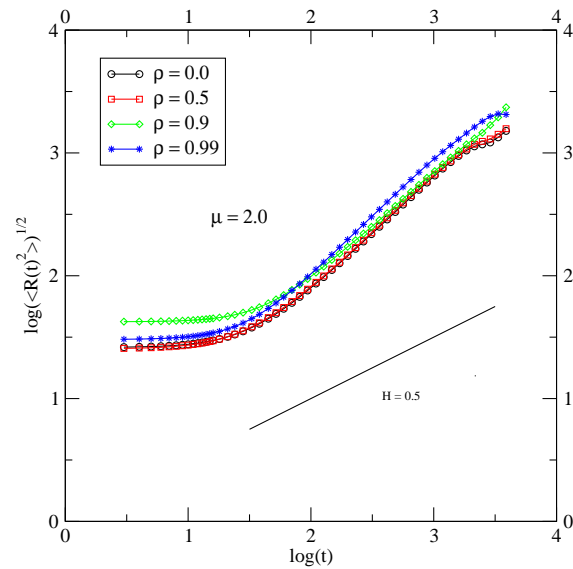


Figura 4.11: Superdifusão numa caminhada Lévy correlacionada.

O modelo Lévy correlacionado permite mudar o caráter difusivo de uma caminhada aleatória. Numa situação onde o comprimento de correlação τ é zero (i.e., quando $\rho = 0.0$), e não muito grande quando $\rho = 0.5$, qualquer tempo para a caminhada é considerado $\gg \tau$, induzindo sua entrada num regime de longa escala. Assim, difusão normal para o movimento e uma Gaussiana para o tamanho dos passos são previstos quando $\mu \geq 3$. Para $\rho = 0.9$ o comprimento de correlação será $\tau \approx 10$, e para $\rho = 0.99$, τ é ≈ 100 , isto faz com que o tempo da caminhada t seja de uma ordem não muito maior do que τ , assim o regime torna-se de curto alcance e superdifusão local pode ocorrer. Na figura abaixo temos um bom exemplo (Figura 4.12).

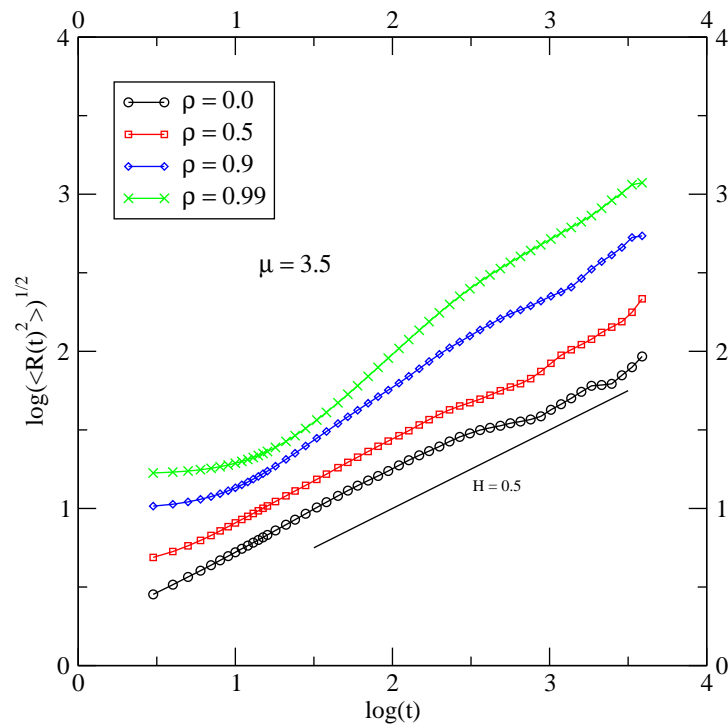


Figura 4.12: Caminhada Lévy correlacionada.

Capítulo 5

Propriedades Estatísticas de Caminhadas não-Markovianas

5.1 Introdução

Caminhadas aleatórias não-Markovianas correspondem a processos estocásticos com dependência da história completa da caminhada. Nesta parte do trabalho investigaremos as propriedades de escala de vários processos não-Markovianos ao incluir uma escala de memória limitada e uma ilimitada num processo de caminhada aleatória. Estudar os efeitos de memória é considerar, ou correlações de curto alcance de tempo para processos Markovianos, ou correlações de longo alcance para os não-Markovianos. É bem conhecido que numa caminhada a memória dos passos prévios muda o comportamento de escala da distribuição levando a um deslocamento médio quadrático superdifusivo [14]. Os resultados obtidos de simulações numéricas serão descritos e finalmente discutidos.

5.2 O Modelo do “Elefante” Caminhante

Muitos fenômenos físicos, biológicos e econômicos são modelados pelos processos estocásticos não-Markovianos. Por precisão, nós continuamos com a notação introduzida na referência [14]. Nós consideramos que a caminhada aleatória começa na origem no tempo $t_0 = 0$ e retém a memória de sua história completa. Devido ao ditado tradicional de que elefantes sempre se lembram, esse modelo tem sido chamado modelo de caminhada aleatória do elefante. Em cada passo no tempo o “elefante” move ou um passo para direita ou um passo para a esquerda:

$$x_{t+1} = x_t + \sigma_{t+1} \quad (5.1)$$

onde $\sigma_{t+1} = \pm 1$ representa um ruído estocástico que contém correlação de dois pontos (i.e., memória). O elefante pode sempre lembrar da história inteira das direções prévias dos passos da caminhada $\{\sigma_{t'}\}$ para $t' \leq t$. Nós resumimos o modelo como se segue:

No tempo t , nós escolhemos aleatoriamente um tempo prévio $1 \leq t' < t$ com probabilidades *a priori* iguais. Nós então escolhemos a direção do passo atual σ_t baseado no valor de $\sigma_{t'}$ da seguinte maneira:

$$\sigma_t = \begin{cases} +\sigma_{t'} & \text{com probabilidade } p \\ -\sigma_{t'} & \text{com probabilidade } 1 - p \end{cases} \quad (5.2)$$

Sem perda de generalidade nós assumimos que o primeiro passo sempre vai para a direita, i.e. $\sigma_1 = +1$. A posição no tempo t portanto segue:

$$x_t = x_0 + \sum_{t'=1}^t \sigma_{t'} = \sum_{t'=1}^t \sigma_{t'} \quad (5.3)$$

onde $x_0 = 0$ e, assintoticamente, se encontra [14]

$$\langle x_t^2 \rangle = \frac{t}{3-4p}, \quad p < 3/4; \quad \langle x_t^2 \rangle = t \ln t, \quad p = 3/4; \quad (5.4)$$

$$\langle x_t^2 \rangle = \frac{t^{4p-2}}{(4p-3)\Gamma(4p-2)}, \quad p > 3/4$$

Como discutido na ref.[14], existe um regime de escape ($p > 3/4$) e um regime localizado ($p < 1/2$), com ($p = 3/4$) sendo marginalmente i.e. logaritmicamente superdifusivo. Notavelmente, para $1/2 < p < 3/4$, o deslocamento médio quadrático diverge, embora menor do que o quadrado da média, de modo que o comportamento permanece difusivo. O deslocamento médio comporta-se como:

$$\langle x_t \rangle \sim t^{2p-1} . \quad (5.5)$$

Em adição à classificação do comportamento em termos de difusão normal versus anômala (definida pela transição em $p = 3/4$), nós notamos que podemos também classificar [14, 15] as caminhadas como “reformers” ($p < 1/2$) que têm comportamento anti-correlacionado e tradicionalistas ($p > 1/2$) que têm correlações positivas, isto é, que têm persistência. Os reformadores têm um deslocamento médio decaindo algebricamente (i.e., desaparecendo), enquanto tradicionalistas têm um deslocamento médio divergindo algebricamente.

A solução deste problema é uma densidade de probabilidade Gaussiana com constante de difusão dependente de p e do tempo:

$$D(t, p) = \frac{1}{8p - 6} \left[\left(\frac{t}{t_0} \right)^{4p-3} - 1 \right] \quad (5.6)$$

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t D(t)}} \exp \left(-\frac{(x - \bar{x}(t))^2}{4t D(t)} \right). \quad (5.7)$$

5.3 Leis de escala e Colapso de Dados

Nessa seção investigamos rigorosamente uma classe de processos não-Markovianos, ao estudar as propriedades de “scaling” do primeiro e segundo momento da densidade de probabilidade definida nas Eq. (6) e (7). Ao variar o parâmetro p e também o expoente de escala “ $H = 2p - 1$ ” nós observamos na Figura 5.1(a) o deslocamento médio e Figura 5.1(b) o deslocamento médio quadrático como função do tempo. Para $p > 3/4$ o comportamento é superdifusivo, enquanto para $p < 1/2$ o deslocamento médio permanece pequeno.

A Figura 5.2 mostra o expoente de escala H do deslocamento médio quadrático, que de acordo com a teoria deveria seguir a Eq. 5.4. Nós percebemos que os resultados numéricos concordam com os resultados analíticos conhecidos. A Figura 5.3 mostra a densidade de probabilidade da posição normalizada para (a) muitos valores do tempo e (b) vários p . A renormalização da posição foi feita subtraindo o deslocamento médio medido, $x - \langle x \rangle$, e ao dividir a posição pelo desvio padrão teórico $\sqrt{2tD(t, p)}$, onde $D(t, p)$ é dado pela Eq. 5.6 e é chamada constante de difusão. Verificamos que existe um bom colapso de dados em uma distribuição Gaussiana. Na Figura 5.4 nós temos um probability plot normal [20] para a posição renormalizada. O probability plot normal pode ajudar a verificar se um conjunto de dados segue

uma distribuição Gaussiana, isto é, normal. No eixo vertical nós plotamos os dados ordenados, e no eixo horizontal plotamos as medianas estatísticas de ordem normal para a distribuição normal. Assim, partidadas de um plot linear indicam partidas do comportamento Gaussiano. Nós vemos na Figura 5.4 um bom ajuste (fit) com uma distribuição Gaussiana.

5.4 Efeitos de Limitação de Memória

O caso não-Markoviano

Aqui nós consideramos o possível caso de um caminhante aleatório que pode se lembrar apenas de uma fração f dos passos prévios de tempo t . O alcance de memória R se iguala a $R = ft$. Se $f = 1$ o caminhante se lembra de todos os passos, então nós recuperamos o modelo original, mas para $f < 1$ nós obtemos um modelo que não se lembra da história inteira. Apesar disso, pode ocorrer a situação não-Markoviana no sentido de não haver nenhuma escala característica de memória.

Na Figura 5.5 nós temos o expoente de escala H do deslocamento médio quadrático variando de acordo com o alcance da memória. À medida que f se torna menor, o modelo tenderá a um comportamento Markoviano, apesar de tecnicamente $f > 0$ significa que o processo tem um caráter não-Markoviano de uma memória de longo alcance. O resultado mais interessante se concentra nos valores $p > 3/4$, para o qual nós obtemos superdifusão quando $f = 1$. E, a medida que f diminui, o comportamento torna-se difusivo ($H = 0.5$) mesmo para $p > 3/4$.

Figura 5.6(a) mostra o deslocamento quadrático como uma função de tempo

com $f < 1$ e $p = 0.9$. Observamos que o sistema tende a um comportamento Markoviano para $f = 0.3$, mesmo quando $p = 0.9$. A Figura 5.6(b) mostra as derivadas numericamente estimadas da raiz dos deslocamentos médios quadráticos. Figura 5.6(a) representa os expoentes de escala efetivos $H(t)$ na escala t :

$$H(t) \equiv \frac{1}{2} \frac{d \log[\langle x_t^2 \rangle]}{d \log[t]} \quad (5.8)$$

Notavelmente, para f suficientemente pequeno e t suficientemente grande, nós obtemos $H = 0.5$ ainda quando $p = 0.9 > 3/4$. Note, na Figura 5.6(b), que o comportamento começa superdifusivo mas lentamente converge a uma difusão normal.

O Limite Markoviano

Nesta seção nós analisamos uma modificação nos modelos considerando um alcance fixo de memória. Nós estudamos o limite Markoviano do modelo do elefante, no qual o caminhante aleatório pode se lembrar apenas de um máximo de passos prévios de tempo R . Observamos que esse modelo tem as mesmas propriedades do modelo original [14] para tempos $t < R$, mais existe um *crossover* para comportamento Markoviano para tempos maiores conforme o esperado. A Figura 5.7 mostra como o comportamento cruza de comportamento não-Markoviano para Markoviano a medida que o tempo aumenta além do alcance de memória fixado, levado como $R = 10^3$.

Com esse *insight* nós podemos olhar para o comportamento do modelo de memória limitada não Markoviano previamente discutido ao considerar que a fração

f do total de RW lembradas declina constantemente nesse modelo Markoviano. Especificamente nós temos:

$$f = \begin{cases} 1 & \text{for } t \leq R \\ R/t & \text{for } t > R. \end{cases} \quad (5.9)$$

Agora nós podemos interpretar a Figura 5.7 como se $f = 1$ para tempos acima de R e então assintoticamente tenderá a zero para grandes $t > R$. Na verdade, nós notamos que mesmo para $p > 3/4$, o comportamento é como a RW difusiva (i.e., Browniano) no limite de t grande, isto é, para pequenos valores de f .

5.5 Discussão

É interessante observar o resultado obtido no caso $p > 3/4$ e $f < 1$. A Figura 5.8 mostra que mesmo quando o alcance de memória diverge de $\forall f > 0$, o comportamento pode se tornar difusivo normal (i.e., Browniano, $H = 0.5$) para $p > 3/4$. Desse resultado, concluímos que a parte inicial da caminhada aleatória RW desempenha um papel fundamental em determinar se a difusão é normal ou anômala.

Nós também discutimos como o comportamento do expoente de escala, inicialmente supedifusivo, é lentamente dirigido em direção ao valor $H = 0.5$. Se $f = 1$, então o movimento será superdifusivo, com H próximo a balístico ($H = 2$). Entretanto, considere uma situação onde $f \approx 0.1$. Nesse caso a probabilidade de mudança de direção ou seja, dar um passo numa direção errada, é muito pequena ($\approx 1 - p = 0.01$), ainda que o alcance de memória tenha diminuído grandemente.

Então, dado uma vez um passo na direção errada, a memória limitada torna este mais fácil para o próximo passo sendo levado a direção errada. De fato, a probabilidade de continuar na direção errada pelo segundo passo torna-se 10 vezes maior se $f = 0.1$, comparada a $f = 1$. Essencialmente, flutuações tornam-se mais notáveis quando f diminui. Na verdade, quando $f \rightarrow 0$, restam somente flutuações.

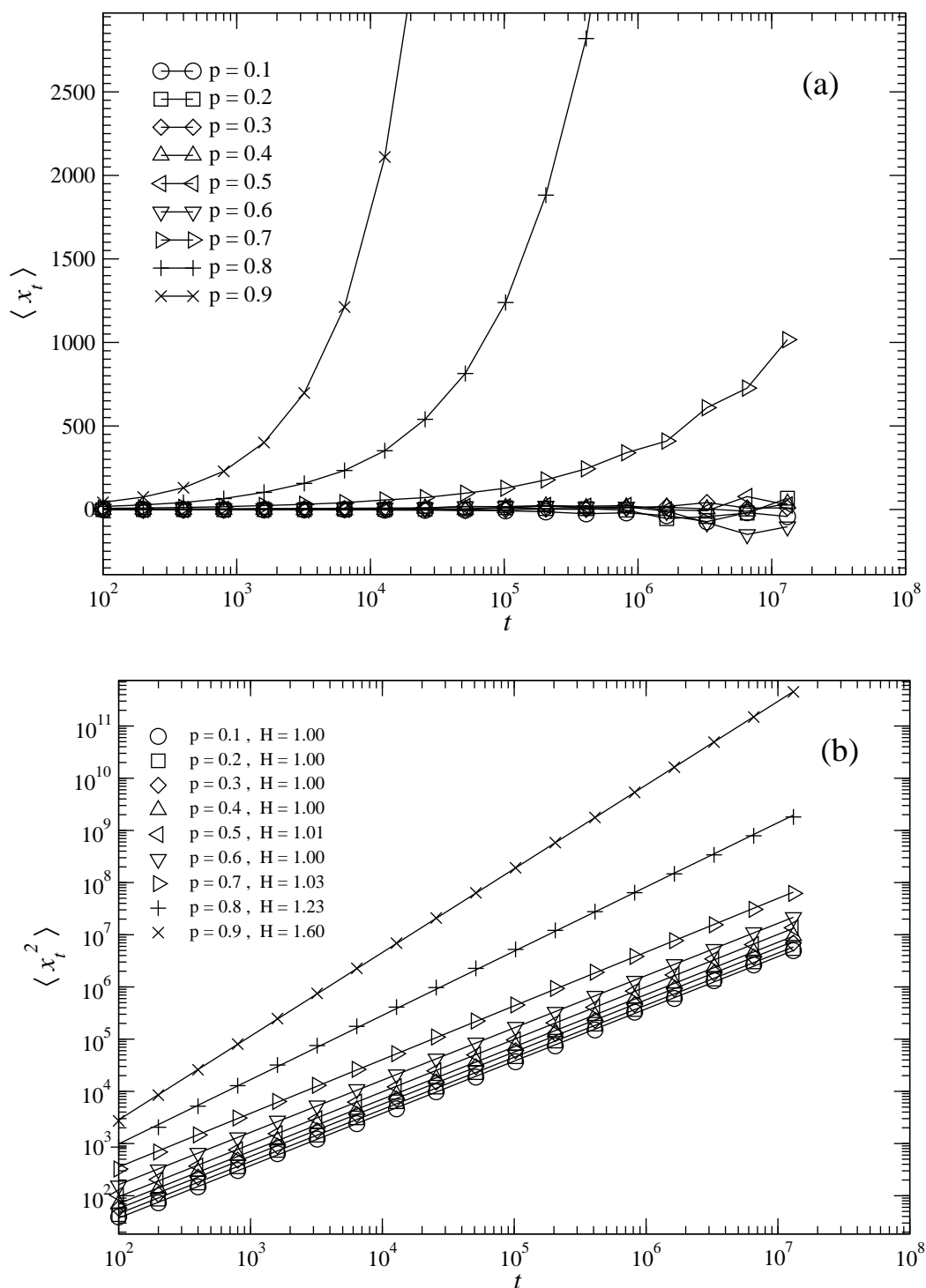


Figura 5.1: (a) Deslocamento médio como função do tempo t e parâmetro de memória p . (b) Deslocamento médio quadrático.

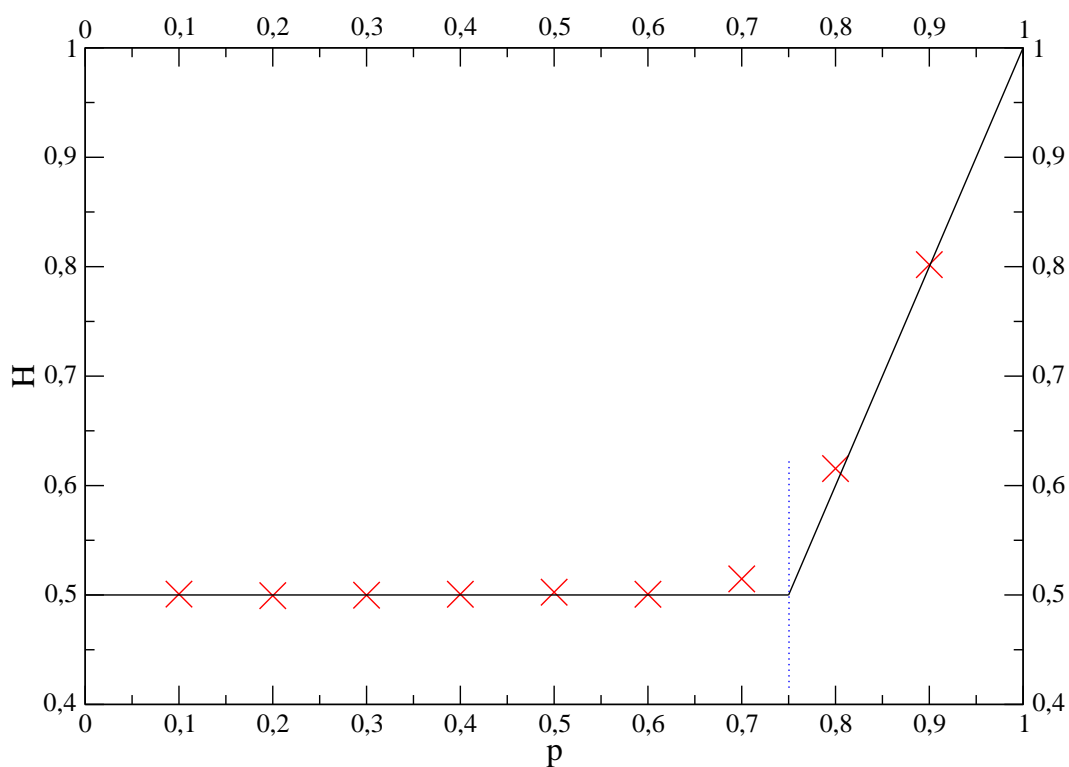


Figura 5.2: Expoente de escala do deslocamento médio quadrático como função do parâmetro de memória p . Note que, como o esperado teoricamente, o comportamento muda qualitativamente próximo de $p = 3/4$. A linha preta mostra o resultado exato conhecido.

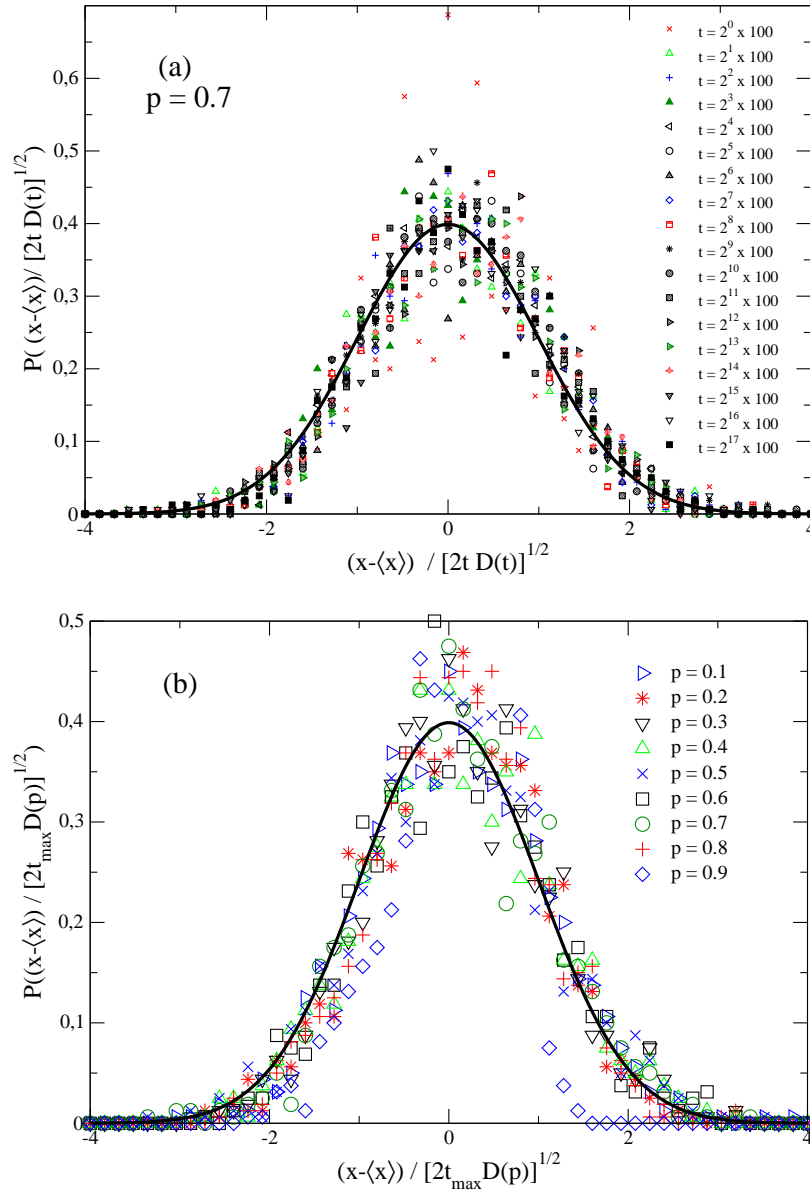


Figura 5.3: Função densidade probabilidade após renormalização da posição Eq. 5.7, (a) $\forall t$ e $p = 0.7$. Nós temos um colapso de dados em uma densidade de probabilidade Gaussiana. Isto sugere um comportamento correspondente a uma caminhada aleatória em um potencial tipo oscilador harmônico com constante de mola que depende de p e também do tempo. (b) $\forall p$ e $t = t_{max}$.

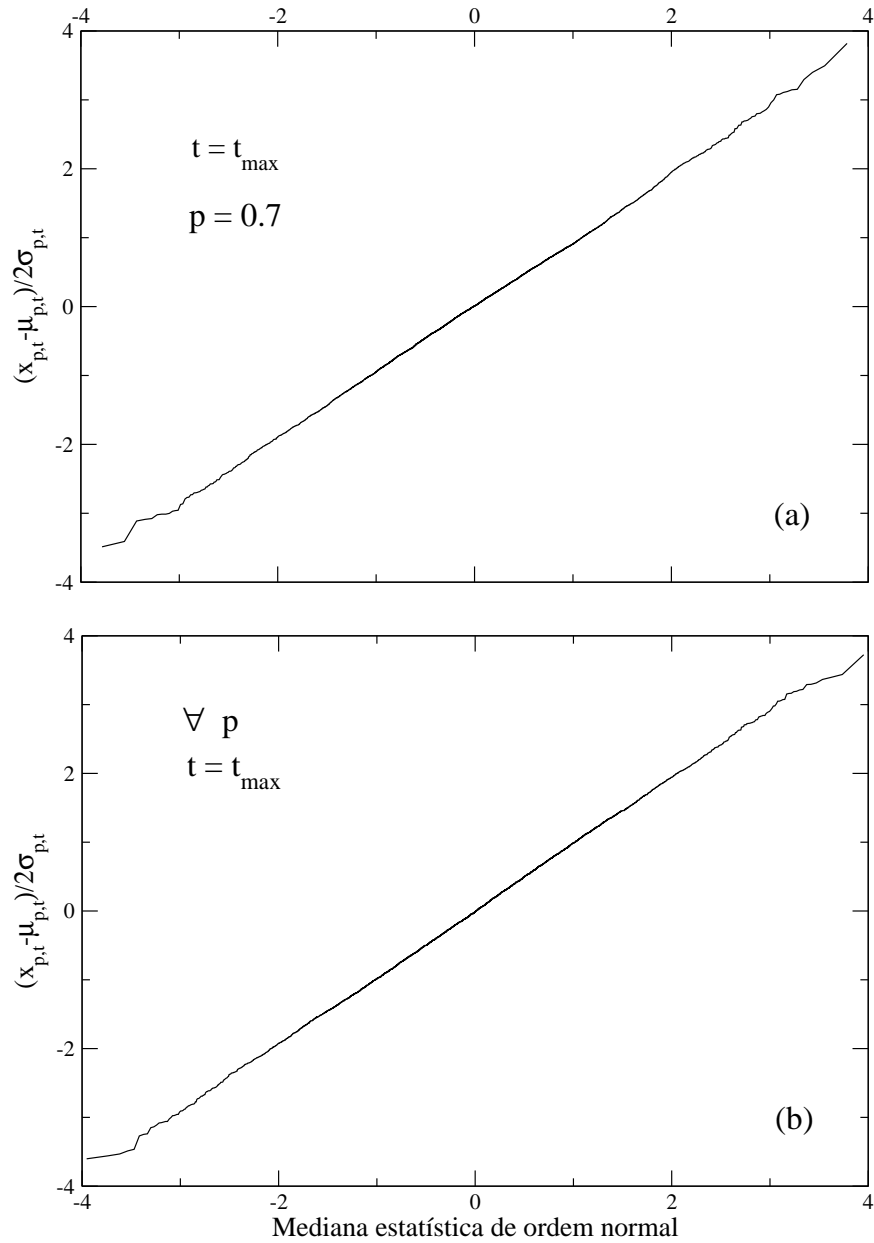


Figura 5.4: Probability plot normal da posição re-escalada para (a) todos os tempos e $p = 0.7$, e (b) para todo p em $t = t_{\max}$. Um Probability plot linear indica concordância com uma densidade de probabilidade normal. Note a forte concordância com o comportamento Gaussiano, como esperado.

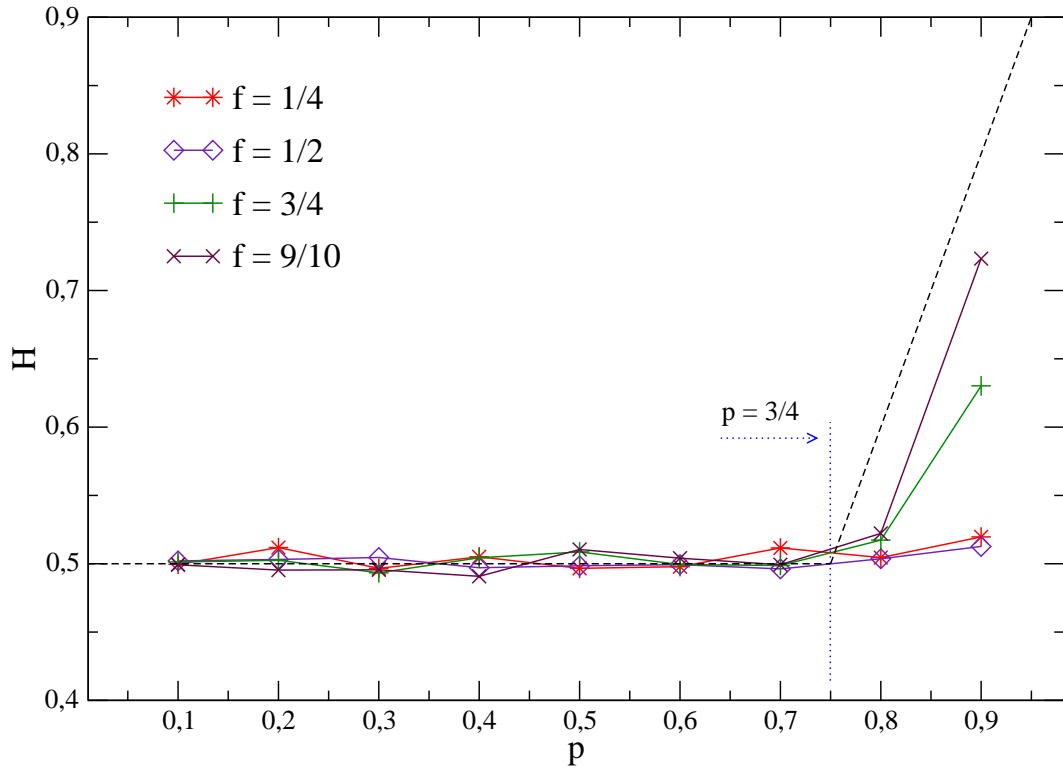


Figura 5.5: O expoente de escala Hurst como função do parâmetro de memória p para o elefante que lembra somente uma fração f do tempo total transcorrido. O alcance de memória aumenta de acordo com $R = ft$. Quando f aproximasse de 1, nós recuperamos o modelo do elefante. Para menores frações tais como $f = 1/2$ e $f = 1/4$, este modelo não-Markoviano comportasse como um modelo Markoviano com memória de curto alcance, ainda que este tenha atualmente memória de longo alcance. A linha tracejada mostra o resultado teórico para $f = 1$.

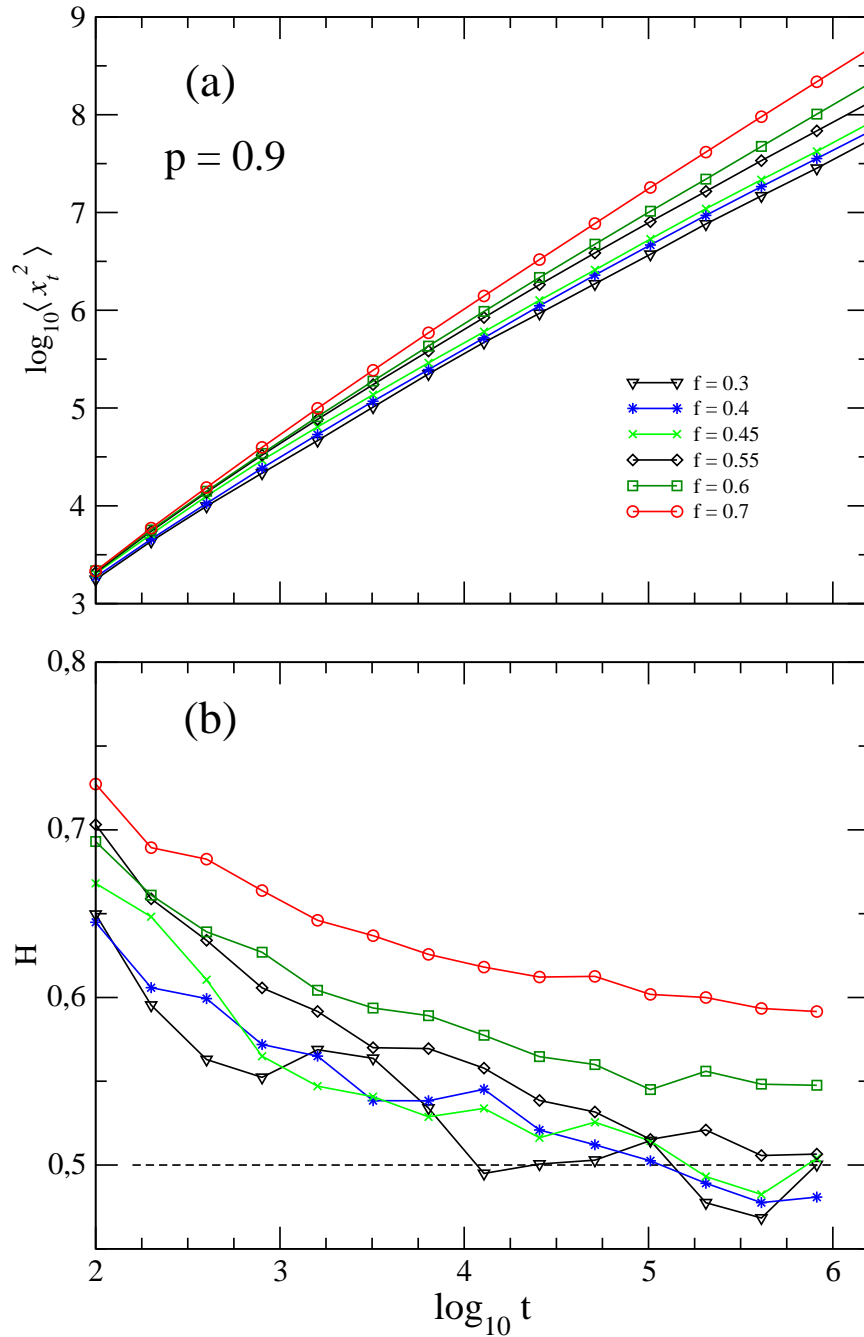


Figura 5.6: (a) deslocamento médio quadrático para vários f e $p = 0.9$. e (b) o expoente de scaling local H . Note que embora $p > 3/4$ comportamento difusivo ainda pode surgir.

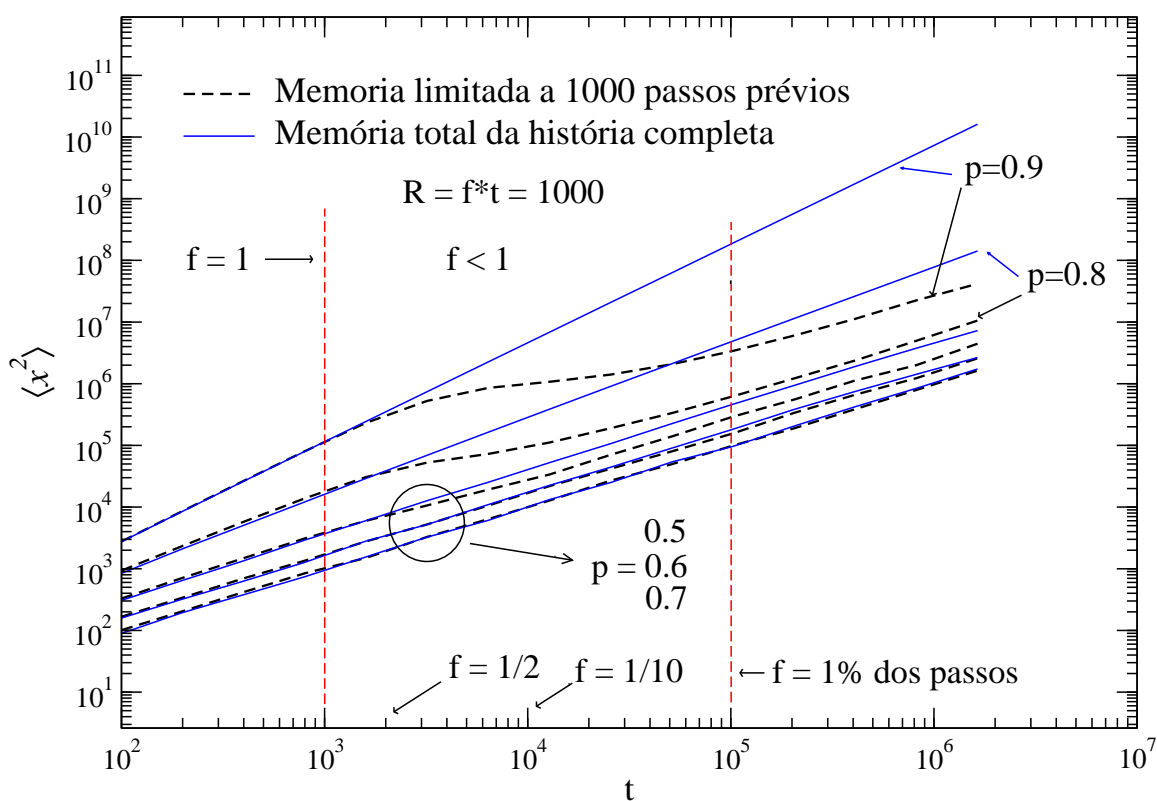


Figura 5.7: deslocamento médio quadrático para o modelo Markoviano discutido no texto, para o qual o caminhante aleatório pode lembrar um número finito dos passos prévios mais recentes. Nós escolhemos um limite de passos prévios $R = 10^3$ para o alcance máximo de memória. A figura mostra que o comportamento inicia idêntico ao modelo original não-Markoviano, mas se sobrepõe a difusão normal para escalar acima do alcance de memória.

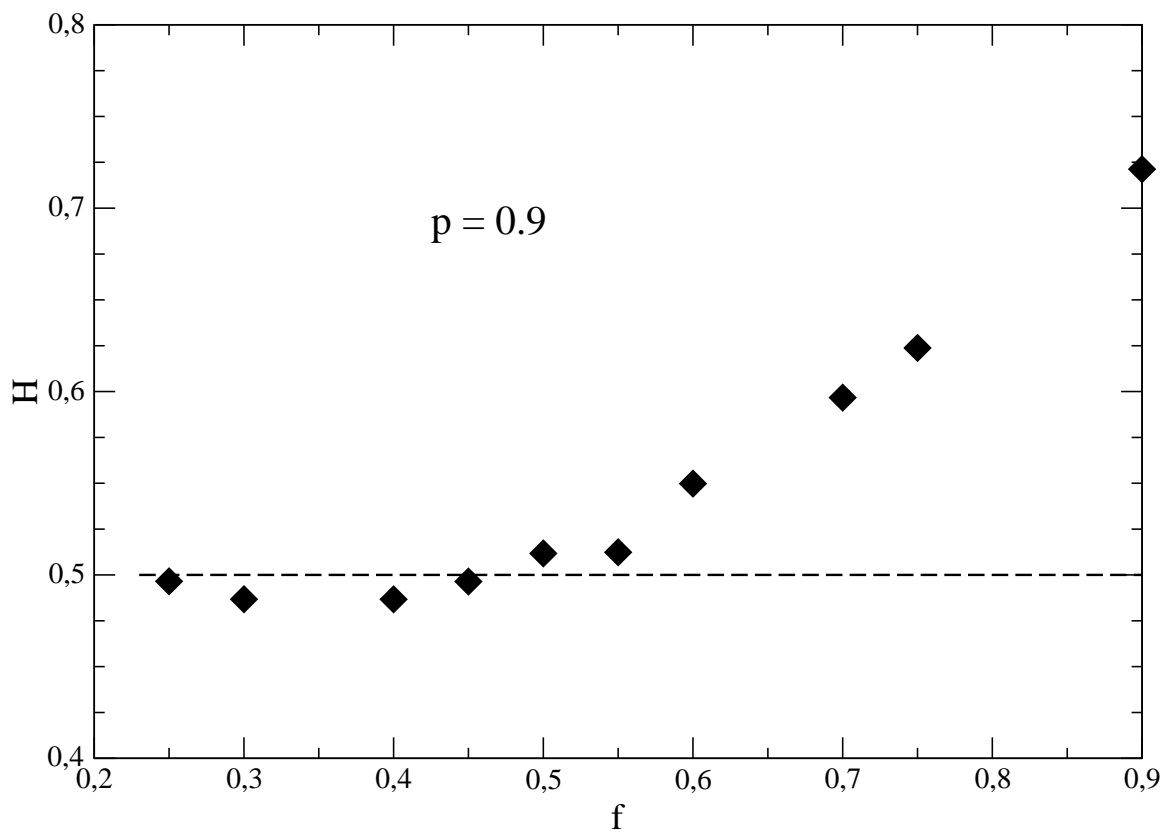


Figura 5.8: H como uma função de f para $p = 0.9$.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

6.1 Conclusões

Concluimos que o modelo de caminhadas de Lévy correlacionadas oferece uma praticidade no sentido de buscar por classes de caminhadas aleatórias em regimes específicos. Caminhadas Lévy correlacionadas asseguram o comportamento Browniano (i.e., difusivo normal) para caminhadas aleatorias com expoente de Lévy $\mu \geq 3$ no regime longa escala, garantindo assim as propriedades Markovianas, comum ao modelo de caminhada correlacionada. Para valores de μ correspondentes a movimento balístico $\mu \rightarrow 1$ e a caminhadas de Lévy $2 \leq \mu < 3$ verifica-se o aumento assentado no tamanho dos passos de Lévy. Esta característica não é resultado do aumento da persistência direcional ρ , que por meio de uma distribuição angular não uniforme controla a correlação dos ângulos relativos da caminhada. Dessa forma pode-se aplicar o modelo Lévy correlacionado para modelagem e entendimento das características comportamentais de animais. O modelo híbrido Lévy correlacionado

satisfaz as exigências para a descrição dos processos de caminhadas aleatórias, pois reproduz fielmente todas características estatísticas de ambos os modelos anteriormente conhecidos, caminhada correlacionada e caminhada Lévy

Estudamos também numericamente os efeitos de memória de longo alcance em caminhadas aleatórias, por meio do comportamento de “scaling” da função densidade de probabilidade da posição. A escolha da direção a ser dada por um passo é baseada em decisões tomadas no passado, que são aceitas com uma probabilidade p . Para o caso de uma memória não seletiva, não tendenciosa, existe uma dependência da história completa do processo. Tal processo não-Markoviano foi apresentado para mostrar um regime localizado ($p < 1/2$) com um regime marginalmente (i.e.,logaritmicamente) para ($p = 3/4$) é um regime de escape ($p > 3/4$), em concordância com resultados analíticos anteriores [14] [15]. No caso de uma memória seletiva (ou tendenciosa), isto é, se apenas uma fração ft dos passos no tempo prévios t são mantidos na memória, um acha a existência de um cruzamento, (*crossover*) do comportamento não-Markoviano para Markoviano para $f < 1$. Curiosamente note que tal crossover aparece quando $R = ft \rightarrow \infty$.

6.2 Percepções e Contextualização

Desde o surgimento da vida na terra, o mundo selvagem sustenta-se sobre um, rigoroso conjunto de regras de seleção das quais o objetivo é apenas um: selecionar as espécies que mais se adaptam ao meio dando-lhes o privilégio de se multiplicar diferenciadamente, e assim sobreviver. É dessa forma que impiedosamente, o meio seleciona espécies para evoluir e populacionar o planeta. Algo como o direito de co-existir com a natureza, evoluindo mutuamente num meio aparentemente equilibrado, onde as flutuações nas regras de seleção dão origem a espécies cada vez mais adaptadas e à extinção de outras. De fato, a competição, seja por alimento, seja por reprodução, é uma das mais eficientes regras de seleção que o meio arranhou ao acaso para selecionar espécies a evoluir. Estes são alguns dos fatores necessários à evolução, e foram primeiramente constatados pelo naturalista inglês Charles Darwin (1812-1889), durante dedicadas observações de animais que habitavam o paradisíaco arquipélago de galápagos. O brilhante estudo de Darwin rendeu o famoso livro *The Origin of Species 1859*, As origens das espécies [1], revolucionando a forma com a qual, na época, se acreditava saber sobre o surgimento da vida. Não esquecendo do valioso apoio interpretativo e moral de Huxley à Darwin, com respeito ao meio, como o principal fator de seleção, e também, sobre a divulgação pública referente ao homem, um *homo sapiens*.

Regras de seleção como quantidade de alimento, ameaça predatória, condições climáticas e até mesmo alterações geológicas, são todos fatores intrínsecos ao meio, tornando a realidade animal a mais estocástica possível. Baseado nesta estocasticidade as simulações numéricas reproduzem necessidades biológicas como, busca

por alimentos, por parceiros reprodutivos e táticas de sobrevivência devido à ameaça predatória. Propondo assim que tais regras de seleção obedecem leis estatísticas bem definidas, e que animais desenvolveram a habilidade e performance das distribuições de Lévy. O comportamento selvagem tem como principal princípio a “sobrevivência”. Desde o surgimento dos primeiros seres unicelulares, não menos complexos que os multicelulares, encontrar táticas de sobrevivência tornou-se o que há de melhor na natureza. Por toda parte do planeta a vida se proliferou, variando de região para região. Com táticas distintas de adaptação ao meio surgiu a diversidade ecológica, onde seres unicelulares não primitivos tornaram-se tão adaptados ao meio quanto os que possuem diversas células, mostrando assim uma invariância de escala para a evolução.

A proposta de que animais tenham desenvolvido a performance da distribuição de Lévy como forma adaptativa, é de maneira geral uma estratégia para escaneamento local, ou seja reconhecimento do meio para fins de sobrevivência. Na década de 80, H. E. Stanley e G.M. Viswanathan propuseram [4] que abatrozes realizam caminhadas de Lévy durante a busca por alimento.

O método padrão usado em ecologia espacial considera movimento Browniano e difusão de Fick [2] como duas propriedades básicas do movimento animal, quando se leva em consideração larga escala espacial e longa escala temporal, também chamado *long term limit*, limite de longo termo. Assim é assumido que o movimento animal pode ser modelado como caminhadas aleatórias. Modelos de caminhadas aleatórias precisam levar em consideração persistência direcional no movimento (i.e., a tendência do animal em continuar se movimentando na mesma direção).

A imprevisibilidade de sucesso ao aplicar uma tática de escaneamento local

surge como uma arma sutil e devastadora, da natureza animal contra os indivíduos. Uma investida mal sucedida de busca pode acarretar grandes perdas, e danos permanentes podem ocorrer. Em animais das mais altas hierarquias selvagem, como os guepardos [3] que em persistentes investidas de captura mal sucedidas, o superaquecimento cerebral após atingir altas velocidades em torno 100km/h danifica permanentemente seu cérebro, desabilitando-o para sempre do grupo dos predadores mais eficientes da cadeia alimentar. É desta forma que os animais buscam sempre a melhor estratégia de escaneamento, tendo que saber aproveitar todas as táticas possíveis. As aplicações para o modelo híbrido de caminhadas de Lévy correlacionadas são diversas, ainda assim uma em especial, a solução analítica para o deslocamento médio quadrático ainda é algo desconhecido e nós desperta curiosidade. Espero que o estudo de caminhadas aleatórias contribua incrementalmente nesse contexto.

Bibliografia

- [1] Charles Darwin. *The Origin of Species*. (1859).
- [2] F. Bartumeus, M. G. E. da Luz, G. M. Viswanathan, J. Catalan. *Animal Search Strategies: A quantitative random walk analysis*. *Ecology*. **86**, 11, 3078, (2005).
- [3] N. G. C.. *National Geographic Channel*. Vida Selvagem.
- [4] G. M. Viswanathan, V. Afanasyev, S. V. Buldyrev, E. J. Murphy, P. A. Prince, and H. E. Stanley. *Lévy search patterns of wandering albatrosses*. *Nature*. **381**, 413, (1996).
- [5] F. Bartumeus. Tese de Doutorado. *Lévy processes in animal movement and dispersal*. Department d'Ecologia, Universitat de Barcelona.
- [6] S. Rao Jammalamadaka, K. Iyer Srikanth. *A simple estimate of the index of stability for symmetric stable distributions*.
- [7] P. M Kareiva. and N. Shigesada. *Analyzing insect movement as a correlated random walk*. *Oecologia*. **56**, 234, (1983).
- [8] M. F. Shlesinger, B. J. West, J. Klafter. *Lévy Dynamics of Enhanced Diffusion: Application to Turbulence*. *Physical Review Letters*. **58**, 11, (1987).

-
- [9] R. A. Silvio Salinas. *Einstein e a teoria do movimento Browniano*. Revista Brasileira de Ensino de Física. **27**, 2, 263.
- [10] F. Bartumeus, J. Catalan, G. M. Viswanathan, E. Raposo, and M. G. E. da Luz. *The role of turning angle distributions in animal search strategies*. not yet published.
- [11] G. M. Viswanathan, E. Raposo, F. Bartumeus, J. Catalan, and M. G. E. da Luz. *Necessary criterion for distinguishing true superdiffusion from correlated random walk processes*. Phys. Rev. E. **72**, 011111, (2005).
- [12] C. Tsallis. *As Distribuições de Lévy*. Revista Brasileira de Ensino de Física. **22**, 2, 156, (2000).
- [13] B. V. Gnedenko, A. N. Kolmogorov. *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*, Addison-Wesley. (1954).
- [14] G. M. Schütz, S. Trimper. *Elephants can always remember: Exact long-range memory effects in a non-Markovian random walk*. Phys. Rev. E. **70**, 045101, (2004).
- [15] A. A. da Silva, J. C. Cressoni and G. M. Viswanathan. *Discrete-time non-Markovian random walks: The effect of memory limitations on scaling*. Physica A. **364**, 70, (2006).
- [16] C. Tsallis. *Physics World*. **10**, 42, (1997).
- [17] M. F. Shlesinger, G. M. Zaslavsky, J. Klafter. *Nature*. **363**, 31, (1993).

-
- [18] M. F. Shlesinger, G. Zaslavsky, U. Frisch. *Lévy Flights and Related Topics in Physics*. Springer Berlin, (1995).
- [19] M. Cassandro, G. Jona-Lasinio. *Adv. Phys.* **27**, 913, (1978).
- [20] J. Chambers, W. Cleveland, B. Kleiner, P. Tukey. *Graphical Methods for Data Analysis*. Wadsworth, (1983).
- [21] G. B. Arfken, H. J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Sixth Edition, (2005).
- [22] D. James Hamilton. *Time Series Analysis*. Princeton University Press, (1994).
- [23] I. T. Pedron, R. S. Mendes. *Revista Brasileira de Ensino de física.* **27**, 2, 251, (2005).
- [24] M. F. Shlesinger. *Nature.* **443**, 281, (2006).
- [25] G. M. Viswanathan, S. V. Buldyrev, S. Havlin, M. G. E. da Luz, E. P. Raposo. and H. E. Stanley. *Nature.* **401**, 911 (1999).
- [26] R. P. D. Atkinson, C. J. Rhodes, D. W. Macdonald and R. M. Anderson. *Oikos.* **98**, 134, (2002).
- [27] G. Ramos-Fernandez, J. L. Mateos, O. Miramontes, G. Cocho, H. Larralde, B. Ayala-Orozco. *Behavioral Ecology and Sociobiology.* **55**, 223, (2004); D. Boyer, O. Miramontes, G. Ramos-Fernandez, J. L. Mateos, G. Cocho. *Physica A.* **342**, 329, (2004).
- [28] C. T. Brown, L. S. Liebovitch and R. Glendon. *Lévy flights in dobe ju'/hoansi foraging patterns*. *Human Ecology*, 35(1) 129, (2007).

-
- [29] M. F. Shlesinger and J. Klafter. On Growth and Form. edited by H. E. Stanley and N. Ostrowski (Martinus Nijhof Publishers, Amsterdam), 279, (1986).
- [30] M. F. Shlesinger, G. M. Zaslavsky and U. Frisch. (Editors). *Levy Flights and Related Topics in Physics*. (Springer, Berlin), (1995).
- [31] F. Bartumeus, J. Catalan, U. L. Fulco, M. L. Lyra and G. M. Viswanathan. *Phys. Rev. Lett.* **88**, 097901, (2002); *Physics Review Letters*. **89**, 109902, (2002).
- [32] H. E. Stanley. *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*. Oxford USA trade press. (1987).
- [33] S. B. Cavalcanti, A. S. Gouveia-Neto, H. R. da Cruz. J. C. Cressoni, Modulation instability in the region of minimum group velocity dispersion of single mode optical fibers via an extended nonlinear Schrödinger equation. *Physical Review A. Estados Unidos*. **43**, 11, 6162, (1991).
- [34] F. A. B. F. de Moura, M. L. Lyra. Delocalization in the 1d anderson model with long-range correlated disorder. *Physics Review Letters*. **81**, 3735, (1998).
- [35] A. Figueiredo, I. M. Gleria, R. Matsushita, S. Da Silva. *On the origins of truncated Lévy flight*. *Physics Letters A*. **315**, 51, (2003).
- [36] L. Bachelier. *Ann. Sci. l'École Normale Supérieure*. **17**, 21, (1900).
- [37] H. E. Hurst, R. P. Black and Y. M. Simaika. *Long-Term Storage: An Experimental Study*. (London: Constable). (1965).

-
- [38] B. B. Mandelbrot. *In Statistical Models and Turbulence*. ed. M. Rosenblatt and C. Van Atta (New York: Springer), (1972).
- [39] B. B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman and Company. (1982). ISBN 0-7167-1186-9.
- [40] L. Giuggioli, G. M. Viswanathan, V. M. Kenkre, R. R. Parmenter and T. L. Yates. *Effects of finite probing windows on the interpretation of the multifractal properties of random walks*. EuroPhysics Letters. **77**, 40004, (2007).
- [41] V. M. Kenkre. *Exciton Dynamics in Molecular Crystals and Aggregates*. Springer-Verlag New York, Inc (1982).
- [42] Wikipedia. 2007. Gaussian distribution. disponível na World Wide Web em <http://www.wikipedia.org>.
- [43] Wikipedia. 2007. Lévy Walks. disponível na World Wide Web em <http://www.wikipedia.org>.