

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA

PEDRO HEADES FARIAS MESQUITA

**CONSTRUINDO UMA REDE QUADRADA COM MOMENTO
ANGULAR ORBITAL DA LUZ**

Maceió

2011

PEDRO HEADES FARIAS MESQUITA

**CONSTRUINDO UMA REDE QUADRADA COM MOMENTO
ANGULAR ORBITAL DA LUZ**

*Dissertação apresentada ao Departamento de
Física da Universidade Federal de Alagoas,
como parte dos requisitos para obtenção do
Título de Mestre em Ciências.*

ORIENTADOR: *Prof. Dr. Eduardo Jorge da Silva Fonseca*

CO-ORIENTADOR: *Prof. Dr. Jandir Miguel Hickmann*

Maceió

2011

Catlogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

M582c Mesquita, Pedro Heades Farias.
 Construindo uma rede quadrada com momento angular orbital da luz / Pedro
Heades Farias Mesquita. – 2011.
 98 f. : il., grafs.

 Orientador: Eduardo Jorge da Silva Fonseca.
 Co-Orientador: Jandir Miguel Hickmam.
 Dissertação (mestrado em Física da Matéria Condensada) – Universidade
Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2011.

 Bibliografia: f. [96]-98.

 1. Vórtices óticos. 2. Difração. 3. Ruídos (Física). 3. Feixe Laguerre-Gauss.
Fendas quadradas – Abertura. I. Título.

CDU: 535.42



Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física
Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14. Campus A.C. Simões
Cidade Universitária
Tabuleiro dos Martins
57072-970 Maceió - AL. Brasil

PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

"Construindo uma Rede Quadrada com Momento Angular Orbital da Luz"

por

Pedro Heades Farias Mesquita

A Banca Examinadora composta pelos professores Eduardo Jorge da Silva Fonseca (Orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Solange Bessa Cavalcanti, da Universidade Federal de Alagoas e Fernando Jorge Sampaio Moraes, da Universidade Federal da Paraíba, consideram o candidato aprovado com grau "A".

Maceió, 05 de dezembro de 2011

Prof. Eduardo Jorge da Silva Fonseca

Profª. Solange Bessa Cavalcanti

Prof. Fernando Moraes

*Aos meus pais Manoel e Salete,
esteio da minha existência, e aos
meus irmãos e sobrinhos
pelo amor, paciência e se privarem de minha presença.*

Agradecimentos

- Ao Santo e Eterno Deus, sem Ele nada seria possível;
- Aos meus pais e minha família, pelo apoio e incentivo durante toda esta jornada; sem eles eu não teria motivo para continuar;
- Ao professor *Eduardo Jorge da Silva Fonseca*, meu orientador no mestrado, por sua grande ajuda e apoio, sem o qual eu não conseguiria terminar esta tarefa;
- Ao professor *Jandir Miguel Hickmann*, pela oportunidade de desenvolver esta pesquisa sob sua co-orientação, por sua experiência, suas críticas e sugestões, bem vindas e necessárias à realização do mestrado;
- Aos integrantes do grupo *OPTMA* que proveram-me muitas oportunidades; Ao professor *Marcio R. Alencar* e todos os colegas de trabalho, em especial ao *Alcenísio José de Jesus Silva*, amigo de todas horas, pela ajuda de todo tipo a mim fornecido;
- Aos colegas do mestrado, meu eterno agradecimento a Júlio Rafael, Eliel Neto, Samuel Teixeira e aos demais colegas de minha sala pelo companheirismo e amizades durante essa jornada.
- Aos amigos da igreja do Eustáquio Gomes pelas orações e alegrias compartilhadas. Em especial às pessoas; Carlos, Cláudia, Thiago Henrique, José Sobral, Josean, Jonas Monteiro, Damião e Cristovão pelo apoio familiar e espiritual nos momentos de solidão e saudades de casa;
- À CAPES e a Fapeal pela concessão da bolsa de mestrado, que tornou possível este trabalho;
- Aos professores e colegas do Instituto de Física da UFAL que proveram-me com ensinamentos;
- À todos que, de forma direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

"Nosso mundo é composto de gigantes nucleares e anões éticos. Sabemos mais sobre a guerra do que sobre a paz, mais sobre matar do que sobre viver. Descobrimos o segredo do átomo e rejeitamos o sermão da montanha."

Extraído da Revista Seleções

Resumo

Construímos uma rede truncada usando a difração de Fraunhofer com feixes Laguerre-Gauss por uma abertura quadrada. Verificamos numericamente e experimentalmente que uma perfeita rede ótica de intensidades ocorre somente para valores pares de carga topológica. Explicamos a origem deste comportamento baseado na decomposição dos padrões. Propomos uma solução analítica para estes padrões de difração em diferentes valores de cargas topológicas e o utilizamos este resultado para descrever o motivo do truncamento dos padrões de difração com feixes possuindo MAO. Também estudamos a evolução da formação de redes pela observação da transição de primeira ordem para a próxima ordem variando as cargas topológicas fracionárias do momento angular orbital (MAO).

Palavras-chave: Vórtices óticos; Difração e ruídos; Abertura; Difração.

Abstract

We engineer an intensity square lattice using the Fraunhofer diffraction of a Laguerre-Gauss beam by a square aperture. We verify numerically and experimentally that a perfect optical intensity lattice takes place only for even values of the topological charge. We explain the origin of this behavior based on the decomposition of the patterns. We propose an analytical solution for these diffraction patterns at different values of topological charges and find the reason for the truncation diffraction patterns with beam having OAM. We also study the evolution of the lattice formation by observing the transition from one order to the next of the orbital angular momentum varying the topological charge in fractional steps.

Keywords: Optical vortices; Diffraction and gratings; Apertures; Diffraction.

Lista de Figuras

1.1	Frente de onda dos feixes Laguerre-Gauss ao longo do eixo z para $l = 0, 1$ e 2	23
1.2	Distribuição de fase de um feixe Laguerre-Gauss para um feixe com carga topológica $l = 0, 1, 2$ e 3	23
1.3	Perfil de intensidade de um feixe Laguerre-Gauss para os valores de (a) $l = 0$ (b) $l = 1$ (c) $l = 3$ e (d) $l = 6$, em ambos os casos $p = 0$	24
1.4	Tipos de difração (a) Fraunhofer (b) Fresnel [26].	27
1.5	A função $U(x, y)$ pela função abertura $p(x, y)$ gera uma onda de amplitude complexa $f(x, y)$ [27].	28
1.6	Aproximação de Fraunhofer [27].	30
1.7	Difração de Fraunhofer por uma abertura retangular [27].	32
1.8	Focalizando uma onda plana em um ponto usando uma lente. A direção θ_x e θ_y são mapeados dentro do ponto $(x, y) = (\theta_x f, \theta_y f)$ [27].	33
1.9	Focos de ondas planas associadas com componentes harmonicos de Fourier da função $f(x, y)$ dentro de pontos no plano focal [27].	34
1.10	(a) Registro do holograma sobre uma placa holográfica e (b) reconstrução da onda original pela iluminação da onda de referência através do holograma formado [27].	35
1.11	(a) Geometria de Multi-fendas. (b) Padrão de multi-fendas	37
2.1	Fase da frente de onda de um feixe LG ao longo da dupla fenda, com a singularidade de fase entre as fendas [20].	42
2.2	Padrões de interferência com feixes LG sobre uma fenda dupla com seus respectivos valores de l (a) simulações e (b) experimentais [20].	43

2.3	Padrões de difração de uma fenda simples de um feixe singular com cargas (a) $l = 1$ e (b) $l = -1$	45
2.4	Padrão de difração de uma fenda simples de um feixe singular com carga topológica $l = 2$	45
2.5	Padrões de difração da luz com MAO por uma abertura triangular para diferentes cargas topológicas $l = 1, 2$ e 3 [21]	48
2.6	Efeito na mudança de sinal da carga topológica no padrão de difração por uma abertura triangular com $l = -7$ e 7	48
2.7	(a) Arranjo de uma fenda simples inserida num feixe LG gerado por um SLM; onde $2a$ é o comprimento da fenda e d é a distância do centro do feixe ao centro da fenda. (b) Simulação numérica da distribuição de intensidade na fenda para $l = 0$, $l = 2$, e $l = 5$ [29].	49
2.8	Padrões de difração para $l = 0, 1, 2, 4$ e 5 para $d = 0$. (a) Resultados numéricos da Equação (2.4), (b) Resultados experimentais e (c) Diagramas de fase ao longo da fenda [29].	50
2.9	Padrões de difração para $l = 0, 1, 2, 4$ e 5 para $d = 0, 2R$. (a) Resultados numéricos e (b) Resultados experimentais e (c) Diagramas de fase ao longo da fenda [29].	52
3.1	Difração de Fraunhofer por uma abertura retangular [27]	57
3.2	Padrões de difração correspondentes a resultados numéricos da Equação 2.1 [42].	59
3.3	Padrão da fase correspondente para o padrão de difração para (a) $l = 5$ e (b) $l = 6$. O quadrado vermelho tracejado é usado somente para realçar o centro do padrão [42].	60
3.4	(a) Arranjo experimental (b) Um feixe com MAO dentro de uma abertura quadrada (topo) e o diagrama de fase para $l = 3$ (base) F – density neutral filter; f_i – lens; SLM – spatial light modulador; SF – spatial filter [42].	61
3.5	Padrões de difração correspondentes a resultados experimentais para valores inteiros de cargas topológicas l [42].	62

3.6	Análise das funções: (a) linear, (b) Polinômios de Laguerre e (c) Gaussiana pertencentes ao feixe LG.	64
3.7	Padrões de difração de Fraunhofer com feixe por uma abertura quadrada para $l = 1$ e 2, resolvidos analítica e numericamente. .	67
3.8	Padrões de difração de Fraunhofer com feixe por uma abertura quadrada para $l = 3$ e 4, resolvidos analítica e numericamente. .	68
3.9	Padrões de difração de Fraunhofer com feixe por uma abertura quadrada para $l = 8$ e 11, resolvidos analítica e numericamente.	68
3.10	Padrões das funções $f_1(\nu_y)^2$ e $f_1(\nu_x)^2$ feitos separadamente e o produto entre eles.	71
3.11	Padrões das funções $f_1(\nu_x)^2$ e $f_2(\nu_y)^2$ feitos separadamente e o produto entre eles.	72
3.12	Padrão de intensidade I_1 resolvido analiticamente.	73
3.13	Padrões das funções $f_1(\nu_y)$ e $f_3(\nu_x)$ feitos separadamente e o produto entre eles.	75
3.14	Padrões das funções $-2f_1(\nu_y)f_3(\nu_x)$ e $f_1(\nu_x)f_3(\nu_y)$ feitos separadamente e o produto entre eles	76
3.15	Padrões das funções $f_1(\nu_x)^2$ e $f_3(\nu_y)^2$ feitos separadamente e o produto entre eles.	77
3.16	Padrões das funções $4f_2(\nu_x)^2$ e $f_2(\nu_y)^2$ feitos separadamente e o produto entre eles.	78
3.17	Padrão das funções obtido através da soma dos três primeiros padrões parciais da intensidade I_2	79
3.18	Padrão de intensidade I_2 resolvido analiticamente.	80
3.19	Padrões de difração produzidos por combinações de fendas. Cada combinação de fenda é mostrada no topo de cada padrão [32]	81
3.20	Padrões de intensidade superpostos das combinações das fendas laterais P_{AC} e P_{BD} para $l = 5$ e $l = 6$ [42].	82
3.21	Padrão de difração correspondente a resultados experimentais para cargas topológicas fracionárias [42].	83
A.1	Holograma gerado pela interferência da onda referência com a onda objeto.	91

A.2	Holograma gerado por um SLM.	91
A.3	Arranjo experimental com o SLM.	95

Sumário

Introdução	13
1 MAO em feixes Laguerre-Gauss e Difração de Fraunhofer	17
1.1 Introdução	17
1.2 Momento Angular Orbital	18
1.3 Feixes Laguerre-Gauss	21
1.4 Ótica de Fourier	25
1.4.1 Transformada de Fourier	25
1.4.2 Difração da luz	26
1.4.3 Aproximação de Fraunhofer	27
1.4.4 Difração de Fraunhofer por uma abertura retangular	31
1.4.5 Transformada de Fourier usando lentes	32
1.5 Holografia	35
1.6 Conclusão	39
2 Estudo da difração com feixes Laguerre-Gauss	41
2.1 Introdução	41
2.2 Padrões de difração com feixes Laguerre-Gauss	41
2.2.1 Fenda Dupla	42
2.2.2 Fenda Simples	44
2.2.3 Fenda Triangular	46
2.2.4 Fenda simples no plano de Fourier	49
2.3 Conclusão	53

3	Construindo uma Rede Quadrada com Momento Angular Orbital da Luz	56
3.1	Introdução	56
3.2	Motivação	56
3.3	Construindo uma rede truncada quadrada com MAO	57
3.3.1	Arranjo Experimental	60
3.3.2	Resultados experimentais e discussões	61
3.3.3	Cálculo da difração de feixes com MAO pela abertura quadrada . .	62
3.3.4	Por que os padrões são truncados?	69
3.3.5	Decomposição dos padrões de intensidade	80
3.4	Conclusões	83
4	Conclusão geral	86
A	Formação e utilização de hologramas	90

Introdução

O estudo das ondas eletromagnéticas vêm expandindo as fronteiras da ciência desde o século IX até os dias atuais. Segundo a teoria eletromagnética de Maxwell a luz transporta energia, momento linear e angular [1]. Dessas três grandezas físicas, o momento angular orbital da luz vem recentemente atraindo especial atenção. Não somente por apresentar novos conceitos básicos, mas sobretudo, por ter uma gama de aplicação em diferentes áreas do conhecimento, tais como informação quântica [4], comunicação óptica [5], pinças óticas [7] e biofísica [8] que são apenas alguns exemplos de áreas de pesquisa que explora a luz possuindo momento angular orbital (MAO). Em particular, dentro desse universo, efeitos interessantes têm motivado cientistas a pesquisar a relação entre a fase azimutal e o fenômeno de difração da luz possuindo MAO.

O momento angular da luz tem duas componentes, a saber, o momento angular intrínseco ou spin e o momento angular orbital ou extrínseco. A contribuição intrínseca é também chamada de contribuição angular e está associada com a polarização [1], já a outra corresponde a distribuição transversal do campo elétrico [2].

Estados de polarização circular no sentido horário ou anti-horário são exemplos de momento angular de spin. Estes estados podem ainda ser decompostos em estados de polarização linear, como uma superposição de feixes linearmente polarizados com uma diferença de fase de $\pi/2$. Já a distribuição transversal do campo elétrico que corresponde ao momento angular extrínseco está relacionada com MAO que possui uma componente azimutal do momento linear da luz presente em feixes com uma frente de onda helicoidal

[6].

Um grande marco nos estudos do MAO usando feixes em ótica, foi o trabalho realizado por Allen *et all.* [3]. Eles demonstraram que um feixe de luz com uma dependência azimutal na fase da forma $\exp(-il\phi)$ possui MAO de $l\hbar$ por fóton, e é independente do estado de polarização da luz [3], onde ϕ é a coordenada azimutal na seção transversal do feixe e l é o número inteiro positivo ou negativo, conhecido como índice azimutal ou carga topológica (CT).

Portanto, campos escritos da forma $E(r, \phi) = E_0 \exp(il\phi)$ possuem uma singularidade de fase no centro do perfil do feixe. Na ótica, tais singularidades são conhecidas também como vórtices ópticos [9]. A frente de onda deste campo é composta de superfícies helicoidais entrelaçadas que resultam em uma intensidade nula no centro da seção transversa, cuja orientação é dada pelo sinal de l . De fato, vórtices são sistemas únicos que exibem comportamentos interessantes em vários ramos da física tais como o condensado de Bose Einstein, supercondutores, superfluidos, corrente de fluidos e ótica [10] - [11].

A formação de redes óticas é atualmente uma área de pesquisa muito ativa. Esta tem sido estudada em vários meios, tais como meios não lineares [12] - [14], condensados de Bose-Einstein [15], e estruturas fotônicas periódicas [11]. O MAO da luz tem sido estudado no espaço livre através da interferência de três ondas planas [16] - [18].

Um aspecto interessante é o estudo de luz possuindo MAO sendo difratados por objetos ou aberturas. Até mesmo problemas tradicionais de difração por uma fenda simples [19], dupla fenda [20] e abertura circular ganham novas interpretações físicas devido a uma distribuição de fase não usual da luz com MAO. Um exemplo desse fato é o trabalho publicado por Hickmann e colaboradores [21]. Eles mostraram resultados interessantes onde uma rede óptica triangular truncada foi revelada no plano de Fourier quando a luz com MAO foi difratada por uma simples abertura triangular. Através do padrão de difração medido é possível determinar a magnitude e o sinal da CT.

Embora existam várias pesquisas sobre difração, nenhuma até o momento estudou a formação do padrão de difração de Fraunhofer de feixes possuindo MAO por uma abertura quadrada. Nesta dissertação nos propusemos estudar a formação de uma rede de intensidades devido a difração da luz possuindo MAO por uma abertura quadrada.

No primeiro capítulo dessa dissertação discutiremos a teoria do MAO da luz transportado por um feixe de luz monocromático. Sua origem, teoria e a partir de deduções de expressões matemáticas mostraremos a analogia entre o MAO e o spin, como também a independência entre eles. A fim de mostrar esse fundamento, fizemos uso do feixe Laguerre-Gauss que possui uma frente de onda helicoidal para $l \neq 0$. Apresentamos o gráfico da fase desse feixe para diferentes valores de l , e também mostramos a existência da singularidade de fase nos feixes com MAO.

Apresentamos uma técnica para estudar as propriedades da propagação do plano de onda, onde esta se baseia na apresentação do campo eletromagnético como uma transformada de Fourier, e sua formulação é conhecida como a ótica de Fourier. A ótica de Fourier abordada nesta dissertação trata apenas da teoria de difração, transformada de Fourier e teoria de difração de Fraunhofer. E por fim, introduziremos uma abordagem sucinta sobre holografia com intuito de mostrar como é feito o registro e a reconstrução de ondas óticas.

No segundo capítulo apresentaremos resumidamente os resultados de difração com feixes possuindo MAO por diversos tipos de aberturas no limite de Fraunhofer. Analisamos a dependência desses padrões para diferentes valores de CT.

No terceiro capítulo desta dissertação nos propusemos a estudar a formação de uma rede de intensidades devido à difração da luz possuindo MAO por uma abertura quadrada. Em contraste com o trabalho publicado na referência [21], cuja rede truncada triangular de intensidades é sempre gerada para qualquer valor de MAO, mostraremos que em nosso caso há somente uma rede truncada quadrada de intensidades bem definida para valores

pares de CT. Para valores ímpares de CT a rede não é bem formada. Estudamos ambos os casos sob os aspectos teórico e experimental.

E finalmente, no quarto capítulo apresentaremos nossa conclusão geral do trabalho e as perspectivas.

1 MAO em feixes Laguerre-Gauss e Difração de Fraunhofer

1.1 Introdução

Neste capítulo, discutiremos a teoria do MAO da luz transportado por um feixe de luz monocromático. O MAO da luz tem duas componentes: o momento angular intrínseco ou spin, o qual está associado aos estados de polarização; e o momento angular orbital (extrínseco) que está relacionado com a distribuição transversal do campo eletromagnético.

Abordaremos ao longo dessa dissertação somente a descrição do MAO, mostrando a partir de deduções de expressões matemáticas a analogia entre o MAO e o spin, como também a independência mútua entre eles.

A fim de mostrar esse fundamento, fizemos uso do feixe Laguerre-Gauss que pertence uma família de feixes com MAO, e que possuem uma frente de onda helicoidal para $l \neq 0$ onde l é um número inteiro positivo ou negativo que representa o índice azimutal ou carga topológica. Mostramos o gráfico da fase desse feixe para diferentes valores de l , bem como o seu perfil de intensidade.

Apresentamos uma técnica para estudar as propriedades da propagação do plano de onda, onde esta se baseia na apresentação do campo eletromagnético como uma transformada de Fourier; sua formulação é conhecida como a ótica de Fourier. A ótica de Fourier

abordada neste capítulo trata apenas da teoria de difração através da transformada de Fourier e teoria de difração de Fraunhofer.

E por fim, introduziremos uma abordagem sucinta sobre holografia com intuito de mostrar como é feito o registro e a reconstrução de ondas óticas.

1.2 Momento Angular Orbital

Existe de fato uma teoria bem fundamentada na literatura sobre o momento angular de spin, no entanto, com relação a idéia da luz carregar MAO é relativamente recente. Somente em 1992, um grupo de pesquisadores da Universidade de Leiden na Holanda mostrou que um feixe de luz com uma dependência azimutal na fase da forma $\exp(-il\phi)$ tem um MAO de $l\hbar$ por fóton e é independente do estado de polarização da luz [3], onde ϕ é a coordenada azimutal na seção transversal do feixe e l é o número inteiro positivo ou negativo, conhecido como índice azimutal ou carga topológica.

Iniciamos a abordagem teórica assumindo que um feixe de luz monocromática com polarização linear seja definido pelo potencial vetor a seguir:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = u(\vec{r}) \exp[i(kz - \omega t)] \hat{i} \quad (1.1)$$

onde $k = 2\pi/\lambda$ é o módulo do vetor de onda, $\hat{i}$ é o vetor unitário na direção do eixo x , λ é o comprimento de onda do feixe, $u(\vec{r})$ é uma função complexa que descreve a distribuição de amplitude do feixe e ω é a frequência angular. Vale ressaltar que a Equação (1.1) acima satisfaz o calibre de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. No vácuo, a densidade de momento linear $\vec{p}$ é dada pelo produto vetorial entre o campo elétrico e a indução magnética [1], ou seja, $\vec{p} = \varepsilon_0(\vec{E} \times \vec{B})$.

A medida dessa grandeza física é dada pela parte real do produto vetorial entre os campos em questão, como mostra a Equação (1.2), ou seja,

$$\langle \vec{p} \rangle = \Re \left[\varepsilon_0 \left\langle \vec{E} \times \vec{B} \right\rangle \right] = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\vec{E}^* \times \vec{B} + \vec{E} \times \vec{B}^* \right) \quad (1.2)$$

Sabemos ainda que o campo $\vec{E}$ pode ser escrito na forma,

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i\omega u(\vec{r}) \exp[i(kz - \omega t)] \hat{i} \quad (1.3)$$

e campo magnético $\vec{B}$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left\{ \frac{\partial}{\partial z} [u(\vec{r}) \exp[i(kz - \omega t)]] \hat{j} - \frac{\partial}{\partial y} [u(\vec{r}) \exp[i(kz - \omega t)]] \hat{k} \right\} \quad (1.4)$$

$$\vec{B} = \left[\frac{\partial u}{\partial z} + ikz \right] \exp[i(kz - \omega t)] \hat{j} - \frac{\partial u}{\partial y} [\exp[i(kz - \omega t)]] \hat{k} \quad (1.5)$$

Assim, o primeiro termo da Equação (1.2) fica,

$$\vec{E}^* \times \vec{B} = -i\omega u^* \left[\frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{k} \right] + \omega k |u|^2 \hat{k} \quad (1.6)$$

como $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ que representa o calibre de Coulomb, a Equação (1.6) pode ainda ser escrita

$$\vec{E}^* \times \vec{B} = -i\omega u^* \nabla u + \omega k |u|^2 \hat{k} \quad (1.7)$$

O mesmo vale para o segundo termo da Equação (1.2),

$$\vec{E} \times \vec{B}^* = i\omega u \nabla u^* + \omega k |u|^2 \hat{k} \quad (1.8)$$

Logo a média da densidade de momento linear do campo eletromagnético é dado por:

$$\langle \vec{p} \rangle = \Re \left[\varepsilon_0 \langle \vec{E} \times \vec{B} \rangle \right] = \frac{\varepsilon_0}{2} \left[\vec{E}^* \times \vec{B} + \vec{B}^* \times \vec{E} \right] = \frac{i\omega\varepsilon_0}{2} (u \nabla u^* - u^* \nabla u) + \varepsilon_0 \omega k |u|^2 \hat{k} \quad (1.9)$$

Este resultado também se aplica para coordenadas cilíndricas, onde u é escrito como $u(r, \phi, z)$. Seja qualquer campo da forma :

$$u(r, \phi, z) = u_0(r, z) \exp(il\phi), \quad (1.10)$$

o qual obedece às condições da aproximação paraxial [22]. Fazendo uso dessas aproximações podemos escrever a densidade de momento linear como:

$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{i\omega\varepsilon_0}{2} \left(u_0 \frac{\partial u_0^*}{\partial r} - u_0^* \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) \hat{r} + \frac{l\varepsilon_0\omega}{r} |u_0|^2 \hat{\phi} + \varepsilon_0 \omega k |u_0|^2 \hat{k} \quad (1.11)$$

onde $\hat{r}$, $\hat{\phi}$ e $\hat{z}$ são versores em coordenadas cilíndricas. No espaço livre, a densidade de momento linear (por unidade de volume) é proporcional ao vetor de Poynting, que é representado da seguinte forma,

$$\vec{p} = \frac{\vec{S}_{Poynting}}{c^2} \quad (1.12)$$

Ao substituírmos a Equação (1.11) na Equação (1.12) que descreve o fluxo de energia do campo eletromagnético no espaço livre, temos:

$$\vec{S}_{Poynting} = c^2 \left[\frac{i\omega\epsilon_0}{2} (u_0 \frac{\partial u_0^*}{\partial r} - u_0^* \frac{\partial u_0}{\partial r}) \hat{r} + \frac{l\epsilon_0\omega}{r} |u_0|^2 \hat{\phi} + \epsilon_0\omega k |u_0|^2 \hat{k} \right] \quad (1.13)$$

Ao fazer isto, vemos que esta equação descreve uma trajetória na forma de um helicóide ao longo da direção de propagação, sendo que a componente $\hat{r}$ está relacionada com a dispersão do feixe, a componente $\hat{\phi}$ é responsável pelo surgimento do MAO na direção de propagação e a componente $\hat{z}$ está relacionada com o momento linear na direção z. A densidade de energia em tal feixe é $w = c\epsilon_0 \langle \vec{E} \times \vec{B} \rangle_z = c\epsilon_0\omega k |u|^2 = \epsilon_0\omega^2 |u|^2$, isto é, a velocidade da luz multiplicada pela densidade de momento linear [23].

Sendo o feixe em questão polarizado linearmente, o MAO é descrito através da equação $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, onde $\vec{r}$ em coordenadas cilíndricas é escrito como $\vec{r} = r\hat{r} + z\hat{k}$. Substituindo o $\vec{r}$ e $\vec{p}$ representado pela Equação (1.11) em $\vec{L}$ neste produto vetorial, teremos a densidade de momento angular em coordenadas cilíndricas através da equação:

$$\langle \vec{L} \rangle = -\frac{l\omega\epsilon_0 z |u_0|^2}{r} \hat{r} + \frac{i\omega\epsilon_0}{2} \left[(u_0 \frac{\partial u_0^*}{\partial r} - u_0^* \frac{\partial u_0}{\partial r}) z + 2ikr |u_0|^2 \right] \hat{\phi} + l\epsilon_0\omega |u_0|^2 \hat{k} \quad (1.14)$$

Integrando $\langle \vec{L} \rangle$ e $\langle \vec{p} \rangle$ no volume do feixe, constatamos que restará apenas a componente paralela ao sentido de propagação, pois as outras componentes são simétricas em relação ao eixo z.

A razão entre o momento angular de spin e sua energia é representada pela relação abaixo;

$$\frac{(\vec{S})_z}{W} = \pm \frac{\int \frac{\epsilon_0 E_0^2}{\omega} d^3r}{\int \epsilon_0 E_0^2 d^3r} = \pm \frac{1}{\omega} \quad (1.15)$$

O MAO por unidade de energia do feixe é representado por:

$$\frac{(\vec{L})_z}{W} = \frac{\int \vec{l} d^3r}{\int w d^3r} = \frac{\int l \varepsilon_0 \omega |u_0|^2 d^3r}{\int \varepsilon_0 \omega^2 |u_0|^2 d^3r} = \frac{l}{\omega} \quad (1.16)$$

A relação entre o MAO e o momento linear pode ser expressa como:

$$\frac{(\vec{L})_z}{(\vec{P})_z} = \frac{\int |\vec{l}| d^3r}{\int |\vec{p}| d^3r} = \frac{\int l \varepsilon_0 \omega |u_0|^2 d^3r}{\int \varepsilon_0 \omega k |u_0|^2 d^3r} = \frac{l}{k} = \frac{l\lambda}{2\pi} \quad (1.17)$$

onde $k = 2\pi/\lambda$ é o número de onda.

Percebemos uma analogia entre as equações (1.15) e (1.16) que descrevem as razões entre o spin e o MAO por unidade de energia. Esta se dá pelo fato de tanto $\vec{S}$ e $\vec{L}$ serem representados por ω . E também através desta comparação feita entre as Equações (1.15) e (1.16), percebemos que o feixe polarizado linearmente contém MAO carregando l por fóton. Essa analogia entre mecânica quântica e ótica paraxial sugere que tais feixes são autovetores do operador momento angular $\vec{L}_z$ e transportam um MAO de $l\hbar$ por fóton.

1.3 Feixes Laguerre-Gauss

Como já mencionado, os feixes Laguerre-Gauss fazem parte da família de feixes que são portadores de MAO [3]. Estes também são soluções da equação paraxial de Helmholtz em coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) ,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + 2ikr \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

onde a solução geral para amplitude complexa do feixe Laguerre-Gauss é dada por:

$$U_{l,p}(r, \phi, z) = A_{l,p} \left[\frac{W_0}{W(z)} \right] \left(\frac{r}{W(z)} \right)^l L_p^l \left(\frac{2r^2}{W^2(z)} \right) \exp \left(\frac{-r^2}{W^2(z)} \right) \times \quad (1.18)$$

$$\exp \left[-\imath kz - \imath k \frac{r^2}{2R(z)} - \imath l \phi + i(l+2p+1)\zeta(z) \right]$$

A equação (1.18) corresponde a um feixe Laguerre-Gauss percorrendo o eixo z . Vamos analisar os principais componentes responsáveis pela formação desse feixe. Sendo p o

índice radial, onde o número de anéis é representado por (número de anéis = $p + 1$). Inicialmente devemos ter o valor de $p = 0$. Outra característica fundamental é a fase $\exp(-il\phi)$, onde l corresponde ao índice azimutal (ou carga topológica). Nesta equação encontramos também os polinômios de Laguerre generalizados representados por L_p^l . Em seguida temos $W(z)$ representando a cintura do feixe, $R(z)$ o raio de curvatura da frente de onda, $\varsigma(z)$ a fase de Gouy e W_0 é a cintura do feixe em $z = 0$ [24] e são dados respectivamente por:

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \frac{z}{z_R}} \quad (1.19)$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right] \quad (1.20)$$

$$\varsigma(z) = \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_R} \right) \quad (1.21)$$

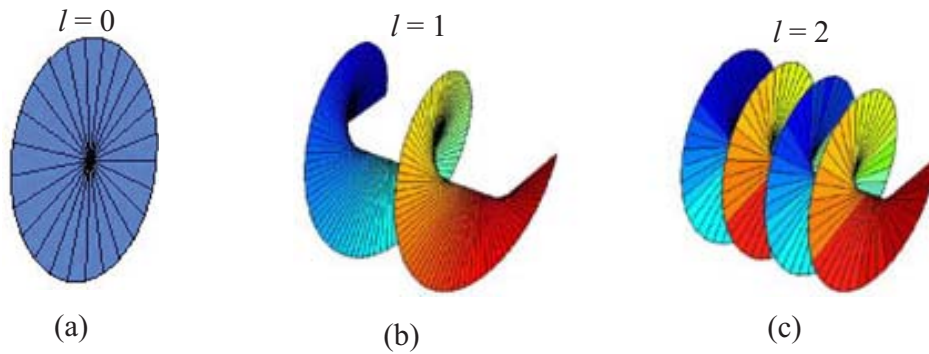
$$W_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}} \quad (1.22)$$

onde z_R é o comprimento de Rayleigh,

$$z_R = \frac{\pi W_0^2}{\lambda} \quad (1.23)$$

As frentes de onda dos feixes LG possuem uma característica diferente devido à fase azimutal $\exp(il\phi)$. Esta característica pode ser observada através da Figura (1.1) abaixo. Percebemos uma frente de onda helicoidal para valores de carga topológica a partir de $l = 1$, e que o número de espiras helicoidais é proporcional a l .

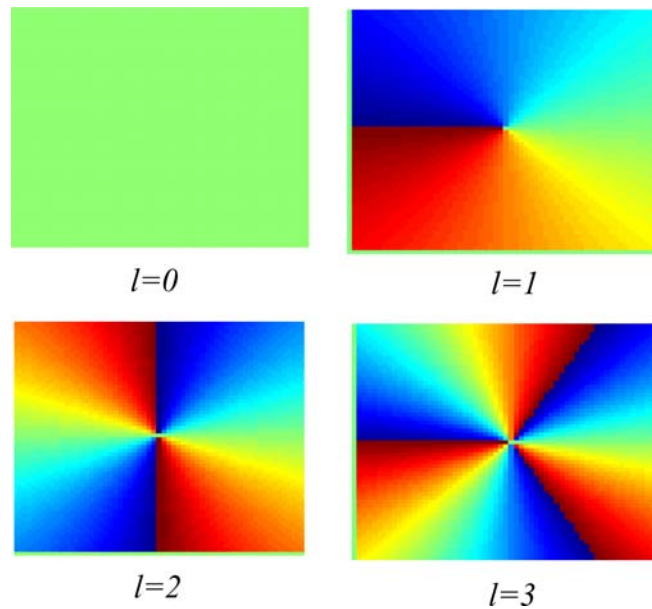
Figura 1.1: Frente de onda dos feixes Laguerre-Gauss ao longo do eixo z para $l = 0, 1$ e 2 .



Fonte: (<http://www.aip.org/png/2005/229.htm> acessado em 20/10/2011)

A distribuição da fase dos feixes LG são representados pela Figura (1.2). Observamos a variação de fase em módulo de 0 a 2π , para cada valor inteiro de l , e assim temos para diferentes valores de l .

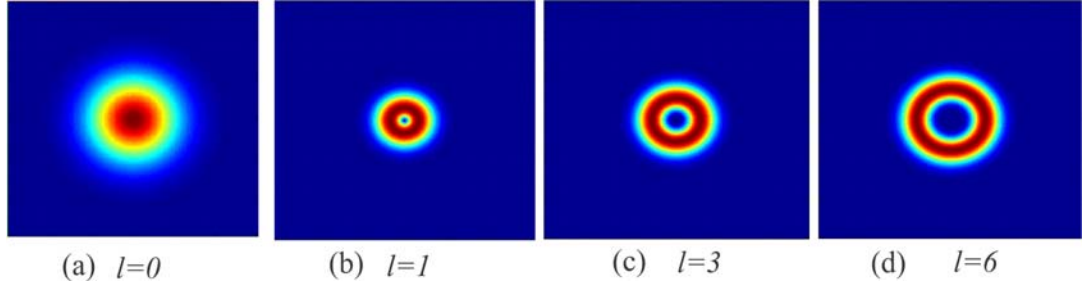
Figura 1.2: Distribuição de fase de um feixe Laguerre-Gauss para um feixe com carga topológica $l = 0, 1, 2$ e 3 .



Fonte: (Autor, 2011)

O perfil de intensidade do feixe LG apresenta um padrão de intensidade anelar [25] conhecido como vórtice óptico, como ilustra a Figura (1.3).

Figura 1.3: Perfil de intensidade de um feixe Laguerre-Gauss para os valores de (a) $l = 0$ (b) $l = 1$ (c) $l = 3$ e (d) $l = 6$, em ambos os casos $p = 0$.



Fonte: (Autor, 2011)

A partir das considerações da análise das Figuras (1.1), (1.2) e (1.3) que representam, respectivamente, as frentes de ondas, distribuições de fase e perfis de intensidade dos feixes LG, chegamos as seguintes conclusões.

i) Percebemos através da Figura (1.1) que a fase azimutal $\exp(il\phi)$ é responsável pela frente de onda helicoidal, onde o número de espiras da frente de onda do feixe é proporcional ao valor da carga topológica, conforme podemos observar através do crescimento de l . No entanto, na ausência dessa fase azimutal, ou seja, quando $l = 0$, a fase do feixe ao longo da propagação é constante.

ii) Na Figura (1.2) que representa a distribuição de fase dos feixes LG. Percebemos a existência de singularidade de fase em tais feixes. Esta singularidade ocorre no centro do padrão de distribuição de fase para qualquer valor de l , onde neste ponto a fase não é definida. Vimos também através da mesma figura que, a fase do feixe aumenta em módulo de 2π para cada acréscimo de unidade de l .

iii) E por fim, a Figura (1.3) apresenta o padrão de intensidade com forma anelar [25]. Isso ocorre devido a uma singularidade de fase no centro do feixe, conforme vimos na

Figura (1.2), e consequentemente, a intensidade do feixe é nula no seu centro.

1.4 Ótica de Fourier

Nesta seção, apresentaremos uma técnica matemática de grande utilidade para estudar as propriedades de propagação do plano de onda. Esta técnica é baseada na representação do campo eletromagnético como uma transformada de Fourier, e sua formulação é conhecida como ótica de Fourier. Trataremos como exemplo a difração de Fraunhofer.

1.4.1 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é uma ferramenta matemática utilizada para fazer uma mudança do espaço real (x, y) para o espaço recíproco (ν_x, ν_y) , que é o espaço das frequências. A transformada de Fourier (espectro de Fourier ou espectro de frequência) de uma função $g(x, y)$ de (valor complexo, em geral) possui duas variáveis independentes x e y representada por $\mathcal{F}\{g\}$ e definida por

$$\mathcal{F}\{g\} = \int \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \exp[-2\pi(\nu_x x + \nu_y y)] dx dy$$

onde ν_x e ν_y são frequências espaciais. Da mesma forma, a transformada inversa de Fourier de uma função $G(\nu_x, \nu_y)$ será representada por $\mathcal{F}^{-1}\{G\}$ e é definida como

$$\mathcal{F}^{-1}\{G\} = \int \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu_x, \nu_y) \exp[2\pi(\nu_x x + \nu_y y)] d\nu_x d\nu_y \quad (1.24)$$

A transformada inversa de Fourier é muitas vezes referida como a representação integral de Fourier de uma função $g(x, y)$. Assim, a transformada de Fourier realiza uma transformação do espaço real para o espaço das frequências, que é conhecido como plano de Fourier. Logo em seguida veremos que a transformada de Fourier é feita experimentalmente através do uso de lentes.

1.4.2 Difração da luz

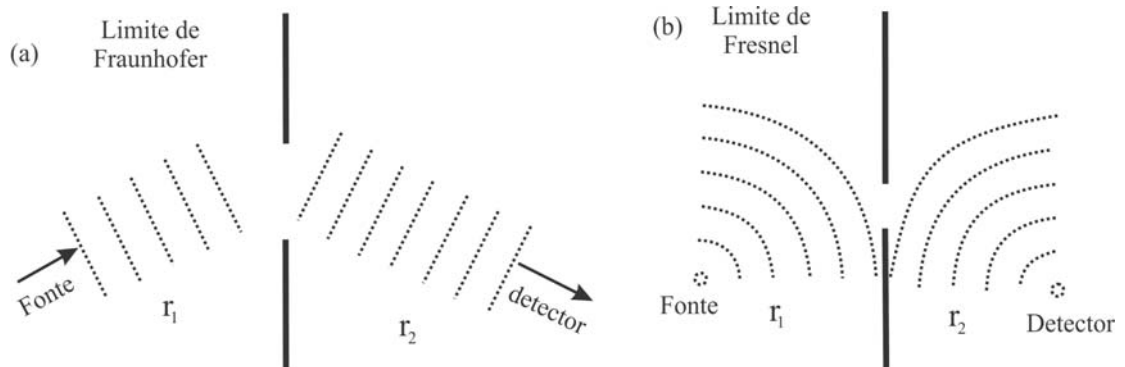
De fato, a teoria de difração da luz é um fenômeno já bem estabelecido. O passo inicial para sua evolução foi feita por Christian Huygens no ano de 1678. Huygens estabeleceu o princípio no qual a propagação de uma onda de luz pode ser prevista se assumirmos que cada ponto da frente de onda atua como uma fonte de uma onda secundária que se propaga em todas as direções. O envelope que se forma em torno de todas as ondas secundárias é a nova frente de onda. Em 1818, Fresnel fez suposições sobre a fase e amplitude das ondas secundárias de Huygens, permitindo que várias ondas interferissem mutuamente. Com isso foi possível calcular o padrão de difração da distribuição da luz, complementando o trabalho de Huygens. Um passo de enorme importância ocorreu em 1860 quando Maxwell identificou a luz como sendo onda eletromagnética.

Em seguida, Kirchhoff mostrou que as amplitudes e fases obtidas por Fresnel eram conseqüências diretas da natureza ondulatória da luz. No entanto, as considerações de Poincaré (em 1892) e Sommerfeld (em 1894) apresentaram inconsistências na formulação de Kirchhoff. Com isso o tratamento de Kirchhoff passou a ser tratado como uma aproximação, mas que concorda perfeitamente bem com os resultados experimentais.

Geralmente evidenciamos a difração quando uma onda ótica é transmitida por orifícios e/ou obstáculos cujas dimensões são da ordem de grandeza do comprimento de onda da luz que está propagando, no entanto, cabe enfatizar que a difração ocorre simplesmente através da propagação da luz. No tratamento detalhado da difração é usual distinguir-se dois casos gerais conhecidos como difração de Fraunhofer e Fresnel. Qualitativamente falando, a difração de Fraunhofer ocorre quando as ondas incidente e difratada são planas. Este é o caso quando as distâncias r_1 e r_2 são tão grandes que a curvatura da frente de onda pode ser desprezada, como mostra a Figura 1.4 (a). Por outro lado, se a fonte e o ponto de observação estão suficientemente próximos da abertura temos então difração de

Fresnel na Figura 1.4 (b).

Figura 1.4: Tipos de difração (a) Fraunhofer (b) Fresnel [26].



Fonte: (Fowles, 1975)

A simples teoria da difração é baseada na suposição que a onda incidente é transmitida através da abertura sem sofrer variações de intensidade, mas se reduz a zero em toda região fora da abertura.

1.4.3 Aproximação de Fraunhofer

A difração de Fraunhofer é uma teoria de transmissão da luz através de aberturas, assumindo que a onda incidente é multiplicada pela função que depende da abertura e que usa a aproximação de Fraunhofer para determinar a propagação da luz no espaço livre além da abertura [Veja Figura 1.5].

Seja uma onda $U(x, y)$ transmitida através da amplitude de transmitância da abertura $p(x, y)$ gerando uma onda com amplitude complexa $f(x, y) = U(x, y)p(x, y)$. Como $U(x, y)$ e $f(x, y)$ são amplitudes da onda imediatamente para a esquerda e direita da tela (Figura 1.5), respectivamente, concordando então com essa suposição, temos que

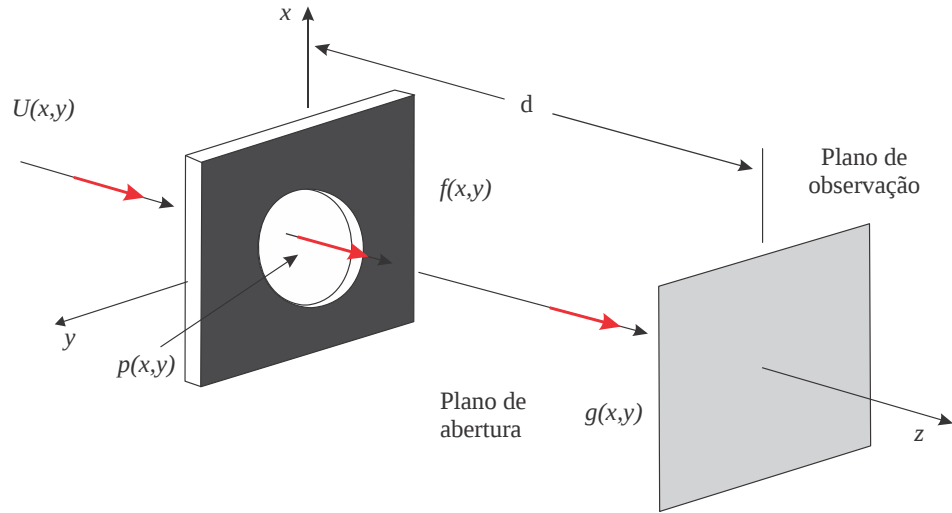
$$f(x, y) = U(x, y)p(x, y)$$

onde

$$p(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{dentro da abertura} \\ 0, & \text{fora da abertura} \end{cases}$$

é chamada de função abertura.

Figura 1.5: A função $U(x, y)$ pela função abertura $p(x, y)$ gera uma onda de amplitude complexa $f(x, y)$ [27].



Fonte: (Saleh, 2007)

Depois de propagar a uma distância d no espaço livre, a amplitude complexa gerada será chamada de $g(x, y)$ e o padrão de difração é a intensidade $I(x, y) = |g(x, y)|^2$. Este padrão é conhecido como a difração de Fraunhofer, pois neste caso a propagação no espaço livre é descrita usando a aproximação de Fraunhofer conforme a Figura (1.6).

A Figura (1.6) apresenta uma onda eletromagnética que atravessa uma tela opaca com uma abertura de dimensão b (por exemplo a metade do lado da abertura) obtendo um campo descrito por uma função $f(x, y)$. Este campo percorre uma distância d a partir da abertura até a tela opaca que registra um campo representado pela função $g(x, y)$ que representa uma imagem semelhante a abertura e possui dimensão de lado a . A condição para que ocorra a difração pela propagação da luz em tais aberturas dá-se pelo número de

Fresnel N_F . Este número define-se como $N_F = b^2/\lambda d$ onde λ é o comprimento de onda, b é o tamanho (por exemplo o raio) da abertura, e d é a distância a partir da abertura até a tela opaca.

Dependendo do valor de N_F , a difração pode ser de dois tipos (ou casos) especiais: Difração de Fraunhofer para $N_F \ll 1$ e Difração de Fresnel para $N_F \gtrsim 1$.

A aproximação de Fraunhofer é válida se a distancia d de propagação entre a abertura e o plano de observação for suficientemente grande de modo que o número de Fresnel seja $N_F = b^2/\lambda d \ll 1$ [27].

A propagação da luz no espaço livre é descrita convenientemente pela análise de Fourier. Vamos abordar somente a difração através de um campo distante através de ondas paraxiais.

Já que a difração de Fraunhofer acontece numa propagação a uma distância d suficientemente longa, somente as ondas planas contribuem para a amplitude complexa num ponto (x, y) e fora do plano existe uma onda formando ângulos com direções $\theta_x \approx x/d$ e $\theta_y \approx y/d$ com eixo ótico. Estas ondas tem componentes de vetor de onda $k_x \approx (x/d)k$ e $k_y \approx (y/d)k$ e amplitude complexa $F(v_x, v_y)$ e possuem $v_x = x/\lambda d$ e $v_y = y/\lambda d$ como frequências. As amplitudes complexas $f(x, y)$ e $g(x, y)$ das ondas planas em $z = 0$ e $z = d$ são dadas por:

$$g(x, y) \approx h_0 F(v_x, v_y) \quad (1.25)$$

onde $F(v_x, v_y)$ é a transformada de Fourier de $f(x, y)$ e $g(x, y)$ descreve a propagação no espaço livre como a transformada de Fourier onde $h_0 = (j/\lambda d) \exp(-jkd)$ é o fator de fase da propagação segundo a formulação do espectro angular. As contribuições de todas as outras ondas se cancelam como resultado de interferência destrutiva. Esta aproximação é conhecida como a aproximação de Fraunhofer.

Assumindo que a onda incidente é uma onda plana com intensidade I_i percorrendo a

direção z de modo que $U(x, y) = \sqrt{I_i}$ em $z = 0$, onde $f(x, y) = \sqrt{I_i}p(x, y)$. Na aproximação de Fraunhofer [Veja a Equação (1.25)] temos que,

$$g(x, y) \approx \sqrt{I_i}h_0P(v_x, v_y) \quad (1.26)$$

onde

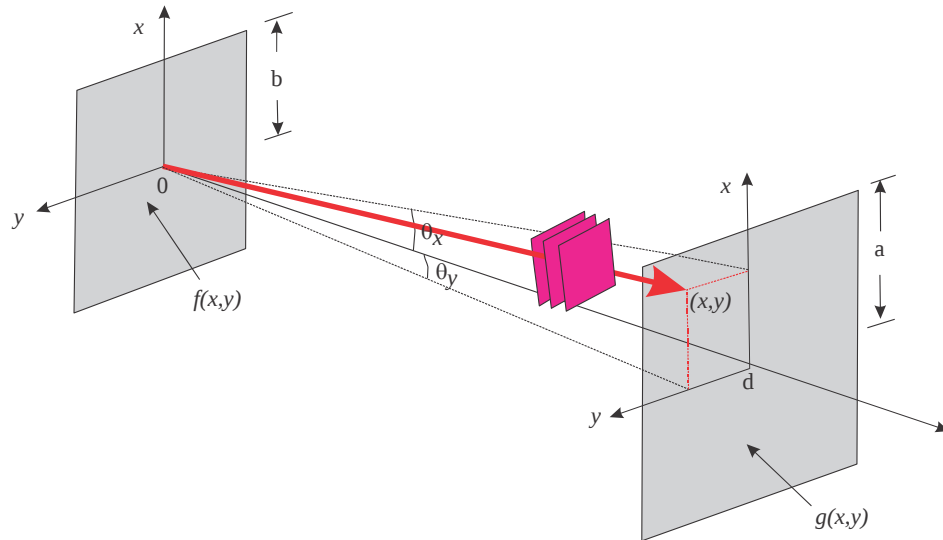
$$P(v_x, v_y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) \exp [j2\pi(v_x x + v_y y)] dx dy \quad (1.27)$$

é a transformada de Fourier de $p(x, y)$ e $h_0 = (-j/\lambda d) \exp[-jkd]$ é o fator de fase da propagação. O padrão de difração da intensidade pode ser representado como,

$$I(x, y) = \frac{I_i}{(\lambda d)^2} \left| P \left(\frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d} \right) \right|^2 \quad (1.28)$$

sendo o padrão de difração num ponto (x, y) a uma distancia d , proporcional ao quadrado da magnitude da transformada de Fourier da função abertura $p(x, y)$ calculada nas frequências $v_x = x/\lambda d$ e $v_y = y/\lambda d$.

Figura 1.6: Aproximação de Fraunhofer [27].



Fonte: (Saleh, 2007)

1.4.4 Difração de Fraunhofer por uma abertura retangular

Consideremos uma abertura retangular com amplitude de transmitância dada por

$$t_A(u, v) = \text{rect}\left(\frac{u}{2D_x}\right) \text{rect}\left(\frac{v}{2D_y}\right)$$

onde a função *rect* é definida como a função retangular da abertura. As constantes D_x e D_y são larguras médias da abertura em suas respectivas direções u e v são as coordenadas que são paralelas a x e y no plano de Fourier. Se a abertura é iluminada por uma única amplitude, normalmente uma onda plana monocromática incidente, então a distribuição do campo por toda a abertura é igual à função transmitância t_A . Deste modo, fazendo uso da Equação (1.28) para o padrão da difração de Fraunhofer na abertura retangular a uma distância d , conforme a Figura (1.7), temos que a intensidade será

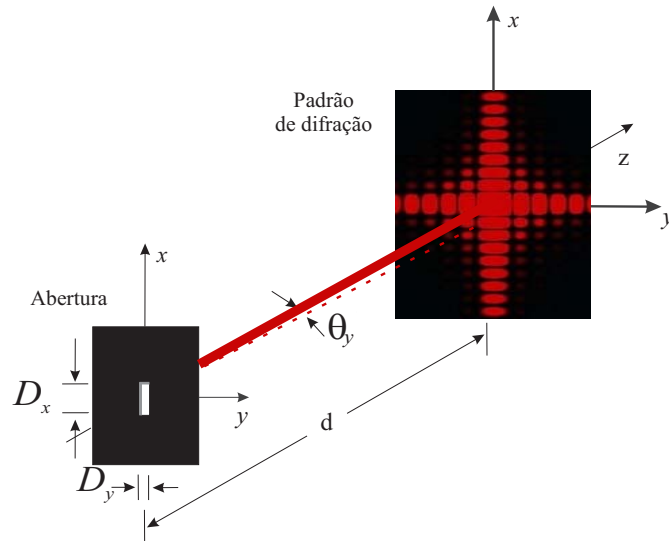
$$I(x, y) = I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{D_x x}{\lambda d}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{D_y y}{\lambda d}\right) \quad (1.29)$$

onde $I_0(D_x D_y / \lambda d)^2 I_i$ é o pico de intensidade e a função sinc é definida como $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x) / \pi x$ [28]. Verificamos que os zeros deste padrão ocorrem em $x = \pm \lambda d / D_x$ e $y = \pm \lambda d / D_y$, de modo que a divergência angular da difração da luz é dada por

$$\theta_x = \frac{\lambda}{D_x}, \quad \theta_y = \frac{\lambda}{D_y} \quad (1.30)$$

Se $D_y < D_x$, o padrão de difração será maior na direção y do que na direção de x , como é ilustrado na Figura (1.7).

Figura 1.7: Difração de Fraunhofer por uma abertura retangular [27].



Fonte: (Saleh, 2007)

1.4.5 Transformada de Fourier usando lentes

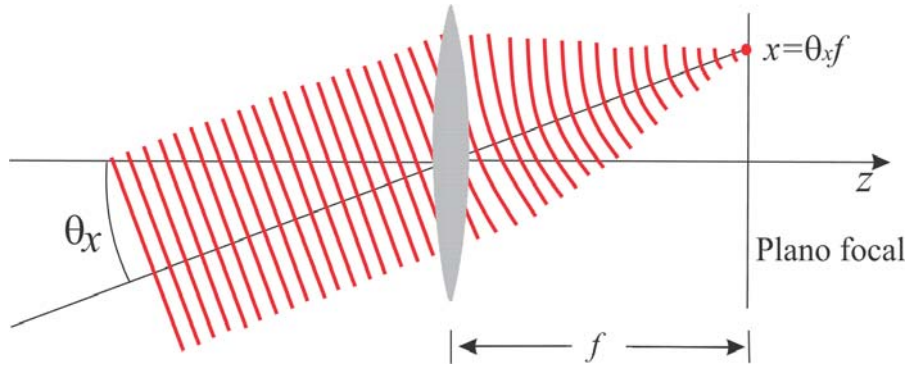
Uma das mais extraordinárias propriedades úteis das lentes está inerente à capacidade de executar a transformada de Fourier em duas dimensões. Esta complicada operação pode ser desempenhada com uma simplicidade extrema em um sistema ótico coerente, fazendo proveito das leis básicas da propagação e difração da luz.

Nesta seção descreveremos várias configurações do desempenho da transformada de Fourier. Em todos os casos a iluminação será assumida como monocromática. O campo é introduzido através do uso de lentes que executam a transformada de Fourier no sistema ótico. No plano focal dessa lente situado a uma distância f encontra um dispositivo ou tela que contém uma amplitude de transmitância. Em alguns casos este dispositivo pode consistir de uma transparência fotográfica, enquanto em outros, eles podem ser não fotográficos, como um modulador espacial de luz, capaz de controlar a amplitude de transmitância em resposta ao externo fornecimento elétrico ou informação ótica. Tal

dispositivo será discutido no Capítulo 2 com mais detalhes.

Os componentes das ondas planas que a constituem podem ser separadas pelo uso de uma lente. Uma fina lente esférica transforma uma onda plana em uma onda parabólica focada para um ponto no plano focal da lente. Se a onda plana chega com ângulos pequenos θ_x e θ_y , ondas parabólicas são centradas aproximadamente no ponto $(\theta_x f, \theta_y f)$ onde f é o comprimento focal [Veja a Figura (1.8)].

Figura 1.8: **Focalizando uma onda plana em um ponto usando uma lente.** A direção θ_x e θ_y são mapeados dentro do ponto $(x, y) = (\theta_x f, \theta_y f)$ [27].



Fonte: (Saleh, 2007)

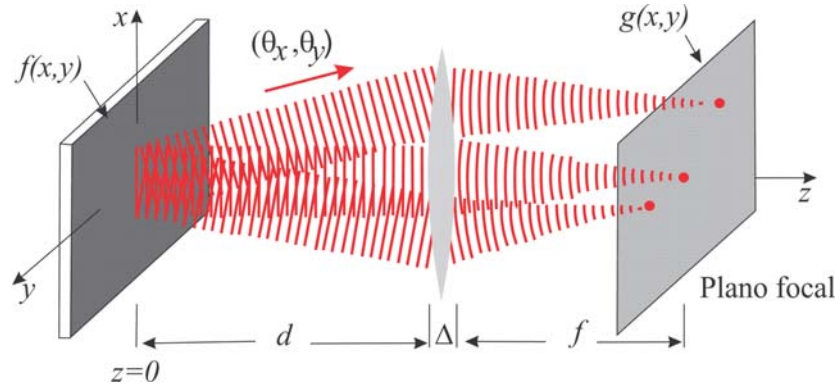
Em referência a sistemas ópticos, vamos adotar que a luz é decomposta em várias ondas planas, conforme a Figura (1.9), onde $f(x, y)$ é a amplitude complexa da onda óptica no plano $z = 0$ e percorre uma direção formada com pequenos ângulos $\theta_x = \lambda v_x$ e $\theta_y = \lambda v_y$ em relação ao eixo z , onde possui uma amplitude complexa proporcional à transformada de Fourier $F(v_x, v_y)$. Estas ondas são focalizadas pelas lentes dentro do ponto (x, y) no plano focal onde $x = \theta_x f = \lambda v_x f$ e $y = \theta_y f = \lambda v_y f$ são as coordenadas do plano real. A amplitude complexa para o ponto (x, y) no plano de saída é portanto proporcional à transformada de Fourier de $f(x, y)$ calculada em $v_x = x/\lambda f$ e $v_y = y/\lambda f$ de modo que,

$$g(x, y) \propto F \left[\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f} \right] \quad (1.31)$$

Para determinar o fator de proporcionalidade na Equação (1.31) analisamos a função entrada $f(x, y)$ dentro das componentes de Fourier e traçamos as ondas planas correspondentes para cada componente através do sistema óptico. Então superpomos as contribuições destas ondas para o plano distante para obtermos $g(x, y)$. Assumindo que estas ondas são paraxiais e usando a aproximação de Fresnel [28], obtemos:

$$g(x, y) = h_l \exp \left[\frac{j\pi(x^2 + y^2)(d - f)}{\lambda f^2} \right] F \left[\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f} \right] \quad (1.32)$$

Figura 1.9: Focos de ondas planas associadas com componentes harmônicos de Fourier da função $f(x, y)$ dentro de pontos no plano focal [27].



Fonte: (Saleh, 2007)

onde $h_l = H_0 h_0 (j/\lambda f) \exp[-jk(d + f)]$ é o fator de propagação. Deste modo, os coeficientes de proporcionalidade na Equação (1.31) contém o fator de fase que é a função quadrática de x e y na Equação (1.32). Desde que, $|h_l| = 1/\lambda f$ isto resulta a partir da Equação (1.32) que a intensidade ótica no plano de saída será

$$I(x, y) = \frac{1}{(\lambda f)^2} \left| F \left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f} \right) \right|^2 \quad (1.33)$$

A intensidade da luz para o plano de saída é portanto proporcional ao valor do quadrado absoluto da transformada de Fourier da amplitude complexa da onda no plano

de entrada, sem levar em conta a distancia d . O fator de fase desaparece na Equação (1.32) se $d = f$, de modo que

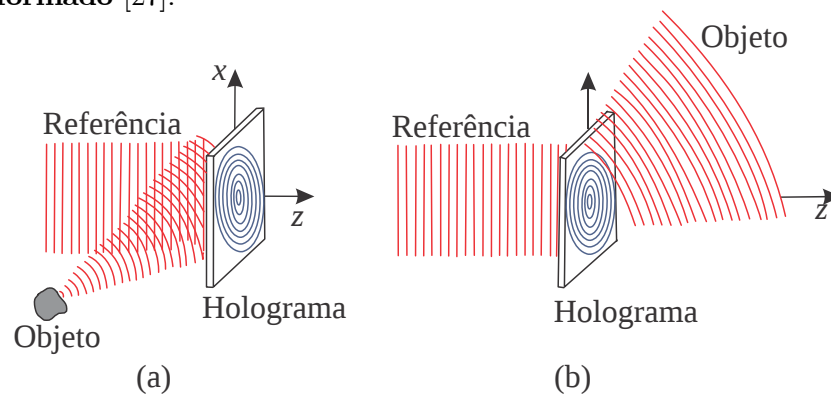
$$g(x, y) = h_l F\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) \quad (1.34)$$

onde $h_l = (j/\lambda f) \exp[-j2kf]$.

1.5 Holografia

Holografia é a técnica que envolve o registro e reconstrução de ondas óticas. Um holograma é uma transparência que contém códigos registrados de ondas óticas, incluindo as propriedades de amplitude e fase [27]. O estudo da holografia teve início em 1949 por Dennis Gabor que teve a idéia de registrar a amplitude e a fase de uma onda ótica incidente em uma placa fotográfica. Apresentaremos alguns métodos de como criar hologramas. Um destes, é através do registro da amplitude e fase das frentes de onda, por meio da interferência entre a luz vinda de uma onda objeto (U_0) e um feixe de referência (U_r) como é mostrado através da Figura 1.10(a). Já a reconstrução da frente de onda original, é feita a partir da incidência do feixe de referência sobre o holograma formado através da Figura 1.10(b).

Figura 1.10: (a) Registro do holograma sobre uma placa holográfica e (b) reconstrução da onda original pela iluminação da onda de referência através do holograma formado [27].



Fonte: (Saleh, 2007)

Vamos considerar que uma onda óptica monocromática cuja amplitude complexa num plano inicial como em $z = 0$, será chamada de onda objeto representada por $U_0(x, y)$. E por outro lado, um feixe de referência U_r , análogo a uma onda plana, interfere com U_0 no plano $z = 0$ conforme a Figura 1.10(a). Neste plano encontra-se uma transparência fina com amplitude de transmitância complexa $t(x, y)$ que fornece um registro completo da onda e onde registramos o padrão de interferência destas ondas.

A Figura 1.10(b) apresenta que a onda objeto U_0 pode então ser reconstruída simplesmente pela iluminação da transparência com uma onda plana uniforme de amplitude unitária percorrendo uma direção z de propagação. A onda transmitida deve ter uma amplitude complexa no plano em $z = 0$ de valor de $U(x, y) = 1.t(x, y) = U_0(x, y)$.

Como um exemplo, ilustremos que uma onda plana uniforme que forma um ângulo θ com respeito z ao plano $x - z$ com uma amplitude complexa $U_0(x, y) = \exp(-jkx \sin \theta)$. O registro desta onda na transparência é representada pela amplitude complexa de transmitância $t(x, y) = \exp(-jkx \sin \theta)$. Tal transparência atua como um prisma que dobra uma plana incidente $\exp(-jkz)$ por um ângulo θ , deste modo reproduzindo uma onda original, segundo a Figura 1.10(b). A transmitância t é proporcional a soma das intensidades resultantes das duas ondas U_0 e U_r registradas sobre a transparência de transmitância de amplitude complexa t , conforme a Figura 1.10(a), onde a transmitância pode ser calculada como,

$$\begin{aligned} t &\propto |U_0 + U_r|^2 = |U_0|^2 + |U_r|^2 + U_0^* U_r + U_0 U_r^* \\ &= I_r + I_0 + U_0^* U_r + U_0 U_r^* \\ t &= I_r + I_0 + 2\sqrt{I_r I_0} \cos[\arg(U_r) - \arg(U_0)] \end{aligned} \quad (1.35)$$

onde I_0 e I_r são respectivamente, as intensidades das ondas objeto e referência no plano $z = 0$. A transparência é chamada de holograma e contém claramente um código de

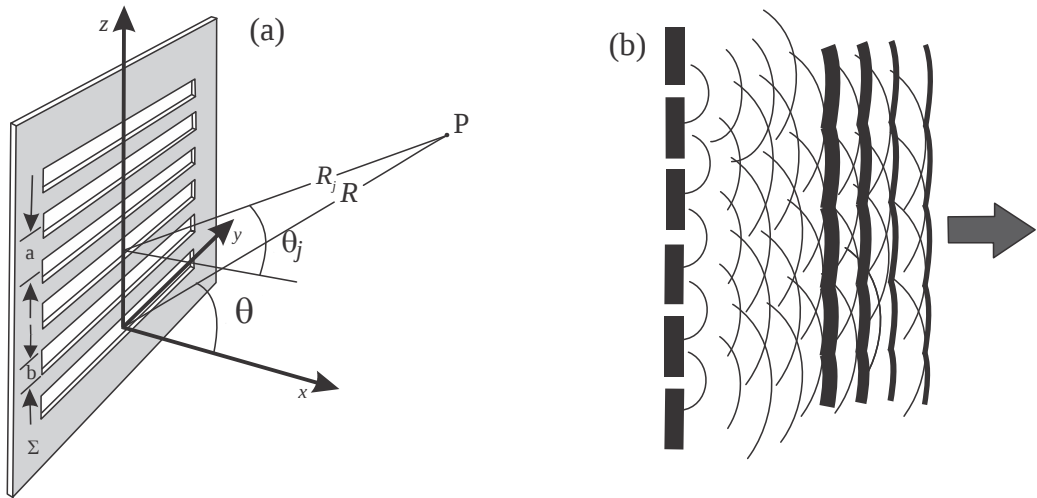
informação pertinente a fase e amplitude da onda U_0 .

O padrão de interferência no holograma funciona como uma rede de difração devido a interferência destas duas ondas. Podemos também expressar a obtenção deste padrão de intensidade fazendo uma analogia com um conjunto de N fendas simples de abertura de lados, mas para isto, é essencial que usemos as considerações análogas feitas na dupla fenda. Assim, podemos definir a intensidade deste padrão por N fendas como,

$$I(x, y) = I_0 \left[\frac{\sin(\beta)}{\beta} \right]^2 \left(\frac{\sin(N\alpha)}{N \sin(\alpha)} \right)^2 \quad (1.36)$$

onde $\beta = (bk \sin \theta)/2$ e $\alpha = (ak \sin \theta)/2$ são dimensões de cada fenda que compõem a geometria de multi-fendas que podem ser conferidas através da Figura 1.11 (a). Uma onda plana incidindo sob este aparato forma o padrão de interferência representado pela Equação (1.36) e descrito através da Figura 1.11 (b).

Figura 1.11: (a) Geometria de Multi-fendas. (b) Padrão de multi-fendas.



Fonte: (Hecht, 2002)

Para codificar a informação no holograma e reconstruir a onda objeto, a onda de referência U_r está novamente iluminando o holograma conforme a Figura 1.10 (b). O

resultado será uma onda com amplitude complexa,

$$U = tU_r \propto U_r I_r + U_r I_0 + U_0 I_r + U_0^* U_r^2 \quad (1.37)$$

$$= U_r(I_r + I_0) + U_0 I_r + U_0^* U_r^2 \quad (1.38)$$

no holograma no plano $z = 0$. Na Equação (1.38) encontra-se toda a informação da onda U , onde o primeiro termo representa a onda referência U_r que multiplica-se as intensidades das ondas objeto e referência. O segundo termo é a onda original multiplicada pela intensidade I_r da onda de referência. Por fim, o terceiro termo trata-se de uma versão conjugada da onda original modulada por U_r^2 .

Deste modo, se a onda de referência for uma onda plana uniforme $U_r = \sqrt{I_r} \exp(-\imath kz)$ que percorre o eixo z , então no plano $x-y$ em $z = 0$ teremos uma onda que será constante e independente de x e y . Agora vamos dividir a Equação (1.38) pela onda plana U_r em $z = 0$ que é igual à $U_r = \sqrt{I_r}$ temos,

$$U(x, y) \propto I_r + I_0(x, y) + \sqrt{I_r} U_0(x, y) + \sqrt{I_r} U_0^*(x, y) \quad (1.39)$$

O primeiro termo da Equação (1.39) representa a intensidade da onda plana, isto é, a onda de referência percorrendo a direção z . O termo seguinte corresponde a intensidade da onda objeto viajando na direção z com uma pequena propagação angular. Já o terceiro termo é proporcional à amplitude da onda original, e por último, o quarto termo é proporcional a amplitude da onda conjugada.

Podemos separar o sinal desejado, $U_0(x, y)\sqrt{I_r}$, dos termos restantes da onda reconstruída para assegurar que suas frequências espaciais variem separadamente de modo que suas direções permaneçam separadas. Consideremos a adição de um "carrier" na forma $U_0 = f(x, y) \exp(-\imath kx \sin \theta)$. Desta maneira a Equação (1.39) torna-se

$$U(x, y) \propto I_r + |f(x, y)|^2 + \sqrt{I_r} f(x, y) \exp(-\imath kx \sin \theta) + \sqrt{I_r} f^*(x, y) \exp(+\imath kx \sin \theta) \quad (1.40)$$

O primeiro termo da Equação (1.40) corresponde a uma onda plana viajando na direção z , o segundo termo é geralmente conhecido como termo de ambigüidade. O terceiro termo é uma réplica da onda objeto, o qual tem uma deflexão na direção θ . A presença do fator de fase $\exp(+ikx\sin\theta)$ no quarto termo indica uma deflexão na direção $-\theta$.

Um exemplo de equipamento utilizado para fazer hologramas é o modulador espacial de luz (SLM-Spatial Light Modulator) que é um dispositivo que impõe uma variação na modulação espacial de fase do feixe. A vantagem do SLM é ter a possibilidade de controlar dinamicamente a amplitude e a fase ou mesmo, os estados de polarização da luz [41]. A diferença entre a holografia clássica e a holografia computacional, realizada com o uso do modulador de luz, está no processo de construção do holograma. No primeiro caso, as frentes de onda são registradas em um holograma utilizando a interferência como processo de gravação. No segundo caso, o registro das frentes de onda são feitos no holograma por meio de técnicas computacionais. Em ambos os processos, a reconstrução óptica das ondas gravadas é obtida pela difração da luz.

E no apêndice desta dissertação apresentamos uma breve abordagem direcionada na formação e utilização dos hologramas aplicado aos nossos propósitos. Concluimos que uma das formas mais viáveis para gerar hologramas é através da técnica computacional, pois esta é feita através do uso de "computers generated holograms- CHG's que são implementados a um modulador espacial de luz (SLM-Spatial Light Modulator) que é um dispositivo que impõe uma variação na modulação espacial de fase do feixe.

1.6 Conclusão

Iniciamos nosso estudo abordando o momento angular orbital, onde mostramos que um feixe de luz que possui MAO tem uma fase azimutal da forma $\exp(il\phi)$, onde esta é responsável pela frente de onda helicoidal para $l \neq 0$, onde l representa o índice azimutal ou carga topológica do feixe. Mostramos também que essa fase azimutal não possui relação

com spin.

Em seguida apresentamos os feixes Laguerre-Gauss, dos quais possuem MAO. Mostramos o gráfico da fase e o perfil de fase desse feixe para diferentes valores de l , e também mostramos a existência da singularidade de fase nos feixes com MAO.

Abordamos a ótica de Fourier que trata somente à aplicação de nossa pesquisa, assim, falamos de teoria de difração, transformada de Fourier, a teoria de difração no limite de Fraunhofer através de aberturas na propagação no campo distante e também através do uso de lentes. Mostramos que a amplitude complexa da luz em um ponto (x, y) atrás do plano focal (direção de propagação) de uma lente de comprimento focal f é proporcional à transformada de Fourier da amplitude complexa na frente do plano focal calculado com as frequências de Fourier.

E por fim, mostramos que o registro e a reconstrução de ondas óticas é feito por meio da interferência entre a luz vinda de uma onda objeto (U_0) e um feixe de referência (U_r). Percebemos também que onda pode então ser reconstruída simplesmente pela iluminação da transparência com uma onda plana uniforme de amplitude unitária percorrendo uma direção z de propagação. Vimos que tal transparência atua como um prisma que dobra uma plana incidente $\exp(-\imath kz)$ por um ângulo θ , deste modo reproduzimos uma onda original. A transparência é chamada de holograma, onde contém claramente um código de informação pertinente a fase e amplitude da onda U_0 .

O padrão de interferência no holograma funciona como uma rede de difração devido a interferência destas duas ondas. Um exemplo de equipamento utilizado para fazer hologramas é o modulador espacial de luz (SLM-Spatial Light Modulator) que é um dispositivo que impõe uma variação na modulação espacial de fase do feixe.

2 Estudo da difração com feixes Laguerre-Gauss

2.1 Introdução

Apresentaremos resumidamente alguns resultados dos trabalhos de padrões de difração de feixes possuindo MAO em diversos tipos de aberturas no limite de Fraunhofer. Padrões estes obtidos através de feixes possuindo MAO em fendas simples, dupla e triangular para diferentes valores de cargas topológicas.

Inicialmente apresentaremos os padrões com as fendas dupla e simples obtidos fora do regime de Fourier. E logo em seguida, apresentaremos os padrões de difração da fenda triangular e fenda simples com feixes possuindo MAO obtidos no regime de Fourier.

2.2 Padrões de difração com feixes Laguerre-Gauss

Apresentaremos agora uma abordagem de padrões de difração por aberturas usando feixes LG. Começaremos a apresentar os padrões seguindo a ordem cronológica de suas respectivas pesquisas.

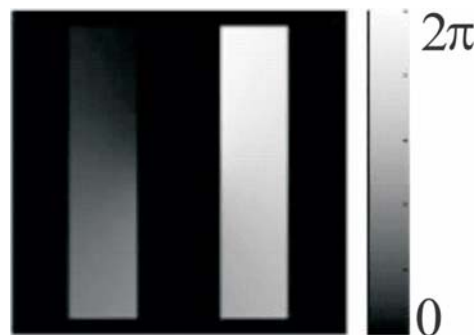
2.2.1 Fenda Dupla

Um dos padrões de difração mais abordados na literatura é o padrão da fenda dupla. Richard Feynman gostava de dizer que toda a mecânica quântica pode ser adquirida a partir do estudo cuidadoso nas implicações desta única experiência.

O estudo dos padrões de interferência com feixes de luz que possuem MAO propagando-se ao longo de diversas aberturas têm sido pesquisado em vários trabalhos recentes. Um destes padrões a serem pesquisados com feixes possuindo MAO foi obtido através da difração usando a fenda dupla. Os primeiros a retratarem este padrão de interferência por uma dupla fenda de Young com um feixe LG transportando MAO foram Sztul e Alfano [20].

A interferência desses feixes na fenda dupla, por sua vez, mostra uma dependência azimutal ocasionada pelo feixe LG. Esta interferência fornece uma nova percepção entre a estrutura da fase helicoidal do feixe e tem um potencial de aplicações para medições do momento angular orbital, bem como a magnitude e o sinal da carga topológica. Podemos observar a variação de fase em toda a frente de onda ocorrendo ao longo das duas fendas, conforme a Figura (2.1).

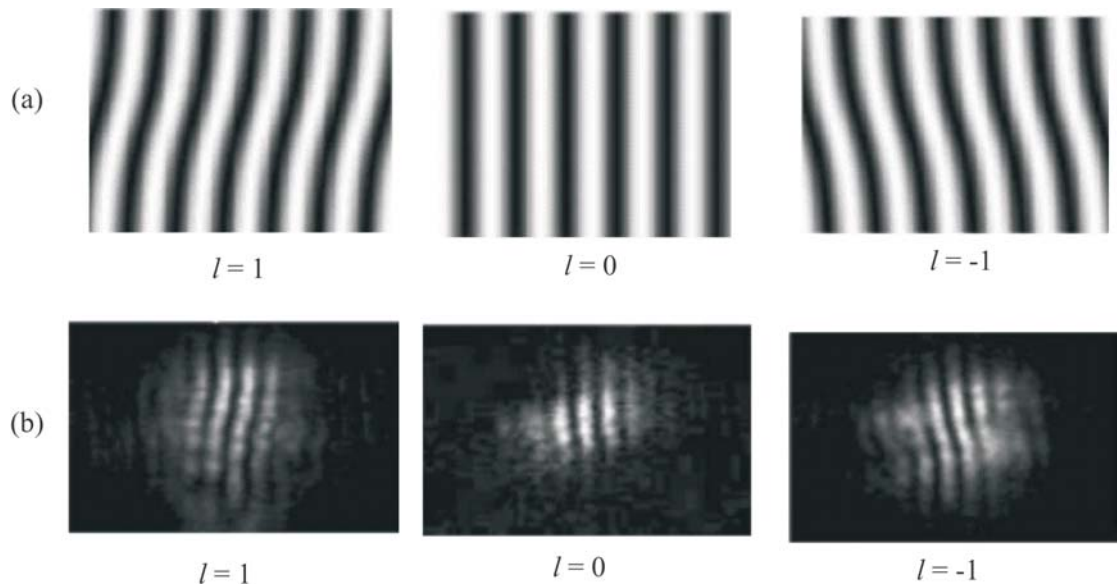
Figura 2.1: **Fase da frente de onda de um feixe LG ao longo da dupla fenda, com a singularidade de fase entre as fendas [20].**



Fonte: (Sztul, 2006)

Esta interferência acontece em razão da diferença de caminho em adição à contribuição de fase devido à estrutura da frente de onda, ocasionando assim uma mudança no padrão usual de fenda dupla, como veremos na Figura (2.2). Esta figura descreve vários padrões de interferência por uma dupla fenda com feixes LG possuindo diferentes valores cargas topológicas de $1, 0, -1$. Embora os padrões apresentem uma diferença entre os valores -1 e 1 , podemos assim distinguir o sinal da CT, onde essa distinção não é evidente para valores de CT maiores que 2. Sendo, de fato, uma técnica limitada para caracterizar tanto o valor como o sinal da CT.

Figura 2.2: Padrões de interferência com feixes LG sobre uma fenda dupla com seus respectivos valores de l (a) simulações e (b) experimentais [20].



Fonte: (Sztul, 2006)

Estes padrões de interferência comprovam que através da fenda dupla podemos identificar o valor e o sinal da carga topológica em feixes com MAO.

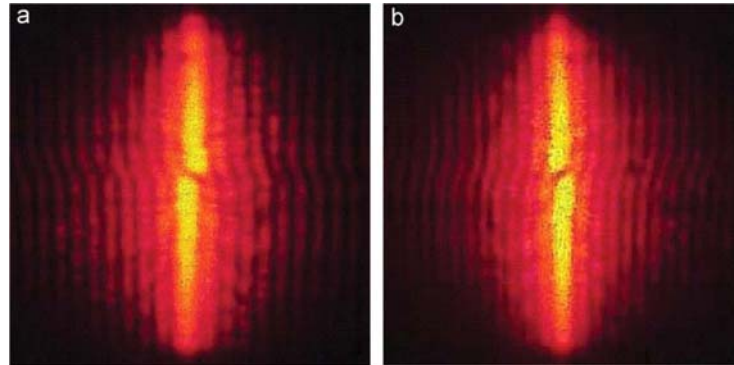
2.2.2 Fenda Simples

Em 2009, Ghai e colaboradores [19] estudaram o padrão de difração de um feixe óptico com MAO por uma fenda simples. Sendo que, para uma onda plana uniforme, a distribuição de campo dentro da fenda é a mesma ao longo de todo o comprimento da fenda e assim franjas em linha reta são observadas no padrão de difração [26].

No entanto, quando um feixe com vórtice ótico passa através de uma fenda vertical, tal que, este feixe está no centro da fenda, é verificado um padrão de difração de tal maneira que o núcleo central do padrão contém um rachadura inclinada, onde essa inclinação depende do sinal de l . E as franjas próximas ao centro sofrem uma inclinação de acordo com a inclinação da rachadura que é provocada pela singularidade de fase existente nesses feixes. Vejamos as Figuras 2.3(a) e (b) para os valores de $l = 1$ e $l = -1$, respectivamente. A direção de inclinação é inversa com a mudança no sinal da carga topológica conforme podemos observar através das figuras.

Isto acontece devido à dependência de fase azimutal e o padrão não ter sido obtido no regime de Fourier, as franjas de um feixe contendo vórtice ótico sofrem um desvio contínuo, enquanto passam pelo centro do padrão e exibem um deslocamento da esquerda para direita ou da direita para esquerda, dependendo do sinal da carga topológica do feixe. Desta forma o deslocamento das franjas no padrão de difração pode ser usado para obter o valor e o sinal da carga topológica.

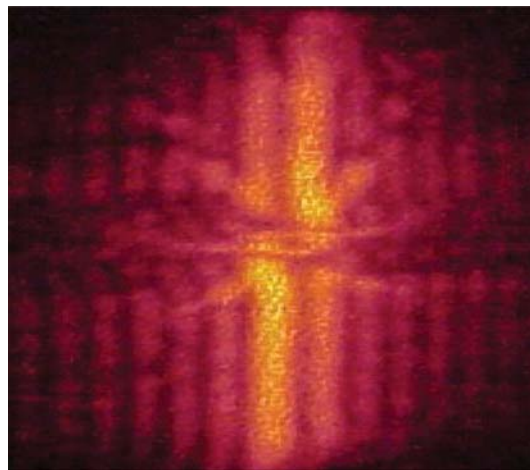
Figura 2.3: Padrões de difração de uma fenda simples de um feixe singular com cargas (a) $l = 1$ e (b) $l = -1$.



Fonte: (Ghai, 2009)

Para carga topológica $l = 2$, a inclinação das franjas é tal que uma franja escura-clara na metade superior se alinha com a franja clara-escura brilhante da metade inferior [Veja a Figura 2.4]. A dobra das franjas é revertida com a mudança de sinal de carga topológica do feixe com vórtice. Este método, no entanto, não pode ser usado efetivamente para a medição dos valores inteiros grandes de carga topológica.

Figura 2.4: Padrão de difração de uma fenda simples de um feixe singular com carga topológica $l = 2$.



Fonte: (Ghai, 2009)

2.2.3 Fenda Triangular

O próximo padrão a ser pesquisado com feixes possuindo MAO foi realizado em uma abertura triangular. Hickmann e colaboradores [21] mostraram como se comporta o padrão de difração de um feixe com frente de onda helicoidal por abertura triangular no plano de Fourier usando a difração de Fraunhofer. Foi observado no plano de Fourier uma rede truncada triangular para cada valor de carga topológica l , sendo esta rede feita de máximos de intensidade, onde a quantidade desses máximos de intensidade são proporcionais a l . Até o momento, esta técnica é a mais viável e eficiente para se obter o sinal e magnitude da carga topológica de feixes com MAO usando a difração.

O padrão de difração do campo distante E_d é feito no plano de Fourier é usando a aproximação de Fraunhofer, onde este é obtido através transformada de Fourier do campo incidente E_i com a função abertura $\tau(\mathbf{r}_\perp)$, ficando representada pela integral de Fraunhofer [28],

$$E_d(\mathbf{k}_\perp) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(\mathbf{r}_\perp) E_i(\mathbf{r}_\perp) e^{-i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp} d\mathbf{r}_\perp \quad (2.1)$$

Utilizando um argumento qualitativo para analisar o efeito da fase azimutal sobre as bordas da abertura triangular, onde cada borda foi analisada separadamente, e a partir do vórtice óptico $\exp(-il\phi)$ eles obtiveram uma aproximação válida ao longo de qualquer uma das bordas, onde a fase é descrita por

$$\phi(s) = \arcsin \left(\frac{s}{\sqrt{(a/12)^2 + s^2}} \right) \quad (2.2)$$

onde s é uma coordenada com origem no centro da fenda triangular e está variando de $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ onde a é o tamanho do lado do triângulo equilátero.

Logo em seguida, fizeram uso somente do primeiro termo da expansão de Taylor, pois aproximaram as bordas do triângulo para fendas infinitamente finas que pudessem ser tratadas como deltas de Dirac, fazendo assim, puderam ignorar a variação de amplitude do campo. Ao fazer isto, encontraram uma expressão bastante simples para o campo ao

longo da fenda, sendo possível a resolução da integral para a difração de Fraunhofer ao longo de uma fenda com feixe contendo MAO, sendo esta da forma

$$E_{slit}(k_x, k_y) \sim \int \delta(y) e^{i2\sqrt{3}lx/a} e^{-i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp} dx dy = \delta(k_x - 2\sqrt{3}l/a) \quad (2.3)$$

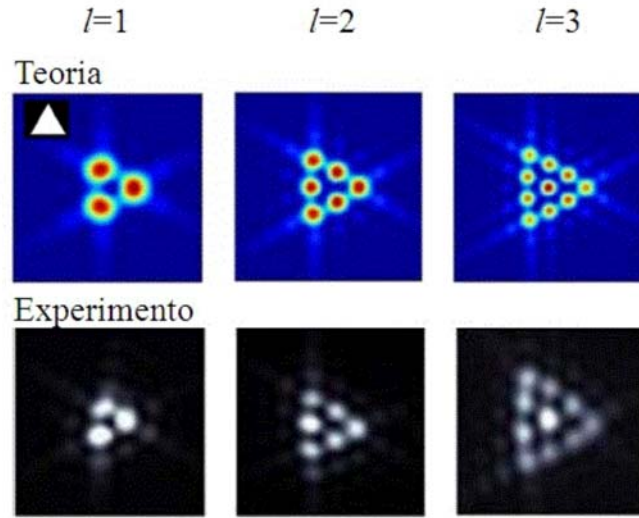
onde x e y são coordenadas transversas no plano da abertura, onde k_x e k_y são coordenadas transversas no plano de Fourier, e $\delta(y)$ é a delta de Dirac. Para resolver esta integral utilizaram o "shift theorem" em duas dimensões [28], que indica que a translação da função no domínio espacial introduz um deslocamento de fase linear no domínio da frequência.

Podemos ver neste resultado, uma fenda infinitesimal ao longo do eixo x produzindo um deslocamento na direção k_x (isto é, um deslocamento no centro do padrão) por uma quantidade proporcional a l , que é o valor da carga topológica. Assim, na Figura (2.5) podemos ver o padrão de difração formado quando o feixe com MAO passa através da abertura triangular. E notemos que o valor de l está diretamente relacionado com os pontos externos da rede formando o triângulo. A carga total é dada por $l = N - 1$, onde N é o número de pontos de qualquer lado externo do triângulo.

Hickmann e colaboradores também verificaram que a mudança do sinal da carga topológica gera uma rotação de 180° no padrão de difração triangular, tornando assim, este padrão na direção oposta ao anterior, conforme o sinal da carga topológica atribuída. A Figura (2.6) apresenta os padrões de difração triangular obtidos com valores de $l = -7$ e 7 , respectivamente. O sinal da carga topológica é determinado através da comparação destes padrões.

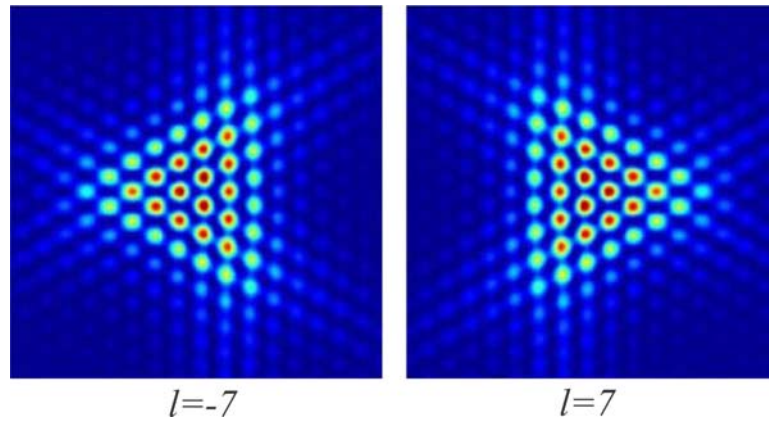
Desta forma eles demonstraram um método simples para obter a magnitude e o sinal da carga topológica.

Figura 2.5: Padrões de difração da luz com MAO por uma abertura triangular para diferentes cargas topológicas $l = 1, 2$ e 3 [21].



Fonte: (Hickmann, 2010)

Figura 2.6: Efeito na mudança de sinal da carga topológica no padrão de difração por uma abertura triangular com $l = -7$ e 7 .



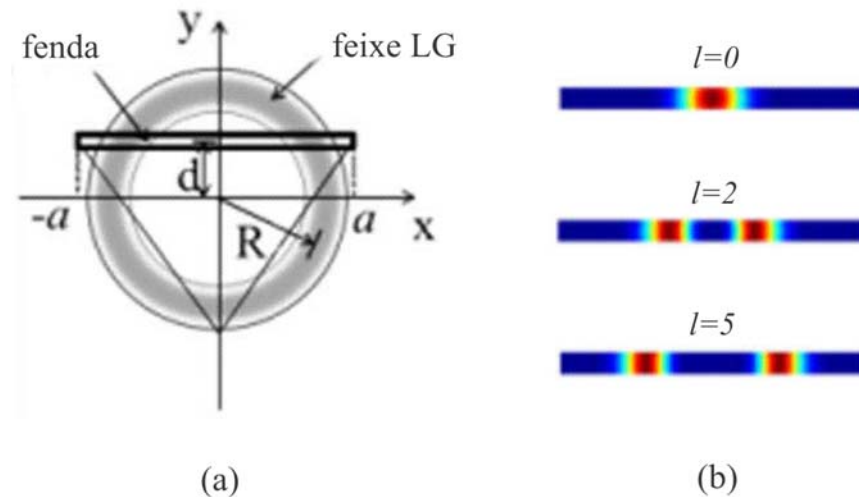
Fonte: (Hickmann, 2010)

2.2.4 Fenda simples no plano de Fourier

Nesta seção abordaremos o estudo da difração da luz com MAO por uma fenda simples no plano de Fourier. Neste caso, Ferreira e colaboradores [29] estudaram a difração de Fraunhofer levando em conta dois casos diferentes [Veja a Figura 2.7(a)]. No primeiro caso, a fenda se encontra na posição central do perfil do feixe, ou seja, encontra-se na origem do feixe.

Já no segundo caso, a fenda foi deslocada do centro do perfil do feixe para uma distância d do centro do feixe ao centro da fenda. O arranjo experimental é mostrado esquematicamente na Figura 2.7(a) que descreve o perfil de intensidade de um feixe LG gerado por um SLM sobre uma fenda simples, onde $2a$ é o comprimento da fenda e d é a distância do centro do feixe ao centro da fenda. Os resultados numéricos para a simulação da distribuição da intensidade ao longo de toda a fenda para $l = 0$, $l = 2$ e $l = 5$ com $d = 0$ para todos os casos, são apresentados através da Figura 2.7(b).

Figura 2.7: (a) Arranjo de uma fenda simples inserida num feixe LG gerado por um SLM; onde $2a$ é o comprimento da fenda e d é a distância do centro do feixe ao centro da fenda. (b) Simulação numérica da distribuição de intensidade na fenda para $l = 0$, $l = 2$, e $l = 5$ [29].



Fonte: (Ferreira, 2011)

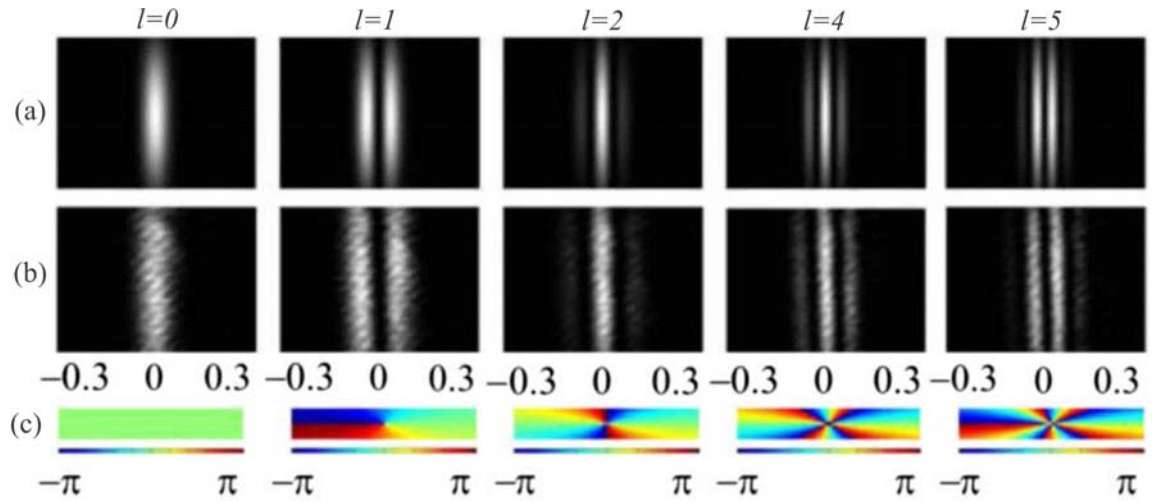
Estes padrões de difração causados pela luz com MAO sobre a fenda simples são obtidos através da integral de Fraunhofer que é dada por [27],

$$E(x, y, z) \propto \iint E(x', y', 0) e^{-i\frac{k}{z}(x'x + y'y)} dx' dy' \quad (2.4)$$

onde $k = 2\pi/\lambda$ é o vetor de onda e $\nu_x = x/\lambda z$ e $\nu_y = y/\lambda z$ são as frequências espaciais nas direções x e y .

Os resultados numéricos e experimentais da Equação (2.4) que descreve os padrões de difração de Fraunhofer com feixes possuindo MAO para esta fenda simples para $d = 0$ e $l = 0, 1, 2, 4$ e 5 são apresentados através da Figura (2.8).

Figura 2.8: **Padrões de difração para $l = 0, 1, 2, 4$ e 5 para $d = 0$. (a) Resultados numéricos da Equação (2.4), (b) Resultados experimentais e (c) Diagramas de fase ao longo da fenda [29].**



Fonte: (Ferreira, 2011)

Para o primeiro caso, em que a fenda é colocada no centro do perfil do feixe, isto é, em $d = 0$ foram observados padrões de interferência simétricos. Sendo que para $l = 0$ temos o típico padrão de difração por um feixe gaussiano na fenda simples. No entanto, para feixes com MAO em tal fenda, os padrões encontrados são similares aos padrões

de interferência da dupla fenda de Young. Notemos que para $d = 0$ e $l \neq 0$ existe um máximo central para valores pares de l e mínimo central para valores ímpares de l . Estes efeitos foram medidos e estão apresentados pela Figura 2.7(b). Percebemos que este efeito ocorreu devido a distribuição de fase ao longo da fenda que está exposta através da Figura 2.8(c). Esta figura apresenta uma diferença de fase de 2π para valores pares de $l \geq 2$, e uma diferença de fase de π para valores de ordens ímpares de MAO entre os máximos de intensidades. Estas diferenças de fase são responsáveis pela formação de máximos e mínimos centrais de intensidade através de interferência construtiva e destrutiva.

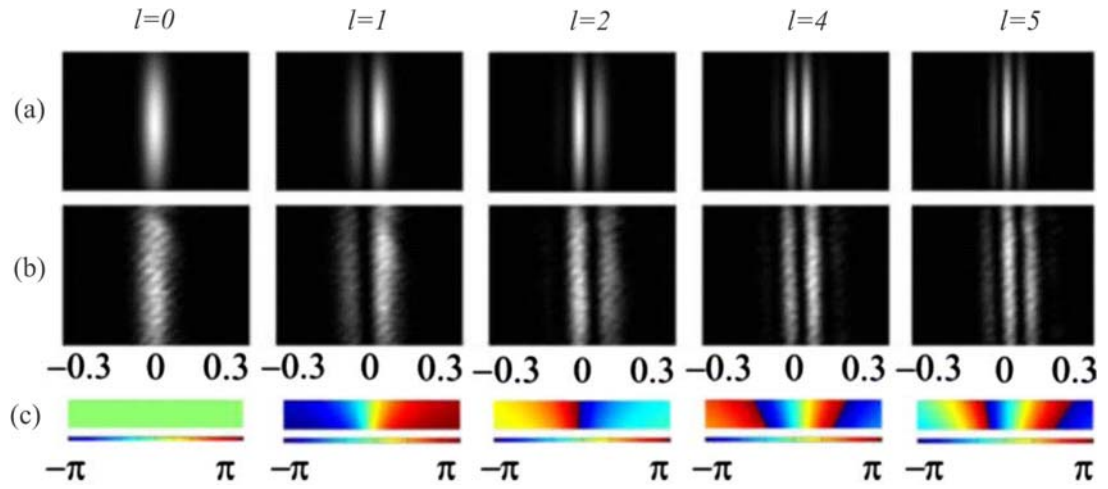
Ainda foi percebido que para valores com $l \neq 0$ os padrões possuem dois picos de intensidade com uma separação entre elas que dependem do MAO. Isto pode ser conferido através da Figura 2.7(b) para valores de $l = 2$ e $l = 5$ que descreve um aumento na distância entre picos de intensidade devido o aumento de l .

Este resultado corrobora com o padrão de interferência da dupla fenda em que o número de franjas de interferência aumenta com o acréscimo da distância entre as fendas.

Também foi verificado que o número de franjas de interferência aumenta com a quantidade de MAO pois a distância entre os picos de intensidade aumenta com o aumento de l .

Ferreira e colaboradores [29] também investigaram situações para $d \neq 0$, isto é, quando a singularidade de fase não está no centro da fenda. A Figura 2.9(a), (b) e (c) mostra simulações numéricas, resultados experimentais e distribuição de fase entre os máximos de intensidade para $d = 0.2R$, respectivamente, onde R é o raio do feixe. Em contraste com os resultados teóricos e experimentais mostrados na Figura 2.8(a) e (b), os padrões de intensidade da Figura 2.9(a), (b) são assimétricos e deslocados do centro.

Figura 2.9: Padrões de difração para $l = 0, 1, 2, 4$ e 5 para $d = 0, 2R$. (a) Resultados numéricos e (b) Resultados experimentais e (c) Diagramas de fase ao longo da fenda [29].



Fonte: (Ferreira, 2011)

Analisando a distribuição de fase ao longo do máximo de intensidade sobre a fenda, vimos que a variação de fase é aproximadamente linear sobre o máximo de intensidade para valores pequenos de CT como $l = 2$ e 3 . No entanto, para valores a partir de $l \geq 4$ essa variação de fase ao longo do máximo de intensidade torna-se não linear com o aumento de l .

Podemos ver nestes resultados que, a difração de Fraunhofer com feixes LG por uma fenda simples é análogo ao padrão de difração da dupla fenda de Young usando feixes sem MAO, devido a forma anelar do feixe LG na fenda simples.

Também foi verificado que a fase azimutal presente em tais feixes determinam a formação de franjas de interferência. A posição de máximos e mínimos dos padrões de interferência podem ser controlados pela mudança da quantidade de MAO.

Deste modo, verificamos que os padrões de difração obtidos no regime de Fourier feitos por Ferreira e colaboradores [29] apresentaram uma diferença entre os padrões de difração obtidos fora do regime de Fourier feitos por Ghai e colaboradores [19]. No regime

de Fourier encontramos padrões típicos da fenda dupla que são formados mediante a singularidade de fase no centro de tais feixes, que de certa forma atua como a área de bloqueio semelhante a área da distância da fenda dupla. E no segundo caso temos um aparecimento de uma singularidade de fase no centro do padrão gerando assim uma quebra no perfil de intensidade.

2.3 Conclusão

Apresentaremos resumidamente as conclusões dos trabalhos com padrões de difração de Fraunhofer utilizando feixes possuindo MAO em diversos tipos de aberturas. Foram estudados os padrões de difração com feixes possuindo MAO nas fendas simples, dupla e triangular para diferentes valores de cargas topológicas.

Inicialmente foi estudado o padrão de interferência da fenda dupla. Foi identificado no padrão de difração neste tipo de abertura uma interferência em razão da diferença de caminho em adição à contribuição de fase devido à estrutura da frente de onda, ocasionando assim uma mudança no padrão usual de fenda dupla. Esta interferência fornece uma nova percepção entre a estrutura da fase helicoidal do feixe e tem um potencial de aplicações para medições do momento angular orbital, bem como a magnitude e o sinal da carga topológica.

No entanto, quando um feixe com vórtice ótico passa através de uma fenda vertical simples, foi verificado um padrão de difração de tal maneira que o núcleo central do padrão contém uma rachadura inclinada, onde essa inclinação depende do sinal de l . E as franjas próximas ao centro sofrem uma inclinação de acordo com a inclinação da rachadura que é provocada pela singularidade de fase existente nesses feixes.

Foi apresentado a existência de uma mudança na direção de inclinação devido a mudança no sinal da carga topológica para $l = 1$ e $l = -1$. Assim, esta inclinação das franjas no padrão de difração pode ser usado para obter o valor e o sinal da carga topológica.

Este método, no entanto, não pode ser usado efetivamente para a medição dos valores inteiros grandes de carga topológica.

Já na fenda triangular foi observado no plano do campo distante uma rede truncada triangular para cada valor de carga topológica l , sendo esta rede feita de máximos de intensidade, onde a quantidade desses máximos de intensidade são proporcionais a l . Até o momento, esta técnica é a mais viável e eficiente para se obter o sinal e magnitude da carga topológica de feixes com MAO.

Foi apresentado que o processo de análise do MAO neste tipo de abertura está diretamente relacionado com os pontos externos da rede que forma o triângulo. A carga topológica total do feixe é dada por $l = N - 1$, onde N é o número de pontos de qualquer lado externo do triângulo.

Hickmann e colaboradores também verificaram que a mudança do sinal da carga topológica gera uma rotação de 180° no padrão de difração triangular, tornando assim, este padrão na direção oposta ao anterior, conforme o sinal da carga topológica atribuída. Assim, o sinal da carga topológica era determinado através da comparação destes padrões.

Logo em seguida vimos novamente o padrão de difração da fenda simples com feixes possuindo MAO, mas agora no regime de Fourier. Este padrão de difração é análogo ao padrão da fenda dupla de Young usando feixes sem MAO devido à forma anelar do feixe LG na fenda simples. No entanto, também foi verificado que a fase azimutal presente em tais feixes determinam a formação e a simetria das franjas de interferência. A posição de máximos e mínimos dos padrões de interferência podem ser controlados pela mudança da quantidade de MAO.

Deste modo, verificamos que os padrões de difração obtidos no regime de Fourier feitos por Ferreira e colaboradores [29] apresentaram uma diferença entre os padrões de difração obtidos fora do regime de Fourier feitos por Ghai e colaboradores [19]. No regime de Fourier encontramos padrões típicos da fenda dupla que são formados mediante a

singularidade de fase no centro de tais feixes, que de certa forma atua como a área de bloqueio semelhante a área da distância da fenda dupla. E no segundo caso temos um aparecimento de uma singularidade de fase no centro do padrão gerando assim uma quebra no perfil de intensidade.

3 Construindo uma Rede Quadrada com Momento Angular Orbital da Luz

3.1 Introdução

Estudamos a difração de Fraunhofer de feixes LG a partir de uma abertura quadrada. Propomos uma solução analítica para este padrão de difração para diferentes valores de cargas topológicas, como também o motivo do truncamento dos padrões de difração com feixes possuindo MAO.

E por fim, encontramos os fatores responsáveis pela formação de uma rede ótica truncada quadrada de intensidade que é composta de um conjunto de picos de intensidade.

Para entender essa formação destes padrões de difração, fizemos uso da regra de Born. Seguindo esta regra, analisamos os padrões de difração da fenda quadrada de forma decomposta em padrões que se originam a partir de cada fenda ortogonal e um par de fendas paralelas.

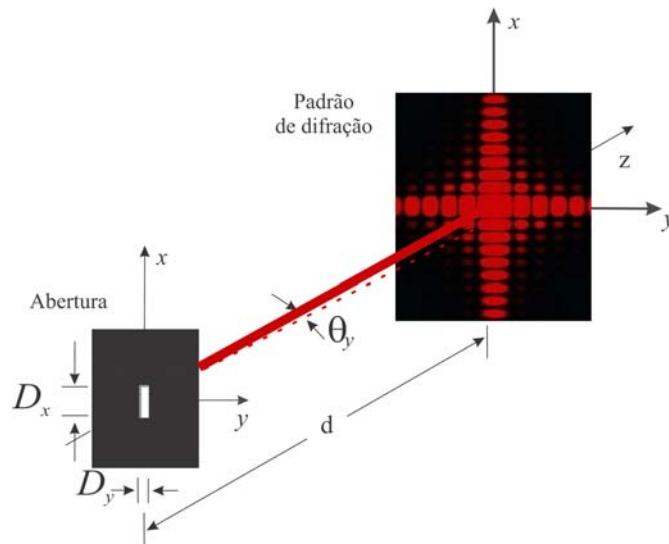
3.2 Motivação

No segundo capítulo dessa dissertação vimos o estudo dos padrões de difração com feixes possuindo MAO em diversos tipos de aberturas juntamente com seus resultados

e conclusões. Os padrões de difração por fenda retangular e quadrangular já foram pesquisadas [27], mas somente com feixes que não possuem MAO, tais como feixes gaussianos, conforme a Figura (3.1).

Como ainda não existe registro de padrões de difração com feixes possuindo MAO em uma abertura do tipo quadrada, nos motivamos a pesquisar o padrão de difração neste tipo de abertura. Os resultados e conclusões estão apresentados a partir da próxima seção deste capítulo.

Figura 3.1: Difração de Fraunhofer por uma abertura retangular [27]



Fonte: (Saleh, 2007)

3.3 Construindo uma rede truncada quadrada com MAO

Determinamos o padrão da difração de Fraunhofer no plano de Fourier por uma abertura quadrada usando um feixe carregando MAO. Se estamos interessados apenas nas intensidades relativas a um plano fixo colocado na posição $z = 0$, a difração do campo

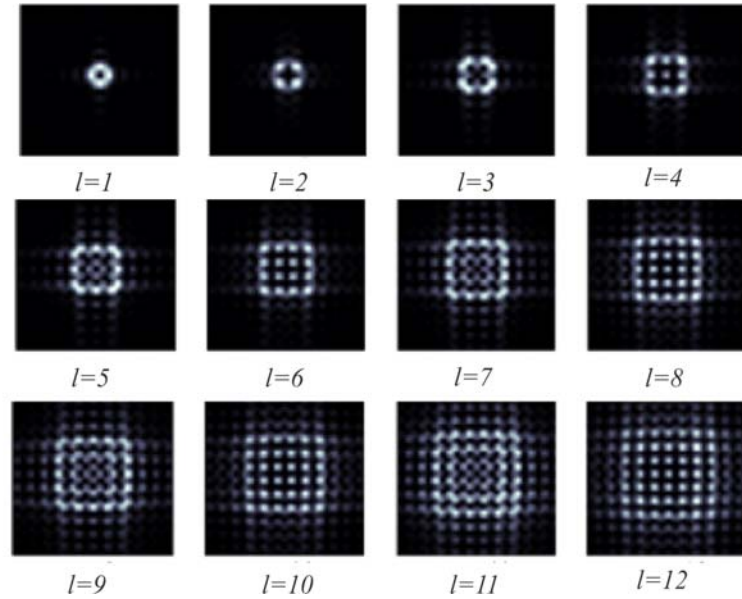
E_d será representado pela Equação (2.1):

$$E_d(\mathbf{k}_\perp) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(\mathbf{r}_\perp) E_i(\mathbf{r}_\perp) e^{-i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp} d\mathbf{r}_\perp$$

onde, E_d representa a distribuição do campo distante obtida através da transformada de Fourier do produto da função abertura $\tau(\mathbf{r}_\perp)$ pelo campo incidente $E_i(\mathbf{r}_\perp)$, onde $\tau(\mathbf{r}_\perp)$ neste caso é uma abertura quadrada. Note que o vetor de onda transversal $\mathbf{k}_\perp$ pode ser associado com o sistema de coordenadas do campo distante representando o espaço recíproco.

A integral apresentada na Equação (2.1) é calculada numericamente usando feixes Laguerre-Gauss de alta ordem com uma condição inicial para o campo elétrico. Para feixes Laguerre-Gauss com $p = 0$, temos o padrão de Fraunhofer para diferentes valores de l estendendo-se de 1 a 12 como mostramos na Figura (3.2). Esta figura mostra que a rede de intensidade quadrada se forma com o crescimento de l . No entanto, a rede é bem formada somente para valores pares de TC com $l = 2n$ onde $n \in \mathbb{Z}$. Para valores ímpares de l , os máximos de intensidade não são bem definidos, e assim, não há uma formação de rede truncada quadrada. Isto pode ser visto que existe uma relação entre o número de máximos de intensidade laterais N e da TC, ou seja, $l = 2N - 2$, que resulta em somente para valores pares de l [42].

Figura 3.2: Padrões de difração correspondentes a resultados numéricos da Equação 2.1 [42].

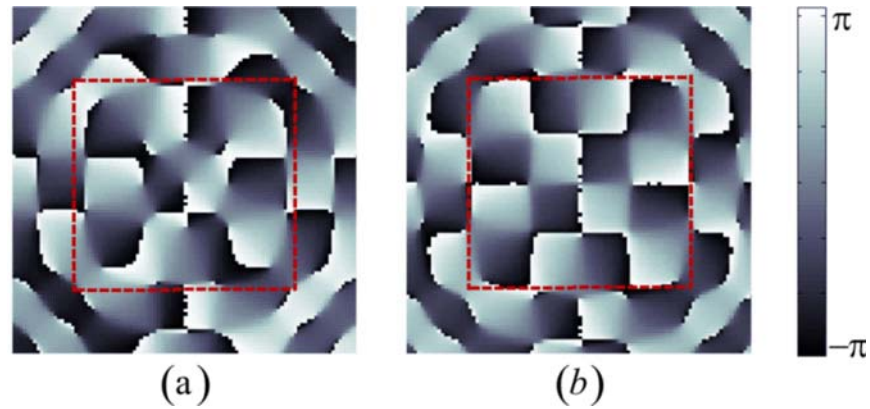


Fonte: (Autor, 2011)

Para entender a formação da rede de intensidades, nós analisamos o diagrama de fase no plano de Fourier mostrado nas Figuras 3.3(a) e 3.3(b) para $l = 5$ e $l = 6$, respectivamente. Note que, somente na Figura 3.3(b) a fase tem uma distribuição uniforme, principalmente na região central. Saltos de fase, cujos padrões tem forma quadrada, são claramente observados na Figura 3.3(b).

Em contraste, algumas partes no centro da Figura 3.3(a) cujo valor l é ímpar, a distribuição de fase é suficientemente suave, o que torna impossível identificar claramente os saltos de fase. Estes comportamentos são igualmente observados em todos os diagramas para diferentes valores de l , em concordância com a quantidade e paridade de MAO. Como consequência, os padrões de intensidade mostrados na Figura (3.2) tem diferentes comportamentos dependendo da paridade de l , onde uma rede de intensidade bem definida é obtida somente para valores pares de l .

Figura 3.3: Padrão da fase correspondente para o padrão de difração para (a) $l = 5$ e (b) $l = 6$. O quadrado vermelho tracejado é usado somente para realçar o centro do padrão [42].

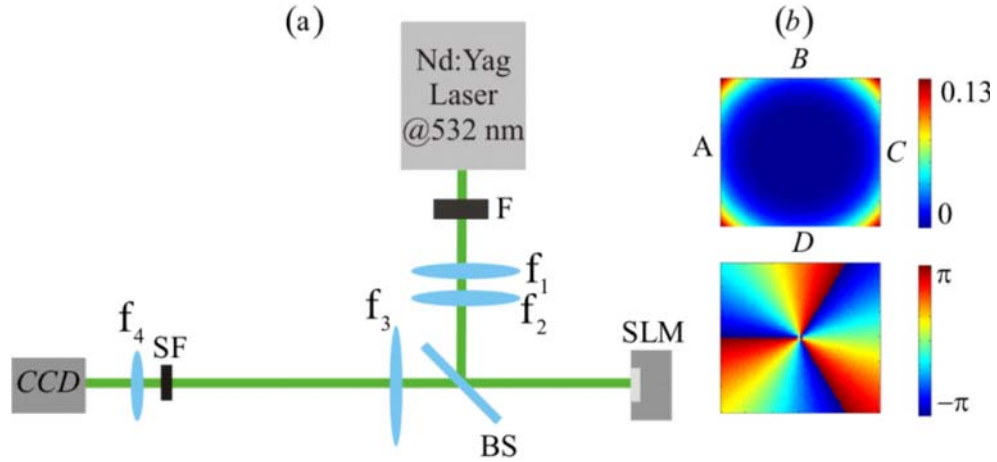


Fonte: (Autor, 2011)

3.3.1 Arranjo Experimental

A configuração usada em nosso experimento é descrita na Figura 3.4(a). Um laser Nd:YAG operando em 532 nm iluminando um CHG - "computer generated holograms" escrito com um modulador espacial de luz (Hamamatsu model X10468-01- spatial light modulator (SLM) para produzir feixes Laguerre-Gauss de altas-ordens, e juntamente com estes, fendas quadradas de tamanho proporcional que se adequam a cada feixe, conforme a Figura 3.4(b).

Figura 3.4: (a) Arranjo experimental (b) Um feixe com MAO dentro de uma abertura quadrada (topo) e o diagrama de fase para $l = 3$ (base) F – density neutral filter; f_i – lens; SLM – spatial light modulador; SF – spatial filter [42].



Fonte: (Autor, 2011)

Devido a cintura do feixe Laguerre-Gauss crescer com o aumento de l , nós usamos máscaras quadradas com lados que variam de $1,8 \text{ mm}$ a $3,3 \text{ mm}$ para diferentes feixes de LG. Estas máscaras podem ser sobrepor todo o holograma no SLM. O efeito é similar para um feixe LG incidente numa abertura quadrada como é ilustrado na Figura 3.4(b)(topo). Note que temos alinhar cuidadosamente o feixe no centro da abertura para evitar assimétrias nos padrões. Temos utilizado o holograma (tipo 1) para codificar a amplitude e a fase sendo primeiro proposto por Kirk *et al.* [31].

A transformada de Fourier é executada através de uma lente de 50 cm de foco (f_3) e a imagem da difração da luz é coletada por uma lente de 20 cm de foco (f_4) e a direciona na camera (CCD) - Charge Coupled Device.

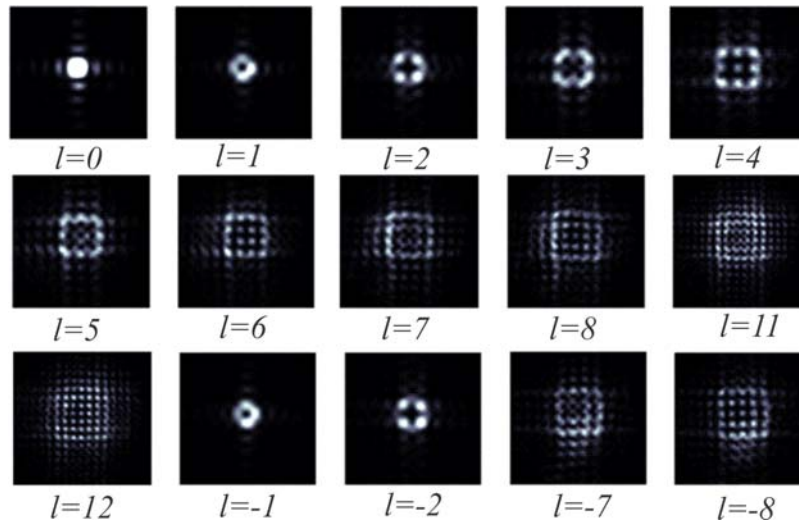
3.3.2 Resultados experimentais e discussões

Os painéis apresentados na Figura (3.5) mostram os resultados experimentais dos padrões de difração por um feixe com MAO por uma abertura quadrada para $l =$

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, -1, -2, -7, -8.

Observamos um padrão de uma rede ótica bem formada somente para valores pares l , confirmando a simulação dos resultados. A mudança do sinal de l não muda a forma global do padrão por que este é invariante por uma rotação de π rad. Naturalmente, para $l = 0$, temos usual padrão de difração por uma abertura quadrada com o feixe sem MAO [28].

Figura 3.5: Padrões de difração correspondentes a resultados experimentais para valores inteiros de cargas topológicas l [42].



Fonte: (Autor, 2011)

3.3.3 Cálculo da difração de feixes com MAO pela abertura quadrada

O padrão de difração no plano de Fourier através de uma abertura qualquer é descrito através da integral (2.1). Como vimos, esta integral foi resolvida numericamente para uma abertura triangular [21] fazendo uso de algumas considerações apresentadas na seção 2.2.3 do capítulo anterior. Considerações estas, que proporcionaram a resolução aproximada da Equação (2.1) apresentada pela Equação (2.3).

Agora, propomos a resolução da Equação (2.1) de forma analítica, fazendo uso de algumas aproximações e considerações. Tais considerações se baseiam nas regras da transformada de Fourier para feixes Laguerre-Gauss propostas por Ivan Maleev [30], juntamente com a análise feita através do gráfico de cada termo que compõe o feixe LG. Com a ajuda da Figura (3.6) podemos chegar a algumas conclusões satisfatórias.

O feixe usado foi o LG,

$$U_{l,p}(r, \phi, z) = A_{l,n} \left[\frac{W_0}{W(z)} \right] \left(\frac{r}{W(z)} \right)^l L_p^l \left(\frac{2r^2}{W^2(z)} \right) \exp \left(\frac{-r^2}{W^2(z)} \right) \times \exp \left[-ikz - ik \frac{r^2}{2R(z)} - il\phi + i(l+2p+1)\zeta(z) \right] \quad (3.1)$$

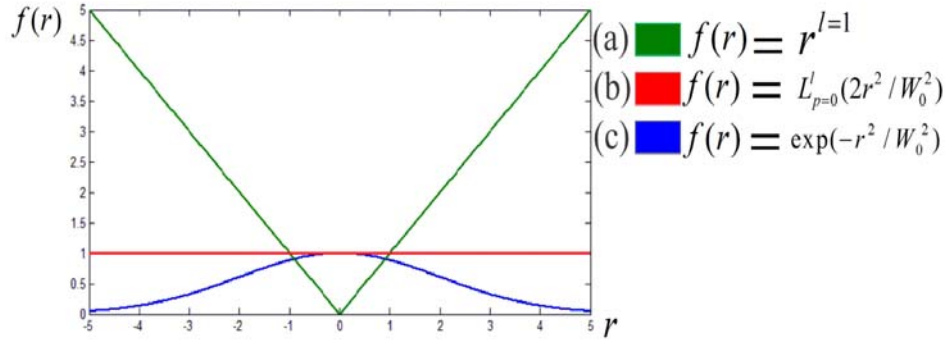
Para $z = 0$, podemos considerar que, $A_{l,n}$ e $(1/W_0)^l$ são constantes que podem ser normalizadas. Alguns termos da função $\exp \left[-ikz - ik \frac{r^2}{2R(z)} - il\phi + i(l+2p+1)\zeta(z) \right]$ não existem em $z = p = 0$, restando somente o termo $\exp(-il\phi)$. As funções dos polinômios de Laguerre $L_{p=0}^{l=1}(2r^2/W_0^2)$, o termo gaussiano $\exp(-r^2/W_0^2)$ do feixe e r^l serão analisados dentro da fenda quadrada conforme o gráfico na Figura (3.6).

Agora a Equação do feixe $U_{l,p}$ resume-se a seguinte forma,

$$U_{l,p}(r, \phi, z = 0) = r^l e^{il\phi} = E_l \quad (3.2)$$

Observando o gráfico das funções embutidas no feixe LG podemos perceber que a função gaussiana e os polinômios de Laguerre em $p = 0$ são aproximadamente desprezíveis, pois exibem uma variação insignificante em relação à r^l , conforme podemos observar pela Figura (3.6).

Figura 3.6: Análise das funções: (a) linear, (b) Polinômios de Laguerre e (c) Gaussiana pertencentes ao feixe LG.



Fonte: (Autor, 2011)

Agora o feixe com MAO tem a forma $E_l = r^l e^{il\phi}$ podendo esta ser ainda escrita como $r^l e^{il\phi} = (x + iy)^l$, onde (r, ϕ) são coordenadas polares que são medidas com respeito ao centro do feixe.

Assim, o padrão da difração de Fraunhofer por uma abertura quadrada com feixes possuindo MAO no plano de Fourier, que é representado através da Equação (2.1), pode ser escrito da forma,

$$E_l = \int_{-a}^a \int_{-a}^a (x + iy)^l e^{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} dx dy \quad (3.3)$$

onde l é a carga topológica e representa ordem l - énsima do campo E_l que transporta MAO.

Para resolver a integral na Equação (3.3) usaremos a técnica proposta por Mallev [30] que usa a seguinte relação,

$$(x + iy)^{|l|} e^{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} = \frac{1}{(2\pi)^{|l|}} \left(i \frac{\partial}{\partial \nu_x} - \frac{\partial}{\partial \nu_y} \right)^{|l|} e^{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} \quad (3.4)$$

onde o módulo da carga topológica é utilizado para corroborar que l deve ser positivo no expoente do termo da derivada na respectiva Equação (3.4), tornando-se então,

$$E_l(\nu_x, \nu_y) = \frac{1}{(2\pi)^{|l|}} \left(i \frac{\partial}{\partial \nu_x} - \frac{\partial}{\partial \nu_y} \right)^{|l|} \int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} dx dy \quad (3.5)$$

Esta integral torna-se fácil de resolver, pois a integral tem a seguinte forma

$$\int e^{ak} dk = \frac{1}{a} e^{ak} \quad (3.6)$$

Assim, resolvendo a integral da Equação (3.5) temos,

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} dx dy &= \left[\frac{e^{-i2\pi(\nu_x x)}}{-i2\pi\nu_x} \right]_{-a}^a \left[\frac{e^{-i2\pi(\nu_y y)}}{-i2\pi\nu_y} \right]_{-a}^a \\ &= \frac{\sin(2\pi\nu_x a)}{\pi\nu_x} \frac{\sin(2\pi\nu_y a)}{\pi\nu_y} \end{aligned} \quad (3.7)$$

E substituindo o resultado da integral na Equação (3.5) temos a forma geral do campo E_l tendo a seguinte forma,

$$E_l(\nu_x, \nu_y) = \frac{1}{(2\pi)^{|l|}} \left(i \frac{\partial}{\partial \nu_x} - \frac{\partial}{\partial \nu_y} \right)^{|l|} \left(\frac{\sin(2\pi\nu_x a)}{\pi\nu_x} \frac{\sin(2\pi\nu_y a)}{\pi\nu_y} \right) \quad (3.8)$$

onde esta pode ser resolvida simplesmente derivando-a para cada valor correspondentemente escolhido para l .

Iniciamos este processo de verificação resolvendo a Equação (3.8) para o valor de $l = 1$ tornando-se da forma,

$$\begin{aligned} E_1(\nu_x, \nu_y) &= \frac{i \sin(2\pi\nu_y a)}{2\pi^2 \nu_y} \left(\frac{2\pi a \nu_x \cos(2\pi\nu_x a) - \sin(2\pi\nu_x a)}{\pi\nu_x^2} \right) + \\ &\quad - \frac{\sin(2\pi\nu_x a)}{2\pi^2 \nu_x} \left(\frac{2\pi a \nu_y \cos(2\pi\nu_y a) - \sin(2\pi\nu_y a)}{\pi\nu_y^2} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Em seguida, calculamos novamente a Equação (3.8), mas agora para $l = 2$, onde obtemos inicialmente o campo E_2 como sendo,

$$E_2(\nu_x, \nu_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial \nu_x^2} - \frac{i\partial^2}{\partial \nu_x \partial \nu_y} - \frac{i\partial^2}{\partial \nu_y \partial \nu_x} + \frac{\partial^2}{\partial \nu_y^2} \right) \left(\frac{\sin(2\pi\nu_x a)}{\pi\nu_x} \frac{\sin(2\pi\nu_y a)}{\pi\nu_y} \right) \quad (3.10)$$

onde derivando o campo E_2 termo a termo separadamente a fim de facilitar a visualização da equação, temos os seguintes termos, como seguem, iniciando por

$$-\frac{\partial^2}{\partial \nu_x^2} \left(\frac{\sin(2\pi\nu_x a)}{\pi\nu_x} \frac{\sin(2\pi\nu_y a)}{\pi\nu_y} \right) =$$

$$= \frac{\sin(2\pi\nu_y a)}{\pi\nu_y} \left[\frac{4\pi a^2 \sin(2\pi\nu_x a)}{\nu_x} + \frac{4a \cos(2\pi\nu_y a)}{\nu_x^2} - \frac{2 \sin(2\pi\nu_x a)}{\pi\nu_x^3} \right]$$

Como o termo do meio é uma derivada cruzada, conferimos que a equação $\left(\frac{i\partial^2}{\partial\nu_x\partial\nu_y} - \frac{i\partial^2}{\partial\nu_y\partial\nu_x} \right) = -\frac{2i\partial^2}{\partial\nu_x\partial\nu_y}$ é válida, pois as derivadas são contínuas e tem a relação $\frac{\partial^2}{\partial\nu_x\partial\nu_y} = \frac{\partial^2}{\partial\nu_y\partial\nu_x}$ como satisfeita. Assim, temos que para o termo do meio será,

$$\begin{aligned} & -\frac{2i\partial^2}{\partial\nu_x\partial\nu_y} \left(\frac{\sin(2\pi\nu_x a)}{\pi\nu_x} \frac{\sin(2\pi\nu_y a)}{\pi\nu_y} \right) = \\ & = -2i \left[\frac{2a \cos(2\pi\nu_x a)}{\nu_x} - \frac{\sin(2\pi\nu_x a)}{\pi\nu_x^2} \right] \left[\frac{2a \cos(2\pi\nu_y a)}{\nu_y} - \frac{\sin(2\pi\nu_y a)}{\pi\nu_y^2} \right] \end{aligned}$$

E por fim, a resolução do terceiro termo desta equação é análoga à primeira, sendo da forma

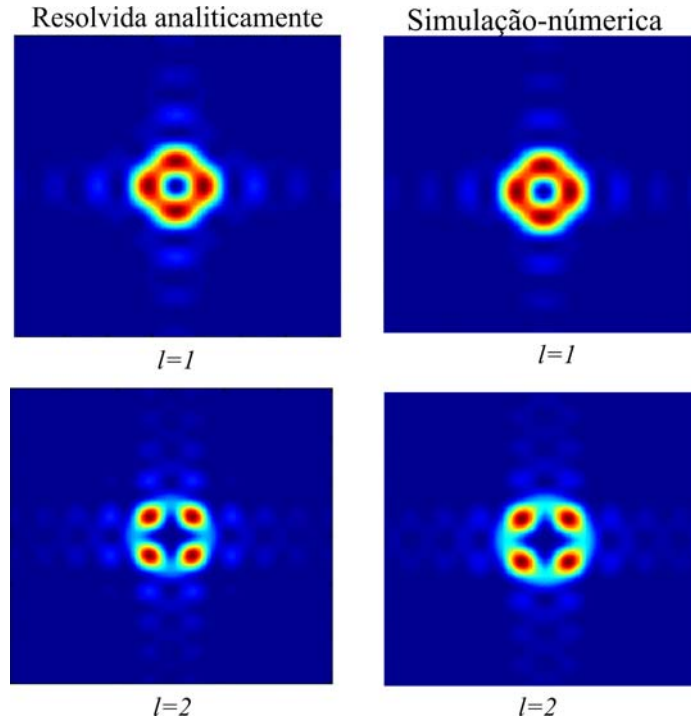
$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial\nu_y^2} \left(\frac{\sin(2\pi\nu_x a)}{\pi\nu_x} \frac{\sin(2\pi\nu_y a)}{\pi\nu_y} \right) = \\ & = \frac{\sin(2\pi\nu_x a)}{\pi\nu_x} \left[-\frac{4\pi a^2 \sin(2\pi\nu_y a)}{\nu_y} - \frac{4a \cos(2\pi\nu_y a)}{\nu_y^2} + \frac{2 \sin(2\pi\nu_y a)}{\pi\nu_y^3} \right] \end{aligned}$$

Finalmente, a Equação (3.10) que representa o campo E_2 que passa por uma abertura quadrada de lado a tem a forma analítica como sendo,

$$\begin{aligned} E_2(\nu_x, \nu_y) = & \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\sin(2\pi\nu_y a)}{\pi\nu_y} \left[\frac{4\pi a^2 \sin(2\pi\nu_x a)}{\nu_x} + \frac{4a \cos(2\pi\nu_y a)}{\nu_x^2} - \frac{2 \sin(2\pi\nu_x a)}{\pi\nu_x^3} \right] + \\ & -\frac{1}{(2\pi)^2} 2i \left[\frac{2a \cos(2\pi\nu_x a)}{\nu_x} - \frac{\sin(2\pi\nu_x a)}{\pi\nu_x^2} \right] \left[\frac{2a \cos(2\pi\nu_y a)}{\nu_y} - \frac{\sin(2\pi\nu_y a)}{\pi\nu_y^2} \right] \\ & -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\sin(2\pi\nu_x a)}{\pi\nu_x} \left[\frac{4\pi a^2 \sin(2\pi\nu_y a)}{\nu_y} + \frac{4a \cos(2\pi\nu_y a)}{\nu_y^2} - \frac{2 \sin(2\pi\nu_y a)}{\pi\nu_y^3} \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

As intensidades dos campos E_1 e E_2 foram calculadas de forma analítica e numérica para feixes com MAO. Os resultados dessas intensidades são comparados através dos padrões apresentados na Figura (3.7) abaixo para valores de cargas topológicas $l = 1, 2$.

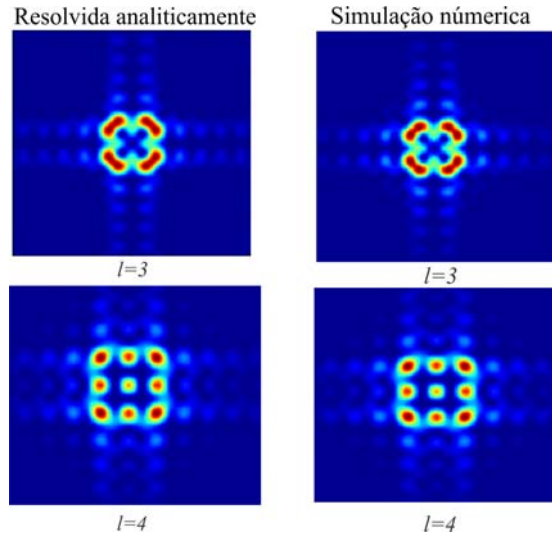
Figura 3.7: Padrões de difração de Fraunhofer com feixe por uma abertura quadrada para $l = 1$ e 2 , resolvidos analítica e numericamente.



Fonte: (Autor, 2011)

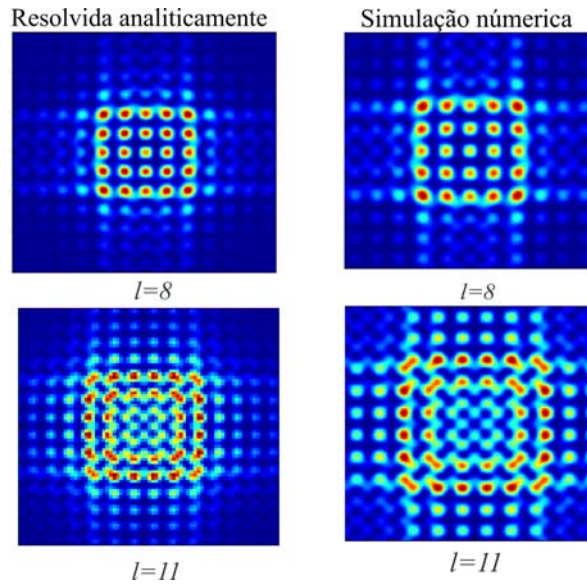
Acreditamos que a resolução das Equações (3.9) e (3.11) não seja suficiente para confirmarmos a forma generalizada da Equação (3.8) que descreve o campo E_l como resolução analítica da difração de Fraunhofer com feixes possuindo MAO por uma abertura quadrada. Por este motivo, resolvemos analiticamente a Equação (3.8) para diversos valores de l , os quais não são expostos aqui em virtude de sua extensa quantidade de contas desnecessárias a esta leitura. Deste modo, apresentaremos somente os padrões de difração dos resultados entre as formas analítica e numéricas, como seguem a partir das Figuras (3.8) e (3.9) abaixo.

Figura 3.8: Padrões de difração de Fraunhofer com feixe por uma abertura quadrada para $l = 3$ e 4, resolvidos analítica e numericamente.



Fonte: (Autor, 2011)

Figura 3.9: Padrões de difração de Fraunhofer com feixe por uma abertura quadrada para $l = 8$ e 11, resolvidos analítica e numericamente.



Fonte: (Autor, 2011)

Ao comparar as intensidades das resoluções analíticas e numéricas através das figuras

acima, encontramos uma semelhança notória entre os padrões de difração obtidos. Assim, acreditamos que a resolução analítica da Equação (3.8) descreve a difração destes padrões de intensidades. As intensidades do campo E_l resolvidos analiticamente são análogas às intensidades dos campos que descrevem a difração de Fraunhofer com feixes possuindo MAO por uma abertura quadrada resolvida de forma numérica, conforme observamos através das figuras acima. Deste modo, apresentamos a resolução da integral (3.5) como a forma generalizada do campo E_l através da Equação (3.8) para valores diferentes de cargas topológicas.

3.3.4 Por que os padrões são truncados?

O truncamento dos padrões de difração em aberturas triangulares e quadradas com feixes possuindo MAO é um aspecto interessante a ser investigado. Podemos utilizar a Equação (3.8) que descreve o campo E_l para feixes com MAO em aberturas quadradas para fazer tal análise.

A análise da formação da rede truncada quadrada será feita através de análise dos padrões de intensidade dos campos E_1 e E_2 dados pelas Equações (3.9) e (3.11). Começaremos nossa análise pelo campo E_1 para $l = 1$ que é descrito pela Equação (3.9). Este campo complexo possui partes real e imaginária que são descritas por um conjunto de quatro funções com dependência em ν_x e ν_y conforme a representação analítica da Equação (3.9). As funções deste campo serão apresentadas a partir de agora por uma notação simplificada dadas a partir da Equação (3.13) até (3.16) com o intuito de simplificar os resultados e facilitar nosso entendimento. Assim, o campo E_1 tem a seguinte forma,

$$E_1(\nu_x, \nu_y) = i f_1(\nu_y) f_2(\nu_x) + f_1(\nu_x) f_2(\nu_y) \quad (3.12)$$

onde as funções

$$f_1(\nu_y) = \frac{\sin(2\pi\nu_y a)}{\pi\nu_y} \quad (3.13)$$

$$f_2(\nu_x) = \frac{2\pi a \nu_x \cos(2\pi \nu_x a) - \sin(2\pi \nu_x a)}{\pi \nu_x^2} \quad (3.14)$$

$$f_1(\nu_x) = -\frac{\sin(2\pi \nu_x a)}{2\pi^2 \nu_x} \quad (3.15)$$

$$f_2(\nu_y) = \frac{2\pi a \nu_y \cos(2\pi \nu_y a) - \sin(2\pi \nu_y a)}{\pi \nu_y^2} \quad (3.16)$$

representam as partes real e imaginária do campo E_1 . Deste modo, a intensidade total do campo E_1 é representada por $I_1 = |E_1|^2 = E_1 * E_1^*$ obtendo a seguinte forma em nossa nomenclatura

$$I_1 = f_1(\nu_y)^2 f_2(\nu_x)^2 + f_1(\nu_x)^2 f_2(\nu_y)^2 \quad (3.17)$$

onde estes quatro termos da Equação (3.17) descrevem a intensidade total do campo E_1 .

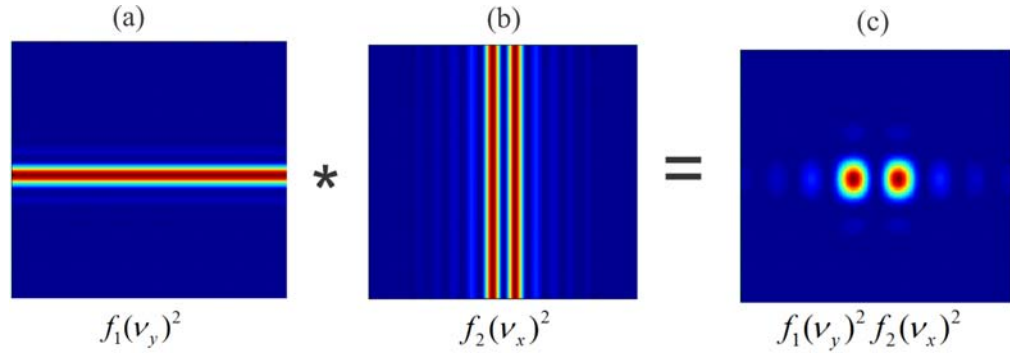
Com a finalidade de encontrar o motivo do truncamento dos padrões, calculamos separadamente as funções acima recompondo o padrão I_1 conforme indicado na Equação (3.17). Assim, chegamos aos seguintes resultados.

A função $f_1(\nu_y)^2$ significa somente uma parte do primeiro termo da função intensidade descrito pela Equação (3.17). A segunda parte deste termo é $f_2(\nu_x)^2$ que possui duas funções distintas em ν_x , conforme a Equação (3.14). Esta função difere em relação à primeira, pois possui duas formas funcionais em ν_x , ao invés de somente uma em ν_y , como mostra a Figura 3.10(b).

O produto das funções $f_1(\nu_y)^2 f_1(\nu_x)^2$ reflete uma parte da intensidade real obtida pelo primeiro termo da Equação (3.17). Podemos conferir isto através da Figura 3.10(c).

Também podemos ver que o truncamento na formação deste padrão dá-se através do produto dessas duas funções $f_1(\nu_y)^2 f_1(\nu_x)^2$. Este produto causa uma eliminação das funções além deste produto, conforme a Figura 3.10(c). Concluimos que este padrão representa a metade do padrão total da intensidade do campo E_1 .

Figura 3.10: Padrões das funções $f_1(\nu_y)^2$ e $f_1(\nu_x)^2$ feitos separadamente e o produto entre eles.



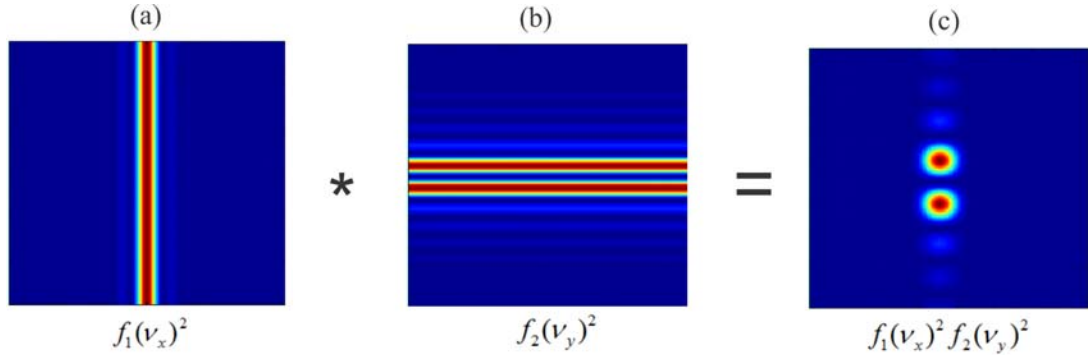
Fonte: (Autor, 2011)

Dando continuidade a análise das funções do campo E_1 prosseguimos para o segundo termo da Equação (3.17). O próximo termo a ser analisado separadamente é $f_1(\nu_x)^2$. Este padrão possui somente uma variação em ν_x , conforme mostra a Figura 3.11(a). A função $f_2(\nu_y)^2$ possui duas variações em ν_y , descritas através da Equação (3.16) e que consequentemente, torna um padrão diferente do padrão obtido anteriormente, conforme mostra a Figura 3.11(b). E por fim, a função obtida pelo produto destas duas funções gera um padrão que representa o segundo termo da Equação (3.17). A Figura 3.11(c) mostra este padrão obtido através do produto entre os quadrados das Equações (3.15) e (3.16).

Percebemos que os padrões do segundo termo da Equação (3.17) seguem a mesma interpretação dos padrões das funções para o primeiro termo da mesma equação, em que ambos os casos as funções descrevem aspectos semelhantes. Estes diferem entre si no que tange as variações em ν_x por ν_y que ocorrem de maneira contrária, gerando assim, padrões análogos mas com uma diferença notável observada através das Figuras (3.10) e (3.11). Percebemos que os padrões destas funções são idênticamente perpendiculares entre si, e juntos formam o padrão de intensidade total obtido através da Equação (3.17) que é

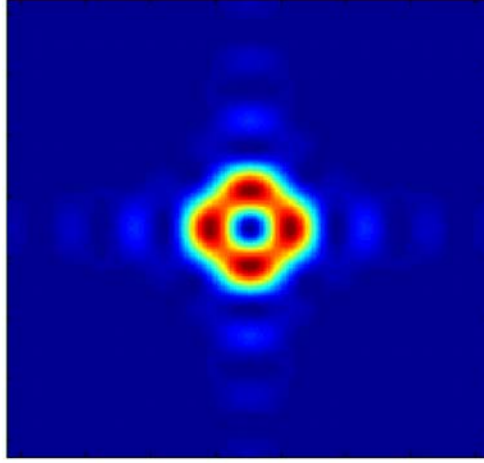
representando através da Figura (3.12).

Figura 3.11: Padrões das funções $f_1(\nu_x)^2$ e $f_2(\nu_y)^2$ feitos separadamente e o produto entre eles.



Fonte: (Autor, 2011)

Portanto, com esta análise podemos realmente conferir os padrões obtidos para cada termo em questão. Verificamos que o primeiro padrão obtido através do termo da Equação (3.17) está representado pela Figura 3.10(c) e que o segundo termo desta equação é representado conforme a Figura 3.11 (c). Assim, confirmamos a definição da Equação (3.17) através da soma destes dois padrões perpendiculares entre si, representa o padrão de intensidade total do campo E_1 representado pela Figura (3.12) abaixo. Este resultado analítico também já foi comparado com o resultado numérico para este mesmo campo E_1 , conforme a Figura (3.7).

Figura 3.12: Padrão de intensidade I_1 resolvido analiticamente.

$$I_1 = f_1(\nu_y)^2 f_2(\nu_x)^2 + f_1(\nu_x)^2 f_2(\nu_y)^2$$

Fonte: (Autor, 2011)

Vamos agora calcular o padrão de intensidade do campo para $l = 2$ onde o campo E_2 é representado através da Equação (3.11). A análise deste campo será feita de forma análoga a anterior, onde analisaremos os padrões de cada função separadamente. Assim, para tal fim, tivemos que calcular analiticamente os padrões das funções termo a termo a fim de confirmar nossa hipótese sobre a análise do campo E_1 . Também fizemos uso de uma notação para simplificar os termos do campo E_2 pois estes são maiores em número e em tamanho em relação à E_1 , assim representaremos a Equação (3.11) da seguinte forma,

$$E_2(\nu_x, \nu_y) = f_1(\nu_y)f_3(\nu_x) - 2if_2(\nu_x)f_2(\nu_y) - f_1(\nu_x)f_3(\nu_y) \quad (3.18)$$

onde os termos em questão são descritos por,

$$f_1(\nu_y) = \frac{\sin(2\pi\nu_y a)}{\pi\nu_y} \quad (3.19)$$

$$f_1(\nu_x) = \frac{\sin(2\pi\nu_x a)}{\pi\nu_x} \quad (3.20)$$

$$f_2(\nu_x) = \frac{2a \cos(2\pi\nu_x a)}{\nu_x} - \frac{\sin(2\pi\nu_x a)}{\pi\nu_x^2} \quad (3.21)$$

$$f_2(\nu_y) = \frac{2a \cos(2\pi\nu_y a)}{\nu_y} - \frac{\sin(2\pi\nu_y a)}{\pi\nu_y^2} \quad (3.22)$$

$$f_3(\nu_x) = \frac{4\pi a^2 \sin(2\pi\nu_x a)}{\nu_x} + \frac{4a \cos(2\pi\nu_x a)}{\nu_x^2} - \frac{2 \sin(2\pi\nu_x a)}{\pi\nu_x^3} \quad (3.23)$$

$$f_3(\nu_y) = \frac{4\pi a^2 \sin(2\pi\nu_y a)}{\nu_y} + \frac{4a \cos(2\pi\nu_y a)}{\nu_y^2} - \frac{2 \sin(2\pi\nu_y a)}{\pi\nu_y^3} \quad (3.24)$$

Deste modo, a intensidade do campo E_2 com a notação acima terá a seguinte forma

$$I_2 = |E_2|^2 = f_1(\nu_y)^2 f_3(\nu_x)^2 - 2f_1(\nu_y) f_3(\nu_x) f_1(\nu_x) f_3(\nu_y) + f_1(\nu_x)^2 f_3(\nu_y)^2 + 4f_2(\nu_x)^2 f_2(\nu_y)^2 \quad (3.25)$$

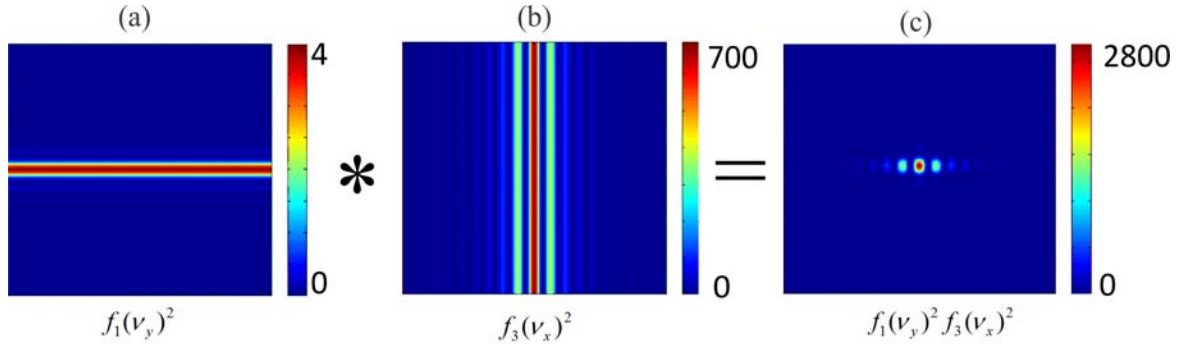
A função intensidade do campo E_2 possui quatro termos que, juntos representam a intensidade do padrão de intensidade I_2 . Analisaremos os padrões de cada função de forma análoga a anterior, sendo feita de padrão a padrão, e logo em seguida com a soma dos padrões para confirmação do padrão total.

O primeiro termo da função intensidade do campo E_2 é composto do produto dos quadrados de duas funções, a saber, $f_1(\nu_y)^2 f_3(\nu_x)^2$. Nos gráficos do campo E_1 não utilizamos a indicação do grau de intensidade do campo através da função barra de valores, mas a partir de agora utilizaremos desta ferramenta para analisarmos o valor real de cada intensidade do padrão.

Iniciaremos esta análise com o padrão de quantidade da função $f_1(\nu_y)$ ilustrado na Figura 3.13(a). Este padrão é similar aos padrões obtidos anteriormente, pois trata-se de uma função descrita pela Equação (3.19). A função $f_3(\nu_x)$ é exibida através da Equação (3.23) cujo padrão é descrito pela Figura 3.13(b). Podemos ver através da barra de valores que estes dois padrões diferem bastante em valor entre seus padrões. Esta diferença no valor da quantidade é percebida através da Equação (3.23) que exhibe termos multiplicados à funções desta equação. O produto de $f_1(\nu_y)^2$ com $f_3(\nu_x)^2$ gera um padrão descrito pela Figura 3.13(c) que representa o primeiro termo da intensidade total do campo E_2 . E de

forma análoga ao campo E_1 , encontramos uma forma de truncamento no padrão devido ao produto destas duas funções acima citadas.

Figura 3.13: **Padrões das funções $f_1(\nu_y)$ e $f_3(\nu_x)$ feitos separadamente e o produto entre eles.**

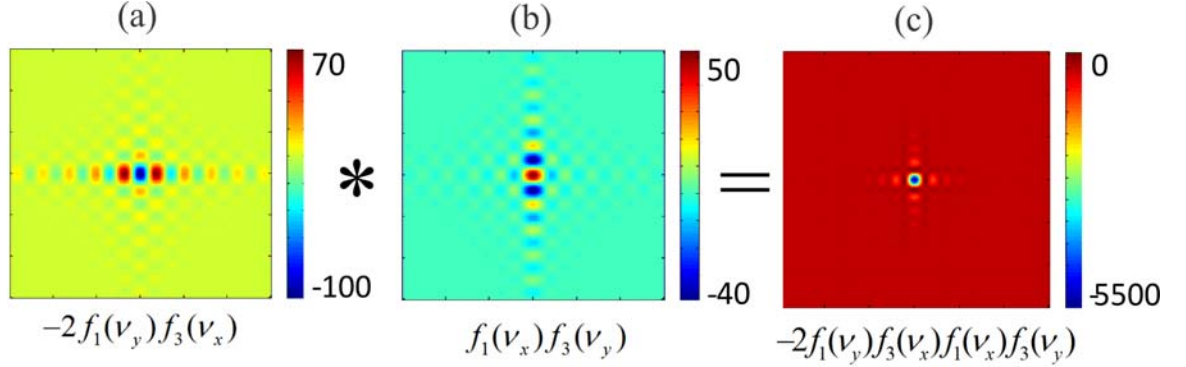


Fonte: (Autor, 2011)

O segundo termo da Equação (3.25) que é representado pelo produto das funções descritas pelas Equações (3.19), (3.20), (3.23) e (3.24) indicam a segunda parte da intensidade total do campo E_2 . O primeiro padrão a ser analisado refere-se ao termo $-2f_1(\nu_y)f_3(\nu_x)$ que tem a seguinte Figura 3.14(a) como padrão. A partir de agora podemos observar através da barra de valores que alguns padrões em diante exibem um valor negativo.

Já o segundo produto indicado por $f_1(\nu_x)f_3(\nu_y)$ representa o próximo padrão a ser analisado, conforme mostra a Figura 3.14(b). Não há nada de novidade neste padrão, pois ele permeia entre os modelos anteriores. Seguindo nossa linha de análise, o próximo padrão é apresentado através da Figura 3.14(c) que foi obtido através do produto entre as funções anteriores. Este padrão ostenta um valor negativo bastante acentuado, como revela a barra de valores. Veremos futuramente que o aparecimento deste padrão resulta consideravelmente no truncamento do padrão, pois este valor será superposto com outros padrões no mesmo ponto.

Figura 3.14: Padrões das funções $-2f_1(\nu_y)f_3(\nu_x)$ e $f_1(\nu_x)f_3(\nu_y)$ feitos separadamente e o produto entre eles.

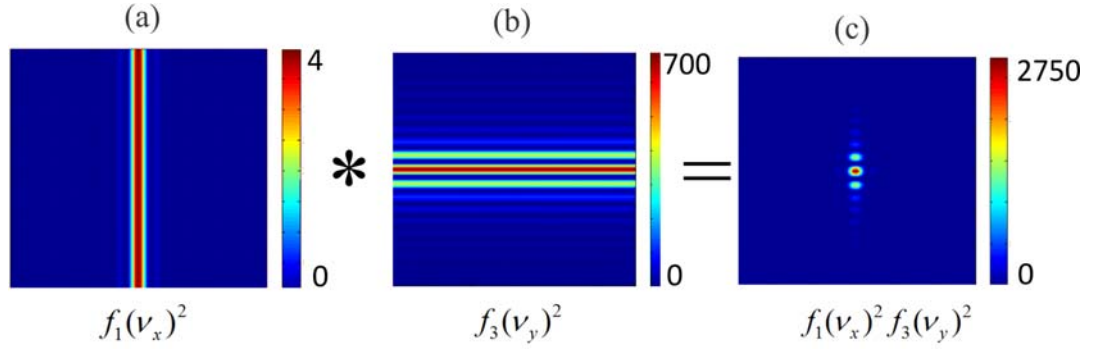


Fonte: (Autor, 2011)

O terceiro termo da Equação (3.25) que é representado através do produto das funções $f_1(\nu_x)^2 f_3(\nu_y)^2$ será o próximo padrão a ser analisado. Prosseguimos nossa análise com o padrão da função $f_1(\nu_x)^2$ mostrado através da Figura 3.15(a). Este padrão contém características similares aos padrões obtidos anteriormente, pois trata-se de uma função descrita pela Equação (3.20). A Equação (3.24) exibe a função $f_3(\nu_y)$ cujo padrão há 3 formas funcionais em ν_y seguidas de termos multiplicativos conforme é descrito pela Figura 3.15(b).

Por este motivo, a barra de valores deste padrão descreve um valor consideravelmente superior em relação ao padrão da função $f_1(\nu_x)$. O próximo padrão será o produto de $f_1(\nu_y)^2$ com $f_3(\nu_x)^2$ gerando um padrão descrito pela Figura 3.15(c). Este padrão representa o terceiro termo da intensidade total do campo E_2 , e que de forma análoga ao padrão de intensidade da Figura 3.13(c) também aborda uma forma de truncamento no padrão devido ao produto destas duas funções acima citadas.

Figura 3.15: Padrões das funções $f_1(\nu_x)^2$ e $f_3(\nu_y)^2$ feitos separadamente e o produto entre eles.

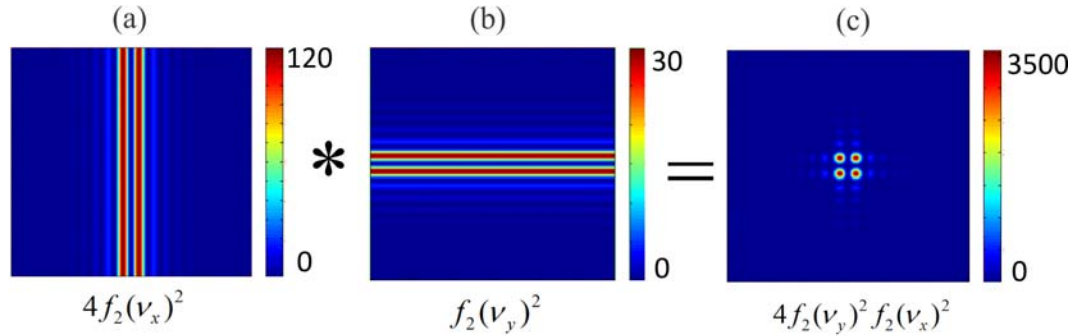


Fonte: (Autor, 2011)

O quarto e último padrão parcial do campo E_2 é composto do produto das funções $4f_2(\nu_x)^2 f_2(\nu_y)^2$. A primeira parte deste padrão a ser analisado é referente ao termo $4f_2(\nu_x)^2$ que é ilustrado através da Figura 3.16(a). Conferimos neste padrão a existência de duas formas funcionais em ν_x que corroboram com a Equação (3.21). O segundo padrão da função $f_2(\nu_y)^2$ possui duas formas funcionais em ν_y que são indicadas através da Figura 3.16(b) que também confirmam a veracidade da Equação (3.22). E por fim, o último padrão que é descrito pelo produto entre as funções $4f_2(\nu_x)^2 f_2(\nu_y)^2$ tem como representação a Figura 3.16(c).

Não é de admirar que nesta figura também observaríamos um truncamento do padrão através do produto dessas funções, e que de forma análoga aos padrões de intensidade estudados anteriormente, este também sofreria uma forma de truncamento no padrão.

Figura 3.16: Padrões das funções $4f_2(\nu_x)^2$ e $f_2(\nu_y)^2$ feitos separadamente e o produto entre eles.



Fonte: (Autor, 2011)

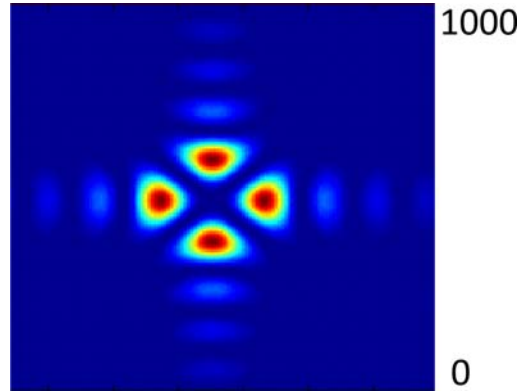
Percebemos que este padrão de intensidade é o principal responsável pela formação da rede truncada quadrada. Isto pode ser analisado através da soma entre os padrões descritos pelas Figuras 3.13(c) e 3.15(c) que juntos somam um valor que é adicionado ao valor do padrão apresentado pela Figura 3.14(c), valor este que é nulo. A comprovação da soma destes padrões é feita pela própria Equação (3.25) que descreve a intensidade do campo E_2 .

Conclusivamente, vamos apresentar o padrão de intensidade do campo E_2 através do cálculo analítico que é representado pela Equação (3.25). A Figura (3.18) apresenta a soma de todos os padrões parciais já anteriormente calculados dos quais estão todos superpostos na mesma figura em questão.

Ao comparar as Figuras 3.16(c) e (3.18) percebemos uma pequena diferença entre estes padrões de intensidade. O padrão da Figura 3.16(c) apresenta um formato exclusivamente redondo dos picos de intensidades do padrão, diferindo então do padrão de intensidade total I_2 exibido pela Figura (3.18). Por isso calculamos a soma dos três primeiros termos da Equação (3.25) que causam essa diferença entre os padrões. Diferença essa feita com a soma dos três primeiros padrões obtidos através das Figuras 3.13(c), 3.14(c) e 3.15(c),

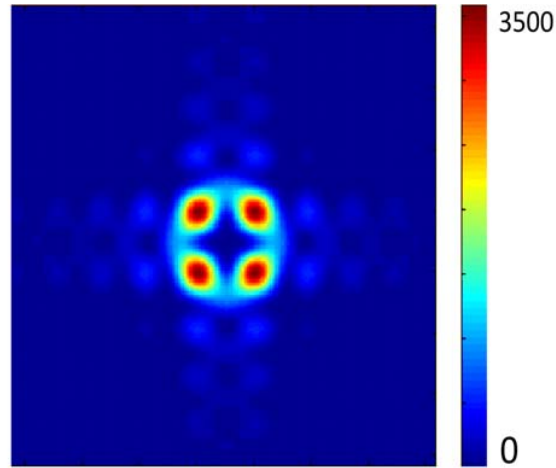
obtendo a seguinte Figura (3.17) como resposta.

Figura 3.17: Padrão das funções obtido através da soma dos três primeiros padrões parciais da intensidade I_2 .



Fonte: (Autor, 2011)

Assim, podemos ver através que este padrão de intensidade adicionado ao padrão de intensidade da Figura 3.16(c) gera o padrão total do campo E_2 . Este padrão de intensidade total I_2 está na Figura (3.18) abordando a soma de todos os padrões de intensidade parciais calculados anteriormente. O resultado analítico deste padrão corrobora o resultado numérico do padrão de intensidade. Comparação esta que já foi apresentada na Figura (3.7).

Figura 3.18: Padrão de intensidade I_2 resolvido analiticamente.

$$I_2 = f_1(v_y)^2 f_3(v_x)^2 - 2f_1(v_y)f_3(v_x)f_1(v_x)f_3(v_y) \\ + f_1(v_x)^2 f_3(v_y)^2 + 4f_2(v_x)^2 f_2(v_y)^2$$

Fonte: (Autor, 2011)

Outra forma de explicar o truncamento dos padrões é feita através da análise do padrão de intensidade. Esta se baseia na decomposição da abertura quadrada em quatro fendas simples, que conseqüentemente, fornecerá padrões similares encontrados na referência [29]. Isto será apresentado na próxima seção.

3.3.5 Decomposição dos padrões de intensidade

Os resultados experimentais mostrados na Figura (3.5) podem ser obtidos a partir da soma das contribuições de fendas simples e duplas, um resultado em que, na ótica quântica é conhecida como a regra de Born [32]. Nós associamos como uma fenda cada canto do quadrado. Note que ambos; cantos e fendas laterais do quadrado tem configurações muito similares nos padrões de difração. A Figura (3.19) mostra estes padrões de difração para todas as combinações com $l = 2, 3, 4, 5$ e 6 .

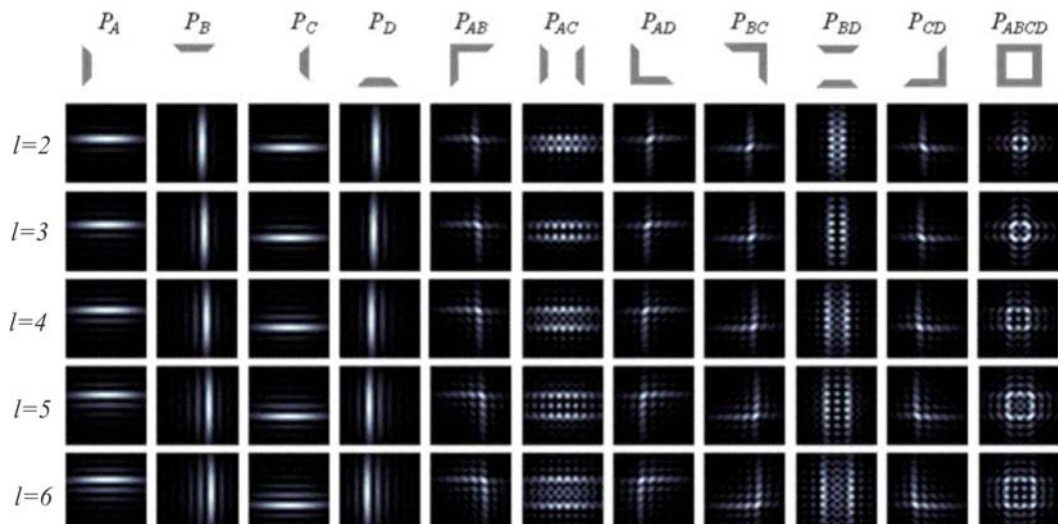
O padrão total P_{ABCD} é obtido através da soma dos seguintes padrões [32]:

$$P_{ABCD} = P_{AB} + P_{AC} + P_{AD} + P_{BC} + P_{BD} - 2P_A - 2P_B - 2P_C - 2P_D \quad (3.26)$$

onde A, B, C e D representam cada fenda do quadrado e P_i e P_{ij} , para $i, j = A, B, C, D$ representam os padrões devido cada fenda ortogonal e cada par de fendas paralelas, respectivamente. Os padrões P_i associados com a fenda simples, mostram que quando l aumenta, o número de franjas também aumenta e todos os padrões são alterados [29].

No entanto, os padrões P_{ij} dos pares de fenda exibem diferentes comportamentos. Para a configuração das fendas ortogonais podemos ver que os padrões constam de picos de intensidade e onde o número destes picos aumenta com o aumento do valor de l . Em contraste, para a configuração de fendas paralelas podemos ver que existem dois tipos de padrões, um para valores pares de l e outro padrão para valores ímpares de l . Esta observação indica que os padrões P_{AC} e P_{BD} obedecem à uma importante regra no processo de formação da rede ótica de intensidades que são dependentes da paridade de l .

Figura 3.19: Padrões de difração produzidos por combinações de fendas. Cada combinação de fenda é mostrada no topo de cada padrão [32]



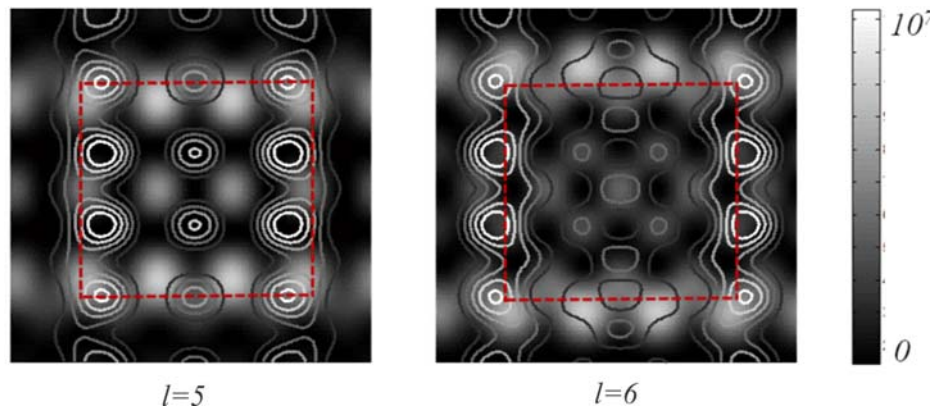
Fonte: (Autor, 2011)

Na Figura (3.20) superpomos os padrões de intensidade P_{AC} e P_{BD} para $l = 5$ e $l = 6$. No primeiro caso, observamos que os picos de intensidade não se combinam. No entanto, para $l = 6$ os picos no centro de cada padrão coincidem. Este padrão produz uma rede ótica de intensidade para valores de l quando todas as contribuições de todos os padrões são levados em conta.

Note que para os casos em que os padrões de intensidade P_{AC} e P_{BD} se combinam no centro, a fase correspondente da rede quadrada ótica de intensidade é similar à mostrada na Figura 3.3(b).

Outro argumento que consiste na explicação do truncamento dos padrões está na análise dos padrões de intensidade. Se fizermos uso da regra de Born [32], através do uso da Equação (3.26) que descreve o padrão de intensidade, veremos que o padrão de intensidade total é composto de vários padrões de intensidades de fendas simples e fendas ortogonais, gerando assim o padrão usual de difração.

Figura 3.20: **Padrões de intensidade superpostos das combinações das fendas laterais P_{AC} e P_{BD} para $l = 5$ e $l = 6$ [42].**

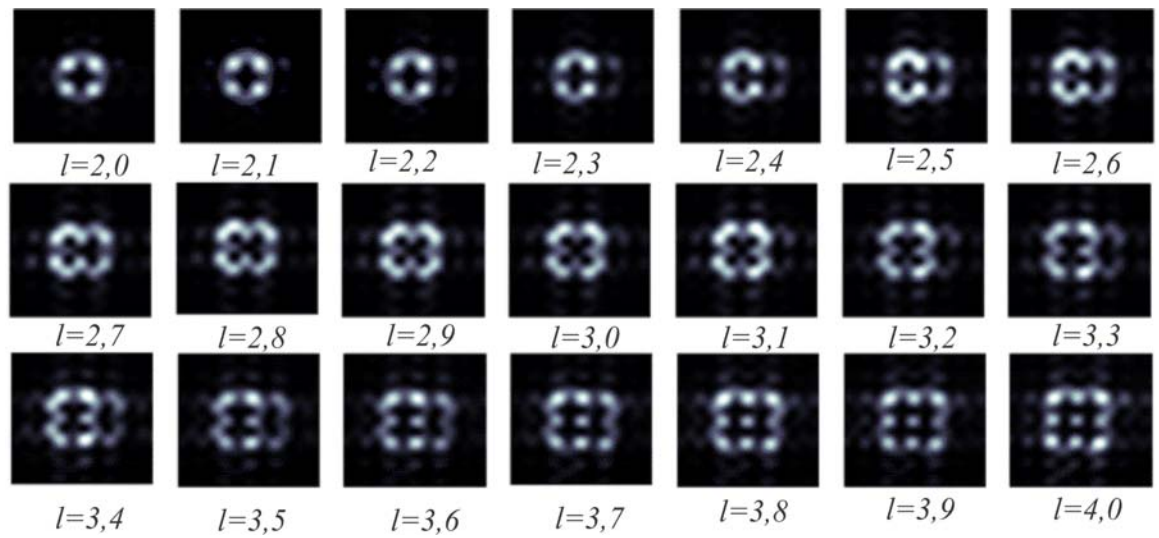


Fonte: (Autor, 2011)

Finalmente analisamos a evolução do padrão para o perfil azimuthal $r^l e^{il\phi}$ para CT fracionárias. Este fato deu-se através de acréscimos fracionais de l de 0,1 adicionados a

cada padrão de intensidade. Um feixe com perfil azimuthal tem uma boa aproximação com um feixe LG pois ambos possuem o mesmo comportamento na fenda quadrada. Os painéis mostrados na Figura (3.21) refletem os resultados de tais simulações de padrões de carga topológica fracionária. Estes padrões deixam evidentes que existe uma transição contínua entre as duas redes óticas que correspondem a dois valores inteiros consecutivos de l , e não existe nenhuma rede intermediária entre eles para qualquer CT fracionária.

Figura 3.21: Padrão de difração correspondente a resultados experimentais para cargas topológicas fracionárias [42].



Fonte: (Autor, 2011)

3.4 Conclusões

Estudamos a difração de Fraunhofer de feixes LG a partir de uma abertura quadrada. Propomos uma solução analítica para este padrão de difração em diferentes valores de cargas topológicas. Comparamos os resultados analíticos e numéricos com o intuito de ratificar veracidade da solução analítica para estes tipos de padrões. Ao comparar estes padrões notamos uma semelhança notória entre os padrões obtidos analítica e numerica-

mente, o que nos leva a concluir que essa solução analítica é satisfeita para descrever os padrões de feixes possuindo MAO por uma abertura quadrada.

Encontramos o motivo do truncamento dos padrões de difração com feixes possuindo MAO. Esta análise foi feita através da comparação dos padrões de intensidade obtidos analiticamente.

Concluimos que o truncamento dos padrões deve-se principalmente a dois fatores. O primeiro deles é comprovação do truncamento através do produto entre as funções que descrevem o padrão. O outro motivo foi percebido através da nossa análise ao comparar os valores de intensidade e concluir que eles se cancelam mutuamente. Ainda utilizamos a decomposição dos padrões de intensidade para explicar este assunto.

Com relação à formação da rede truncada quadrada, observamos que para valores pares de cargas topológicas existe uma formação de uma rede ótica truncada quadrada de intensidade que é composta de um conjunto de picos de intensidade rotacionalmente simétricos. Por outro lado, o padrão resultante não é bem definido para valores ímpares de carga topológica. Para entender essa formação de padrão de difração, nos concentramos separadamente nas fendas ortogonais e laterais da abertura quadrada, e não na abertura quadrada.

Como a interferência vem aos pares, seguindo a regra de Born de que os padrões de difração da fenda quadrada são decompostos em padrões que se originam a partir de cada fenda ortogonal e um par de fendas laterais. Descobrimos que os padrões que resultam de configurações das fendas paralelas é que são responsáveis por dois diferentes tipos de padrões: um para ímpar e outro para valor par de carga topológica.

Em contraste com o caso de valores ímpares da carga topológica, para valores pares de carga topológica existe uma boa correspondência entre a intensidade máxima no centro do padrão. Isso se reflete na formação de uma rede ótica truncada quadrada de intensidade.

Finalmente, usamos argumentos intuitivos na observação da existência de uma tran-

sição contínua entre as duas redes óticas que correspondem a dois valores consecutivos de valores de l , e não existe nenhuma rede intermediária entre eles.

4 Conclusão geral

Iniciamos nosso estudo abordando o momento angular da orbital. Mostramos que um feixe de luz que possui MAO tem uma fase azimutal da forma $\exp(il\phi)$, onde esta fase é responsável pela frente de onda helicoidal para $l \neq 0$. O índice azimutal ou carga topológica do feixe é representado por l . Comprovamos através da seção 1.2 dessa dissertação que o MAO está associado à fase azimutal do feixe.

Em seguida apresentamos os feixes Laguerre-Gauss juntamente os gráficos da fase e o perfil de fase desses feixes para a comprovação da existência da singularidade de fase nos feixes com MAO em diferentes valores de l .

Prosseguimos este capítulo abordando a ótica de Fourier que trata da teoria de difração, transformada de Fourier, a teoria de difração no limite de Fraunhofer. E por fim apresentamos uma breve síntese sobre holografia com o intuito de mostrar como é feito o registro e a reconstrução de ondas óticas.

No segundo capítulo apresentamos resumidamente as conclusões dos trabalhos com padrões de difração de Fraunhofer utilizando feixes possuindo MAO em diversos tipos de aberturas. Foram estudados os padrões de difração com feixes possuindo MAO nas fendas simples, dupla e triangular para diferentes valores de cargas topológicas.

Inicialmente foi estudado o padrão de interferência da fenda dupla. Foi identificado no padrão de difração neste tipo de abertura uma interferência em razão da diferença de cam-

inho em adição à contribuição de fase devido à estrutura da frente de onda, ocasionando assim uma mudança no padrão usual de fenda dupla.

No entanto, quando um feixe com vórtice ótico passa através de uma fenda vertical simples, foi verificado um padrão de difração de tal maneira que o núcleo central do padrão contém uma rachadura inclinada, onde essa inclinação depende do sinal de l . E as franjas próximas ao centro sofrem uma inclinação de acordo com a inclinação da rachadura que é provocada pela singularidade de fase existente nesses feixes.

Foi apresentado a existência de uma mudança na direção de inclinação devido a mudança no sinal da carga topológica para $l = 1$ e $l = -1$. Assim, esta inclinação das franjas no padrão de difração pode ser usado para obter o valor e o sinal da carga topológica. Este método, no entanto, não pode ser usado efetivamente para a medição dos valores inteiros grandes de carga topológica.

Já na fenda triangular foi observado no plano do campo distante uma rede truncada triangular para cada valor de carga topológica l , sendo esta rede feita de máximos de intensidade, onde a quantidade desses máximos de intensidade são proporcionais a l . Até o momento, esta técnica é a mais viável e eficiente para se obter o sinal e magnitude da carga topológica de feixes com MAO.

Foi apresentado que o processo de análise do MAO neste tipo de abertura está diretamente relacionado com os pontos externos da rede que forma o triângulo. A carga topológica total do feixe é dada por $l = N - 1$, onde N é o número de pontos de qualquer lado externo do triângulo.

Hickmann e colaboradores também verificaram que a mudança do sinal da carga topológica gera uma rotação de 180° no padrão de difração triangular, tornando assim, este padrão na direção oposta ao anterior, conforme o sinal da carga topológica atribuída. Assim, o sinal da carga topológica era determinado através da comparação destes padrões.

Logo em seguida vimos novamente o padrão de difração da fenda simples com feixes

possuindo MAO, mas agora no regime de Fourier. Este padrão de difração é análogo ao padrão da fenda dupla de Young usando feixes sem MAO devido à forma anelar do feixe LG na fenda simples. No entanto, também foi verificado que a fase azimutal presente em tais feixes determinam a formação e a simetria das franjas de interferência. A posição de máximos e mínimos dos padrões de interferência podem ser controlados pela mudança da quantidade de MAO.

Deste modo, verificamos que os padrões de difração obtidos no regime de Fourier feitos por Ferreira e colaboradores [29] apresentaram uma diferença entre os padrões de difração obtidos fora do regime de Fourier feitos por Ghai e colaboradores [19]. No regime de Fourier encontramos padrões típicos da fenda dupla que são formados mediante a singularidade de fase no centro de tais feixes, que de certa forma atua como a área de bloqueio semelhante a área da distância da fenda dupla. E no segundo caso temos um aparecimento de uma singularidade de fase no centro do padrão gerando assim uma quebra no perfil de intensidade.

Já no terceiro capítulo, estudamos a difração de Fraunhofer de feixes LG a partir de uma abertura quadrada.

Propomos uma solução analítica para este padrão de difração em diferentes valores de cargas topológicas. Comparamos os resultados analíticos e numéricos da solução analítica para estes tipos de padrões. Comparamos os padrões e notamos uma semelhança notória entre os resultados dos padrões obtidos analítica e numericamente, o que nos leva a concluir que essa solução analítica é apta para descrever os padrões de feixes possuindo MAO por uma abertura quadrada.

Encontramos o motivo do truncamento dos padrões de difração com feixes possuindo MAO. Esta análise foi feita através da visualização e comparação dos padrões de intensidade obtidos analiticamente.

Concluimos que o truncamento dos padrões devem-se principalmente a dois fatores.

O primeiro deles é comprovação do truncamento através do produto entre as funções que descrevem o padrão. O outro motivo foi percebido através da nossa análise ao comparar os valores de intensidade e concluir que eles se cancelam mutuamente.

Em relação a formação da rede truncada quadrada, observamos que para valores pares de cargas topológicas existe uma formação de uma rede ótica truncada quadrada de intensidade que é composta de um conjunto de picos de intensidade rotacionalmente simétricos. Por outro lado, não formação de rede bem definida para valores ímpares de carga topológica. Para entender essa formação de padrão de difração, nos concentramos separadamente nas fendas ortogonais e laterais da abertura quadrada, e não na abertura quadrada.

Como a interferência vem aos pares, seguindo a regra de Born, que os padrões de difração da fenda quadrada são decompostos em padrões que se originam a partir de cada fenda ortogonal e um par de fendas laterais. Descobrimos que os padrões que resultam de configurações das fendas paralelas é que são responsáveis por dois diferentes tipos de padrões: um para ímpar e outro para valor par de carga topológica.

Em contraste com o caso de valores ímpares da carga topológica, para valores pares de carga topológica existe uma boa correspondência entre a intensidade máxima no centro do padrão. Isso se reflete na formação de uma rede ótica truncada quadrada de intensidade.

Também usamos argumentos intuitivos para mostrar que existe uma transição contínua entre as duas redes óticas que correspondem a dois valores consecutivos de valores de l , e não existe nenhuma rede intermediária entre eles.

E por fim, concluímos que a difração por uma abertura quadrada não é o método mais adequado para a medição da carga topológica quanto a abertura triangular

Apêndice A

Formação e utilização de hologramas

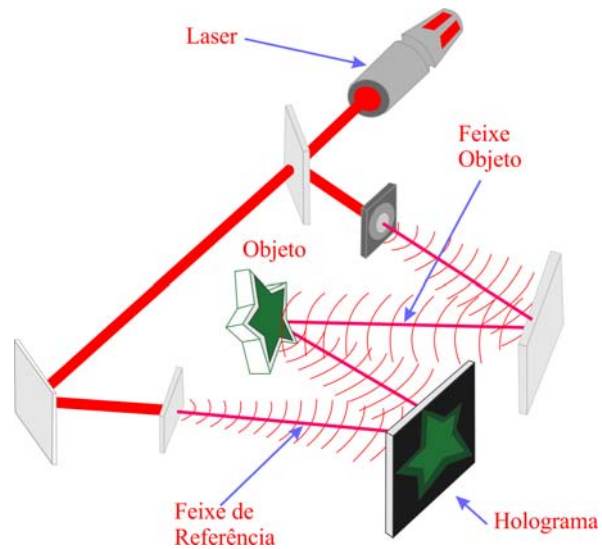
Como já introduzimos uma breve abordagem sobre holografia no segundo capítulo dessa dissertação, agora vamos tratar alguns métodos de como gerar hologramas. Basicamente existem dois tipos de holografia, a saber: a clássica e a computacional. A diferença entre a holografia clássica e a holografia computacional está no método da construção do holograma especificamente. No caso da holografia clássica, as frentes de onda são registradas em um holograma utilizando a interferência como processo de gravação, onde podemos ver conforme mostra a Figura (A.1).

Já no segundo caso, o registro das frentes de onda são feitas por meio de técnicas computacionais através do uso do modulador espacial de luz (SLM - Spatial Light Modulator) que desempenha o processo de construção do holograma, através da leitura de campos arbitrários criados pelo meio da técnica computacional através dos "computer generated holograms", conforme a Figura (A.2). Em ambos processos, a reconstrução óptica das ondas gravadas é obtida pela difração da luz que é feita através da interferência das ondas objeto e referência já citadas no capítulo anterior.

Atualmente, uma das formas mais viáveis para gerar hologramas é o da técnica computacional, onde utilizamos o SLM, que é um dispositivo que impõe uma variação na modulação espacial de fase e a amplitude do feixe. A vantagem do SLM é ter a possibilidade de controlar dinamicamente a amplitude e a fase ou mesmo, os estados de polarização

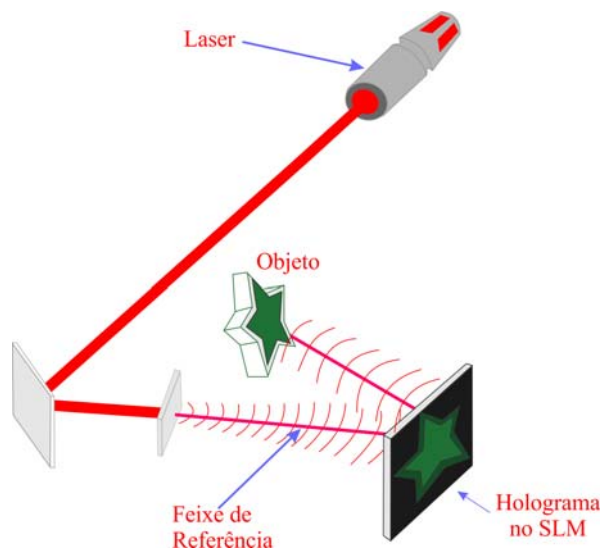
da luz [41].

Figura A.1: Holograma gerado pela interferência da onda referência com a onda objeto.



Fonte: (Autor, 2011)

Figura A.2: Holograma gerado por um SLM.



Fonte: (Autor, 2011)

A produção de campos óticos escalares complexos com amplitudes e fases espaciais moduladas que são especificadas independentemente umas das outras é uma tarefa importante na ótica contemporânea. Um método prático e versátil para a criação destes campos arbitrários complexos é baseado no uso do “computer generated holograms – CHG’s” [36] - [38].

Em particular, o uso do CHG da referência [39] é especificamente conveniente, porque sua eficiência é relativamente alta e possui alta qualidade [40] em relação ao uso da holografia clássica [33] - [35].

Quando um SML utiliza um CGH na reconstrução do holograma, a qualidade na reconstrução do campo pode ser seriamente afetada por ruídos originados pela contribuição de alta ordem de difração do campo. Por este motivo existem vários tipos de fases de CHGs que codificam campos complexos escalares arbitrários [39].

Uma boa tarefa destes CGH’s é possibilitar uma significativa redução na intensidade relativa da difração de alta-ordem da contribuição do campo que compartilha domínios das frequências espaciais do campo codificado.

Um dos propostos hologramas citados na referência [39] pode ser executado com a fase do SLM que fornece uma redução no tamanho da fase de quase π rad. Nosso proposito é gerar campos óticos arbitrários complexos cujas modulações espaciais de amplitude e fase fossem especificadas independentemente. Este campo complexo pode ser expresso como

$$s(x, y) = a(x, y) \exp[i\phi(x, y)] \quad (\text{A.1})$$

onde a amplitude $a(x, y)$ e a fase $\phi(x, y)$ tomam valores nos intervalos $[0, 1]$ e $[-\pi, \pi]$, respectivamente.

Os valores da amplitude complexa da função $s(x, y)$ pertencem a um conjunto de números complexos com módulos iguais ou menores que um. Nosso objetivo é codificar um campo complexo $s(x, y)$ por meio de uma fase da transmitância CGH. A fase da trans-

mitância do CGH é expressa como uma função explícita dependente de uma amplitude $a(x, y)$ e fase do campo codificado $s(x, y)$, onde é dado por

$$h(x, y) = \exp[i\psi(a, \phi)] \quad (\text{A.2})$$

onde $\psi(a, \phi)$ é a fase de modulação do CGH. A dependência explícita da amplitude e fase nas coordenadas espaciais (x, y) tem sido omitidas na Equação (A.2).

Nosso propósito é determinar funções com fase da forma na Equação (A.2) que fornecem um código do campo complexo $s(x, y)$. Um proveitoso método para determinar formas apropriadas da fase da modulação do holograma está baseada na representação de $h(x, y)$ como um série de Fourier no domínio de ϕ . Desenvolvendo esta série de Fourier, a transmitância pode ser expressa como

$$h(x, y) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} h_q(x, y) \quad (\text{A.3})$$

onde

$$h_q(x, y) = c_q^a \exp(iq\phi) \quad (\text{A.4})$$

e

$$c_q^a = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i\psi(\phi, a)] \exp[-iq\phi] d\phi \quad (\text{A.5})$$

Na Equação (A.5) nota-se que após a integração na variável ϕ , os coeficientes c_q^a permanecem explicitamente dependentes da amplitude a . Portanto, os coeficientes c_q^a são implicitamente dependentes das coordenadas (x, y) . O sinal do campo $s(x, y)$ é descoberto da primeira ordem do termo $h_1(x, y)$ na série de Fourier conforme a Equação (A.3) se a identidade,

$$c_1^a = Aa \quad (\text{A.6})$$

é satisfeita para A sendo uma constante positiva. E esta identidade é referida como a condição do sinal codificado. Uma condição suficiente e necessária para satisfazer a

Equação (A.6) são dadas pelas seguintes equações:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin[\psi(\phi, a) - \phi] d\phi = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos[\psi(\phi, a) - \phi] d\phi = 2\pi Aa \quad (\text{A.8})$$

As Equações (A.7) e (A.8) fornecem uma base útil para a determinação de apropriados CGHs. As funções da fase $\psi(\phi, a)$ que obedecem estas equações definem uma classe específica de fases de CGHs. Notamos que o máximo da integral na Equação (A.8) é 2π . Deste modo, o máximo valor possível da constante A na condição de codificação através da Equação (A.6) é 1. Este resultado fornece um limite para a eficiência dos CGHs que pertencem a esta classe de hologramas [39].

Focamos nossa atenção nas funções da fase $\psi(\phi, a)$ com simetria ímpar na variável ϕ . A simetria de tais funções asseguram que a Equação (A.7) será satisfeita.

Faremos uso de somente um destes CGHs em nossa pesquisa através do uso do SLM. Usamos a fase do CGH que é essencialmente equivalente ao holograma sintético já encontrado na literatura ótica [33]. A fase de modulação deste holograma pode ser expresso da seguinte forma

$$\psi(\phi, a) = f(a)\phi \quad (\text{A.9})$$

onde o fator $f(a)$ permanece indeterminado no momento. O coeficiente enésimo q da série de Fourier para este CGH calculado com a Equação (A.5) é

$$c_q^a = \text{sinc}[q - f(a)] \quad (\text{A.10})$$

onde a função sinc é representada através da forma

$$\text{sinc}(\xi) = (\pi\xi)^{-1} \sin(\pi\xi)$$

Se $f(a)$ é obtida através da relação

$$\text{sinc}[1 - f(a)] = a, \quad (\text{A.11})$$

então a condição de codificação na Equação (A.6) é satisfeita com o valor de $A = 1$. Para uma completa definição da fase do CGH, a função $f(a)$ é numericamente invertida da Equação (A.11) para

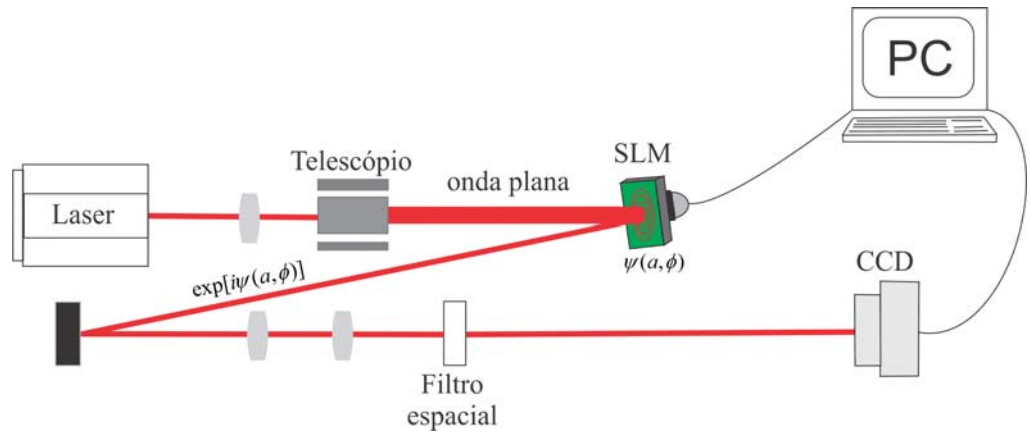
$$f(a) = 1 - \text{sinc}^{-1}(a) \quad (\text{A.12})$$

Assim, como temos o valor de $f(a)$, agora podemos calcular o campo codificado $h(x, y)$ e substituí-lo na Equação (A.2) que expressa a amplitude e a fase do campo codificado, onde torna-se então

$$h(x, y) = \exp[i\psi(a, \phi)] = \exp[if(a)\phi] \quad (\text{A.13})$$

A Figura (A.3) descreve um feixe gaussiano viajando na direção z que passa por um telescópio transformando o feixe em uma onda plana de fase constante que incide sobre o SLM que contém um código holográfico com a modulação de fase $\psi(a, \phi)$. Este feixe possui uma fase da forma $\exp[i\psi(a, \phi)]$ que incide um espelho e se propaga ao encontro da lente que executa a transformada de Fourier do campo e logo em seguida encontra um filtro espacial para a filtragem do termo exigido a ser detectado por uma câmera CCD (Charge-Coupled Device) conectada a um computador.

Figura A.3: Arranjo experimental com o SLM.



Fonte: (Autor, 2011)

Bibliografia

- [1] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics (New York, 1962).
- [2] R. A. Beth, Phys. Rev. 50, 115 (1936).
- [3] L. Allen, M.W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, and J.P.Woerdman. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. Phys. Rev. A 45, 8185-8189 (1992).
- [4] G. Molina-Terriza, J. P. Torres, and L. Torner. Twisted photons. Nature Physics 3, 305-310 (2007).
- [5] J. P. Torres, Y. Deyanova, L. Torner and G.Molina-Terriza. Preparation of engineered two-photon entangled states for multidimensional quantum information. Phys. Rev. A. 67, 052313 (2003).
- [6] W. C. S. Silva. Representação geométrica de feixes não difratantes possuindo momento angular orbital. UFAL, tese de mestrado (2006).
- [7] S. Straupe, and S. Kulik. The quest for higher dimensionality. Nature Photonics 4, 585-586 (2010).
- [8] H. He, M. E. J. Friese, N. R. Heckenberg, and H. Rubinsztein-Dunlop. Direct observation of transfer of angular momentum to absorbing particles from a laser beam with a phase singularity. Phys. Rev. Lett. 75, 826-829 (1995).
- [9] M. S. Soskin, V. N. Gorshkov, and M. V. Vasnetsov, Phys. Rev. A 56, 4064 (1997).
- [10] L. M. Pismen, Vortices in nonlinear fields: from liquid crystals to superfluids, from non-equilibrium patterns to cosmic strings, International series of monographs on physics (Oxford University Press, Oxford, 1999), pp. xv, 290 p.
- [11] Y. S. Kivshar and G. P. Agrawal, Optical solitons: from fibers to photonic crystals (Academic Press, Amsterdam; Boston, 2003), pp. xvi, 540 p.
- [12] V. Tikhonenko, J. Christou, and B. Lutherdaves, "Spiraling Bright Spatial Solitons Formed by the Breakup of an Optical Vortex in a Saturable Self-Focusing Medium," J. Opt. Soc. Am. B 12, 2046-2052 (1995).
- [13] V. Tikhonenko, J. Christou, and B. LutherDavies, "Three dimensional bright spatial soliton collision and fusion in a saturable nonlinear medium," Phys. Rev. Lett. 76, 2698-2701 (1996).

- [14] D. V. Petrov, L. Torner, J. Martorell, R. Vilaseca, J. P. Torres, and C. Cojocaru, "Observation of azimuthal modulational instability and formation of patterns of optical solitons in a quadratic nonlinear crystal," *Opt. Lett.* 23, 1444-1446 (1998).
- [15] J. R. Abo-Shaeer, C. Raman, J. M. Vogels, and W. Ketterle, "Observation of vortex lattices in Bose-Einstein condensates," *Science* 292, 476-479 (2001).
- [16] J. Masajada, A. Popiolek-Masajada, and M. Leniec, "Creation of vortex lattices by a wavefront division," *Opt. Express* 15, 5196-5207 (2007).
- [17] J. Masajada and B. Dubik, "Optical vortex generation by three plane wave interference," *Opt. Commun.* 198, 21-27 (2001).
- [18] J. Masajada, A. Popiolek-Masajada, and D. M. Wieliczka, "The interferometric system using optical vortices as phase markers," *Opt. Commun.* 207, 85-93 (2002).
- [19] D. P. Ghai, P. Senthilkumaran, and R. S. Sirohi. Single-slit diffraction of an optical beam with phase singularity. *Opt. Laser Eng.* 47, 123-126 (2009).
- [20] H. I. Sztul, and R. R. Alfano. Double-slit interference with Laguerre-Gaussian beams. *Opt. Lett.* 31, 999-1001 (2006).
- [21] J. M. Hickmann, E. J. S. Fonseca, W. C. Soares, and S. Chávez-Cerda. Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using light orbital angular momentum. *Phys. Rev. Lett.* 105, 053904 (2010).
- [22] R. Paschotta. *Encyclopedia of Laser Physics and Technology*. Vol 1. Wiley, New York (2008).
- [23] L. Allen, M. J. Padgett, and M. Babiker. *Progress in Optics*. Ed. E. Wolf, 39, 291-372 (1999).
- [24] A. E. Siegman, *Lasers*, University Science Books, Mill Valley (1968).
- [25] E. J. Galvez. *Structured Light and its Applications*. Elsevier, California, 63-74 (2008).
- [26] Grant R. Fowles, *Introduction Modern Optics*. 2 Ed. (Dover Publications, New York, 1975).
- [27] B. E. A. Saleh, and M. C. Teich. *Fundamentals of Photonics*. 2nd ed, Wiley, New York (2007).
- [28] J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*. 2 Ed. (McGraw-Hill, New York, 1996).
- [29] Q. S. Ferreira, A. J. Jesus-Silva, E. J. S. Fonseca, and J. M. Hickmann, "Fraunhofer diffraction of light with orbital angular momentum by a slit," *Opt. Lett.* 36, 3106-3108 (2011).

- [30] I. Mallev PARTIAL COHERENCE AND OPTICAL VORTICES. A Dissertaion Submitted to the Faculty of the WORCESTER POLYTECHNIC INSTITUTE in partial fulfillment of the requirements for the Degree of Doctor of Philosophy in Physics. 2004.
- [31] J. P. Kirk and A. L. Jones, "Phase-only complex-valued spatial filter," J. Opt. Soc. Am. B 61, 1023–1028 (1971).
- [32] U. Sinha, C. Couteau, T. Jennewein, R. Laflamme, and G. Weihs, "Ruling Out Multi-Order Interference in Quantum Mechanics," Science 329, 418-421 (2010).
- [33] J. A. Davis, D. M. Cottrell, J. Campos, M. J. Yzuel, and I. Moreno, "Encoding amplitude information onto phase-only filters," Appl. Opt. 38, 5004-5013 (1999).
- [34] M. A. A. Neil, T. Wilson, and R. Juškaitis, "A wavefront generator for complex pupil function synthesis and point spread function engineering," J. Microsc. 197, 219-223 (2000).
- [35] V. Arrizón, "Optimum on-axis computer-generated hologram encoded into lowresolution phase-modulation devices," Opt. Lett. 28, 2521—2523 (2003).
- [36] A. W. Lohmann and D. P. Paris, "Binary Fraunhofer holograms generated by computer," Appl. Opt. 6, 1739–1748 (1967).
- [37] C. K. Hsueh and A. A. Sawchuk, "Computer-generated double-phase holograms," Appl. Opt. 17, 3874–3883 (1978).
- [38] W. J. Dallas, "Computer-generated holograms," in The Computer in Optical Research, B. R. Frieden, ed. (Springer-Verlag, 1980), pp. 4156–4165.
- [39] V. Arrizón, U. Ruiz, R. Carrada, and L. A. González. Pixelated phase computer holograms for the accurate encoding of scalar complex fields. J. Opt. Soc. Am. A 24, 3500-3507 (2007).
- [40] T. Ando, Y. Ohtake, N. Matsumoto, T. Inoue, and N. Fukuchi, "Mode purities of Laguerre–Gaussian beams generated via complex-amplitude modulation using phase-only spatial light modulators". Opt. Lett. 34, 34-36 (2009).
- [41] R. L. Eriksen, P. C. Mogensen, and J. Glückstad. Elliptical polarisation encoding in two dimensions using phase-only spatial light modulator. Opt. Com. 187, 325-336 (2001).
- [42] Pedro H. F. Mesquita, Alcenísio J. Jesus-Silva, Eduardo J. S. Fonseca, and Jandir M. Hickmann, "Engineering a square truncated lattice with light's orbital angular momentum", Opt. Exp. 19, 20616-20621 (2011)