

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Redes Neurais Artificiais: Uma Aplicação em
Petrofísica e Estudo dos Efeitos de Estímulos
Persistentes**

VINÍCIUS MANZONI VIEIRA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA

Dissertação de Mestrado

**Redes Neurais Artificiais: Uma Aplicação em
Petrofísica e Estudo dos Efeitos de Estímulos
Persistentes**

VINÍCIUS MANZONI VIEIRA

Dissertação de Mestrado apresentado no
Instituto de Física da Universidade Federal
de Alagoas como parte dos requisitos para
obtenção do título de Mestre em Física

Orientador: Crisógono Rodrigues da Silva

Co-orientador: Marcelo Leite Lyra

Maceió - Alagoas - Brasil

Janeiro - 2007

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar eu gostaria de agradecer a *Deus* por ter me concedido a inteligência e a sabedoria necessária para a compreensão e o desenvolvimento deste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro no decorrer destes 2 anos, sem o qual não teria meios para terminar este trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Alagoas (FAPEAL) e a Petróleo Brasileiro SA - PETROBRAS, por todos os projetos que ajudaram no desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu orientador, Prf. Dr. Crisógono Rodrigues da Silva e Prf. Dr. Marcelo Leite Lyra, por sua dedicação durante estes anos de orientação. Agradeço ainda pela sua compreensão e paciência durante meus momentos de teimosia.

A cada um dos professores do Instituto de física da UFAL, que me incentivou e apoiou todos estes anos que se passaram, desde meu ingresso na graduação em física no ano de 2001.

Em especial agradeço a cada um daqueles que contribuíram fortemente na minha formação.

A todos os meus amigos do DF, que me ajudaram durante todos estes anos.

- A Nane, por todo carinho e compreensão durante estes anos.

- Finalmente gostaria de agradecer especialmente aos meus pais, *William* e *Célia* e aos meus irmãos, *Fábio* e *Leandro*, por todo apoio e ajuda durante estes anos.

RESUMO

As redes neurais artificiais (RNAs) são dispositivos matemáticos e computacionais, que procuram simular alguns dos comportamentos das redes neurais biológicas. Neste trabalho, primeiramente apresentamos uma visão geral sobre as redes neurais, mostrando uma aplicação de uma rede do tipo *perceptron de múltiplas camadas* [5, 9, 10]. Em seguida, estudamos analiticamente e através de simulações numéricas, o comportamento do modelo de Hopfield [7] para em seguida introduzir na dinâmica do sistema um parâmetro que atua como um campo externo para simular o efeito de um estímulo persistente que privilegia determinado padrão armazenado na rede. Para o modelo de Hopfield na presença deste campo, primeiramente apresentamos uma visão geral do efeito do campo no modelo na presença de assimetria e diluição nas conexões sinápticas. Em seguida utilizando uma aproximação de campo médio, obtivemos um conjunto de equações acopladas para os parâmetros de ordem m e q em função dos parâmetros h (que simula o estímulo persistente), α (capacidade de armazenamento da rede) e T (ruído estocástico), para o modelo sem a presença da diluição e assimetria. Analisamos as propriedades da rede quanto à habilidade de reconhecimento e capacidade de armazenamento, obtendo o diagrama de fase $\alpha \times T$ para o modelo mostrando a dependência das transições com o valor de h . Para o caso determinístico ($T = 0$), realizamos simulações numéricas, onde desenvolvemos e aprimoramos um algoritmo computacional utilizando a técnica de *multi-spin coding*, e mostramos a boa concordância apresentada pelos resultados quando comparamos com os resultados obtidos analiticamente. Todos os resultados apontam para um crescimento da capacidade de reconhecimento com o aumento do parâmetro h que controla a intensidade do estímulo persistente.

ABSTRACT

Artificial Neural Networks are mathematical and computational devices, which try to simulate some behaviors of biological neural networks. At first in this work, we present a review about neural networks, showing one of the applications of a *Multi-Layers Perceptrons* [5, 9, 10]. After that, we made an analytical and numerical study of behavior based on Hopfield's model [7] and then introduce in the system's dynamics a parameter that acts as an external field to simulate the effect of a persistent stimulus field that privileges a stored pattern in the network. For the Hopfield's model in the presence of this field, in the first place we present a review of the field's effect in the model with dilution and asymmetry on synaptic connections. After that, using a mean field average, we've got a set of equations for the order parameters m and q in function of the parameters h (that simulates the persistent stimulus field), α (network's storage capacity) and T (thermal noise), for the model without dilution and asymmetry. We analyze the recognition and storage capacity properties of the network, resulting on the phase diagram $\alpha \times T$ for the model, showing the dependence of the transitions with the value of h . For the deterministic case ($T = 0$), we compute numerical simulations, where we develop and improve a computational algorithm using the *multi-spin coding* technique, and show the good agreement presented for the results when we compare with the analytical results we got. All the results indicate the increase of the capacity of recognition when increasing the h parameter, which controls the intensity of the stimulus field.

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Folha de rosto | i |
| Agradecimentos | iii |
| Resumo | iv |
| Abstract | v |
| 1 Introdução às Redes Neurais | 1 |
| 1.1 Redes Neurais Biológicas | 2 |
| 1.1.1 Neurônio Biológico | 3 |
| 1.1.2 Propagação de Sinais Elétricos ao Longo do Axônio | 4 |
| 1.2 Redes Neurais Artificiais (RNAs) | 6 |
| 1.2.1 Breve Histórico | 7 |
| 1.3 Modelo de McCulloch-Pitts | 8 |
| 1.4 Modelo de Little | 10 |
| 1.5 Arquiteturas de Redes Neurais | 11 |
| 1.5.1 Redes do tipo <i>feed-forward</i> com camada única | 12 |
| 1.5.2 Redes do tipo <i>feed-forward</i> com múltiplas camadas | 13 |
| 1.5.3 Redes recorrentes ou do tipo <i>feedback</i> | 15 |
| 1.6 Algumas Aplicações de RNAs | 16 |
| 2 Perceptrons de Múltiplas camadas | 18 |
| 2.1 Algoritmo de Retropropagação | 18 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.2 | Estimativa da Permeabilidade de poços petrolíferos | 23 |
| 2.2.1 | Estudo da eficiência da rede | 24 |
| 2.2.2 | Otimização do aprendizado | 27 |
| 3 | Modelo de Hopfield | 34 |
| 3.1 | O Problema da Memória Associativa | 36 |
| 3.2 | O Modelo | 38 |
| 3.2.1 | Análise da Função Energia | 40 |
| 3.2.2 | Estabilidade dos Padrões | 41 |
| 3.2.3 | Capacidade de Armazenamento | 44 |
| 3.3 | Termodinâmica do Modelo | 47 |
| 3.3.1 | O Caso Determinístico ($T = 0$) | 58 |
| 3.4 | Novos ingredientes biológicos | 64 |
| 4 | Modelo de Hopfield com Estímulo Persistente | 67 |
| 4.1 | Principais Resultados do Modelo Diluído | 69 |
| 4.1.1 | Estímulo Paralelo ao padrão de inicialização | 72 |
| 4.1.2 | Estímulo Perpendicular ao padrão de inicialização | 72 |
| 4.2 | Modelo Totalmente Conectado | 77 |
| 4.3 | Termodinâmica do Modelo | 79 |
| 4.3.1 | O Caso Determinístico ($T = 0$) | 84 |
| 5 | Conclusões | 93 |
| | Apêndices | 97 |
| A | Multi-Spin Coding | 97 |
| | Referências Bibliográficas | 107 |

Capítulo 1

Introdução às Redes Neurais

Durante séculos, o estudo do cérebro humano tem suscitado a curiosidade e atraído a atenção de cientistas das diversas áreas do conhecimento, como as neurociências, as engenharias, a física, ciência da computação, dentre outras, na busca de compreender os mecanismos responsáveis por comportamentos tão variados e complexos. No último século, graças aos grandes avanços na neurobiologia e nas áreas multidisciplinares atreladas às redes neurais, a ciência começou a compreender os princípios básicos que governam o funcionamento do sistema nervoso e, num passo ainda mais audacioso, modelar e construir sistemas artificiais capazes de reproduzir algumas funções próprias do cérebro.

O estudo na área de redes neurais artificiais (RNAs), tem sido motivado no fato do cérebro humano processar informações de uma forma inteiramente diferente de um computador convencional. Deste modo, os pesquisadores das diversas áreas possuem grande interesse em estudar as RNAs, devido às diversas aplicações que podem ser realizadas com uma máquina que possui capacidades semelhante às do cérebro. A física, em particular a mecânica estatística, familiarizada na descrição do comportamento coletivo de sistemas com muitas partículas interagentes, busca entender como o cérebro desempenha algumas de suas funções (como a capacidade

de reconhecer padrões de forma associativa, aprendizagem, categorização) utilizando as interações entre os neurônios através de impulsos eletroquímicos

Para uma melhor compreensão das redes neurais artificiais, é importante uma breve descrição sobre os constituintes básicos de uma rede neural biológica.

1.1 Redes Neurais Biológicas

O Sistema Nervoso é uma rede formada por um número muito grande de células, com a capacidade de receber, transmitir, elaborar e armazenar informações através de impulsos eletroquímicos. Recebe as informações diversas sobre mudanças do meio externo, relacionando o indivíduo com o ambiente, iniciando e regulando as respostas adequadas. Além disso, os processos ocorridos nas diversas regiões do corpo são controladas pelo sistema nervoso. O sistema nervoso é afetado pelas mudanças ocorridas no corpo humano através dos estímulos.

O sistema nervoso é anatomicamente dividido em:

Sistema Nervoso Central (SNC)- formado pela medula espinhal e encéfalo, que é a sede da inteligência, onde se formam as idéias e partem as ordens para a execução dos movimentos e para regular as funções do corpo. De maneira geral, é a região que gerencia todo o organismo, seja no sentido físico ou seja no sentido psíquico;

Sistema Nervoso Periférico (SNP)- formado pelos nervos e pequenos agregados de células (gânglios nervosos), que servem para “conduzir” os impulsos nervosos. Os nervos transportam às diversas regiões do corpo os estímulos e recebem das regiões periféricas as diversas sensações que são conduzidas ao sistema central.

O cérebro humano faz parte do SNC, sendo responsável pelo controle das diversas funções do corpo. É composto de aproximadamente 10^{11} células nervosas denominadas neurônios, na qual cada um pode ser conectado a aproximadamente 10^4 outros neurônios, formando uma rede altamente conectada.

Nos dias atuais, o estudo do cérebro, tem despertado o interesse das mais diversas áreas. Mesmo com o grande avanço da ciência, ainda hoje o funcionamento biológico do cérebro é pouco conhecido. Foi o estudo das funções do cérebro e das formas de comunicação entre os *neurônios*, incluindo sua morfologia, que surgiu as bases para a criação das primeiras Redes Neurais Artificiais.

1.1.1 Neurônio Biológico

Os neurônios são células nervosas que possuem uma morfologia bastante complexa com a propriedade de enviar e receber estímulos. Desta forma, o modelo de neurônio biológico que será apresentado, trata-se de uma visão muito simplificada do neurônio real, pois este modelo visa somente uma caracterização geral das suas funcionalidades básicas, dando ênfase em suas características que podem ser utilizadas como base para a implementação matemática de diversos modelos de RNAs.

É apresentado na Figura (1.1) um esquema simplificado de um neurônio onde são mostrados seus elementos principais:

1. ***Corpo celular*** ou ***Pericário***, representa a parte central da célula nervosa, responsável pelo processamento ou soma dos sinais recebidos de outros neurônios;
2. ***Dendritos***, prolongamentos numerosos com a função de receber estímulos de outras células ou neurônios;
3. ***Axônio***, prolongamento único, especializado na condução de impulsos que transmitem informações dos neurônios para outras células;
4. ***Terminações do Axônio***, ramificações encontradas no final do axônio, responsáveis pela “união” com outros neurônios através das *Sinapses*.

Na realidade, a morfologia de um neurônio pode ser bastante variada, podendo possuir formas e tamanhos diferentes, dependendo de sua função específica a ser realizada na rede neural.

As Sinapses são os pontos de contato entre as terminações do axônio de um

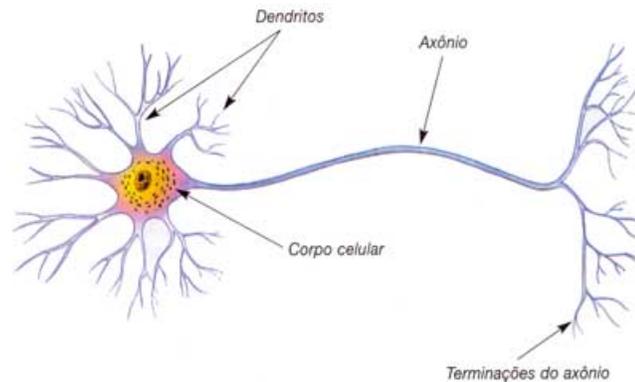


Figura 1.1: *Esquema de um neurônio biológico típico.*

neurônio com os dendritos de outros neurônios. É através das sinapses que os sinais são transmitidos de um neurônio para outro, através da liberação de substâncias denominadas *neurotransmissores*.

Os neurotransmissores podem ter um caráter excitatório ou inibitório, portanto, a transmissão (disparo) do sinal pode excitar ou inibir outros neurônios.

A condição de disparo de um sinal através das sinapses se dá quando o potencial da célula em relação ao meio salino que a cerca atinge um determinado patamar. Esse patamar é conhecido como limiar de ativação, sendo este quem determina o disparo de um neurônio durante a dinâmica da rede.

1.1.2 Propagação de Sinais Elétricos ao Longo do Axônio

Apesar da informação enviada por cada neurônio ser relativamente lenta ($\sim 1ms$), as redes biológicas possuem uma grande capacidade de processamento devido ao grande número de sinapses enviando informações simultaneamente.

No neurônio, os sinais são transmitidos através do envio de um impulso eletroquímico que se propaga do corpo celular para as sinapses ao longo do axônio. O sinal se propaga pelo axônio na forma semelhante a uma onda, onde o potencial varia de seu valor de repouso, que vale aproximadamente $-60mV$, para aproxima-

damente $+55mV$. Esta mudança no potencial é causada por diversos mecanismos, onde envolve principalmente a variação da permeabilidade da membrana aos íons de sódio (Na^+) e potássio (K^+) [1], pois no estado de repouso, o interior da célula possui uma maior concentração de íons de potássio, enquanto na região externa à membrana plasmática, os íons de sódio apresentam uma maior concentração. Esta diferença de concentração é devido à impermeabilidade da célula aos íons.

Durante a comunicação entre os neurônios, a ação do neurotransmissor é mudar a permeabilidade da membrana plasmática a determinados tipos de íons. A mudança de permeabilidade tanto pode causar uma excitação ou inibição do neurônio pós-sináptico, dependendo da concentração intra e extracelular de um determinado íon. Um fluxo de íons de sódio para dentro da célula tende a despolarizar o potencial da membrana, possuindo um efeito excitatório. Se íons de potássio saem do interior da célula, a membrana será hiperpolarizada, causando um efeito inibitório. Esta flutuação do potencial da membrana com relação ao potencial de repouso do neurônio é conhecida como Potencial Pós-Sináptico (PPS). Deste modo, o efeito da atividade do neurônio pré-sináptico é excitar ou inibir a polarização da membrana do neurônio pós-sináptico.

Os neurotransmissores são liberados somente pelos neurônios pré-sinápticos, de tal modo que a direção de propagação da informação é dada em um único sentido. Somente se a soma dos PPS que chegam em dado neurônio seja maior do que o seu limiar de ativação, o neurônio enviará um sinal (ou impulso) que será propagado na direção do axônio. Estes impulsos enviados pelos neurônios, são a única maneira de se expressarem, mudando somente na frequência e na intensidade na qual são emitidos.

Uma descrição mais detalhada sobre as redes neurais biológicas e os processos envolvidos na transmissão dos sinais entre os neurônios pode ser encontrada nas referências [1, 2].

1.2 Redes Neurais Artificiais (RNAs)

O objetivo principal do estudo das RNAs é motivado pela busca de resolver problemas complexos de maneira eficiente, baseando-se na forma de processamento do cérebro, visando sua alta capacidade de processamento de informação.

As RNAs tentam reproduzir algumas das funções das redes neurais biológicas, no entanto é importante ressaltar que as duas são bastante diferentes entre si, apesar de possuírem algumas similaridades, como o fato de serem baseadas em processamento paralelo e distribuído que se comunicam através de conexões sinápticas.

De maneira mais precisa, uma rede neural é um processador que trabalha de forma paralela e distribuída, possuindo unidades de processamento com a capacidade de armazenar determinados conhecimentos e de torná-los disponíveis para o uso. De forma análoga ao cérebro, o conhecimento da rede é adquirido pelo processo de aprendizagem, onde a intensidade das conexões (pesos sinápticos) entre as unidades de processamento (neurônios) são utilizadas para armazenar o conhecimento adquirido pela rede.

A principal vantagem do uso das RNAs baseia-se na sua capacidade de processar em paralelo e da sua habilidade de reconhecer por associação, aprender e conseqüentemente de generalizar. A habilidade de generalizar refere-se à capacidade de produzir saídas adequadas para entradas que não estavam presentes durante o treinamento (aprendizagem). Esta capacidade de aprender é de grande utilidade, proporcionando a resolução de problemas complexos que atualmente são intratáveis.

As RNAs nos oferecem algumas propriedades úteis:

1. *Não-linearidade* - um neurônio artificial pode ser linear ou não linear, no sentido de ser distribuída por toda a rede, sendo esta propriedade útil para casos de sinais de entrada inerentemente não lineares;
2. *Adaptabilidade* - capacidade de adaptar os pesos sinápticos a modificações do sistema. Em particular, uma rede treinada para operar em um ambiente específico

pode ser facilmente retreinada para lidar com modificações do sistema. Além disso, uma rede neural pode ser projetada para modificar seus pesos sinápticos em tempo real para operar em ambientes não estacionários;

3. Tolerância a Falhas - devido ao fato da informação estar distribuída por toda a rede, uma falha em uma das conexões entre os neurônios acarretará um dano suave no desempenho da rede.

1.2.1 Breve Histórico

A modelagem do sistema nervoso começou com o trabalho de Warren S. McCulloch (fisiologista) e seu aluno Walter H. Pitts (matemático), em 1943 [3], que consistiu num estudo sobre o comportamento do neurônio biológico seguido da criação de um modelo matemático correspondente. Este modelo será tratado detalhadamente na seção seguinte.

Em 1949, Hebb [4], apresentou pela primeira vez uma formulação explícita de uma regra de aprendizagem para a *modificação sináptica*. Especificadamente, Hebb propôs que a conectividade do cérebro é continuamente modificada conforme o organismo vai aprendendo tarefas funcionais diferentes e que *agrupamentos neurais* são criados por tais modificações.

Em 1958, Rosenblatt [5] introduziu uma nova abordagem para o problema de reconhecimento de padrões em seu trabalho sobre o *perceptron*, um método inovador de aprendizagem supervisionada, que consiste num processo de modificação dos pesos sinápticos para um mapeamento entrada-saída. O perceptron gerou bastante expectativa na comunidade científica quando Rosenblatt apresentou o *teorema da convergência do perceptron* e propôs também um algoritmo para treinar redes de única camada que resolvia problemas de classificação de entradas separáveis linearmente.

Em 1969, Minsky e Papert [6] apresentaram as limitações no processamento

do perceptron, demonstrando matematicamente que uma rede de única camada é incapaz de realizar uma operação XOR (*ou exclusivo* em lógica booleana). O principal argumento foi que embora existisse um algoritmo de aprendizado que garantia a convergência para modelos de uma única camada, o mesmo não acontecia para redes perceptron com mais de uma camada. Estas críticas ao trabalho do perceptron desencadeou um adormecimento nas pesquisas em redes neurais durante a década de 70.

Em 1982, as pesquisas sobre RNAs ressurgiram com a publicação do artigo do neurobiologista John Hopfield [7]. Hopfield associou o processo de reconhecimento na rede à minimização de uma função energia, utilizando uma analogia com o modelo magnético de Ising da mecânica estatística, seguindo uma idéia proposta anteriormente por Little [8]. Este trabalho despertou bastante interesse dos físicos teóricos, transformando a área das redes neurais e consolidando uma nova linha de pesquisa.

Em 1986, Rumelhart et al [9, 10] desenvolveram o *algoritmo de retropropagação* (*back-propagation*), que resolvia o problema do treinamento de perceptrons com mais de uma camada. Este trabalho despertou grande interesse, pois uma rede com mais de uma camada capacita a implementação de funções que não são separáveis linearmente. Devido a esta capacidade, este trabalho constituiu num grande avanço na área das redes neurais, de tal modo que este algoritmo é bastante utilizado até os dias atuais.

1.3 Modelo de McCulloch-Pitts

O modelo matemático de McCulloch-Pitts [3] trata-se de uma simplificação do que se conhecia em 1943 a respeito do neurônio biológico, onde o neurônio é visto como um dispositivo binário, podendo ou não enviar estímulos aos outros neurônios. No modelo, as várias entradas do neurônio possuem pesos arbitrários que podem ser

excitatórios ou inibitórios.

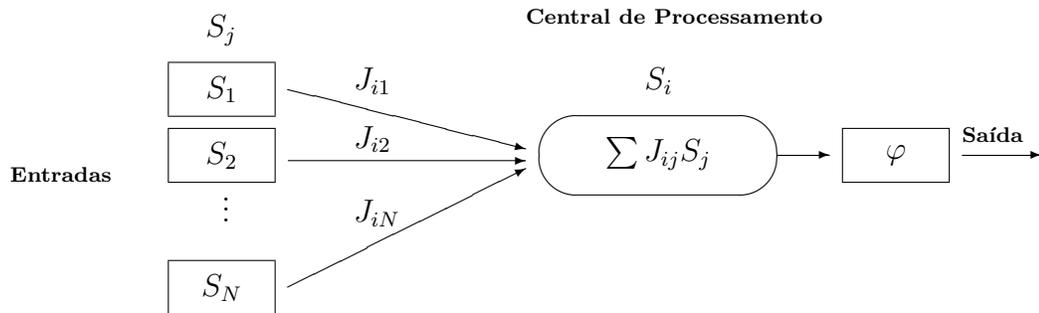


Figura 1.3: Esquema do neurônio de McCulloch-Pitts.

O modelo esquematizado na Figura (1.3), consiste em N terminais de entrada representados pelos neurônios S_1, S_2, \dots, S_N e um terminal de saída, representado pelo neurônio estimulado S_i . Cada conexão entre os neurônios possui um peso associado J_{ij} , que mede a influência do neurônio j sobre o neurônio i , que pode ser $+1$ se a influência for excitatória ou -1 se for inibitória.

O estado do neurônio j pode ser ativo ($S_j = 1$) ou inativo ($S_j = 0$), realizando uma influência no neurônio i (pós sináptico) dada por $S_j J_{ij}$.

A influência que os demais neurônios da rede exerce sobre o neurônio i é chamado de potencial de ação ou campo local induzido, definido como:

$$h_i(t) = \sum_{j=1}^N J_{ij} S_j(t). \quad (1.1)$$

O neurônio dispara um sinal quando a soma dos pulsos que ele recebe (campo local induzido) ultrapassa o seu limiar de ativação.

$$h_i(t) \geq \theta_i. \quad (1.2)$$

O estado final do neurônio i é dado por:

$$S_i(t+1) = \varphi(h_i(t) - \theta_i), \quad (1.3)$$

A saída de um neurônio é definida pela função de ativação, que pode apresentar diversas formas. No modelo que será tratado neste trabalho, a função de ativação que será utilizada é a função limiar (ou degrau) que é definida como:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } x \geq 0 \\ 0 & , \text{ se } x < 0. \end{cases}$$

O modelo original de McCulloch-Pitts possui algumas limitações, como o fato de redes com apenas uma camada só conseguirem implementar funções linearmente separáveis e o fato do modelo ser proposto com pesos fixos, não ajustáveis.

Uma generalização deste modelo, foi proposta por Little, que utilizou uma analogia com o modelo magnético de Ising.

1.4 Modelo de Little

A analogia entre o modelo McCulloch-Pitts com os modelos magnéticos foi proposta por Little [8], na qual redefiniu os estados $S_i(t) \rightarrow 2S_i(t) - 1$, passando então os estados $S_i(t) = [0, 1]$ a assumir valores $S_i(t) = [-1, +1]$ respectivamente. Desta maneira, os estados dos neurônios equivalem aos estados dos spins ($S_i(t) = -1$ spin para baixo e $S_i(t) = +1$ spin para cima) e as conexões sinápticas J_{ij} são equivalentes às interações físicas entre eles.

O modelo descrito por McCulloch-Pitts é determinístico já que o seu comportamento de entrada-saída é definido precisamente para todas as entradas. Uma melhor aproximação com as redes biológicas pode ser implementada quando substituirmos a dinâmica determinística (Eq. 1.3) por uma dinâmica estocástica. A esto-

casticidade nas redes neurais biológicas está relacionada com os processos aleatórios envolvidos na liberação dos neurotransmissores, flutuações no tempo de resposta e nos limiares de disparos, pois cada neurônio pode reagir de maneira diferente a um estímulo. A probabilidade para um dado neurônio $S_i(t+1)$ disparar ou permanecer em repouso é dada pela equação:

$$S_i(t+1) = \begin{cases} +1 & \text{com probabilidade } \mathcal{P}(S_i(t)) \\ -1 & \text{com probabilidade } 1 - \mathcal{P}(S_i(t)) \end{cases} \quad (1.4)$$

onde $\mathcal{P}(S_i(t))$ é a distribuição de probabilidade na forma:

$$\mathcal{P}(S_i(t)) = \frac{1}{2} [1 + \tanh(\beta h_i(t))]. \quad (1.5)$$

O parâmetro $\frac{1}{\beta} \equiv T$ controla o ruído estocástico, que representa a temperatura nos modelos magnéticos. É importante ressaltar que T não é uma temperatura física nas redes neurais (biológicas ou artificiais), mas sim um parâmetro que controla as flutuações que representam os efeitos de ruído sináptico.

1.5 Arquiteturas de Redes Neurais

O algoritmo (regra) de aprendizagem utilizado para o treinamento de uma rede neural está relacionado com o modo com que os neurônios da rede neural estão estruturados. A estrutura (arquitetura da rede) utilizada, exerce uma forte influência no desempenho da rede, de tal forma que uma escolha errônea pode acarretar falhas ou até mesmo a incapacidade de resolver dado problema. Em geral, podemos identificar três classes de arquiteturas fundamentalmente diferentes:

1.5.1 Redes do tipo *feed-foward* com camada única

Uma rede neural organizada em camadas pode apresentar diversas formas. Em sua forma mais simples, temos uma *camada de entrada* de nós de fonte e uma *camada de saída* de neurônios. A função da camada de entrada é apenas receber os estímulos externos e enviá-los ao restante da rede, não realizando qualquer processamento de informação. Desta forma, toda informação é processada exclusivamente na camada de saída. O fluxo de informação é dado em apenas um sentido, de tal maneira que a camada de saída jamais exerce influência sobre os nós de entrada e os neurônios de uma mesma camada não são conectados entre si. A figura (1.5.1) ilustra este tipo de rede.

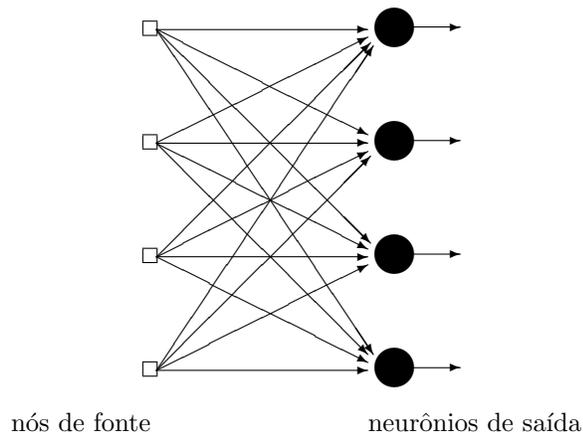


Figura 1.5.1: *Desenho esquemático de uma rede feed-foward com camada única.*

As redes do tipo alimentadas adiante (feed-foward) com única camada é mais conhecido como o *perceptron* de Rosenblatt[5]. Este tipo de rede é utilizada somente para a classificação de padrões linearmente separáveis. O algoritmo utilizado para ajustar os parâmetros livres desta rede neural apareceu primeiramente no processo de aprendizado desenvolvido por Rosenblatt para o seu modelo do perceptron.

1.5.2 Redes do tipo *feed-forward* com múltiplas camadas

As redes de múltiplas camadas alimentadas adiante constituem uma importante classe de redes neurais. Basicamente, a rede consiste de um conjunto de unidades de entrada (nós de fonte ou camada de entrada), uma ou mais *camadas ocultas* de nós computacionais seguidas de uma *camada de saída* de nós computacionais. O sinal se propaga em um único sentido, seguindo para frente através da rede, camada por camada. Este tipo de rede se encontra esquematizado na figura (1.5.2).

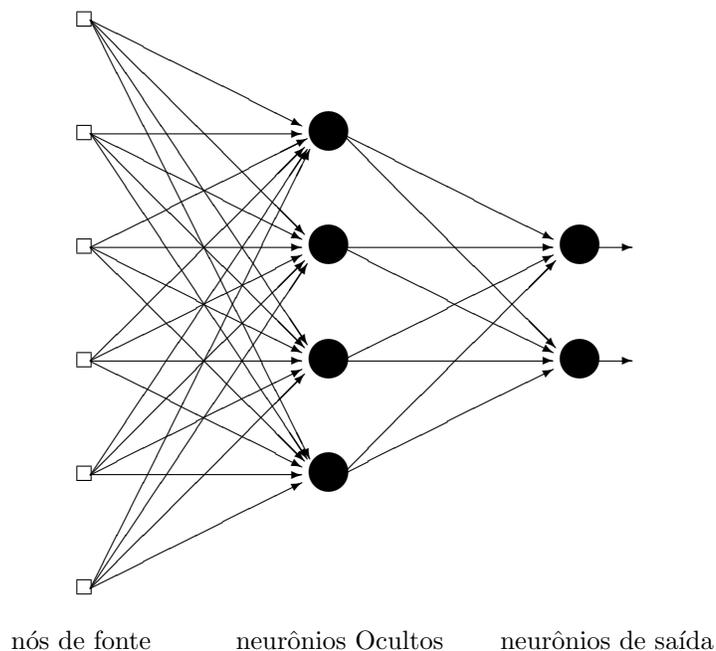


Figura 1.5.2: Desenho esquemático de uma rede *feed-forward* com múltiplas camadas.

Dentre as redes de múltiplas camadas alimentadas adiante, podemos citar diversas categorias, como os *perceptrons de múltiplas camadas* (MLP, *multilayer perceptron*), as *redes de função de base radial* (RBF, *radial-basis function*) e as *máquinas de vetor de suporte* (MVS), onde ambas podem ser utilizados para a classificação de padrões e resolver problemas de regressão linear.

Vamos focalizar uma atenção especial nas redes MLP, que apresentam uma das mais importantes contribuições no campo das Redes Neurais.

Perceptrons de múltiplas camadas

Os perceptrons de múltiplas camadas têm sido aplicados com sucesso para desenvolver problemas difíceis, através do seu *treinamento supervisionado*, com um algoritmo conhecido como *algoritmo de retropropagação de erro* (*error back-propagation*).

No algoritmo de retropropagação, as conexões sinápticas são inicializadas de forma aleatória. Durante cada estágio de treinamento, os neurônios da camada de entrada são apresentados a um conjunto de parâmetros. Os neurônios das camadas intermediárias recebem como estímulo a soma de todos os sinais de neurônios a eles conectados utilizando-se como peso estatístico o valor de cada conexão sináptica. O sinal de saída de cada neurônio intermediário é obtido através de um mapeamento não linear de forma sigmoideal. Este procedimento é repetido nas demais camadas intermediárias até atingir a camada de saída, num processo denominado *alimentação progressiva*. Ao alcançar a camada de saída, o erro entre a saída da rede e o valor esperado é calculado e esta informação é propagada para o restante da rede através do ajuste dos pesos sinápticos num processo de propagação reversa. Este processo é repetido para todos os conjuntos de dados de treinamento e um grande número de vezes, até as conexões sinápticas atingirem um regime estacionário. É importante ressaltar que, um treinamento demasiadamente longo pode levar a rede a um estado de *super-treinamento* que compromete a eficiência da rede.

O desenvolvimento do algoritmo de retropropagação representa um marco no desenvolvimento das redes neurais, pois fornece um método computacional eficiente para o treinamento de perceptrons de múltiplas camadas. Apesar de não podermos afirmar que este algoritmo forneça a melhor solução para todos os problemas, ele acabou com o pessimismo sobre o treinamento de redes com múltiplas camadas, que havia sido causado pelas críticas de Minsky e Papert (1969)[6].

1.5.3 Redes recorrentes ou do tipo *feedback*

Uma rede é denominada recorrente se pelo menos um de seus neurônios apresenta conexões sinápticas que enviam informações para alguma camada anterior a sua, de forma que seus impulsos podem realimentar a rede e possivelmente suas próprias entradas. Este processo é equivalente à troca de informações entre neurônios da mesma região do cérebro, num processo biológico.

As redes recorrentes podem ser *totalmente conectadas*, quando cada neurônio possuem conexões que enviam estímulos para todos os outros neurônios da rede, ou *parcialmente conectadas*, quando parte destas conexões não estão presentes na rede.

Redes de Hopfield

O foco principal deste trabalho está no estudo do *modelo de Hopfield*[7], que trata-se de um modelo de rede neural que apresenta uma arquitetura do tipo recorrente totalmente conectada bastante conhecido na literatura.

Este modelo atrai bastante a atenção por ser conhecido como uma *memória endereçável por conteúdo*, onde as saídas da rede são *a priori* conhecidas e correspondem a pontos fixos que são os padrões a serem armazenados. O principal motivo do grande interesse no estudo deste modelo, é a analogia com o *modelo magnético de Ising*, que desperta a curiosidade da maioria dos físicos teóricos.

De maneira simplificada, o processamento do modelo de Hopfield é dado nas seguintes etapas:

1. *Treinamento*: baseado no *armazenamento* dos padrões na rede. O armazenamento é realizado através do cálculo dos pesos sinápticos utilizando a *regra de aprendizagem de Hebb*, onde cada memória será codificada como um mínimo da função energia.
2. *Reconhecimento (recuperação de um padrão)*: se partirmos de uma situação

inicial que seja uma versão igual ou parcial a um dos padrões armazenados na rede, a rede possui a capacidade de recuperar o padrão armazenado.

O modelo de Hopfield possui um amplo ramo de aplicações, na área de reconhecimento de padrões como *voz, impressões digitais, dentre outros* e resolução de problemas de minimização como por exemplo o famoso *problema do Caixeiro Viajante*. A partir do capítulo 3, nosso estudo será baseado nas idéias propostas neste modelo, apresentando os principais resultados encontrados na literatura e realizando uma análise dos efeitos causados pela introdução de um novo parâmetro que simula o efeito de um estímulo que privilegia um dos padrões armazenados na rede.

1.6 Algumas Aplicações de RNAs

Nos últimos anos, vários tipos de redes neurais têm sido utilizados para desempenhar funções que geralmente necessitam de decisões rápidas ou em ambientes de difíceis condições de trabalho. As redes neurais artificiais possuem a vantagem de analisar simultaneamente um número muito grande de variáveis, possuindo a capacidade de encontrar correlações complexas entre estas variáveis, fornecendo uma resolução relativamente rápida de problemas que possuem tratamento difícil. Atualmente existem dezenas de modelos de redes neurais estruturados para as mais diversas aplicações. Dentre estas aplicações, podemos citar algumas importantes:

- *Reconhecimento e classificação de padrões*¹;
- *Resolução de problemas lógicos complexos*;
- *Análise de características demográficas para marketing*;
- *Controle de processos industriais*;
- *Detecção de cartões de crédito falsos*;
- *Previsão da bolsa de valores e cotação de moedas*;

¹No Capítulo 2 apresentamos uma estimativa da permeabilidade utilizando *multi-layer perceptrons*.

- *Previsão do mercado financeiro;*
- *Reconhecimento de caracteres e impressões digitais.*

No capítulo 2 introduzimos os conceitos fundamentais para descrever uma rede do tipo feed-forward com múltiplas camadas (perceptrons de múltiplas camadas) e apresentamos uma aplicação deste tipo de rede na estimativa da permeabilidade das formações rochosas em poços de petróleo, mostrando as vantagens do uso de redes neurais e os resultados que podem ser obtidos em tal aplicação. No capítulo 3, descrevemos o modelo de Hopfield que simula o problema de reconhecimento de padrões por associação, utilizando a analogia entre o processo de memorização e a minimização de uma função energia. Esta descrição limita-se ao modelo de Hopfield na sua versão original [7] (dinâmica determinística) e o modelo generalizado proposto por Amit et. al [10, 11] que leva em conta a presença de ruído na transmissão da informação. No capítulo 4, apresentamos as contribuições originais desenvolvidas nesta tese, onde implementamos o modelo de Hopfield introduzindo um termo que atua como um estímulo permanente que privilegia um dado padrão armazenado na rede. Vamos também neste capítulo, descrever os métodos utilizados para o desenvolvimento do algoritmo computacional utilizado nas simulações numéricas que foram realizadas no nosso trabalho e apresentar os resultados obtidos nestas simulações, comparando estes resultados com os resultados obtidos analiticamente. Finalmente, apresentamos no capítulo 5 as conclusões do nosso trabalho.

Capítulo 2

Perceptrons de Múltiplas camadas

Neste capítulo, será apresentado um tipo de rede alimentada adiante denominada *perceptron de múltiplas camadas* e utilizar este tipo de rede para uma aplicação na indústria petrolífera (estimativa da permeabilidade de poços de petróleo). Tipicamente, este tipo de rede consiste de um conjunto de unidades de entrada (nós de fonte), uma ou mais *camadas ocultas* de nós computacionais e uma *camada de saída* de nós computacionais.

Os perceptrons de múltiplas camadas têm sido aplicados para resolver problemas difíceis, através do seu treinamento de forma supervisionada com o algoritmo conhecido como *algoritmo de retropropagação de erro* que é descrito em detalhes a seguir.

2.1 Algoritmo de Retropropagação

O primeiro passo durante o processo de aprendizado é inicializar os pesos sinápticos J_{ij} de forma aleatória para logo em seguida fornecer um conjunto de treinamento afim de encontrar os pesos sinápticos que fornecem o melhor resultado para o problema.

Seguindo o modelo de McCulloch e Pitts, o campo local induzido $h_j(n)$ pro-

duzido sob o neurônio j é dado por

$$h_j(n) = \sum_{i=1}^m J_{ij}(n)S_i(n), \quad (2.1)$$

onde m é o número total de neurônios que influencia o neurônio j e J_{ij} são os pesos sinápticos entre o neurônio estimulado (j) e os neurônios de uma camada anterior (i). O sinal enviado pelo neurônio estimulado na interação n é

$$S_j(n) = \varphi_j(h_j(n)), \quad (2.2)$$

onde $\varphi_j(x)$ é a função de ativação para o neurônio j , que pode possuir diversas formas para representar a não-linearidade do neurônio no modelo. As formas mais usuais de funções de ativação utilizada neste modelo são as funções:

- *Função Logística*: $\varphi_j(x) = \frac{1}{1 + \exp(-ax)}$, $a > 0$;
- *Função Tangente Hiperbólica*: $\varphi_j(x) = a \tanh(bx)$, $(a, b) > 0$.

O sinal vai se propagando camada por camada, até atingir a camada de saída que fornecerá uma resposta para o conjunto de dados entradas. Em seguida, é gerado um *sinal de erro* por um dos neurônios de saída, que se propaga para trás, camada por camada, através da rede. O sinal de erro enviado pelo neurônio j na n -ésima interação (i.e., n -ésimo exemplo de treinamento) é definido por

$$e_j(n) = d_j(n) - S_j(n), \quad (2.3)$$

onde $d_j(n)$ equivale à resposta de saída desejada do neurônio j , na interação n .

A energia do erro para o neurônio j é definida como $\frac{1}{2}e_j^2(n)$. Desta forma, a energia total do erro pode ser obtido pela soma em todos os neurônios da camada

de saída

$$E(n) = \frac{1}{2} \sum_{j \in C} e_j^2(n), \quad (2.4)$$

com o conjunto C incluindo todos os neurônios da camada de saída da rede. Se apresentamos N padrões durante o treinamento, a *energia média do erro quadrado* é obtida da seguinte forma

$$E_{med} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N E(n). \quad (2.5)$$

A energia do erro (ou função de custo), é uma função de todos os parâmetros livres (i.e. pesos sinápticos e *níveis de bias*¹) da rede. O objetivo do processo de aprendizagem é ajustar os parâmetros livres da rede para minimizar E_{med} .

O algoritmo de retropropagação irá aplicar uma correção $\Delta J_{ij}(n)$ ao peso sináptico J_{ij} , definida pela *regra delta*:

$$\Delta J_{ij}(n) = -\eta \frac{\partial E(n)}{\partial J_{ij}(n)}, \quad (2.6)$$

sendo η o *parâmetro de taxa de aprendizagem* do algoritmo de retropropagação. Utilizando a regra da cadeia, a derivada parcial pode ser escrita em termos das derivadas parciais com relação aos outros parâmetros da rede:

$$\frac{\partial E(n)}{\partial J_{ij}(n)} = \frac{\partial E(n)}{\partial e_j(n)} \frac{\partial e_j(n)}{\partial S_j(n)} \frac{\partial S_j(n)}{\partial h_j(n)} \frac{\partial h_j(n)}{\partial J_{ij}(n)}. \quad (2.7)$$

Este termo determina a direção de busca no espaço de pesos para o peso J_{ij} .

Utilizando as equações (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) e (2.6), pode-se obter a seguinte expressão para a correção dos pesos sinápticos:

$$\Delta J_{ij}(n) = \eta \delta_j(n) S_i(n), \quad (2.8)$$

¹*Bias* são sinais que delimitam o limiar de ativação, se assemelhando a sinais vindos de neurônios ocultos na rede que não sofrem influência de nenhum outro neurônio de uma camada anterior e que sempre enviam sinal para um neurônio da rede.

cujo *gradiente local* $\delta_j(n)$, que aponta para as modificações necessárias nos pesos sinápticos, é definido como

$$\delta_j(n) = e_j(n)\varphi'_j(h_j(n)). \quad (2.9)$$

Das equações (2.8) e (2.9), nota-se a importância do sinal de erro $e_j(n)$ no cálculo do ajuste dos pesos sinápticos $\Delta J_{ij}(n)$ do neurônio j . Desta forma, pode-se separar dois casos distintos no cálculo do erro, dependendo da camada da rede onde o neurônio j está localizado.

CASO 1 - O Neurônio j é um nó de saída

Neste caso existe uma resposta desejada para o neurônio. Conseqüentemente, o sinal de erro associado ao neurônio é calculado através da equação (2.3) e utilizado diretamente para calcular o gradiente local através da equação (2.9).

CASO 2 - O Neurônio j é um nó oculto

Neste caso não existe uma resposta desejada para o neurônio. Apesar de que os neurônios ocultos não são acessíveis diretamente, eles compartilham a responsabilidade por qualquer erro cometido na saída da rede. Correspondentemente, o sinal de erro para o neurônio oculto deve ser determinado de forma recursiva, em termos dos sinais de erro de todos os neurônios aos quais o neurônio oculto está diretamente conectado. O gradiente local $\delta_j(n)$ para um neurônio oculto j da rede pode ser reescrito como

$$\delta_j(n) = \frac{\partial E(n)}{\partial S_j(n)} \frac{\partial S_j(n)}{\partial h_j(n)} = -\frac{\partial E(n)}{\partial S_j(n)} \varphi'_j(h_j(n)). \quad (2.10)$$

Após algumas manipulações e recorrendo às equações (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) e (2.6),

obtêm-se a *fórmula de retropropagação* para o gradiente local $\delta_j(n)$, dado por

$$\delta_j(n) = \varphi'_j(h_j(n)) \sum_k \delta_k(n) J_{kj}(n), \quad (2.11)$$

onde j é um neurônio oculto e k um neurônio da camada posterior à camada na qual o neurônio j está localizado.

Primeiramente, a correção dos pesos é realizada nos neurônios de saída, através da regra delta (Eq. (2.8)), onde o gradiente local $\delta_j(n)$ é dado pela equação (2.9), pois as respostas desejadas para o conjunto de treinamento são conhecidas. Em seguida, é realizada a correção dos pesos das camadas anteriores (camadas ocultas), camada por camada, através do uso da mesma regra. Entretanto, neste segundo caso o gradiente local é calculado com o uso da equação (2.11), pois o erro causado por cada neurônio causa é distribuído entre todos os neurônios de saída da rede.

Um perceptron de múltiplas camadas treinado com o algoritmo de retropropagação pode ser visto como um meio prático para realizar um *mapeamento não-linear de entrada-saída*. Conseqüentemente, pode ser utilizado para aproximação de funções. A seção a seguir, apresenta uma aplicação prática para este tipo de rede, onde é resolvido um problema de mapeamento entrada-saída que realiza a estimativa da permeabilidade em poços petrolíferos.

2.2 Estimativa da Permeabilidade de poços petrolíferos

Uma das características mais importantes das formações rochosas de reservatórios de hidrocarbonetos é a permeabilidade, que permite a vazão de fluídos no meio poroso. Um conhecimento detalhado deste parâmetro geofísico desempenha um papel importante na tomada de decisão e gerenciamento do processo de produção de campos petrolíferos. A permeabilidade geralmente é medida no laboratório após a testemunhagem do poço ou através de dados de poços testes. Entretanto, dados referentes a permeabilidade, são disponíveis apenas para um conjunto restrito de poços de um campo, enquanto a maioria deles possuem apenas seu perfil geofísico levantado através de uma sonda de perfilagem. No laboratório, rochas trazidas para a superfície são mantidas sob mesmas condições de temperatura e pressão das encontradas no subsolo, para a medida da permeabilidade. Este é um procedimento de alto custo, mas necessário que deve ser realizado pelo menos em uma fração dos poços de um campo produtor. Um procedimento alternativo, porém de alto custo operacional, é realizar a medição em um poço de teste. Estas limitações tornam o processo inviável nos casos de campos heterogêneos onde a permeabilidade muda significadamente entre os diferentes poços do campo. Adquirir dados precisos e detalhados da permeabilidade de uma formação permanece portanto como um desafio fundamental na área de engenharia petrolífera.

No entanto, existe uma grande variedade de informações adicionais a respeito da maioria dos poços que são obtidas através de sua perfilagem. Uma estratégia utilizada frequentemente é a análise da regressão para estimar a correlação entre a permeabilidade e uma das diversas quantidades obtidas através da sonda de perfilagem, usualmente a porosidade das rochas. Apesar deste procedimento fornecer estimativas razoáveis para a permeabilidade em campos homogêneos, ela despreza

as correlações com outras quantidades relevantes e é portanto susceptível a grandes erros em campos heterogêneos. Nos últimos anos, a utilização das redes neurais artificiais para a estimativa da permeabilidade da formação tem demonstrado a capacidade das mesmas em identificar correlações entre múltiplas quantidades geofísicas [12, 13, 14, 15]. As redes neurais artificiais têm sido muito utilizadas em diversos processos de controle e produção [16, 17, 18], por ser uma ferramenta de baixo custo e devido a sua capacidade de aprender, se auto-ajustar e de generalizar.

2.2.1 Estudo da eficiência da rede

Para testar a eficiência da rede neural desenvolvida para aplicações destinadas a estimar parâmetros petrofísicos, nós utilizamos como dados de treinamento e teste um conjunto de parâmetros disponíveis do campo de *Stringtown (West Virginia - USA)* [19]. Estes dados foram originalmente obtidos pelo Departamento de Engenharia de Petróleo e Gás Natural da Universidade de West Virginia e previamente utilizados para o desenvolvimento e teste de novas arquiteturas de redes neurais artificiais. Neste campo, o reservatório se encontra a uma profundidade média de $914.4m$ com uma espessura da ordem de $15.2m$. A ocorrência de poços de alta e baixa produtividade reflete a heterogeneidade da formação deste campo. Dados referentes a seis poços foram utilizados (PH1, TH8, PH9, B19, L13, B18). Entre as quantidades disponíveis, foram utilizadas o registro da radioatividade natural das camadas geológicas (*Gamma Ray*), *densidade, suas linhas de base e derivadas com relação a profundidade*. Apesar de ser uma quantidade que possui grande correlação com a permeabilidade, a porosidade das rochas não foi utilizada como uma variável de treinamento. A tabela (2.1) representa um conjunto típico dos dados utilizados.

A estratégia de treinamento consistiu em considerar dados de cinco dos seis poços disponíveis para o treinamento da rede, deixando o último para teste da capacidade de previsão da rede após o treinamento. Como a distribuição do número

| Profund. | Gamma Ray | Dens. | GR derivada | Dens. derivada | Permeab. |
|----------|-----------|-------|-------------|----------------|----------|
| 2890 | 98.072 | 2.627 | -55.096 | -.044 | 0.2 |
| 2891.75 | 41.322 | 2.558 | -13.222 | -.08 | 3.3 |
| 2893 | 34.711 | 2.477 | -1.102 | -.022 | 40 |
| 2893.5 | 33.058 | 2.458 | -3.306 | -.034 | 55 |
| 2895 | 39.669 | 2.418 | 5.508 | -.028 | 92 |
| 2895.75 | 42.424 | 2.381 | -1.102 | -.044 | 80 |
| 2896.5 | 41.873 | 2.347 | -2.204 | -.052 | 84 |
| 2898.25 | 41.322 | 2.341 | 0 | -.006 | 123 |
| 2898.75 | 41.873 | 2.334 | 2.204 | -.012 | 136 |
| 2900 | 45.73 | 2.289 | 5.51 | -.014 | 160 |
| 2901 | 50.689 | 2.281 | 3.306 | -.014 | 135 |
| 2902 | 52.342 | 2.274 | 2.204 | .002 | 144 |
| 2903 | 55.647 | 2.284 | 1.102 | .01 | 124 |

Tabela 2.1: *Parâmetros geofísicos do poço PH – 9 utilizados no treinamento da rede neural artificial. As linhas de base para este poço foram GR – Base = 130 e Dens – Base = 2.71. A profundidade foi utilizada apenas como índice das medidas e não foi incluída no treinamento.*

de medidas em cada poço e a distribuição dos valores da permeabilidade nos mesmos é acentuadamente não homogênea, nós fixamos em 6 o número de pontos de cada poço que foi usado no treinamento. Adicionalmete, o conjunto de exemplos retirados de cada poço continha os pontos de maior e de menor permeabilidade obtida para o poço, sendo os outros pontos escolhidos aleatoriamente. Todos os valores dos parâmetros foram normalizados para melhorar a convergência do tempo de treinamento da rede.

Nesta etapa de nosso estudo, consideramos uma rede com 3 camadas intermediárias compostas de 5, 5 e 3 neurônios. Esta arquitetura foi a que demonstrou a melhor eficiência para o conjunto de dados disponíveis. A rede foi treinada com o algoritmo de retropropagação durante 3500 passos, após os quais a capacidade de previsão da mesma foi testada. Este experimento foi repetido 6 vezes considerando diferentes poços como teste da eficiência da rede.

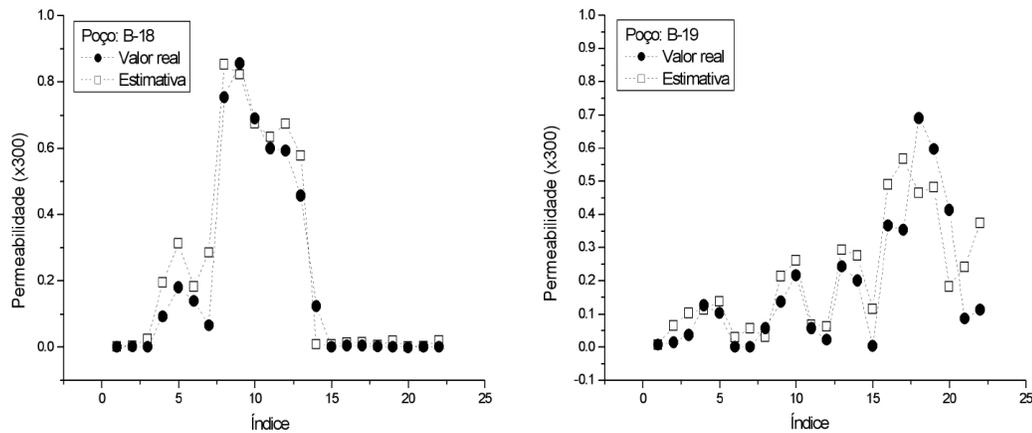


Figura 2.1: Permeabilidades estimada e medidas para os poços $B - 18$ e $B - 19$. Para o poço $B - 18$, a rede neural utilizada consegue capturar as rápidas variações da permeabilidade que apresenta valores maiores na região intermediária do reservatório. Para o poço $B - 19$ a rede neural utilizada consegue capturar as oscilações da permeabilidade que apresenta valores maiores na região mais profunda do reservatório.

Na figura (2.1), são apresentadas duas previsões representativas da rede neural desenvolvida. Note que, em geral, a rede consegue prever o perfil de permeabilidade dos poços com uma acurácia relativamente boa, detectando rápidas variações e oscilações, apesar de não utilizar em seu treinamento qualquer medida da porosidade das rochas. Entretanto, algumas destas mudanças bruscas não são detectadas de maneira eficiente, o que pode estar refletindo a ausência de dados de treinamento sobre outros parâmetros geofísicos fortemente correlacionados à permeabilidade. Considerando o reduzido conjunto de treinamento, a correlação entre os dados previstos e os efetivamente medidos demonstram que esta metodologia pode avançar para estimativas precisas da permeabilidade.

Para melhor quantificar as correlações entre a previsão da rede e os dados realmente medidos, nós apresentamos na figura (2.2) os valores previstos em função dos valores medidos. Uma correlação perfeita é representada neste diagrama por uma linha reta ao longo da diagonal. Note que a maioria dos dados está localizada

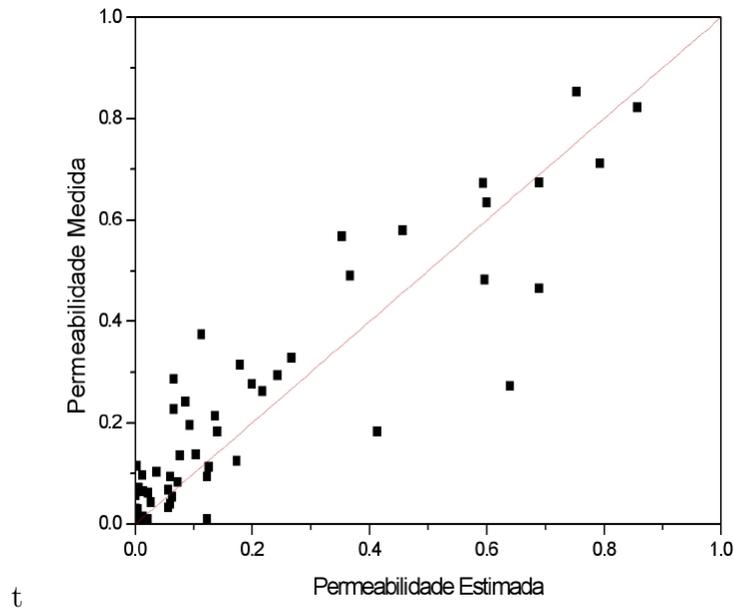


Figura 2.2: *Permeabilidades real medida versus a permeabilidade estimada via rede neural. A correlação entre os dados pode ser visualizada pela tendência dos mesmos ficarem concentrados ao longo da diagonal. Os maiores desvios são observados para grandes valores da permeabilidade.*

próximo a esta diagonal, exceto por algumas flutuações mais evidentes. O coeficiente de correlação obtido para este conjunto de previsões foi $R = 0.90$ sendo da mesma ordem de grandeza das melhores correlações obtidas em estudos anteriores [13].

2.2.2 Otimização do aprendizado

Após o desenvolvimento de um perceptron designado a fazer estimativas da permeabilidade a partir de um conjunto de parâmetros petrofísicos disponíveis de poços, buscamos encontrar a melhor arquitetura que otimiza o processo de aprendizado da rede para uma rede com 2 camadas intermediárias. Para um estudo da arquitetura que otimizará o processo de aprendizado para a estimativa da permeabilidade, foram utilizados como dados de treinamento e teste um conjunto de parâmetros disponíveis do campo de *Ula and Gyda Fields, Central Graben, Norwegian Sector, North Sea*

| Prof. (m) | Poros. % | T. do grão (mm) | Micr. | Macr. | Arg. | Carb. | Permeab. (md) |
|--------------|-------------|--------------------|-------|-------|------|-------|------------------|
| 3401.78 | 19.6 | 0.1 | 4 | 2 | 3 | 2 | 10 |
| 3410.05 | 19.5 | 0.1 | 3 | 2 | 3 | 1 | 127 |
| 3418.34 | 21.7 | 0.2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2036 |
| 3437.3 | 24.3 | 0.15 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1461 |
| 3444.22 | 20 | 0.15 | 0 | 1 | 1 | 1 | 917 |
| 3456.95 | 27.9 | 0.1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 933 |
| 3474.15 | 20 | 0.1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 140 |

Tabela 2.2: *Parâmetros geofísicos do poço ‘O’ utilizados no treinamento da rede. A profundidade foi utilizada apenas como índice das medidas e não foi incluída no treinamento.*

[19]. Estes dados foram originalmente obtidos pela *U.S. Geological Survey*. Neste campo o reservatório se encontra a uma profundidade média de 3775m. Dados referentes a quinze poços foram utilizados (*A, B, ..., O*). Entre as quantidades disponíveis, foram utilizadas a *porosidade, tamanho do grão, microquartz, macroquartz, argila e carbonato*. A porosidade das rochas é uma das quantidades mais importantes, por ser um parâmetro fortemente correlacionado à permeabilidade da formação. A tabela (2.2) representa um conjunto típico dos dados utilizados.

A estratégia de treinamento constituiu em isolar dados de um dos quinze poços disponíveis, que servirá como teste para a verificação da previsão da rede, e utilizar o restante para o treinamento. Como a distribuição de valores da permeabilidade dos poços é acentuadamente não homogênea, a maneira ideal de construir um conjunto de treinamento é através da seleção homogênea dos dados. A figura (2.3) apresenta um histograma com a distribuição de valores da permeabilidade, que mostra a não homogeneidade dos dados utilizados para o treinamento. Utilizando esta seleção dos dados, a rede é treinada com todas as faixas possíveis de permeabilidade, não comprometendo a estimativa da rede para determinados valores de permeabilidade. Todos os valores dos parâmetros foram normalizados para melhorar a convergência do tempo de treinamento.

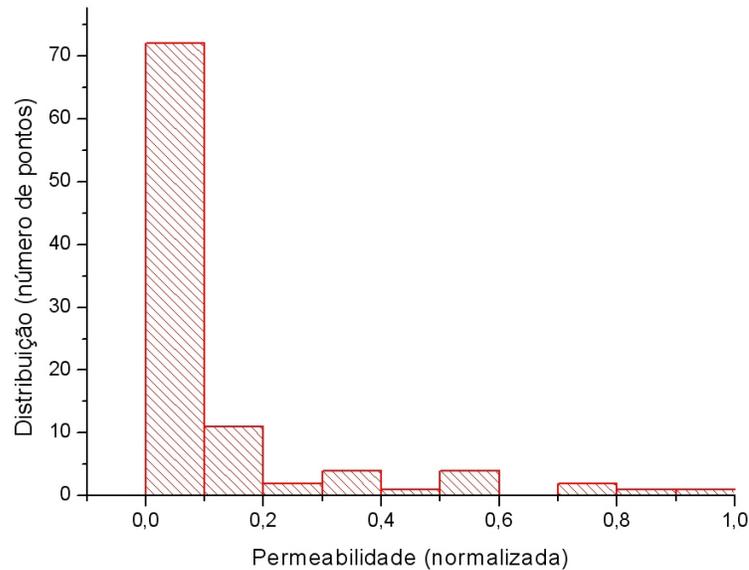


Figura 2.3: *Histograma com a distribuição de valores da permeabilidade.*

O estudo realizado consistiu em considerar uma rede com duas camadas intermediárias, onde variamos o número de neurônios das camadas de todas as maneiras possíveis, considerando um mínimo de dois, e um máximo de doze neurônios no total de neurônios. Para cada caso, o treinamento é repetido 200 vezes, obtendo-se uma média do erro na estimativa da permeabilidade produzida pela rede para o poço separado inicialmente. Este processo é realizado 15 vezes, onde em cada etapa será separado um dos poços. Em seguida, é realizada uma média dos erros médios de cada poço, que indicará o erro médio produzido por este tipo de arquitetura de rede.

Na figura (2.4) é apresentado o erro médio como função do número de neurônios para a rede com duas camadas intermediárias e diferentes quantidades de neurônios, onde foi plotada a configuração que forneceu o menor erro na estimativa da permeabilidade para cada quantidade de neurônios. Como era de se esperar, a rede apresenta um erro elevado para poucos de neurônios e um erro menor para

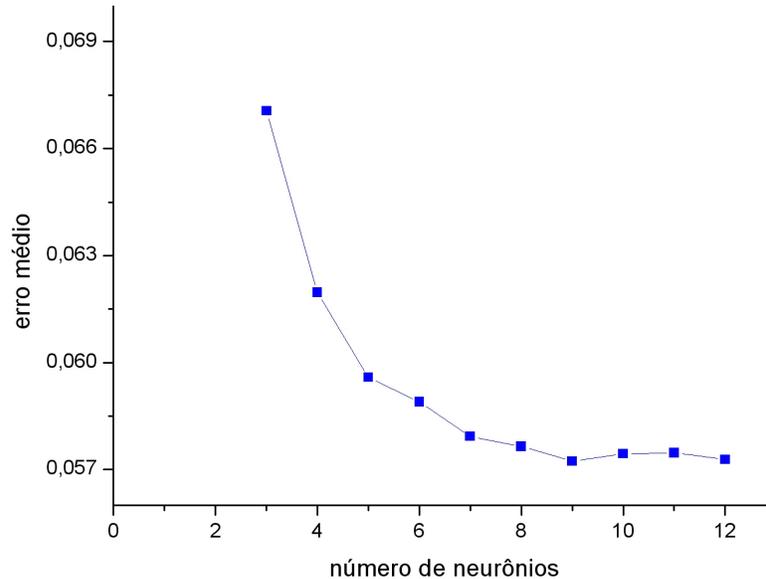


Figura 2.4: Erro médio na estimativa da permeabilidade para diversas arquiteturas de rede. Para a rede com 2 camadas intermediárias, foi plotado somente os pontos cuja a arquitetura forneceu o menor erro para a estimativa.

redes com mais neurônios, devido à não linearidade atrelada à correlação entre as quantidades envolvidas no treinamento da rede. Na tabela (2.3), são apresentadas as arquiteturas de rede com duas camadas intermediárias que obtiveram as melhores estimativas para a permeabilidade. É bastante importante ressaltar que estes resultados apresentados são válidos para este conjunto de treinamento, pois para cada conjunto de treinamento, encontraremos uma arquitetura específica que fornecerá a melhor estimativa para a permeabilidade.

Na figura (2.5), são apresentadas algumas das previsões realizadas pela rede neural desenvolvida, cuja arquitetura obteve o menor erro (9 neurônios, 5 na primeira e 4 na segunda camada). Da mesma forma que no caso considerado anteriormente, note que, em geral, a rede consegue prever o perfil de permeabilidade dos poços com uma acurácia relativamente boa apesar de algumas mudanças bruscas

| Número total de neurônios nas camadas intermediárias | Neurônios na 1ª camada | neurônios na 2ª camada |
|--|------------------------|------------------------|
| 3 | 2 | 1 |
| 4 | 2 | 2 |
| 5 | 2 | 3 |
| 6 | 3 | 3 |
| 7 | 3 | 4 |
| 8 | 3 | 5 |
| 9 | 5 | 4 |
| 10 | 4 | 6 |
| 11 | 7 | 4 |
| 12 | 6 | 6 |

Tabela 2.3: *Número de Neurônios nas camadas intermediárias para uma rede com 2 camadas intermediárias que apresentaram menor erro na estimativa da permeabilidade.*

não serem detectadas de forma eficiente. Isto reflete a ausência de dados de treinamento sobre outros parâmetros geofísicos fortemente correlacionados à permeabilidade. Considerando o reduzido conjunto de treinamento, os resultados apresentados demonstram que esta metodologia pode avançar para estimativas mais precisas da permeabilidade.

Em resumo, foi desenvolvida uma rede neural artificial de múltiplas camadas para fazer estimativas da permeabilidade da formação a partir de suas correlações complexas com outras quantidades geofísicas. Neste estudo, foram utilizados dados disponíveis de poços dos campos de *Stringtown (West Virginia - USA)*: onde mostramos a capacidade da rede de realizar previsões, obtendo uma correlação significativa entre os valores estimados e os valores medidos; e *Ula and Gyda Fields, Central Graben, Norwegian Sector, North Sea*: onde testamos a capacidade de previsibilidade da rede realizando um estudo detalhado sobre a melhor arquitetura que poderia ser utilizada para treinar a rede para este conjunto de dados. A arquitetura encontrada que fornece o maior correlação entre os valores previstos e os obtidos através de medidas diretas da permeabilidade, foi a rede com 2 camadas intermediárias composta

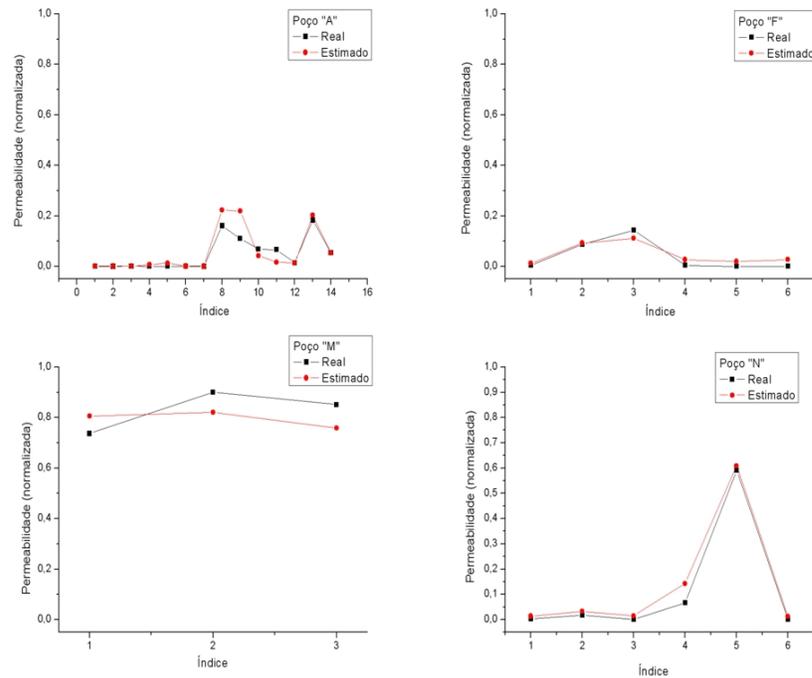


Figura 2.5: Gráficos da estimativa da permeabilidade de 4 dos 12 poços utilizados para o treinamento da rede.

por 9 neurônios, onde 5 se encontram na primeira e 4 na segunda camada intermediária. Estes resultados suportam a adequação do uso de rede neurais artificiais como uma ferramenta útil para a estimativa de parâmetros petrofísicos que pode fornecer dados importantes para tomadas de decisões em processos de produção na indústria de petróleo e gás natural. Para finalizar, pode-se inferir sobre possíveis melhorias nesta metodologia que possam vir a contribuir para aumentar a confiabilidade das previsões derivadas de redes neurais artificiais. Neste sentido, é fundamental que as principais quantidades que são mais fortemente correlacionadas ao parâmetro a ser estimado sejam utilizadas durante o treinamento, como a porosidade, que foi utilizada neste trabalho. Apesar de não haver uma regra geral para escolher a melhor arquitetura, novas regras de aprendizado têm sido recentemente propostas que podem sistematicamente melhorar a eficiência de redes neurais. Um

deles é uma adaptação do mecanismo de propagação reversa que usa apenas o sinal do gradiente do erro, que é em geral mais eficiente quando muitos dados são disponíveis para o treinamento. Uma segunda possibilidade é a utilização de algoritmos de aprendizado de mais alta ordem quando poucos dados estão disponíveis. Mais recentemente um algoritmo de aprendizado baseado em conceitos de criticalidade autoorganizada foi proposto que, além de ter uma alta eficiência, apresenta características importantes de adaptabilidade a novos conjuntos de treinamento [20, 21].

Capítulo 3

Modelo de Hopfield

As redes neurais estão contidas numa classe de sistemas que são compostos por um número grande de unidades que interagem entre si e que podem sofrer uma influência do meio externo. Em geral, estes tipos de sistemas possuem um comportamento que podem gerar fenômenos coletivos complexos como por exemplo transições de fases, caos, etc. Tendo em vista este tipo de comportamento, a mecânica estatística busca através de diversos métodos matemáticos e computacionais, explicar com detalhes o comportamento destes sistemas.

Um modelo de rede neural artificial que possui uma grande importância no ponto de vista físico, é o modelo de Hopfield. Este modelo, constituiu um grande avanço no estudo das RNAs ao associar o processo de memorização com o problema de minimização de uma função energia da rede. Hopfield utilizou a analogia com sistemas magnéticos clássicos desordenados [22, 23] proposta por Little [8], onde os neurônios ativos (+1) representavam *spins up* e neurônios inativos (-1) representavam *spins down*, tratando a rede como um sistema magnético com interações de longo alcance onde cada mínimo da função energia deste sistema corresponderia a um padrão (memória) armazenado. É importante ressaltar que esta analogia trata-se somente de uma analogia puramente matemática e que isto não significa a

equivalência física entre os modelos.

No modelo de Hopfield, a unidade central de processamento é o neurônio de McCulloch-Pitts, onde cada neurônio i ajusta seu estado aleatoriamente e assincronamente¹ (sequencialmente) com o tempo. Em seu modelo, foram impostas algumas particularidades:

- Cada neurônio se conecta a todos os outros neurônios da rede, sem haver realimentação;
- As conexões sinápticas são simétricas, ou seja, $J_{ij} = J_{ji} \forall i, j$;
- A função de ativação de cada neurônio é não linear.

O modelo original proposto por Hopfield possui algumas limitações, que tem origem na ausência de algumas características importantes presentes nas redes neurais biológicas, tais como: ruído estocástico, diluição e assimetria nas conexões sinápticas, diferentes escalas de tempo presentes nas atividades neuronais (períodos refratários) e outros ingredientes importantes na biologia das redes neurais. Apesar de suas limitações, o modelo de Hopfield é de extrema importância para o entendimento de certos aspectos do comportamento do cérebro para a criação de modelos mais realistas.

O modelo de Hopfield é conhecido como modelo de *memória endereçável por conteúdo*, ou *memória associativa*, na qual consiste em determinar os pesos sinápticos que definem os padrões armazenados como mínimos da função energia.

O Processamento da rede de Hopfield é dividida em duas etapas distintas:

- A primeira etapa no processamento do modelo de Hopfield é o “treinamento”, baseado no *armazenamento* dos padrões na rede. O armazenamento é realizado

¹A atualização dos sítios pode ser realizada também de forma síncrona (paralela). Apesar de ambos os casos serem interessantes, a atualização assíncrona apresenta uma maior semelhança com as redes neurais biológicas.

através do cálculo dos pesos sinápticos utilizando a *regra de aprendizagem de Heeb*, onde cada memória será codificada como um mínimo da função energia.

- A segunda etapa é o reconhecimento (recuperação de um padrão), que ocorre quando partimos de uma situação inicial que seja uma versão igual ou parcial a um dos padrões armazenados na rede. Neste caso, a dinâmica irá alterar o estado da rede que percorrerá um caminho no espaço de estados até encontrar uma configuração de mínima energia que corresponda ao padrão mais próximo ao fornecido inicialmente.

Na dinâmica, o processo de atualização é dado pela equação (1.3), onde o estado do neurônio é alterado somente se o campo local induzido for maior que seu limiar de ativação. Quando as mudanças nos estados dos neurônios cessam, a rede atinge um ponto de energia mínima (ponto fixo) e permanece lá permanentemente. É importante ressaltar que, mesmo se um neurônio é ativado quando na realidade seu estado deveria ser inativo, o comportamento coletivo da rede irá corrigir este erro local e conduzir a rede para um de seus pontos fixos.

3.1 O Problema da Memória Associativa

A memória associativa é uma ferramenta bastante utilizada pelo nosso cérebro em diversas situações, por exemplo, quando olhamos a foto de uma paisagem, rapidamente associamos essa foto à lembrança de um lugar visitado.

A principal característica da memória associativa, é a capacidade de recuperar um padrão armazenado na rede mesmo na presença de erros. Para uma melhor compreensão, considere o exemplo no qual temos informações armazenadas sobre diversos cientistas. Se iniciarmos o padrão “evolução”, rapidamente lembramos de Darwin, e “ $F = m \cdot a$ ” lembramos de Newton. No entanto, se fornecemos um padrão parcial, ou corrompido, a rede possui a capacidade de associar a um padrão armaze-

nado, por exemplo, mesmo o fornecimento de um padrão como “ $E = m \cdot c^3$ ” a rede pode associar a Einstein.

O problema básico da memória associativa [17], consiste em:

“Armazenar um conjunto de p padrões ξ_i^μ , tal que, ao apresentarmos um novo padrão ζ_i , a rede responda reproduzindo o padrão armazenado que mais se assemelha ao padrão fornecido ζ_i ”,

onde os padrões são indexados pela letra grega μ ($\mu = 1, 2, \dots, p$) e os neurônios da rede por i ($i = 1, 2, \dots, N$). Os padrões armazenados (ξ_i^μ) e o padrão de teste (ζ_i) podem assumir valores 0 ou 1 em cada sítio i , mas podem ser adaptados de maneira mais conveniente.

Este problema pode ser tratado simplesmente através do armazenamento de um conjunto de padrões ξ_i^μ , e em seguida escrevendo um programa que calcule a *distância de Hamming* (número de bits diferentes entre dois números binários)

$$\sum_i [\xi_i^\mu (1 - \zeta_i) + (1 - \xi_i^\mu) \zeta_i] \quad (3.1)$$

entre o padrão de teste (ζ_i) e cada um dos padrões armazenados (ξ_i^μ), encontrando qual é o padrão que possui menor distância e fornecendo como resposta este padrão armazenado.

Na realidade, queremos observar como a rede de McCulloch-Pitts realiza este processo, encontrando a matriz dos pesos sinápticos J_{ij} que nos forneça a menor distância em (3.1). O tratamento básico do problema da memória associativa foi realizado por Hopfield que será descrito na seção seguinte.

3.2 O Modelo

Para simplificar os cálculos, vamos utilizar $+1$ para representar o estado de neurônios ativos e -1 para neurônios inativos. Desta maneira o processo de atualização é dado pela regra determinística:

$$S_i(t+1) = \begin{cases} +1 & \text{se } h_i(t) \geq 0 \\ -1 & \text{se } h_i(t) < 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

que pode ser escrito de maneira mais simples com a utilização da função sinal:

$$S_i(t+1) = \text{sgn}[h_i(t)], \quad (3.3)$$

onde $h_i(t)$ é o campo local induzido sobre o neurônio i no instante t , possuindo a seguinte expressão:

$$h_i(t) = \sum_{j=1}^N J_{ij} S_j(t) - \theta_i, \quad (3.4)$$

onde o parâmetro θ_i é o limiar de ativação do neurônio i .

O armazenamento de informação é realizada nos pesos sinápticos segundo a *regra de aprendizagem de Hebb*. Hebb sugeriu que as mudanças nas conexões sinápticas são proporcionais à correlação entre o disparo dos neurônios pré-sinápticos e pós-sinápticos. Em outras palavras, se dois neurônios disparam ao mesmo tempo, suas conexões tendem a se fortalecer. Se o neurônio i recebe sinal do neurônio j , o peso desta conexão é modificado da seguinte maneira:

$$\Delta J_{ij}(t) = \lambda S_i(t) S_j(t), \quad (3.5)$$

onde λ é uma constante que representa a *taxa de aprendizagem*. A Equação (3.5) nos mostra claramente a natureza correlativa de uma sinapse hebbiana.

Considere uma rede com p padrões armazenados, representados pelo vetor

$\xi^\mu = (\xi_1^\mu, \xi_2^\mu, \dots, \xi_N^\mu)$, com $\mu = 1, 2, \dots, p$. De acordo com a generalização da *regra de aprendizagem de Heeb*, o peso sináptico do neurônio i com o neurônio j é dado por:

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu, \quad J_{ii} = 0. \quad (3.6)$$

O fator multiplicativo $\frac{1}{N}$ na equação (3.6) é para simplificar os cálculos que serão realizados. O fato de $J_{ii} = 0$, significa que o neurônio não dispara um sinal para ele mesmo (sem realimentação). Hopfield mostrou que com esta regra sináptica, a equação (3.3) permitia o armazenamento associativo de padrões desde que os padrões armazenados possuissem configurações aleatórias e não correlacionadas. Pode-se observar que esta expressão está de acordo com a idéia original de Hebb, pois, se dois neurônios enviam sinais iguais quando a rede reconhece um dos padrões armazenados (i.e. $\text{sgn}(\xi_i^\nu) = \text{sgn}(\xi_j^\nu)$), a intensidade da conexão entre estes neurônios aumenta de um fator $\frac{1}{N}$ ($J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu \neq \nu} \xi_i^\mu \xi_j^\mu + \frac{1}{N}$).

Para uma simplificação dos cálculos, iremos adotar $\theta_i = 0$, pois o limiar de ativação não é útil para padrões gerados aleatoriamente. Substituindo o J_{ij} dado em (3.6), a equação (3.4) para o campo local assume a forma:

$$h_i(t) = \sum_{j=1}^N J_{ij} S_j(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu S_j(t). \quad (3.7)$$

Utilizando a analogia com sistemas magnéticos, podemos notar a semelhança entre o termo de campo local induzido sobre o neurônio i dado pela equação (3.7) e o campo exercido sobre um spin numa rede do tipo Ising composta por N spins, cuja a interação é de longo alcance. Desta maneira, a função energia no modelo de Hopfield, em analogia com os sistemas magnéticos, é definida como:

$$H(t) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} S_i(t) S_j(t) - H^{ext}(t), \quad (3.8)$$

o primeiro termo na energia em (3.8), é devido às interações entre os neurônios, análogo às interações entre spins nos modelos magnéticos. O fator $\frac{1}{2}$ aparece na frente do primeiro termo pois a soma é duplicada (pois é realizada sobre todo i e j). O segundo termo é um termo de *campo externo*², que pode ser conveniente para adicionarmos novos “ingredientes” ao modelo de Hopfield.

A propriedade principal da função energia, é que sempre decresce ou permanece constante durante a evolução dinâmica do sistema e os pontos de mínimo correspondem aos padrões armazenados (regra de Hebb).

3.2.1 Análise da Função Energia

Como iremos demonstrar os principais resultados para o modelo de Hopfield, vamos considerar o caso onde há somente interação entre os neurônios, não havendo nenhum termo no hamiltoniano proveniente de campos externos (i.e. $H^{ext}(t) = 0$) e que as conexões sinápticas são simétricas (i.e. $J_{ij} = J_{ji}$). Desta forma, a equação (3.8) pode ser reescrita em uma forma alternativa,

$$H(t) = C(t) - \sum_{(ij)} J_{ij} S_i(t) S_j(t), \quad (3.9)$$

onde a soma agora é realizada sobre todos os pares distintos ij e o termo ii foi excluído da soma, resultando numa constante C .

Pode-se demonstrar facilmente que a dinâmica (3.3) sempre decresce a energia do sistema. Após um passo da dinâmica, o novo estado $S_i(t+1)$ é regido pela equação (3.3) e será dado por:

$$S_i(t+1) = \operatorname{sgn} \left(\sum_{j=1}^N J_{ij} S_j(t) \right). \quad (3.10)$$

Note que, se $S_i(t+1) = S_i(t)$, a energia permanecerá a mesma. Caso o estado seja

²Na realidade, o termo campo externo não é o mais apropriado para o que iremos tratar adiante. Este fato será explicado em detalhes no capítulo 4.

atualizado, temos $S_i(t+1) = -S_i(t)$, portanto a diferença entre a energia anterior e atual será:

$$\Delta H = H(t+1) - H(t) = 2S_i(t) \sum_j J_{ij} S_j(t) - 2J_{ii}. \quad (3.11)$$

Da equação (3.10), pode-se observar que o primeiro termo da equação (3.11) é negativo e que por definição, no modelo de Hopfield, o segundo termo $J_{ii} = 0 \forall i$. Desta maneira, a função energia descrita em (3.8) decresce com o tempo se o estado S_i é alterado.

3.2.2 Estabilidade dos Padrões

Utilizando a regra de Heeb, é simples mostrar que os padrões armazenados são os pontos de mínimos na energia e desta maneira a própria dinâmica conduz o estado inicial do sistema para o estado referente à um destes padrões.

Considere o caso de uma rede com um único padrão armazenado. Partindo da equação (3.8) e do fato que $J_{ij} = \frac{1}{N} \xi_i \xi_j$, a energia pode ser escrita como:

$$H(t) = -\frac{1}{2N} \left(\sum_{i=1}^N S_i(t) \xi_i \right)^2. \quad (3.12)$$

É fácil perceber que o ponto de mínimo é dado quando $S_i(t) = \xi_i$ ou $S_i(t) = -\xi_i \forall i$. Ou seja, para uma rede com um único padrão armazenado existem dois pontos de mínima energia: o primeiro, é o próprio padrão armazenado ($S_i(t) = \xi_i$) e o segundo é o estado reverso ou anti-memória ($S_i(t) = -\xi_i$). Isto indica que, se partimos de uma configuração inicial que corresponda a mais de 50% da configuração do padrão armazenado, a rede convergirá para este padrão, caso contrário, a rede convergirá para a anti-memória.

Considere agora o caso de uma rede com p padrões armazenados. A energia

deste sistema é dada pela soma de (3.12) sobre todos os padrões armazenados:

$$H(t) = -\frac{1}{2N} \sum_{\mu=1}^p \left(\sum_{i=1}^N S_i(t) \xi_i^\mu \right)^2. \quad (3.13)$$

Se para cada padrão armazenado existem dois estados estáveis (memória e anti-memória), para p padrões teremos $2p$ configurações estáveis que são mínimos locais da função energia.

Vamos agora examinar a estabilidade de um padrão particular. A condição de estabilidade é que $\text{sgn}(h_i^\nu) = \xi_i^\nu$ para todo i , onde h_i^ν é o campo local induzido sobre o neurônio i (Eq. 3.7) para o caso na qual estamos inicializando a rede do padrão ξ^ν ($S_i(0) = \xi_i^\nu$). Separando na equação (3.7) o termo $\mu = \nu$ e após algumas manipulações podemos encontrar a seguinte expressão:

$$h_i^\nu = \xi_i^\nu + \frac{1}{N} \sum_{\mu \neq \nu}^p \xi_i^\mu \sum_{j=1}^N \xi_j^\mu \xi_j^\nu. \quad (3.14)$$

O primeiro termo é chamado *termo de sinal*, onde este privilegia o padrão a ser reconhecido. O segundo termo é chamado *termo de ruído*, na qual representa a “interferência” entre o padrão a ser reconhecido e os padrões armazenados. Se o termo de ruído for nulo ou muito pequeno, o termo de sinal será predominante e consequentemente os padrões serão estáveis. Se o termo de ruído for grande, comparado com o termo de sinal, o reconhecimento da rede é desestabilizado surgindo desta maneira estados meta-estáveis que não correspondem aos padrões armazenados, chamados *estados espúrios*.

Estados Espúrios

De acordo com o exposto anteriormente, sabe-se que (para poucos padrões armazenados p), a dinâmica do sistema possui alguns atratores (mínimos locais na energia) que são os estados correspondentes aos padrões armazenados ξ^μ . Estes atratores

são denominados *estados de reconhecimento*. Em momento algum, foi mostrado que a rede possui somente estes atratores, somente mostrou-se que estes estados e seus inversos são atratores da rede.

Outros tipos de atratores conhecidos na literatura são as *misturas de estados* ξ^{mix} , que são atratores estáveis que correspondem a combinações lineares de um número ímpar de padrões armazenados [25]. Esta combinação pode ser escrita como:

$$\xi_i^{mix} = \sum_{\nu=1}^{m(odd)} \pm \xi_i^\nu. \quad (3.15)$$

Todos as combinações possíveis de sinais podem ser utilizadas. Para uma simplificação, vamos analisar um caso simples, onde qualquer outro caso pode ser entendido como uma generalização deste caso. Considere a seguinte mistura de estados:

$$\xi_i^{mix} = \xi_i^{\mu_1} + \xi_i^{\mu_2} + \xi_i^{\mu_3}. \quad (3.16)$$

Observe que em média, o sítio i do estado ξ^{mix} possui o mesmo sinal que o sítio i do estado ξ^{μ_1} , em 3/4 dos casos; somente se $\xi_i^{\mu_2}$ e $\xi_i^{\mu_3}$ possuírem sinais opostos ao sinal de $\xi_i^{\mu_1}$, o sinal de ξ_i^{mix} é contrário. Neste caso, o estado ξ^{mix} possuirá uma *distância de Hamming* $N/4$ com os estados ξ^{μ_1} , ξ^{μ_2} e ξ^{μ_3} . Isto implica que em média, temos $\sum_i \xi_i^{mix} \xi_i^{\mu_1} = N/2$. Para estudarmos a estabilidade do estado (3.16), podemos escrever o campo local induzido sobre o neurônio i para o caso onde o estado da rede é uma mistura de estados, da seguinte forma:

$$h_i^{mix} = \xi_i^{\mu_1} + \xi_i^{\mu_2} + \xi_i^{\mu_3} + ruido. \quad (3.17)$$

certamente, a condição de estabilidade é válida para a mistura de estados (3.16), pois temos que para baixos valores de ruído:

$$sgn(h_i^{mix}) = sgn(\xi_i^{\mu_1} + \xi_i^{\mu_2} + \xi_i^{\mu_3} + ruido) = \xi_i^{mix}, \quad (3.18)$$

esta equação prova que, para ruídos extremamente baixos (i.e. $p \ll N$), os estados formados pela combinação linear de m (ímpar) padrões armazenados na rede são pontos fixos numa rede de Hopfield. Como em uma rede de Hopfield, os sítios assumem somente valores ± 1 , uma combinação de um número par de padrões não pode ser visto como um ponto fixo da rede, pois esta combinação pode possuir sítios nulos.

Para um ruído mais intenso, os mínimos locais não são correlacionados com qualquer número finito de padrões ξ_i^μ . Estes estados são denominados *spin glass states* (estado de vidros de spin).

Os pontos fixos da rede que não equivalem a combinações lineares das memórias armazenadas, apesar de serem mínimos locais, são conhecidos como *estados espúrios*.

3.2.3 Capacidade de Armazenamento

De certa forma, o cérebro humano possui uma capacidade de armazenamento de informação limitada devido ao número limitado de neurônios. No reconhecimento de padrões por associação existe uma quantidade máxima de informação que pode ser armazenada e utilizada de forma eficiente por um indivíduo. Para quantidades de informação maiores que sua capacidade, o cérebro responde de forma indesejada.

A limitação apresentada nas redes biológicas, também é apresentada na rede de Hopfield. Quando o número de padrões armazenados é maior que um certo valor crítico, o termo de ruído em (3.14) torna-se grande o suficiente para desestabilizar os padrões armazenados e a rede não consegue mais reconhecer nenhum dos padrões de maneira eficiente.

Para fazer uma análise de como o número de padrões armazenados influencia na estabilidade da rede, considere a seguinte quantidade

$$C_i^\nu \equiv -\xi_i^\nu \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{\mu \neq \nu}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu \xi_j^\nu. \quad (3.19)$$

Esta quantidade é o termo de ruído em (3.14) multiplicado por $-\xi_i^\nu$. Desta maneira, se $\mathcal{C}_i^\nu < 0$, o termo de ruído tem o mesmo sinal do ξ_i^ν , não causando efeito na dinâmica da rede, pois o termo de ruído não altera o sinal de h_i . Mas se $\mathcal{C}_i^\nu > 1$, o termo de ruído é dominante e muda o sinal de h_i , desestabilizando o padrão ν .

A quantidade \mathcal{C}_i^ν depende da maneira em que os padrões ξ_j^μ são armazenados. Considere o caso de padrões gerados aleatoriamente, assumindo valores $\xi_j^\mu = +1$ ou $\xi_j^\mu = -1$ com mesma probabilidade, para todos valores de j e μ . Desta forma, os padrões armazenados serão totalmente decorrelacionados, e o termo de ruído em (3.14) pode ser considerado como uma caminhada aleatória unidimensional de $N(p-1)$ passos, onde cada passo é dado com mesma probabilidade. Segundo o *teorema do limite central* [26], quando $N(p-1)$ tende para o infinito, a variável \mathcal{C}_i^ν possui distribuição de probabilidade gaussiana com média zero e variância σ^2 dada por:

$$\sigma^2 = (p-1)/N \approx p/N. \quad (3.20)$$

Como a variância do ruído depende linearmente do número de padrões armazenados p , com o aumento do número de padrões para N fixo, cresce a variância e o termo de ruído pode assumir um valor grande o suficiente para desestabilizar os padrões armazenados.

O termo de sinal pode assumir valores $\xi_i^\nu = +1$ ou $\xi_i^\nu = -1$ com mesma probabilidade, possuindo uma distribuição de probabilidades com média zero e variância unitária. Define-se como relação sinal-ruído [17], o quociente da variância do termo de sinal pela variância do termo de ruído:

$$\rho \equiv \sigma_{\text{sinal}}^2 / \sigma_{\text{ruído}}^2 \approx N/p. \quad (3.21)$$

Os padrões armazenados serão estáveis se e somente se, a relação sinal ruído (Eq. 3.21) for alta ($N > p$). Define-se como *parâmetro de carga* da rede como sendo

o inverso da relação sinal-ruído:

$$\alpha \equiv p/N. \quad (3.22)$$

A rede de Hopfield apresenta padrões estáveis para valores de α menores que um dado valor crítico $\alpha_c \approx 0.14$ [7]. Isto significa que em uma rede com 100 neurônios podemos armazenar no máximo 14 padrões sem que haja erros na saídas. Acima deste valor crítico de α , a rede não reconhece nenhum dos padrões armazenados.

Uma outra quantidade importante no modelo de Hopfield é a *superposição* entre o estado do sistema e o padrão μ a ser reconhecido, dada por:

$$m_\mu(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu S_i(t), \quad (3.23)$$

com $\mu = 1, 2, \dots, p$. Esta quantidade mede a proximidade do estado do sistema com a memória ξ_i^μ e é análoga à magnetização nos sistemas magnéticos. Ela nos fornece a fração de bits iguais entre o estado do sistema e o padrão a ser reconhecido. Quando a rede reconhece o padrão $\mu = \nu$, temos que $m_\nu(t \rightarrow \infty) \approx 1$ (o estado final $S_i(t \rightarrow \infty)$ do sistema é igual ou muito próximo do padrão armazenado ν) e $m_{\mu \neq \nu}(t \rightarrow \infty) \approx 0$ (já que os padrões são descorrelacionados). É importante enfatizar que quando o sistema atinge um ponto fixo (regime estacionário), os valores das superposições permanecem constantes no tempo.

De maneira geral, os principais resultados encontrados no modelo de Hopfield são:

- A rede possui uma ótima performance na recuperação dos padrões para uma quantidade específica de neurônios e de padrões armazenados na rede, dados pela relação $\alpha \equiv p/N < 0.14$. Com o aumento do número de padrões armazenados para um número fixo de neurônios, a rede passa a não reconhecer mais nenhum dos padrões armazenados após um valor crítico ($\alpha > 0.14$);

- Os padrões armazenados e seus inversos são pontos fixos estáveis;
- A transição entre as fases de reconhecimento e não-reconhecimento dos padrões é uma *transição de primeira ordem* (descontínua);
- Para pequenos valores de α , surgem *estados espúrios* que possuem superposição finita com diversos padrões e correspondem a misturas de diversos padrões armazenados na rede.
- Existem atratores no modelo para grandes valores de α , que não possuem superposição finita com nenhum dos padrões armazenados. Estes atratores são os estados de *spin glass*, semelhantes aos encontrados nos sistemas magnéticos.

3.3 Termodinâmica do Modelo

Utilizando a teoria de campo médio para vidros de spins, *Amit et al.* [29] apresentaram pela primeira vez, um diagrama de fase para o modelo utilizando uma aproximação de réplicas simétricas (RS). Em particular, eles encontraram a capacidade de armazenamento $\alpha_c^{RS} \simeq 0.1379$ ($T = 0$). Em suas simulações, encontraram uma discrepância com valor da aproximação de réplicas simétricas ($\alpha_c^{sim} = 0.145 \pm 0.009$), onde atribuíram esta discrepância aos efeitos da *quebra na simetria de réplica* (RSB). Um estudo posterior realizado por *Crisanti et al.* [31], aplicando 1-passo da quebra na simetria de réplica (1RSB), encontraram $\alpha_c^{1RSB} \simeq 0.144$, mostrando que estados de reconhecimento cujo $0.138 \leq \alpha_c \leq 0.144$ só existem com quebra na simetria de réplica. Este resultado é próximo ao encontrado em simulações anteriores, que foi confirmado posteriormente através das investigações numéricas de *Horner et al.* [32], que obtiveram $\alpha_c^{sim} = 0.1455 \pm 0.001$. Simulações em larga escala ($\sim 10^5$ Neurônios) realizadas posteriormente por *Kohring* [33], forneceram $\alpha_c^{sim} = 0.143 \pm 0.001$. No entanto, apesar destas pequenas diferenças, todos os resultados teóricos [29, 31] e

numéricos [29, 32, 33] apresentam uma boa concordância. Em outro trabalho, *Stefan e Kühn* [34], realizaram a 1RSB e 2RSB-análise e encontraram $\alpha_c^{1RSB} \simeq 0.138186$ e $\alpha_c^{2RSB} \simeq 0.138187$, que são valores maiores que $\alpha_c^{RS} \simeq 0.137905$ e significadamente menores que os resultados encontrados nas simulações anteriores [29, 32, 33]. Em contribuições um pouco mais recentes, *Stiefvater et al.* [35], realizaram um estudo da desordem utilizando uma análise de tamanho finito para a estimativa da capacidade de armazenamento α_c do modelo de Hopfield, obtendo $\alpha_c^{sim} = 0.141 \pm 0.0015$.

Neste trabalho, vamos realizar um estudo analítico do modelo de Hopfield, seguindo uma derivação heurística para a superposição do estado do sistema com um dado padrão da rede, que foi desenvolvido por Geszti [27] e Perreto [28], este último no estudo de modelos Hebbianos assimétricos. Esta derivação consiste num meio alternativo para se desolver o formalismo do modelo de Hopfield. Um método mais formal, utilizando diretamente as várias ferramentas da mecânica estatística, pode ser encontrado em detalhes nos trabalhos de *Amit, Gutfreund e Sompolinsky* [11, 29].

Devido a analogia com sistemas magnéticos proposta por Little descrita no capítulo anterior, vamos utilizar as ferramentas da mecânica estatística para estudar o comportamento do modelo de Hopfield. Nesta analogia, os neurônios da rede são vistos como *spins* e as interações entre os neurônios como acoplamentos magnéticos.

Uma descrição simples da rede consiste em um conjunto de spins do tipo Ising representados pela variável S_i em cada sítio i , podendo assumir valores ± 1 . Cada spin situado no sítio i é influenciado por um campo local h_i . Este campo local consiste em um campo externo h_i^{ext} e um campo interno h_i^{int} , devido à presença dos outros spins da rede. No modelo original proposto por Hopfield, temos que $h_i^{ext} = 0$, de tal forma que o campo sobre o sítio i tem a mesma forma da equação (3.7).

De modo geral, o problema básico é estudar o comportamento de uma rede com muitos spins interagentes. A evolução de cada sítio i depende do campo local

$h_i(t) = \sum_j J_{ij} S_j(t)$ que envolve variáveis $S_j(t)$ que flutuam. Este problema pode ser simplificado (aproximado) utilizando a técnica de *aproximação de campo médio*, que consiste na mudança da variável que flutua $S_j(t)$ pelo seu valor médio. Tal mudança vai refletir diretamente no valor médio do campo local de cada neurônio $h_i(t)$, dado pela equação;

$$\langle h_i(t) \rangle = \sum_{j=1}^N J_{ij} \langle S_j(t) \rangle. \quad (3.24)$$

O valor médio de $S_i(t+1)$ pode ser obtido da equação (1.5) para a distribuição de probabilidade $P(S_i(t))$

$$\langle S_i(t+1) \rangle = \sum_{S_i(t)} \mathcal{P}(S_i(t)) S_i(t) = \tanh(\beta \langle h_i(t) \rangle), \quad (3.25)$$

que com a substituição do campo local $\langle h_i(t) \rangle$ ganha a forma

$$\langle S_i(t+1) \rangle = \tanh \left(\beta \sum_{j=1}^N J_{ij} \langle S_j(t) \rangle \right). \quad (3.26)$$

Substituindo a equação (3.6) para os pesos sinápticos J_{ij} em (3.26), o valor médio da variável de estado é dado por:

$$\langle S_i(t+1) \rangle = \tanh \left(\frac{\beta}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu \langle S_j(t) \rangle \right). \quad (3.27)$$

Utilizando a aproximação de campo médio podemos escrever a habilidade de reconhecimento da rede, dada pela equação (3.23), como:

$$m_\nu(t+1) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\nu \tanh \left(\beta \sum_{\mu=1}^p m_\mu(t) \xi_i^\mu \right). \quad (3.28)$$

Considere o caso na qual o padrão a ser reconhecido é o padrão $\mu = 1$, ou seja, estamos inicializando a rede com o estado referente ao primeiro padrão

armazenado. Neste caso, o termo que envolve $m_1(t)$ em (3.28) é um termo relevante que será tratado como um termo de sinal. Os outros termos no somatório serão pequenos, podendo ser tratados como um ruído que tenta desestabilizar o padrão a ser reconhecido. A superposição do estado da rede com o padrão $\mu = 1$ será a quantidade macroscópica que estamos interessados em calcular, dada pela seguinte expressão:

$$m_1(t+1) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tanh \left[\beta \left(m_1(t) + \xi_i^1 \sum_{\mu \neq 1}^p m_\mu(t) \xi_i^\mu \right) \right], \quad (3.29)$$

onde retiramos do argumento da tangente o termo ξ_i^1 . Assumindo que $m_\mu(t) \ll 1$ para $\mu \neq 1$, o segundo termo da tangente hiperbólica na equação (3.29) são variáveis aleatórias independentes com média zero e variância dada pela soma das variâncias de cada termo. Segundo o teorema do limite central, sabemos que a variável aleatória $\gamma_i(t) = \xi_i^1 \sum_{\mu \neq 1}^p m_\mu(t) \xi_i^\mu$ possui a distribuição de probabilidades Gaussiana:

$$\mathcal{P}(\gamma_i(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(t)}} e^{-\frac{(\bar{\gamma}(t) - \gamma_i(t))^2}{2\sigma^2(t)}}, \quad (3.30)$$

onde $\bar{\gamma}(t)$ é o valor médio que é nulo e $\sigma^2(t)$ a variância. Podemos reescrever a equação para a superposição $m_1(t+1)$ na seguinte forma:

$$\begin{aligned} m_1(t+1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(\gamma_i(t)) \tanh[\beta(m_1(t) + \gamma_i(t))] d\gamma_i(t), \\ m_1(t+1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(t)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\gamma_i^2(t)}{2\sigma^2(t)}} \tanh[\beta(m_1(t) + \gamma_i(t))] d\gamma_i(t). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Fazendo a transformação $z = \frac{\gamma_i(t)}{\sigma(t)}$, a equação para $m_1(t+1)$ torna-se:

$$m_1(t+1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} \tanh[\beta(m_1(t) + \sigma(t)z)] dz, \quad (3.32)$$

onde,

$$\sigma^2(t) = \langle \gamma_i^2(t) \rangle = \left\langle \sum_{\mu' \neq \mu, 1} \sum_{\mu \neq 1} m_\mu(t) m_{\mu'}(t) \xi_i^\mu \xi_i^{\mu'} \right\rangle + \left\langle \sum_{\mu \neq 1} m_\mu^2(t) \right\rangle. \quad (3.33)$$

Note que o primeiro termo na equação para a variância é nulo já que as variáveis que aparecem no somatório $(\xi_i^\mu, \xi_i^{\mu'})$ são variáveis aleatórias independentes e que podem assumir os valores ± 1 com mesma probabilidade. Desta forma, temos que

$$\sigma^2(t) = \sum_{\mu \neq 1} m_\mu^2(t). \quad (3.34)$$

Para determinar a variância, devemos calcular a superposição do estado do sistema com os padrões não correlacionados $m_\mu(t)$. Usando a equação (3.28) e separando os termos com $\mu = 1$ e $\mu = \nu$ do somatório, obtemos a seguinte expressão para $m_\nu(t)$:

$$m_\nu(t+1) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\nu \tanh \left[\beta \left(m_1(t) \xi_i^1 + \sum_{\mu \neq 1, \nu}^p m_\mu(t) \xi_i^\mu + m_\nu(t) \xi_i^\nu \right) \right] \quad (3.35)$$

$$m_\nu(t+1) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\nu \xi_i^1 \tanh \left[\beta \left(m_1(t) + \sum_{\mu \neq 1, \nu}^p m_\mu(t) \xi_i^\mu \xi_i^1 + m_\nu(t) \xi_i^\nu \xi_i^1 \right) \right]. \quad (3.36)$$

Como a configuração da rede está sendo inicializada do padrão $\mu = 1$, temos que $m_\nu(t) \rightarrow 0$. Deste modo, o terceiro termo no argumento da tangente hiperbólica é desprezível comparado aos demais, de tal forma que podemos expandir a tangente hiperbólica até primeira ordem com relação a este termo, resultando:

$$m_\nu(t+1) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\nu \xi_i^1 \tanh \left[\beta \left(m_1(t) + \sum_{\mu \neq 1, \nu}^p m_\mu(t) \xi_i^\mu \xi_i^1 \right) \right] + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\nu \xi_i^1 \left\{ 1 - \tanh^2 \left[\beta \left(m_1(t) + \sum_{\mu \neq 1, \nu}^p m_\mu(t) \xi_i^\mu \xi_i^1 \right) \right] \right\} \beta m_\nu(t) \xi_i^\nu \xi_i^1, \quad (3.37)$$

ou ainda,

$$m_\nu(t+1) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\nu \xi_i^1 \tanh \left[\beta \left(m_1(t) + \sum_{\mu \neq 1, \nu}^p m_\mu(t) \xi_i^\mu \xi_i^1 \right) \right] + \frac{\beta}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ 1 - \tanh^2 \left[\beta \left(m_1(t) + \sum_{\mu \neq 1, \nu}^p m_\mu(t) \xi_i^\mu \xi_i^1 \right) \right] \right\} m_\nu(t). \quad (3.38)$$

no termo de segunda ordem da expansão, vamos definir um parâmetro que é dado por

$$q_1(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tanh^2 \left[\beta \left(m_1(t) + \sum_{\mu \neq 1, \nu}^p m_\mu(t) \xi_i^\mu \xi_i^1 \right) \right]. \quad (3.39)$$

Desta maneira, equação (3.39) pode ser reescrita de uma forma mais compacta,

$$m_\nu(t+1) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\nu \xi_i^1 \tanh \left[\beta \left(m_1(t) + \sum_{\mu \neq 1, \nu}^p m_\mu(t) \xi_i^\mu \xi_i^1 \right) \right] + \beta m_\nu(t) - \beta q_1 m_\nu(t). \quad (3.40)$$

Até este ponto, as equações descrevem a dinâmica do sistema, pois todos os parâmetros são escritos como função do tempo. Um desenvolvimento analítico exato, ao longo desta linha, é uma tarefa bastante difícil de ser implementada. Neste ponto, faremos uma aproximação de modo a tornar o problema matematicamente tratável. Como estamos interessados em estudar o modelo de Hopfield no equilíbrio, vamos considerar que no regime de longo tempo as equações que descrevem a dinâmica do sistema tendem para equações de ponto fixo, ou seja, para o regime estacionário (i.e. $m_\nu(t+1) = m_\nu(t) = m_\nu$). Desta maneira podemos reescrever (3.40) como:

$$m_\nu \approx \frac{N^{-1}}{[1 - \beta(1 - q_1)]} \sum_{i=1}^N \xi_i^\nu \xi_i^1 \tanh \left[\beta \left(m_1 + \sum_{\mu \neq 1, \nu}^p m_\mu \xi_i^\mu \xi_i^1 \right) \right]. \quad (3.41)$$

A Equação (3.39) que define o parâmetro q_1 , é semelhante à expressão encontrada anteriormente para o parâmetro de ordem m . Desta forma, o mesmo procedimento

realizado no cálculo do m_1 (3.32) pode ser usado para calcular o parâmetro q , resultando em

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} \tanh^2 [\beta (m_1 + \sigma z)] dz, \quad (3.42)$$

onde a variância é dada por:

$$\sigma^2 = \sum_{\mu \neq 1, \nu} m_\mu^2. \quad (3.43)$$

Para tornar o tratamento auto-consistente, vamos definir a seguinte quantidade:

$$r = \frac{1}{\alpha} \sum_{\mu \neq 1} m_\mu^2, \quad (3.44)$$

que pode ser identificada como a superposição quadrática média do estado do sistema com os $p - 1$ padrões restantes. Da definição acima o parâmetro r está relacionado com a variância pela seguinte expressão:

$$\sigma^2 = \alpha r. \quad (3.45)$$

Substituindo o σ na equação do parâmetro q (3.42), podemos reescrevê-la como:

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} \tanh^2 [\beta (m_1 + \sqrt{\alpha r} z)] dz. \quad (3.46)$$

Agora, queremos encontrar a expressão para r . Elevando a equação para m_ν (3.41) ao quadrado, temos:

$$m_\nu^2 \approx \left[\frac{1}{1 - \beta(1 - q_1)} \right]^2 N^{-2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \xi_i^\nu \xi_j^\nu \xi_i^1 \xi_j^1 \times \quad (3.47)$$

$$\tanh \left[\beta \left(m_1 + \sum_{\mu \neq 1, \nu} m_\mu \xi_i^\mu \xi_i^1 \right) \right] \times \tanh \left[\beta \left(m_1 + \sum_{\mu \neq 1, \nu} m_\mu \xi_j^\mu \xi_j^1 \right) \right].$$

Realizando a soma sobre $\nu \neq 1$, restará no somatório apenas os termos com $i = j$,

resultando em

$$\sum_{\nu \neq 1} m_\nu^2 \approx \sum_{\nu \neq 1} \left[\frac{1}{1 - \beta(1 - q_1)} \right]^2 N^{-2} \sum_{i=1}^N \tanh^2 \left[\beta \left(m_1 + \sum_{\mu \neq 1, \nu} m_\mu \xi_i^\mu \xi_i^1 \right) \right]. \quad (3.48)$$

A expressão que envolve o somatório em i é exatamente o parâmetro q_1 dado em (3.39). Deste modo, temos que:

$$\sum_{\nu \neq 1} m_\nu^2 = \sum_{\nu \neq 1} \left[\frac{1}{1 - \beta(1 - q_1)} \right]^2 \frac{q_1}{N}. \quad (3.49)$$

Substituído a equação (3.49) na expressão para r (3.44), obtém-se:

$$\begin{aligned} r\alpha &= \sum_{\nu \neq 1} \left[\frac{1}{1 - \beta(1 - q_1)} \right]^2 \frac{q_1}{N} \\ r \frac{p}{N} &= \frac{q_1}{N} \frac{p-1}{[1 - \beta(1 - q_1)]^2} \\ r &= \frac{p-1}{p} \frac{q_1}{[1 - \beta(1 - q_1)]^2}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

que no limite $p \rightarrow \infty$ e $N \rightarrow \infty$, com $\alpha = \frac{p}{N}$ finito, temos que:

$$r = \frac{q_1}{[1 - \beta(1 - q_1)]^2}. \quad (3.51)$$

As equações (3.32), (3.51) e (3.46) formam um conjunto de equações acopladas que podem ser resolvidas simultaneamente para $m = m_1$, $r = r(q)$ e $q = q_1$ como função dos parâmetros α e T .

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} \tanh [\beta (m + \sqrt{\alpha r} z)] dz. \\ r &= \frac{q}{[1 - \beta(1 - q)]^2} \\ q &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} \tanh^2 [\beta (m + \sqrt{\alpha r} z)] dz, \end{aligned} \quad (3.52)$$

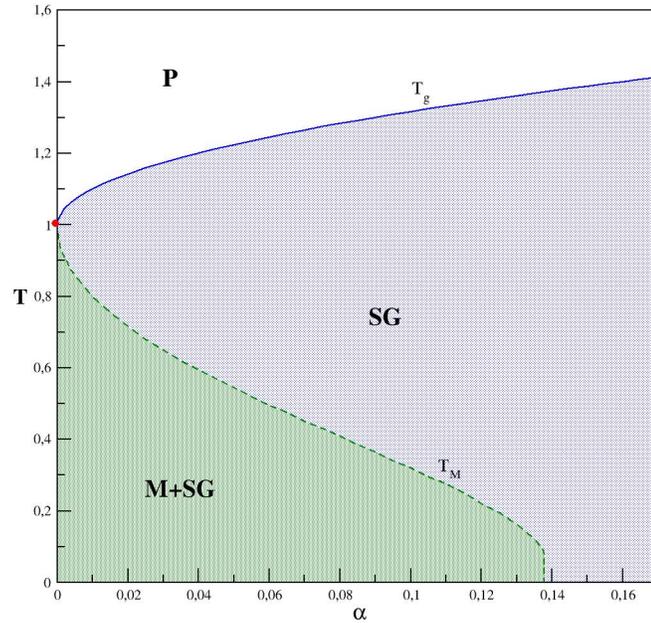


Figura 3.1: Diagrama de fase $T \times \alpha$, semelhante ao obtido por Amit et al. [11]. A região em verde (**M+SG**) é a região onde a rede reconhece os padrões armazenados. O ponto em vermelho representa o local onde se encontra o ponto tricrítico para o modelo.

onde m mede a superposição do sistema com o padrão a ser reconhecido, o parâmetro r , conhecido como parâmetro *AGS* (Amit, Gutfreund, Sompolinsky), sendo este associado com a média do quadrado da superposição do sistema com os outros padrões e q é o *parâmetro de ordem de Edward-Anderson* [23], relacionado com os estados de *vidros de spins*.

É importante ressaltar que estas equações (3.52) são idênticas as obtidas por Amit et al [25, 29] através da termodinâmica de equilíbrio (aproximação de réplicas simétricas) e não descrevem a dinâmica do sistema. Estas equações podem ser resolvidas numericamente.

Inicialmente, vamos estudar analiticamente o modelo na presença de um ruído para em seguida analisar analiticamente e numericamente o modelo sob $T = 0$

Na Figura (3.1) apresentamos o diagrama de fase $T \times \alpha$, semelhante ao obtido

por *Amit et al.* [29]. Neste diagrama, apresentamos as duas curvas mais importantes que mostra o comportamento das soluções de ponto fixo para o modelo de Hopfield. A linha T_g separa duas regiões com nível de mais alto ruído, através de uma transição de fase de *segunda ordem* (i.e. contínua). A primeira região (**P**), que equivale à fase paramagnética em sistemas magnéticos, é onde as soluções para a teoria de campo médio do modelo de Hopfield não possui soluções diferentes da solução trivial para os parâmetros q e m (i.e. $m = q = 0$). A segunda região (**SG**), apresenta muitos estados estáveis, que equivalem à fase de vidro de spin em modelos magnéticos, mas não são correlacionados com nenhum dos padrões ξ^μ , de tal maneira que as soluções de ponto fixo são do tipo $m = 0$ e $q \neq 0$.

Podemos encontrar uma expressão analítica para a temperatura de transição T_g entre a fase de vidro de spin e a fase paramagnética. Assumindo $m = 0$ e expandindo a expressão (3.52) para $q \rightarrow 0$, após considerar somente os termos de mais baixa ordem em q , obtemos:

$$q \approx \beta_g^2 \alpha r = \frac{\beta_g \alpha q}{(1 - \beta_g)^2}, \quad (3.53)$$

que resulta em

$$T_g = 1 + \sqrt{\alpha}. \quad (3.54)$$

Para ruídos mais baixos ($T < T_g$), a solução $q \neq 0$ é sempre válida e encontramos outra curva muito importante que separa duas outras fases presentes no modelo. A linha T_M , separa através de uma transição de fase de *primeira ordem* (i.e. descontínua) a região de reconhecimento (**M+SG**), que pode ser visto como a fase magnética nos sistemas magnéticos, e a região de não-reconhecimento, onde o sistema apresenta somente a solução trivial para o parâmetro de ordem m (i.e. $m = 0$). É de extrema importância ressaltar, que na região $T < T_M$, a rede ainda apresenta uma fase de vidro de spin, que pode ou não ser mais estável que a fase de reconhe-

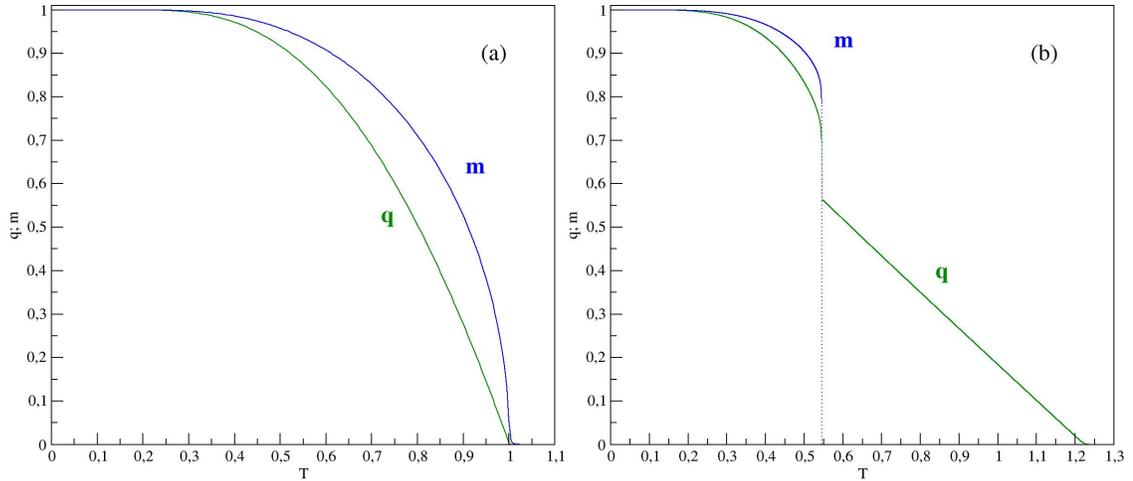


Figura 3.2: Valor dos parâmetro de ordem q e m versus o ruído T para (a) $\alpha = 0$ e (b) $\alpha = 0.05$. Para $\alpha = 0$, a transição de fase para q e m é de segunda ordem, enquanto para outros valores de α , a transição em m é de primeira ordem.

cimento [24, 36].

Vamos estudar o caso limite onde há apenas um padrão armazenado na rede (i.e. $\alpha = 0$). Para este caso, a equação para m em (3.52), assume a seguinte forma:

$$m = \tanh(\beta m). \quad (3.55)$$

Analizando a Equação (3.55), observamos que o sistema apresenta uma transição de fase de *segunda ordem* (contínua) em $T = 1$. Desta forma, o ponto $(\alpha, T) \equiv (0, 1)$ no diagrama de fase, representa um ponto tricrítico para a transição em m . Na Figura (3.2), apresentamos o gráfico de m e q versus T para o caso diferentes valores do parâmetro α , mostrando claramente a natureza da transição de fase para cada valor de α .

3.3.1 O Caso Determinístico ($T = 0$)

Outro caso limite importante, onde realizamos um estudo analítico e numérico, é o caso $T = 0$. Para auxiliar no cálculo das integrais em (3.52) no limite $T \rightarrow 0$, considere as seguintes identidades:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \{1 - \tanh^2[\beta(az + b)]\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a\beta} e^{-b^2/2a^2} \quad (3.56)$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \tanh[\beta(az + b)] = \operatorname{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{2a}}\right) \quad (3.57)$$

onde $\operatorname{erf}(x)$ é a função erro definida como:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad (3.58)$$

No limite determinístico ($\beta \rightarrow \infty$), pode-se observar que $\tanh^2(\beta x) \rightarrow 1$ e consequentemente $q \rightarrow 1$, mas a quantidade $C \equiv \beta(1 - q)$ permanece finita. Utilizando as identidades (3.56) e (3.57), podemos reescrever o conjunto de equações (3.52) na forma:

$$\begin{aligned} m &= \operatorname{erf}\left(\frac{m}{\sqrt{2\alpha r}}\right) \\ r &= \frac{1}{(1 - C)^2} \\ C &= \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha r}} \exp\left(-\frac{m^2}{2\alpha r}\right). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Fazendo a mudança $y = m/\sqrt{2\alpha r}$ em (3.59), obtemos a seguinte equação transcendental que pode ser resolvida numericamente:

$$\operatorname{erf}(y) = y \left(\sqrt{2\alpha} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} \right). \quad (3.60)$$

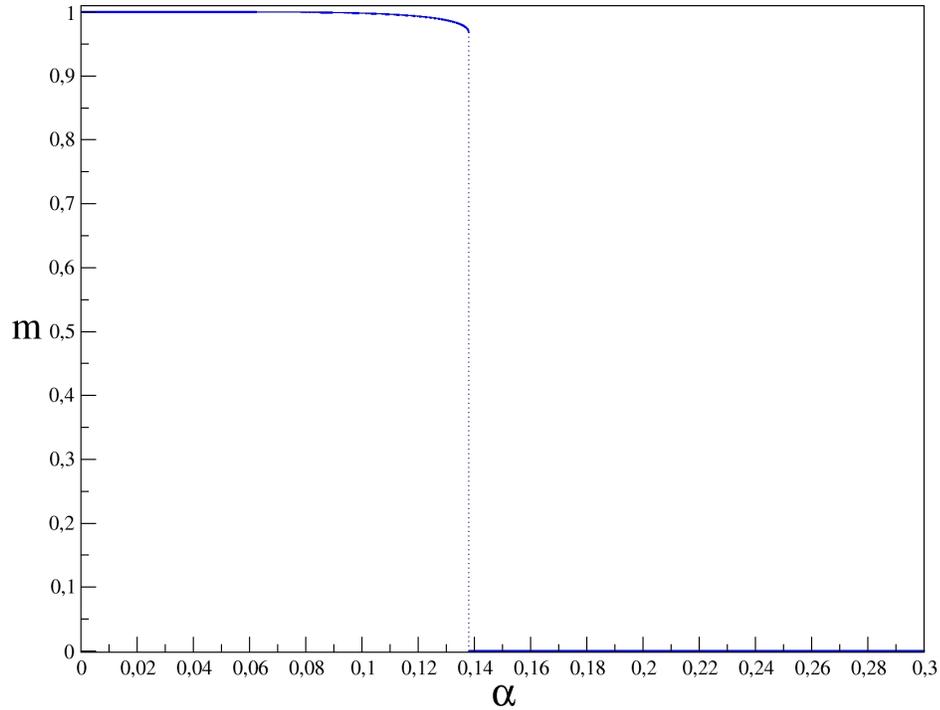


Figura 3.3: Gráfico de $m \times \alpha$ analítico que foi obtido apartir da equação (3.60).

Estamos interessados na região onde as soluções não triviais (i.e. $m_1 \neq 0$) da equação (3.60) desaparecem, ou seja, o valor crítico de α a partir do qual a rede não reconhece mais os padrões armazenados. Utilizando métodos numéricos obtivemos com uma excelente precisão o resultado obtido por Hopfield

$$\alpha_c \approx 0.13790. \quad (3.61)$$

Na Figura (3.3) plotamos a superposição $m \times \alpha$ a $T = 0$. A linha cheia foi obtida através da resolução direta da equação (3.60). A linha tracejada representa a descontinuidade característica de uma *transição de fase de primeira ordem* em $\alpha_c \approx 0.138$. Na transição, o valor do m é da ordem de 0.96797, que corresponde ao fato de aproximadamente 98,5% dos bits estarem alinhados com os bits do padrão a ser reconhecido. Isto significa que próximo da transição o sistema não converge para

o centro da bacia atratora, de modo que não consegue reconstituir integralmente este padrão, apesar de ainda ser capaz de reconhecer o padrão com um pequeno ruído. Para $\alpha > \alpha_c$ o sistema não reconhece os padrões armazenados, possuindo desta forma, uma superposição m nula.

Simulações Numéricas

O emprego das ferramentas computacionais para a análise do comportamento dinâmico de sistemas complexos é de grande importância, já que os resultados das simulações podem ser considerados como verdadeiros experimentos. Ao longo dos anos, novas técnicas foram sendo desenvolvidas, aumentando a eficiência dos algoritmos computacionais e diminuindo o tempo de processamento, que em muitos casos é consideravelmente longo. Uma técnica bastante interessante, utilizada para as simulações que serão apresentadas neste trabalho, é a técnica *multi-spin coding*. Esta técnica foi desenvolvida para a criação de algoritmos cujo problema é descrito por variáveis *Booleanas* (variáveis independentes que possuam apenas dois estados). No apêndice A apresentamos em detalhes esta técnica utilizada. Para aqueles interessados, uma descrição mais completa pode ser encontrada no livro *Computing Boolean Statistical Models* [30]. A análise principal das simulações será voltada para o estudo de uma questão de extrema importância, o valor da capacidade de armazenamento α_c do modelo de Hopfield, baseando-se principalmente nas idéias do trabalho de *Stiefvater et al.*[35].

Através da análise das simulações realizadas, observa-se que o modelo claramente apresenta uma transição de fase *descontínua* entre os estados de reconhecimento e não-reconhecimento (Figura 3.4), apresentando uma assinatura clara do efeito do tamanho finito da rede (Figura 3.5). Utilizando um padrão puro como estado de inicialização da rede, a dinâmica (Eq. 3.3) conduzirá o estado da rede para um estado com superposição m_f com o padrão de inicialização. Para sistemas

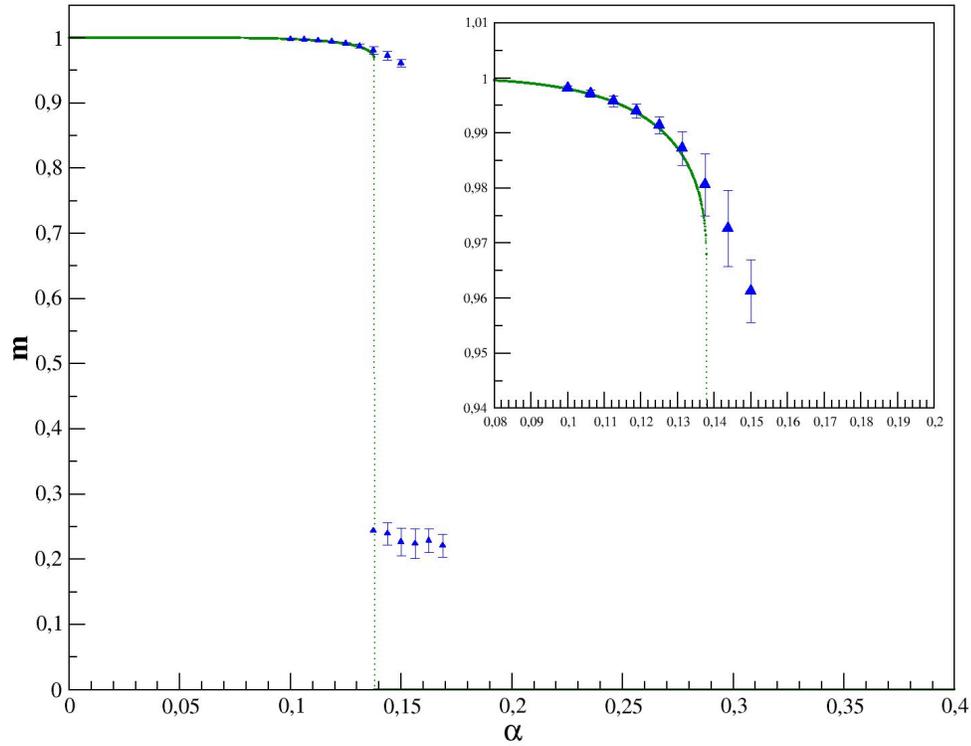


Figura 3.4: Gráfico $m \times \alpha$ para $N = 32000$. A linha verde é o resultado obtido pela aproximação de campo médio e os pontos foram obtidos pelas simulações numéricas. As médias para o cálculo do parâmetro de ordem m foram feitas sobre 100 amostras. Para este tamanho de rede, nota-se que a simulação computacional apresenta uma boa concordância com o resultado analítico.

suficientemente grandes com N sítios, a distribuição de superposições apresenta uma estrutura com 2 picos, um concentrado em $m_f^< \simeq 0.3$ e outro próximo de $m_f^> \simeq 0.98$, com um claro *gap* entre os dois picos. Observamos que, para $\alpha < \alpha_c$, se aumentamos N , uma grande parte da distribuição dos valores tentem para o pico $m_f^>$, no entanto, para $\alpha > \alpha_c$, a concentração tende para o pico $m_f^<$. Considere f como sendo a fração de estados cuja dinâmica leva para uma configuração que se encontra no pico $m_f^>$, esta fração escala com N , seguindo a relação [35, 36]:

$$\langle \ln(f) \rangle \propto (\alpha - \alpha_c) N. \quad (3.62)$$

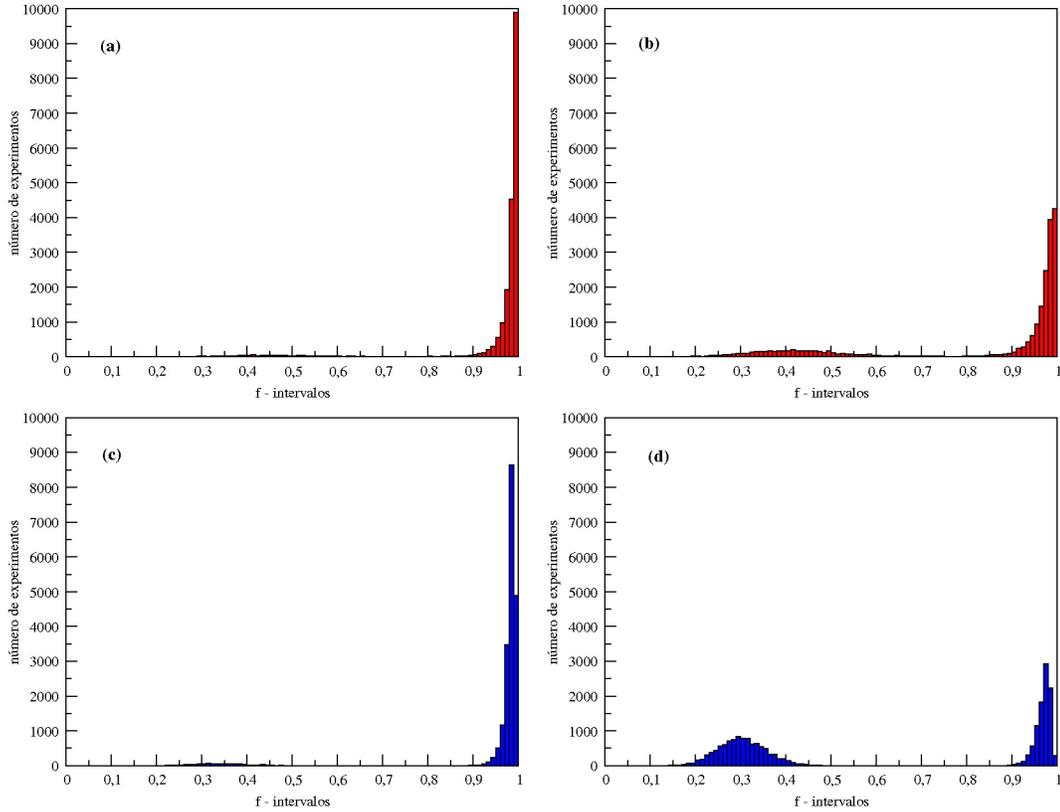


Figura 3.5: *Histograma da distribuição final da superposição m para $N = 1024$ em (a) $\alpha = 0.13672$, (b) $\alpha = 0.15234$ e para $N = 4096$ em (c) $\alpha = 0.13672$, (d) $\alpha = 0.15234$.*

A partir da equação (3.62), nota-se que para $\alpha = \alpha_c$, a quantidade $\langle \ln(f) \rangle$ é invariante sobre escala. Para realizar uma análise de escala, foram simulados sistemas com tamanhos entre $N = 2048$ e $N = 8192$, para uma região de valores de α que engloba pontos antes e após a transição, sempre utilizando 100 padrões de inicialização para calcular f . Sobre os resultados, foram realizadas 200 médias sobre os conjuntos de padrões para o cálculo de $\langle \ln(f) \rangle$. Para os tamanhos de rede estudados, a intersecção entre as curvas (Figura 3.6) não são dadas no mesmo ponto, mas em uma sequência de valores $\alpha_{N,N'}$ entre $\alpha \simeq 0.139$ e $\alpha \simeq 0.140$, onde para altos valores de N e N' , temos que $\alpha_{N,N'}$ deverá convergir para α_c . Como a região onde

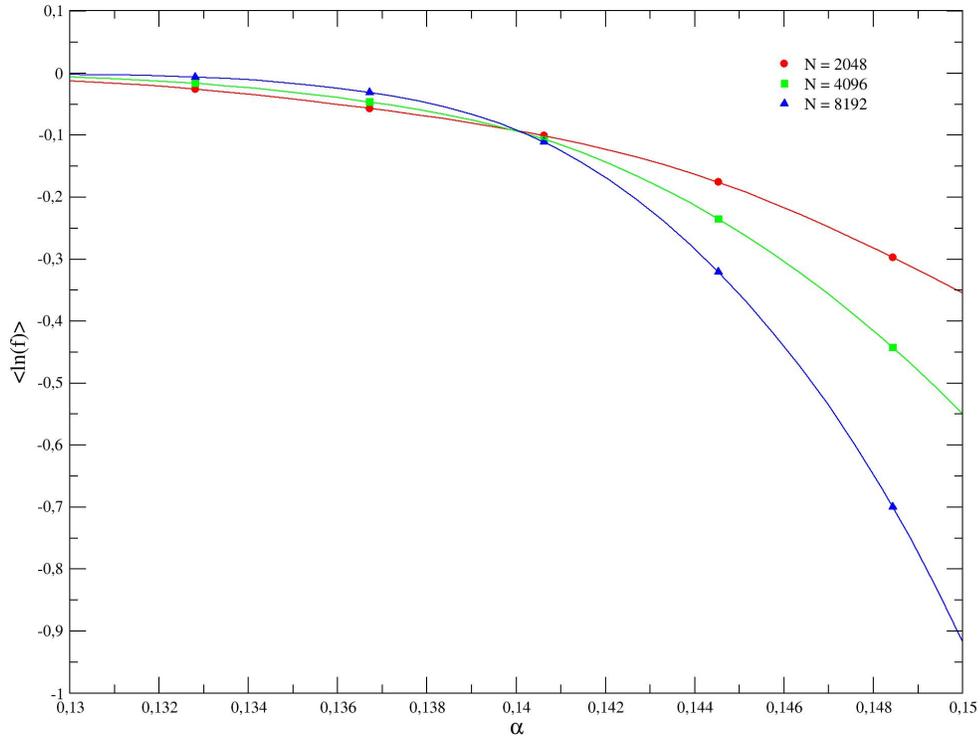


Figura 3.6: Interpolação do tipo Spline para $\langle \ln(f) \rangle \times \alpha = p/N$, para diversos tamanhos de rede. O valor estimado a partir destas curvas para o ponto crítico foi $\alpha_c^{sim} = 0.1400 \pm 0.0002$.

as curvas (interpolação) se interceptam é estreita, utilizamos uma maneira simples para a estimativa do ponto crítico, que consiste basicamente numa interpolação do tipo spline cúbica para os pontos obtidos para cada tamanho de rede e em seguida realizando a média dos valores de α para os pontos de intersecção. Utilizando este procedimento, encontramos $\alpha_c^{sim} = 0.1400 \pm 0.0002$.

Este resultado, reduz significadamente a discrepância encontrada entre as simulações anteriores[29, 32, 33, 35] e os resultados analíticos para *1RSB* e *2RSB* do trabalho realizado por *Steffan e Kühn*[34].

Apesar de possuir mecanismos difíceis de serem justificados do ponto de vista biológico, o modelo de Hopfield foi fundamental como ponto de partida na

busca de modelos mais realistas. Na seção seguinte vamos descrever algumas dessas importantes contribuições que foram incorporadas ao modelo.

3.4 Novos ingredientes biológicos

Nas duas últimas décadas, muitas características biológicas foram incorporadas ao modelo de Hopfield, buscando uma maior aproximação com as redes neurais reais. Por exemplo, os processos estocásticos envolvidos na transmissão de sinais, assimetria nas conexões sinápticas, diluição, escalas de tempo biológicas, interações multi-sinápticas, estímulo permanente, entre outros fatores que influenciam no comportamento da rede .

Um dos modelos precursores nesta linha foi desenvolvido em 1985 por *Amit et al* [11, 25]. Eles propuseram uma generalização do modelo de Hopfield incluindo nele os diferentes processos estocásticos (aleatórios) envolvidos na transmissão de sinais. Desta forma, a dinâmica determinística foi substituída por uma dinâmica estocástica e utilizando a analogia com os modelos magnéticos, estudaram a termodinâmica do Modelo de Hopfield.

Um outro modelo, para o qual a dinâmica foi resolvida exatamente, foi estudado por B. Derrida, E. Gardner e A. Zippelius [37]. Este modelo foi motivado pelo fato de que nas redes neurais biológicas cada neurônio está conectado a aproximadamente 10^4 outros neurônios, um número muito menor que o número total de neurônios da rede (aproximadamente 10^{11} neurônios). Eles introduziram assimetria e diluição nas sinapses e encontraram um novo valor crítico para α , que é bem superior ao modelo original ($\alpha_c \approx 0.637$). Eles encontraram que, diferentemente do modelo de Hopfield sem diluição, a transição para a fase de não reconhecimento é contínua (*transição de segunda ordem*). Resultados numéricos do modelo diluído e assimétrico foram obtidos por Arenzon e Lemke [38] com excelente concordância com os resultados analíticos.

Um outro elemento importante na modelagem das redes neurais biológicas são escalas de tempo durante a transmissão dos sinais. Quando um sinal se propaga ao longo do axônio, bloqueia a possibilidade de transmissão de um segundo sinal durante um certo intervalo de tempo. Duas escalas podem ser identificadas na comunicação entre os neurônios. Uma delas é o ciclo temporal ($\approx 2ms$), que é o intervalo de tempo desde a emissão de um sinal pelo neurônio pré-sináptico até este sinal ser integrado no soma do neurônio pós-sináptico. A outra escala está associada ao intervalo de tempo entre dois disparos consecutivos pelo mesmo neurônio. Este tempo está associado com a recomposição do potencial da membrana celular e é conhecido por *Períodos Refratários*. Em trabalhos recentes, C. R. da Silva et al [39, 40], estudaram analiticamente e através de simulações numéricas, como as propriedades do modelo de Hopfield são afetadas quando os períodos refratários são introduzidos na dinâmica da rede. O principal resultado é que o parâmetro que simula os períodos refratários, induz no sistema o surgimento de atratores caóticos e periódicos. Agora, diferentemente dos pontos fixos (pouco realista) do modelo de Hopfield, o sistema reconhece os padrões armazenados também em regimes periódicos com ciclos finitos. Ou seja, a dinâmica leva o sistema para a bacia atratora do padrão a ser reconhecido e a superposição macroscópica com esse padrão fica oscilando com o valor de m próximo de 1 ($m \approx 1$).

Outro elemento importante que pode ser introduzido no modelo de Hopfield é o que chamamos de *Estímulo Persistente*. Este novo elemento foi estudado recentemente por Sobral et al [41] em modelos diluídos e assimétricos. A idealização é estimular persistentemente um dado padrão e estudar o efeito deste estímulo nas propriedades de reconhecimento e armazenamento da rede. O parâmetro que simula o estímulo persistente, desempenha um papel similar ao de um campo externo nos modelos magnéticos. A contribuição original proposta através deste trabalho, será na análise do efeito causado sobre as propriedades de reconhecimento e armazenamento

do modelo de Hopfield, ao introduzir o estímulo persistente na dinâmica da rede. A análise e os resultados analíticos e numéricos originados deste estudo farão parte desta tese e será apresentado em detalhes no próximo capítulo.

Capítulo 4

Modelo de Hopfield com Estímulo Persistente

No ponto de vista biológico, um elemento de grande interesse no estudo das redes neurais são os estímulos externos [42, 43, 44, 45, 46]. Biologicamente, sempre que um estímulo alcança nossa consciência, seja através de uma imagem, som, ou sensação, um conjunto de neurônios é ativado, estimulando ou inibindo uns aos outros, de modo a formar um determinado estado consciente (ou padrão da rede). Com o fim do estímulo, os neurônios que participaram da formação desse padrão podem ou não retomar a seu estado original. Se o estímulo responsável pela formação de um dado padrão for contínuo (persistente), o conjunto de neurônios ativados tende a fortalecer suas interações, aumentando a eficiência deste estado em resposta ao estímulo.

Ao longo dos anos, diversas propostas contendo novos modelos de estímulos têm sido apresentadas. Os primeiros trabalhos seguindo esta linha foram os trabalhos de *Amit et al*[11, 25, 29], que analisava o modelo de Hopfield na presença de campos estáticos que podiam atuar privilegiando diversos padrões armazenados na rede, na ausência de ruído térmico ($T = 0$). Para o caso onde o estímulo aplicado

privilegiava apenas um único padrão, eles mostraram que este campo aumenta a capacidade de armazenamento, enquanto para o caso onde o campo privilegia vários padrões, o campo eleva o nível de ruído do sistema, prejudicando a eficiência da rede para um número elevado de padrões estimulados.

Neste capítulo vamos tratar o modelo de Hopfield quando introduzimos na dinâmica um parâmetro que simula o efeito de um estímulo persistente que privilegia determinado padrão da rede. Para uma melhor compreensão do que seria este parâmetro, considere o caso na qual temos um conjunto de p imagens (padrões) contidas em um papel, onde olhamos para cada uma delas separadamente e tentamos memorizá-las. Esta primeira etapa seria o armazenamento dos padrões na rede neural. Agora, fornecemos um novo padrão (teste), que pode ou não, ser uma das imagens armazenadas, para que seja associada a um dos p padrões armazenados (reconhecimento por associação). Nosso cérebro irá associar corretamente este padrão teste a um dos padrões armazenados se o número de padrões não for muito grande, pois nossa capacidade de reconhecimento, assim como nas redes neurais artificiais, é limitada (o cérebro não consegue distinguir estes padrões quando p é muito grande). Uma maneira de associar o padrão teste a um dos padrões armazenados, mesmo quando o número de padrões é muito grande, é através de um estímulo constante, por exemplo, “fixando o olhar” no padrão armazenado que queremos reconhecer. Isto fará com que o nosso cérebro, estimulado persistentemente, lembre do padrão teste, aumentando a capacidade de armazenamento da rede neural.

Com este propósito, vamos introduzir na dinâmica do modelo de Hopfield um parâmetro que simula este efeito, de modo a regular a intensidade do estímulo sobre o padrão a ser reconhecido. Ou seja, podemos regular o quão intenso estamos olhando para este padrão armazenado. Para levar em conta o efeito do estímulo persistente na dinâmica da rede, adicionamos ao campo local um termo que atua como um campo externo sobre o padrão de reconhecimento. Vamos considerar que

o padrão a ser reconhecido é o padrão ν . O campo externo que simula o estímulo persistente é dado por:

$$h_i^S(t) = h_0 m_\nu(t) \xi_i^\nu, \quad (4.1)$$

onde ξ_i^ν é o padrão estimulado, $m_\nu(t)$ é a superposição entre o estado do sistema e o padrão estimulado no instante t e h_0 é o parâmetro que controla a amplitude do estímulo. Como consideramos o campo local do estímulo proporcional à superposição com o padrão estimulado, este termo atua sobre a rede somente se o estado da rede é correlacionado com o padrão estimulado.

É de extrema importância ressaltar que, embora chamamos este termo de campo externo, este campo não se trata de um campo externo propriamente dito, pois ele possui uma dependência com o estado da rede através do termo m_ν .

O nosso modelo, embora simples, possui uma grande riqueza nos comportamentos dinâmicos observados. Primeiramente, iremos expor os principais resultados obtidos no trabalho de *Sobral et al* [41], quando introduzimos este tipo de parâmetro no modelo de Hopfield diluído. Em seguida, mostraremos a contribuição principal deste trabalho, onde utilizando a aproximação de campo médio e seguindo o mesmo desenvolvimento do capítulo anterior, analisaremos analiticamente a capacidade de reconhecimento e armazenamento do modelo de Hopfield na presença deste estímulo persistente. No final, compararemos esses resultados com os obtidos através de simulações numéricas, as quais nos informam sobre a natureza dinâmica do sistema.

4.1 Principais Resultados do Modelo Diluído

Uma contribuição importante no modelo de Hopfield, foi proposta por *Derrida, Gardner e Zippelius* (DGZ) em 1987 [37]. Eles consideraram a introdução de novos ingredientes biológicos como diluição e assimetria nas conexões sinápticas. A motivação principal deste trabalho está relacionada às indicações que as redes neurais biológicas possuem todos estes elementos.

O modelo DGZ apresenta as mesmas considerações principais do modelo de Hopfield, sendo diferenciado apenas na diluição e assimetria presentes nas conexões sinápticas. Neste modelo, cada neurônio é conectado a aproximadamente C outros neurônios, onde o grau de conectividade C é muito menor que a conectividade N do modelo proposto por Hopfield. Vamos considerar a condição de extrema diluição ($1 \ll C \ll \ln(N)$). A conexão entre o i -ésimo e o j -ésimo neurônio dada pela regra de Heeb

$$J_{ij} = C_{ij} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu, \quad (4.2)$$

onde ξ_i^μ são variáveis aleatórias independentes assumindo valores ± 1 com mesma probabilidade e C_{ij} são variáveis aleatórias escolhidas de acordo com a seguinte distribuição de probabilidades:

$$\rho(C_{ij}) = \frac{C}{N} \delta(C_{ij} - 1) + \left(1 - \frac{C}{N}\right) \delta(C_{ij}). \quad (4.3)$$

A evolução temporal da rede é governada pela dinâmica estocástica síncrona, através da regra $S_i(t) = \pm 1$ com probabilidade:

$$Pr [S_i(t)] = \frac{1}{2} [1 + S_i(t) \tanh \beta_0 h_i(t)]. \quad (4.4)$$

onde $\beta_0 = 1/T_0$ mede o inverso do nível de ruído estocástico da rede, que é diferente do ruído estático (referente ao número de padrões armazenados), no entanto, ambos tendem a tornar o reconhecimento da rede instável. O campo local induzido sobre o neurônio i é dado por

$$h_i(t) = \sum_{j=1}^N J_{ij} S_j(t) + h_i^S(t). \quad (4.5)$$

O termo de estímulo $h_i^S(t)$ proposto acima possui efeito sobre um padrão específico que é imposto durante a dinâmica de reconhecimento. Neste contexto, ele é um estímulo persistente. Outra maneira de entender o efeito que este termo pode pro-

duzir na prática, pode ser vista reescrevendo o campo local induzido:

$$h_i(t) = \sum_{j=1}^N \left(J_{ij} + \frac{h_0}{N} \xi_i^\nu \xi_j^\nu \right) S_j(t). \quad (4.6)$$

No entanto, o efeito persistente o estímulo pode ser introduzido durante o processo de treinamento através da definição de um *acoplamento sináptico efetivo* entre os neurônios i e j , na forma:

$$J_{ij}^{\text{eff}} = C_{ij} \sum_{\mu \neq \nu} \xi_i^\mu \xi_j^\mu + \left(C_{ij} + \frac{h_0}{N} \right) \xi_i^\nu \xi_j^\nu, \quad (4.7)$$

No ponto de vista biológico, o treinamento tendencioso para dado padrão ν , reflete a tendência natural de experiências não usuais (i.e. traumáticas) que possuem maiores influências na formação das sinapses neuronais do que as experiências regulares diárias.

A superposição entre o estado do sistema e um dos padrões armazenados, possui a mesma expressão do modelo original de Hopfield,

$$m_\mu(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \langle S_i(t) \rangle. \quad (4.8)$$

De maneira geral, podemos analisar dois casos distintos. O primeiro é o caso onde o padrão de inicialização é fortemente correlacionado com o padrão estimulado que é totalmente descorrelacionado com os outros padrões da rede. No segundo caso, o padrão de inicialização é fracamente correlacionado com o padrão estimulado mas é fortemente correlacionado com um padrão ortogonal ao padrão estimulado. No primeiro caso, o estímulo atua favorecendo o reconhecimento do padrão de inicialização, e no segundo caso, o estímulo força a dinâmica para um padrão diferente do padrão de inicialização.

4.1.1 Estímulo Paralelo ao padrão de inicialização

Considerando um estado inicial que possui superposição finita com apenas um dos padrões armazenados, ou seja, $m_\mu(t=0) = m(0)\delta_{\mu,\nu}$, todas as superposições com padrões que possuem $\mu \neq \nu$ irão permanecer nulas de acordo com a equação dinâmica. Sob a presença de um estímulo atuando no padrão ξ^ν , podemos encontrar a seguinte expressão para a evolução temporal da superposição $m_\nu(t)$ para o modelo de Hopfield ultra diluído:

$$m(t+1) = \int_{-\infty}^{+\infty} Dz \tanh\left(\frac{m(t)(h+1) + z\sqrt{\alpha}}{T}\right), \quad (4.9)$$

onde definimos $Dz \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}dz$ e omitimos o índice ν para simplificar. O termo $h = h_0/C$ é a amplitude reduzida do estímulo e $T = T_0/C$ corresponde à temperatura reduzida. O caso $h = 0$ nos fornece a equação dinâmica usual do modelo DGZ. Para longos períodos de tempo, o sistema converge para um estado assintótico estacionário com $m(t) = m$ para todo t .

Para o caso geral de temperatura finita, partindo da equação (4.9) podemos encontrar uma expressão analítica para a superfície crítica no espaço de fase $T \times \alpha \times h$. Na Figura (4.1), mostramos o diagrama de fase que apresenta o fato do sistema possuir uma transição de *segunda ordem* para a fase paramagnética (i.e. $m = 0$) ao longo da superfície crítica. Na região abaixo da superfície, o sistema reconhece os padrões armazenados. Na plano $h = 0$, a curva apresentada é a mesma encontrada no modelo DGZ, que nos fornece a $T = 0$, o valor crítico $\alpha_c = 2/\pi = 0.6366\dots$ e o valor $T^* = 1$ para $\alpha = 0$.

4.1.2 Estímulo Perpendicular ao padrão de inicialização

Vamos considerar agora o caso onde o estado inicial possui superposição finita com dois padrões armazenados na rede, i.e. $m_\mu(0) = m_\nu(0)\delta_{\mu,\nu} + m_\delta(0)\delta_{\mu,\delta}$. O estado

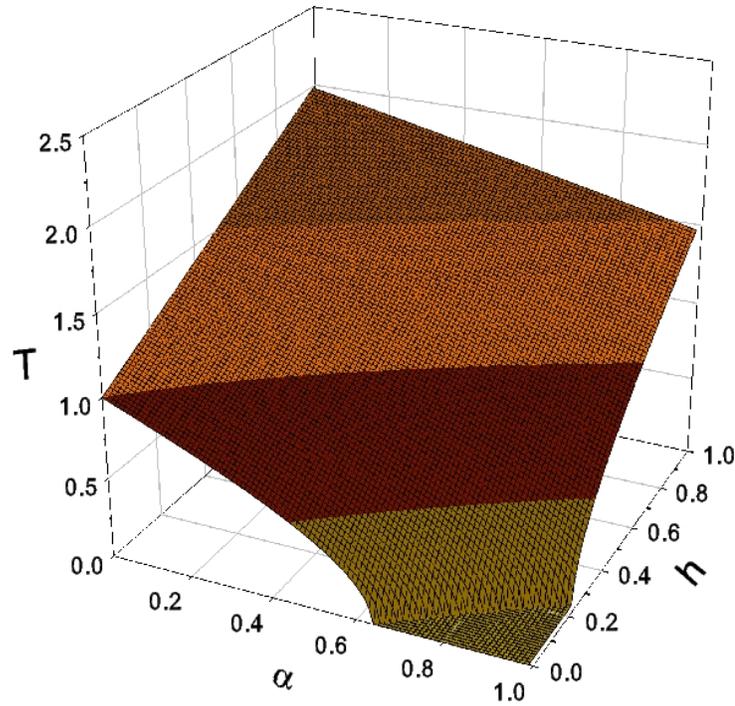


Figura 4.1: Diagrama de fase no espaço de parâmetros $T \times \alpha \times h$ para o estímulo paralelo ao padrão fortemente correlacionado ao padrão de inicialização da rede. abaixo da superfície crítica, a rede possui uma superposição finita com o padrão de inicialização. A habilidade de reconhecimento aumenta com o aumento do estímulo.

inicial é fortemente correlacionado com o padrão ξ^ν (i.e. $m_\nu(0) \lesssim 1$), mas possui uma fraca correlação com o padrão ξ^δ (i.e. $m_\delta(0) \ll 1$).

No entanto, na ausência do estímulo, a rede sempre converge naturalmente para o estado ξ^ν , se a rede reconhece algum dos padrões armazenados. Se o estímulo é aplicado ao padrão ξ^ν , a dinâmica de rede é a mesma descrita na subseção anterior. Vamos assumir que a rede é estimulada a reconhecer o padrão ξ^δ que é fracamente correlacionado com o estado inicial. Neste caso, a rede é forçada a sair do estado inicial, possuindo desta forma, uma nova dinâmica.

Utilizando o mesmo procedimento utilizado no modelo DGZ no limite ultra diluído, podemos encontrar as seguintes equações acopladas que descrevem as

superposições do estado do sistema com os padrões ξ^ν e ξ^δ :

$$m_\nu(t+1) = \int_{-\infty}^{+\infty} Dz \tanh \left(\frac{m_\nu(t) + z\sqrt{m_\delta^2(t)(1+h)^2 + \alpha}}{T} \right), \quad (4.10)$$

$$m_\delta(t+1) = \int_{-\infty}^{+\infty} Dz \tanh \left(\frac{m_\delta(t)(h+1) + z\sqrt{m_\nu^2(t) + \alpha}}{T} \right). \quad (4.11)$$

Note que na ausência do estímulo, as duas equações se tornam idênticas e no limite que $m_\delta \rightarrow 0$, reobtemos a mesma expressão encontrada no modelo DGZ, para o caso onde inicializamos a rede do padrão ξ^ν .

Para o caso particular $T = 0$ e para um número infinito de padrões estimulados, pode-se chegar ao seguinte conjunto de equações:

$$m_\nu(t+1) = \operatorname{erf} \left(\frac{m_\nu(t)}{\sqrt{2m_\delta^2(t)(1+h)^2 + 2\alpha}} \right), \quad (4.12)$$

$$m_\delta(t+1) = \operatorname{erf} \left(\frac{m_\delta(t)(h+1)}{\sqrt{2m_\nu^2(t) + 2\alpha}} \right). \quad (4.13)$$

Na Figura (4.2), apresentamos o diagrama de fase $\alpha \times h$ para $T = 0$, onde inicializamos a rede com $m_\nu(0) = 0.99$ e $m_\delta(0) = 0.01$. A linha que separa a fase estável com $m_\delta = 0$ e a fase de não reconhecimento é a mesma linha crítica do caso onde o estímulo é paralelo. A linha tracejada representa a transição de primeira ordem entre as fases de reconhecimento do padrão de inicialização ξ^ν e o padrão estimulado ξ^δ . Um comportamento reentrante é claramente visualizado para estímulos um pouco maior que $h_c \simeq 0.279$. A região de estabilidade para o reconhecimento do padrão ξ^ν cresce com o decréscimo da superposição inicial do estado da rede com o padrão estimulado e no limite assintótico $m_\delta(0) \rightarrow 0$, se estende sobre toda região para $\alpha < 2/\pi$

Para estímulos maiores que h^* , localizados logo após a transição de primeira

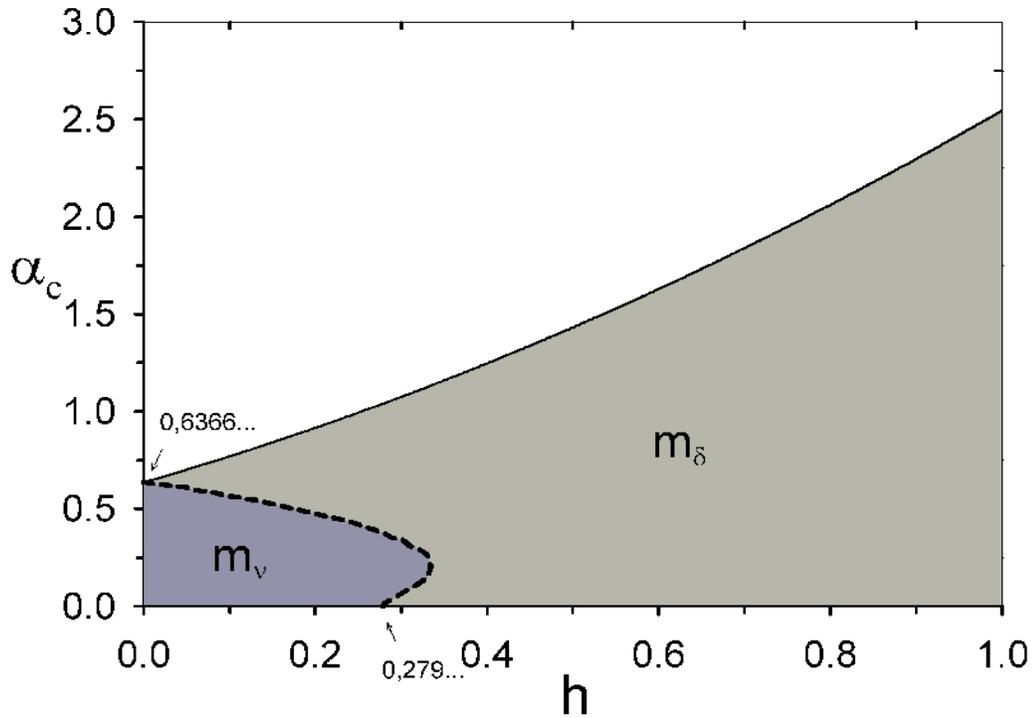


Figura 4.2: Diagrama de fase a $T = 0$, para o caso do estímulo ortogonal com $m_\nu(0) = 0.99$ e $m_\delta(0) = 0.01$. A linha tracejada representa a transição descontínua entre a fase com $m_\nu \neq 0$ e a fase com $m_\delta \neq 0$. O comportamento com uma reentrância reflete o efeito de competição entre a dinâmica da rede e o estímulo.

ordem, a convergência para o estado estacionário se torna cada vez mais lenta na proximidade da fronteira entre as duas bacias atratoras. Investigações da evolução temporal da superposição $m_\nu(t)$ é apresentada na Figura (4.3). Nós consideramos o caso representativo $\alpha = 0.25$, onde a transição de primeira ordem ocorre em $h^* = 0.334$. A superposição m se encontra em um regime quasi-estacionário durante o transiente inicial, para em seguida entrar em um regime estacionário com $m = 0$. A duração do transiente inicial diverge no ponto de transição. No detalhe da Figura (4.3) apresentamos o comportamento de escala para o tempo de transição. Ele exibe uma lei de potência na forma $\tau \propto (h - h^*)^{-0.8}$.

Estes e outros resultados importantes do modelo diluído podem ser encon-

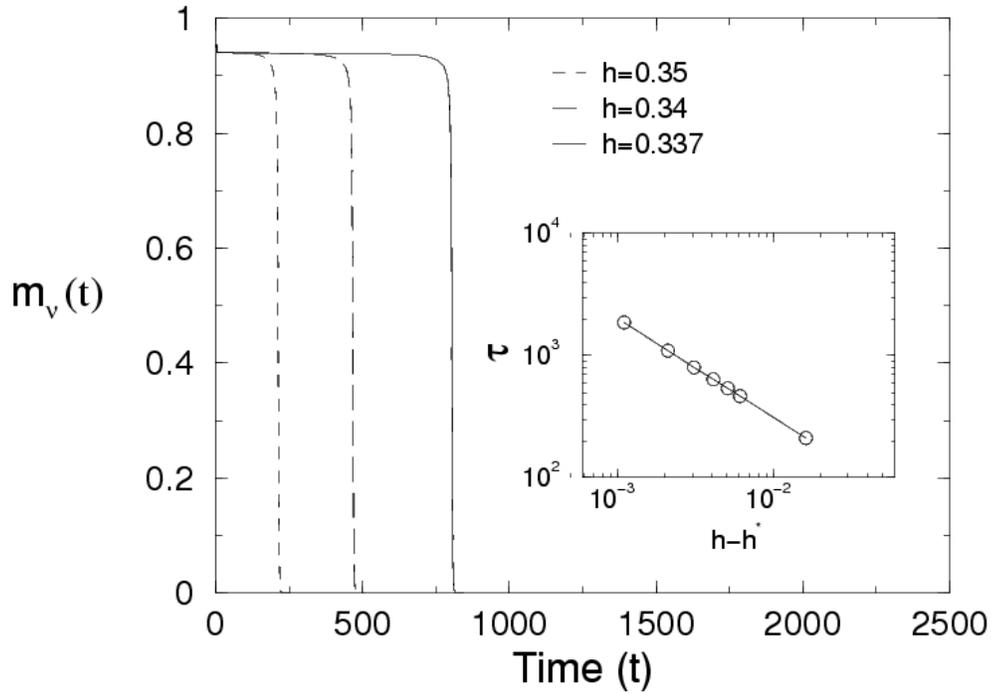


Figura 4.3: *Evolução temporal da superposição com o padrão de inicialização $m_\nu(t)$ próximo da transição de primeira ordem. É apresentado o caso particular $\alpha = 0.25$, onde $h^* = 0.334$. Para campos próximos de h^* , o sistema permanece em um regime quasi-estacionário durante um tempo transiente para em seguida passar para o estado estacionário final. O diagrama interno exhibe o comportamento de escala para o tempo transiente, onde foi obtido $\tau \propto (h - h^*)^{-0.8}$.*

trados no trabalho [41] e todas as contas e discussões em detalhes na dissertação de mestrado de Sobral Jr., G. A. [47]

A seguir, vamos introduzir e estudar através de uma análise de campo médio, os efeitos do termo de estímulo (4.1) no modelo de Hopfield, atuando no padrão a ser reconhecido. Pelos resultados obtidos no modelo diluído, é de se esperar um crescimento na região de reconhecimento do padrão estimulado com o aumento do valor do parâmetro h_0 .

4.2 Modelo Totalmente Conectado

Lembremos que o modelo de Hopfield é formado por uma rede de N neurônios binários, cada um modelado por uma variável tipo Ising S_i , que podem assumir valores $S_i = [+1, -1]$, representando os estados ativos e passivos respectivamente. O processo de atualização dos estados do sistema é dado pela equação (3.3):

$$S_i(t+1) = \text{sgn}[h_i(t)], \quad (4.14)$$

onde agora, com a introdução do estímulo persistente (4.1), o campo local induzido sobre o neurônio i é escrito da seguinte forma:

$$h_i^\nu(t) = \sum_{j=1}^N J_{ij} S_j(t) + h_i^S(t), \quad (4.15)$$

onde o J_{ij} é a matriz sináptica de Hopfield dada pela regra de Hebb e $h_i^S(t)$ é o campo de estímulo dado pela equação (4.1). Do mesmo modo que no modelo diluído, podemos reescrever o campo local induzido, introduzindo o efeito do estímulo persistente durante o processo de treinamento. Desta maneira, o campo local induzido é escrito como:

$$h_i^\nu(t) = \sum_{j=1}^N J_{ij}^{\text{eff}} S_j(t), \quad (4.16)$$

onde J_{ij}^{eff} é o acoplamento sináptico efetivo dado por

$$J_{ij}^{\text{eff}} = \frac{1}{N} \sum_{\mu \neq \nu} \xi_i^\mu \xi_j^\mu + \frac{1}{N} (1 + h_0) \xi_i^\nu \xi_j^\nu. \quad (4.17)$$

Para campo nulo ($h_0 = 0$), a expressão para os pesos sinápticos é a mesma da apresentada no capítulo anterior (Equação (3.6)) e conseqüentemente, nessas condições, o nosso modelo deve reproduzir todos os resultados do modelo de Hopfield sem o termo de estímulo. A introdução do termo de campo durante o treinamento da rede

pode ser visto como um fortalecimento das conexões sinápticas para uma situação específica, de tal maneira que privilegia um dos padrões armazenados. De maneira mais simples, se o neurônio i e j enviam sinais juntos durante o treinamento do padrão estimulado, a conexão entre estes neurônios será acrescida de um fator h_0/N além do fator $1/N$ acrescido durante o aprendizado hebbiano, caso contrário, será decrescida do mesmo fator.

A função energia da rede, definida em (3.8), possui agora um termo proveniente do estímulo persistente, sendo escrita como:

$$H(t) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} S_i(t) S_j(t) - h^S(t) \sum_i S_i(t). \quad (4.18)$$

A introdução do estímulo persistente na forma descrita em (4.1), não influenciará na estabilidade dos padrões, pois atuará como uma constante a mais no termo de energia, apenas deslocando o nível dos poços atratores. Assim, os padrões armazenados continuarão sendo pontos de mínima energia.

Para analisar a estabilidade dos padrões, vamos introduzir o termo de estímulo persistente na equação (3.14). Assumindo $m_\nu(t=0) = 1$, pois estamos considerando o caso onde partimos do padrão ξ^ν , temos que

$$h_i^\nu(t=0) = (1 + h_0) \xi_i^\nu + \frac{1}{N} \sum_{\mu \neq \nu}^p \xi_i^\mu \sum_{j=1}^N \xi_j^\mu \xi_j^\nu. \quad (4.19)$$

O primeiro termo da equação (4.19) será o *termo de sinal*. Note que este termo será maior ou igual ao termo de sinal do caso anterior (para $h_0 \geq 0$), fazendo com que a rede possua uma capacidade de armazenamento maior ou igual a do modelo de Hopfield sem estímulo.

O parâmetro de carga, que ao atingir um valor crítico fornece a capacidade

de armazenamento da rede, é a mesmo definido na equação (3.22):

$$\alpha \equiv p/N. \quad (4.20)$$

Para campo externo nulo ($h = 0$) os resultado são os obtidos no capítulo anterior, em particular o valor crítico $\alpha_c \approx 0.138$. Para valores de $h \neq 0$, esperamos que a rede aumente sua capacidade de armazenamento, onde teremos um valor de α_c como função do parâmetro h (i.e. $\alpha_c(h)$).

Para estudar o efeito do estímulo persistente no comportamento da rede, vamos utilizar a mesma derivação heurística [27, 28] para a equação da superposição do estado do sistema com o padrão de reconhecimento (que é o padrão estimulado), desenvolvido no capítulo anterior.

4.3 Termodinâmica do Modelo

A aproximação de campo médio tem mostrado ser uma ferramenta importante no estudo das redes neurais, reproduzindo com boa aproximação os resultados obtidos, quando possível, por outras técnicas. Seguindo os mesmos passos utilizados na seção (3.3), o valor médio do campo local induzido, agora com o termo de estímulo persistente, é dado por:

$$\langle h_i(t) \rangle = \sum_{j=1}^N J_{ij} \langle S_j(t) \rangle + h_0 m_\nu(t) \xi_i^\nu. \quad (4.21)$$

O valor médio de $S_i(t) = \pm 1$, cuja evolução é governada por uma dinâmica estocástica (Equação (1.5)), é agora dada por:

$$\langle S_i(t+1) \rangle = \tanh \left(\beta h_0 m_\nu(t) \xi_i^\nu + \beta \sum_{j=1}^N J_{ij} \langle S_j(t) \rangle \right). \quad (4.22)$$

Esta equação é a mesma apresentada em (3.26), com o argumento acrescido do termo devido ao estímulo persistente. Substituindo a equação (3.6) para os pesos sinápticos J_{ij} na equação acima e utilizando aproximação de campo médio, podemos escrever a habilidade de reconhecimento da rede, dado em (3.23), como:

$$m_\delta(t+1) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\delta \xi_i^\nu \tanh \beta \left[m_\nu(t) (1 + h_0) + \sum_{\mu \neq \nu, \delta}^p m_\mu(t) \xi_i^\mu \xi_i^\nu + m_\delta(t) \xi_i^\delta \xi_i^\nu \right] \quad (4.23)$$

A equação (4.23) é a expressão mais geral para a superposição do sistema com um dado padrão δ . Note que o primeiro termo que aparece no argumento da tangente hiperbólica é o termo de sinal ($\mu = \nu$), que foi separado no somatório em μ , juntamente com o termo que está sendo estimulado (o mesmo padrão $\mu = \nu$). Realizando os mesmos passos seguidos no capítulo anterior e após algumas manipulações simples, encontramos o seguinte conjunto de equações acopladas para a superposição do estado do sistema com o padrão $\mu = \nu$ para o regime estacionário (i.e. $m_\nu(t+1) = m_\nu(t) = m$):

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} \tanh \left\{ \beta \left[m(1+h) + \sqrt{\alpha r(q)} z \right] \right\} dz. \\ r(q) &= \frac{q}{[1 - \beta(1-q)]^2} \\ q &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} \tanh^2 \left\{ \beta \left[m(1+h) + \sqrt{\alpha r(q)} z \right] \right\} dz. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Para simplificar a notação, escrevemos $h = h_0$, $m = m_\nu$ e $q = q_\nu$. Este conjunto de equações que descreve o comportamento da superposição m_ν como função dos parâmetros T , α e h , é semelhante ao conjunto de equações (3.52) obtido no capítulo anterior e pode ser resolvido numericamente. Uma versão determinista deste modelo pode ser facilmente obtida tomando o limite $T = 0$ nas equações acima.

Na Figura (4.4) apresentamos o diagrama de fase $T \times \alpha$, para diferentes

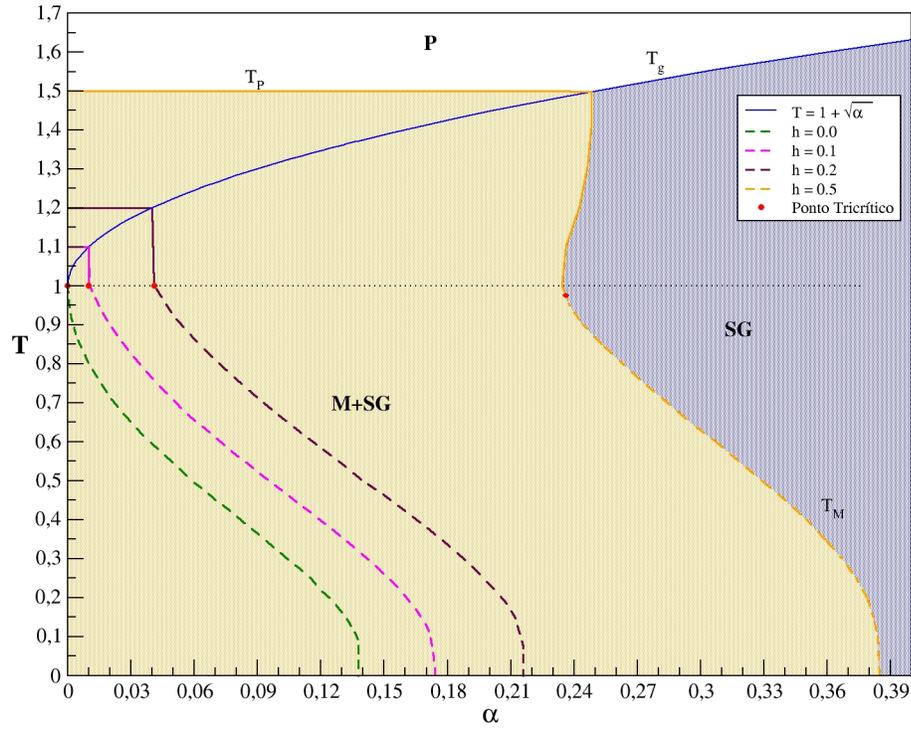


Figura 4.4: Diagrama de fase $T \times \alpha$, para diversos valores do parâmetro h . Para o caso particular $h = 0.5$, na região em laranja (**M+SG**) a rede reconhece o padrão de inicialização. Para este caso, o ponto tricrítico (em vermelho) sofre um pequeno deslocamento em T ($T^* \lesssim 1$) se comparado ao caso $h = 0$ ($T^* = 1$).

valores do parâmetro h . Em especial, para $h = 0$, retomamos a curva do modelo de Hopfield sem estímulo (Figura 3.1). Para $h > 0$, nota-se claramente um aumento na região de reconhecimento com o aumento de h . Basicamente, o modelo apresenta as mesmas três fases do modelo de Hopfield sem estímulo. A primeira delas (**P**), equivale à fase paramagnética em sistemas magnéticos, onde as soluções para a teoria de campo médio do modelo não possui soluções diferentes da solução trivial para os parâmetros q e m (i.e. $m = q = 0$). A segunda região (**SG**), apresenta muitos estados estáveis, que equivalem à fase de vidro de spin em modelos magnéticos, mas não são correlacionados com nenhum dos padrões ξ^μ , de tal maneira que as soluções de ponto fixo são do tipo $m = 0$ e $q \neq 0$. Por último temos a região de

reconhecimento (**M+SG**), que pode ser visto como a fase magnética nos sistemas magnéticos, onde as soluções apresentam a forma $m \neq 0$ e $q \neq 0$.

Para o nosso modelo, existem três temperaturas críticas onde o sistema sofre transição de fase:

- A curva $T_P(h) = 1 + h$ para $0 \leq \alpha \leq h^2$, separa a fase magnética (**M+SG**) da fase paramagnética (**P**) através de uma transição de *segunda ordem*.
- A curva $T_g = 1 + \sqrt{\alpha}$ com $\alpha \geq h^2$, separa a fase de vidro de spin **SG** da fase paramagnética **P** através de uma transição de *segunda ordem*.
- A curva T_M , na qual não é possível obter uma expressão analítica, separa a fase magnética **M+SG** da fase de vidro de spin **SG**.

Vamos analisar, em particular, o comportamento da curva T_M . Se considerarmos pequenos estímulos (i.e. $h \ll 1$), para $T < 1$, o sistema sofre uma transição de fase de *primeira ordem*, enquanto para $T > 1$ ($\alpha_c \sim h^2$), a transição apresentada é de *segunda ordem*, existindo desta maneira um ponto tricrítico em $T^* \simeq 1$. Com o aumento do parâmetro h , em especial vamos considerar $h = 0.5$, notamos que o ponto tricrítico sofre um pequeno deslocamento em T , de tal maneira que $T^* < 1$. As inúmeras dificuldades encontradas na resolução do sistema de equações (4.24), não torna possível encontrar o valor exato do ponto tricrítico para grandes valores de h , apenas nos fornece uma idéia de sua possível localização.

O aumento do ruído estático $\alpha = p/N$, pode ser visto como o aumento de mínimos locais de energia do modelo, onde o seu aumento demasiado (i.e. $\alpha > \alpha_c$), faz a dinâmica da rede condizir o estado do sistema até encontrar um mínimo local que não corresponde a nenhum dos padrões armazenados. O ruído estocástico T atua sobre o sistema de maneira diferente do ruído estático α , pois seu aumento força o sistema a sair das bacias atratoras e ficar percorrendo todo o espaço de configurações. Tendo em vista estes comportamentos distintos, para altos valores

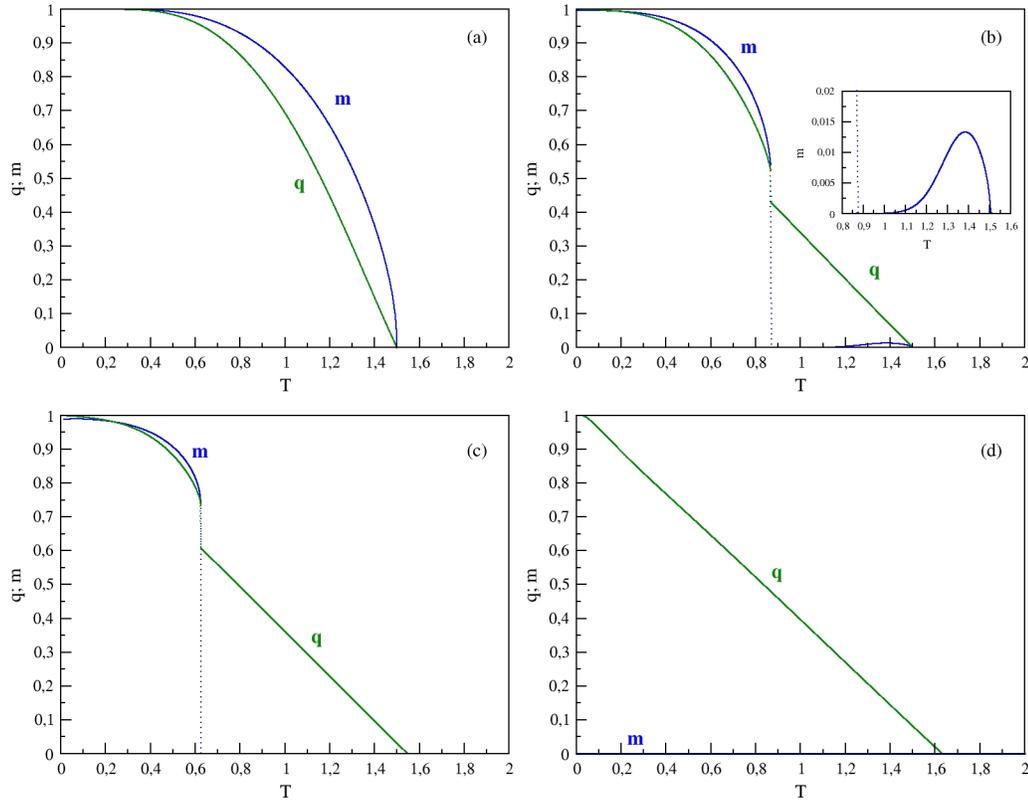


Figura 4.5: Valor dos parâmetros de ordem q e m versus o ruído T para (a) $\alpha = 0.05$, (b) $\alpha = 0.245$, (c) $\alpha = 0.3$ e (d) $\alpha = 0.4$. Para $\alpha = 0.05$, a transição de fase para q e m é de segunda ordem. Em $\alpha = 0.245$, nota-se o surgimento de uma pequena região com superposição $m \neq 0$ mesmo após a transição de primeira ordem em $T \sim 0.87$. Para $\alpha = 0.4$, estamos na região de não reconhecimento, portanto $m = 0$.

do parâmetro h que controla o estímulo persistente, o diagrama de fase apresenta um comportamento reentrante característico da competição entre os ruídos α e T .

Na Figura (4.5) apresentamos o gráfico de m e q versus T para diferentes valores do parâmetro α para o caso $h = 0.5$, onde mostra claramente a natureza entre as transições que ocorrem no modelo. Note a semelhança entre as curvas (a) das Figuras (4.5) e (3.2). Basicamente, o modelo na presença de estímulo se comporta da mesma maneira que o caso $\alpha = 0$ e $h = 0$ para baixos valores do ruído estático α , alterando seu comportamento somente a partir das proximidades do ponto tricrítico

para grandes valores de h . Em (b), é apresentado em destaque a região que a superposição começa a adquirir novamente um valor finito após a transição de primeira ordem em m , que causa o surgimento da reentrância no diagrama de fase (4.4).

4.3.1 O Caso Determinístico ($T = 0$)

Vamos analisar o caso $T = 0$ para o qual realizamos simulações numéricas. Neste limite, utilizando os mesmo cálculos para o caso determinístico no modelo de Hopfield sem a presença do estímulo, as equações (4.24) se reduzem a:

$$\begin{aligned} m &= \operatorname{erf} \left[\frac{m(1+h)}{\sqrt{2\alpha r}} \right] \\ r &= \frac{1}{(1-C)^2} \\ C &= \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha r}} \exp \left[-\frac{m^2(1+h)^2}{2\alpha r} \right]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Fazendo a mudança $y = m(1+h)/\sqrt{2\alpha r}$ em (4.25), obtemos a seguinte equação transcendental que pode ser resolvida numericamente:

$$\operatorname{erf}(y) = \frac{y}{1+h} \left(\sqrt{2\alpha} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} \right). \quad (4.26)$$

Fazendo $h = 0$ nas equações (4.25), reobtemos o conjunto de equações acopladas (3.52) dadas no capítulo anterior para o modelo de Hopfield. Estamos interessados na região onde as soluções não triviais (i.e. $m \neq 0$) da equação (4.26) desaparecem, ou seja, o valor crítico de α a partir do qual a rede não reconhece mais os padrões armazenados.

Na Figura (4.6) apresentamos m como função de α para diversos valores do parâmetro h que controla o estímulo persistente. Como podemos observar, a capacidade de armazenamento da rede α cresce com o valor de h , sempre existindo

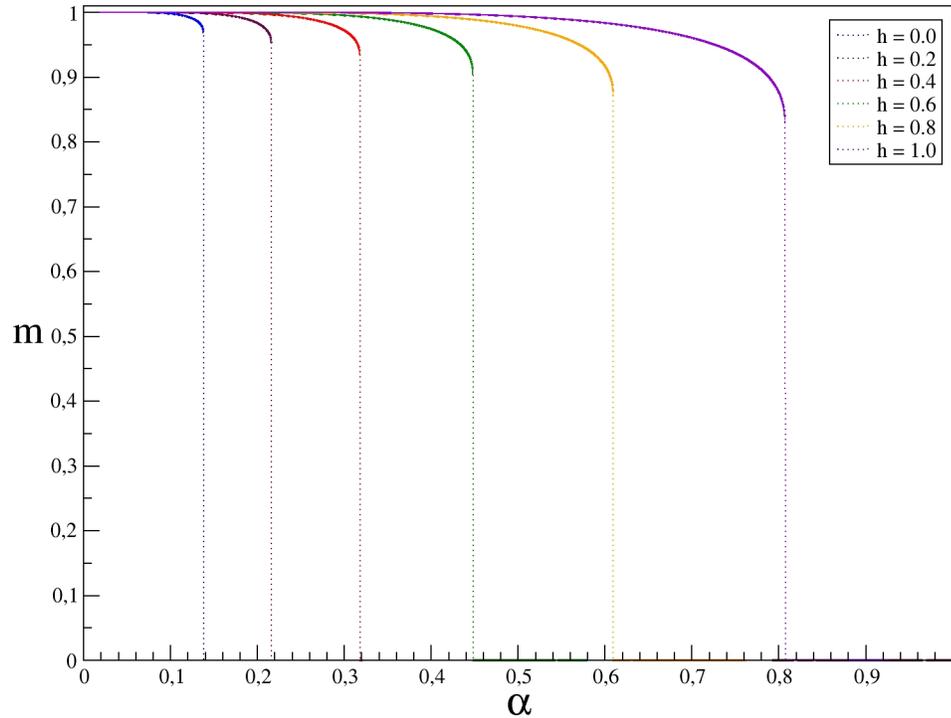


Figura 4.6: Gráfico $m \times \alpha$ para $T = 0$ e diferentes valores de h . Em $\alpha_c(h)$ o sistema sofre uma transição descontínua (linha tracejada) da fase de reconhecimento para a fase de não reconhecimento.

um valor crítico α_c abaixo do qual o sistema reconhece o padrão armazenado com uma pequena fração de erro. Para cada $\alpha_c(h)$ o sistema sofre uma transição de fase descontínua da fase de reconhecimento (fase magnética) para uma fase de não reconhecimento (fase de vidro de spin).

Na tabela (4.1) apresentamos os valores de α_c e m_c a $T = 0$ para diferentes valores do parâmetro h . Note que α_c cresce com o h e que o valor da superposição na transição m_c decresce com h . Isto significa que o estímulo permante h além de aumentar a capacidade de armazenamento da rede também a torna mais robusta, já que o reconhecimento na transição ocorre para valores menores de m_c . Este comportamento pode ser melhor observado na Figura (4.7) (a), onde mostramos a linha crítica $m_c \times h$ a $T = 0$. Acima da linha crítica o sistema reconhece os padrões

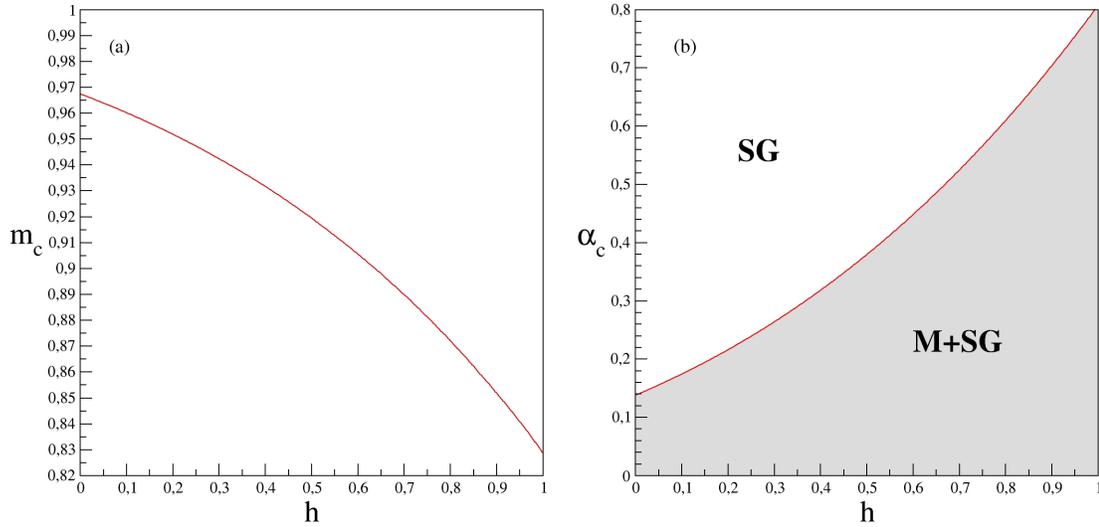


Figura 4.7: Gráficos (a) $m_c \times h$ e (b) $\alpha_c \times h$ para $T = 0$ na transição. Em (b), a região **M+SG** representa a região de reconhecimento.

armazenados e a transição para a fase de não reconhecimento é de primeira ordem.

Para $h = 0$ o $m_c \approx 0.968$ e este valor decresce para $m_c \approx 0.831$ para $h = 1$.

| h | 0.0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 |
|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| α_c | 0.1379019 | 0.2160032 | 0.3180948 | 0.4479776 | 0.6094889 | 0.8073217 |
| m_c | 0.9679753 | 0.9534354 | 0.9347075 | 0.9057069 | 0.8720754 | 0.8309482 |

Tabela 4.1: Valores de α_c e m_c na transição.

Na Figura (4.7) (b), apresentamos o diagrama de fase $\alpha_c \times h$ na ausência de ruído térmico ($T = 0$). Para $h = 0$ reobtemos o $\alpha_c = 0.138$ do modelo de Hopfield. Ao longo da linha $\alpha_c(h)$ o sistema passa por transições de fase descontínuas da fase de reconhecimento (**M+SG**) para a fase de não reconhecimento (**SG**). Note que para $\alpha < 0.138$ o sistema sempre reconhece os padrões armazenados. Para $\alpha > 0.138$ a transição para a fase de não reconhecimento ocorre ao longo da linha crítica $\alpha_c(h)$, onde a região de reconhecimento da rede cresce com o crescimento do parâmetro h .

Como na região um pouco antes da transição o parâmetro de ordem m diminui

com o aumento do parâmetro h , é de se esperar a existência de um valor crítico de h onde $m \rightarrow 0$ na transição. Desta maneira, deve existir um ponto tricrítico para determinado valor de h , onde a transição deixará de ser de *primeira ordem*, se tornando uma transição de *segunda ordem*. Sabemos que no ponto tricrítico podemos escrever o parâmetro de ordem da seguinte maneira:

$$m = am + bm^3, \quad (4.27)$$

onde $a = 1$ e $b = 0$. Para chegar em uma expressão semelhante a (4.27) afim de encontrar ponto tricrítico, podemos reescrever o sistema de equações (4.25) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} m &= \operatorname{erf}[mB(1-C)] \\ \frac{C}{1-C} &= Ae^{[mB(1-C)]^2}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde $B = (1+h)/\sqrt{2\alpha}$ e $A = \sqrt{2/(\pi\alpha)}$. Assumindo o limite $m \rightarrow 0$, podemos expandir os argumentos das funções e após algumas manipulações, reescrever um novo conjunto de equações acopladas

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\pi}}{2}m &\simeq m(1-C)B - \frac{m^3(1-C)^3B^3}{3} \\ C &\simeq A(1-C) - m^2B^2A(1-C)^3. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Assumindo que C possui solução do tipo $C = C_0 + C_2m^2$, encontramos a seguinte expressão para C :

$$C = \frac{A}{A+1} - \frac{B^2A}{(A+1)^4}m^2. \quad (4.30)$$

Substituindo este resultado na expressão para m (4.29) e em seguida utilizando

(4.27), chegamos aos seguintes valores:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \\ B &= \frac{3\sqrt{\pi}}{4}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Substituindo os valores encontrados nas definições de A e B , encontramos $\alpha = 8/\pi \simeq 2.5465$ e $h = 2$ para o ponto tricrítico. Retornando ao diagrama de fase (4.4), espera-se que o ponto tricrítico que para $h = 0$ é dado no ponto $(T, \alpha) = (1, 0)$ percorra um caminho no diagrama de fase com o aumento de h , de tal forma que $(T, \alpha) = (T^* < 1, \alpha_c > 0)$ até atingir o ponto $(T, \alpha) = (0, 8/\pi)$ para $h = 2$. Para $h > 2$ a transição entre a fase de reconhecimento e não-reconhecimento será sempre de *segunda ordem*.

Simulações Numéricas

Nesta seção apresentaremos um estudo numérico das propriedades dinâmicas do nosso modelo para o caso $T = 0$ e comparamos com os resultados analíticos obtidos na seção anterior.

Através da análise das simulações realizadas, observa-se que para baixos valores de h , o modelo ainda apresenta uma transição de fase *descontínua* entre os estados de reconhecimento e não-reconhecimento (Figura 4.8), ainda apresentando uma assinatura clara do efeito do tamanho finito da rede (Figura 4.9). Da mesma maneira que no modelo de Hopfield sem estímulo, utilizando um padrão puro como estado de inicialização da rede, a dinâmica (Eq. 4.14) conduzirá o estado da rede para um estado com superposição m_f com o padrão de inicialização. Para sistemas suficientemente grandes com N sítios, a distribuição de superposições apresenta uma estrutura com 2 picos, um concentrado em $m_f^< \simeq 0.35$ e outro próximo de $m_f^> \simeq 0.97$, com um claro *gap* entre os dois picos. Para $h = 0$ temos que a distância entre os

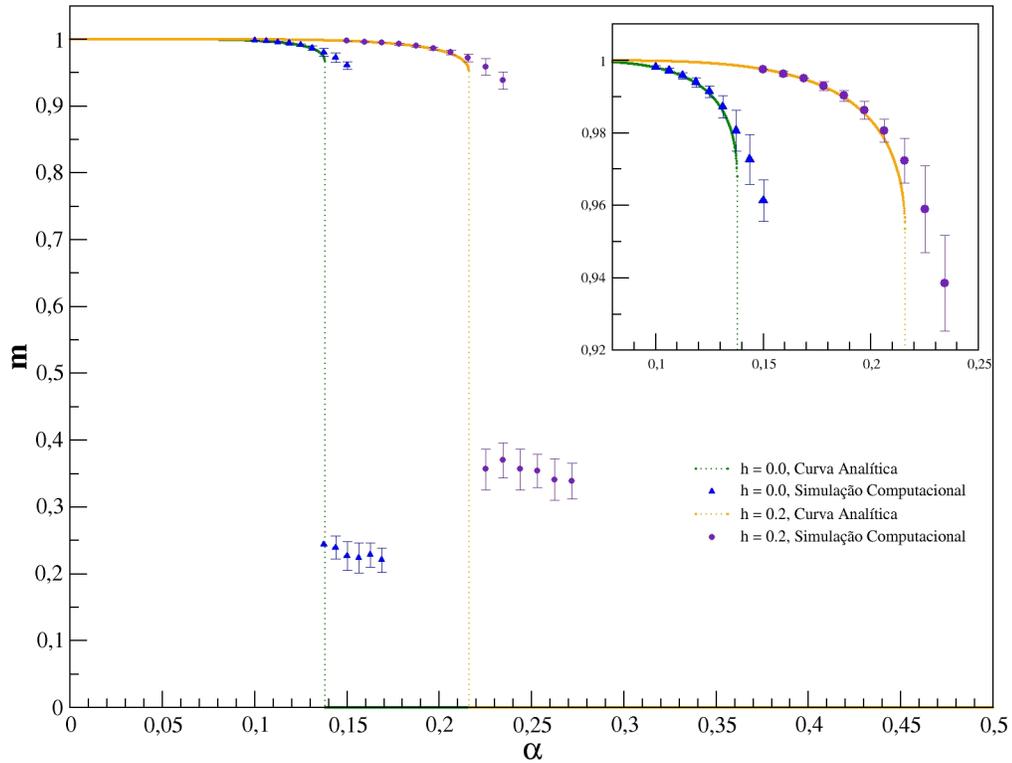


Figura 4.8: Gráfico $m \times \alpha$ para $N = 32000$ para $h = 0.0$ e $h = 0.2$. A linha cheia é o resultado obtido pela aproximação de campo médio e os pontos foram obtidos pelas simulações numéricas. As médias para o cálculo do parâmetro de ordem m foram feitas sobre 100 amostras. Para este tamanho de rede, nota-se que as simulações numéricas apresentam uma boa concordância com os resultados analíticos.

picos é $\Delta m_f \sim 0.68$ e para $h = 1$ a distância é $\Delta m_f \sim 0.62$. Desta maneira, nota-se que com o crescimento do parâmetro h , ocorre um estreitamento do *gap* entre $m_f^<$ e $m_f^>$, de modo que no limite de grandes valores de h , este *gap* tende a desaparecer nos resultados das simulações numéricas.

Considere f como sendo a fração de estados cuja dinâmica leva para uma configuração que se encontra no pico $m_f^>$, esta fração escala com N , seguindo a relação [35, 36]:

$$\langle \ln(f) \rangle \propto (\alpha - \alpha_c) N. \quad (4.32)$$

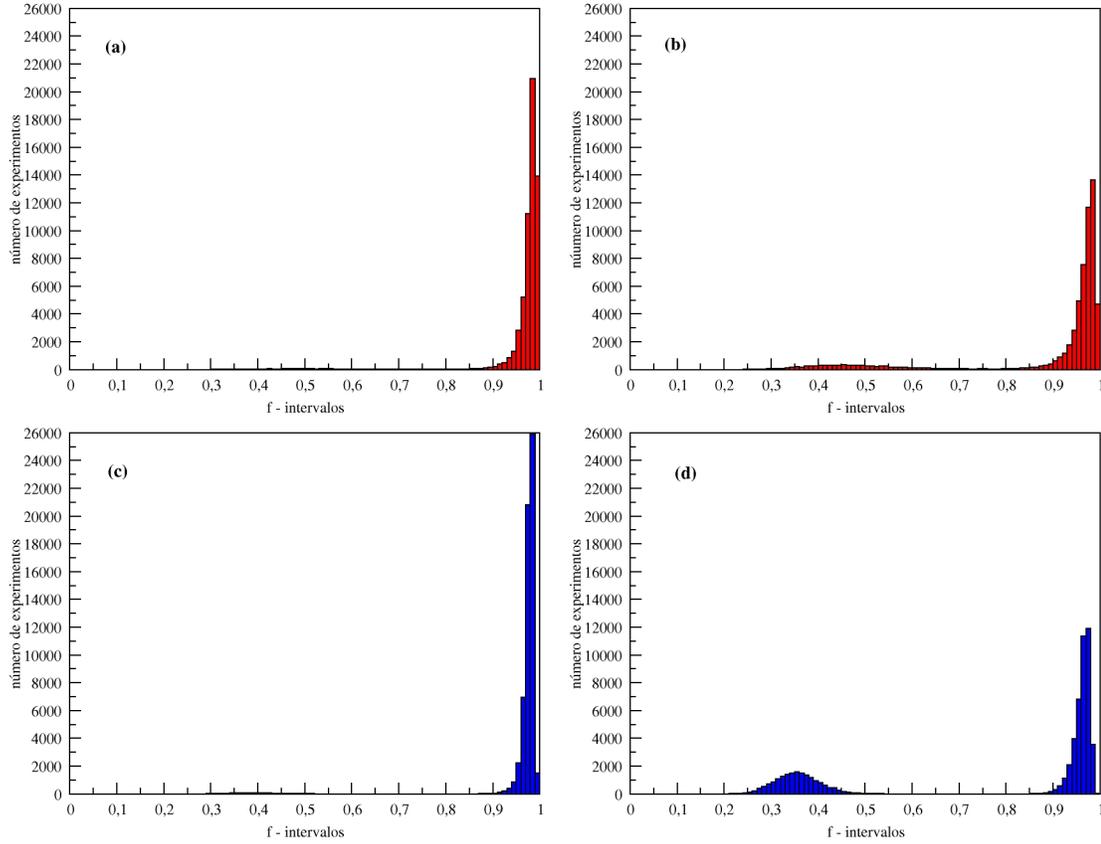


Figura 4.9: *Histograma da distribuição final da superposição m para $N = 2048$ em (a) $\alpha = 0.17383$, (b) $\alpha = 0.18555$ e para $N = 8192$ em (c) $\alpha = 0.17383$, (d) $\alpha = 0.18555$. Todos para o caso $h = 0.1$*

A partir da equação (4.32), nota-se que para $\alpha = \alpha_c$, a quantidade $\langle \ln(f) \rangle$ é invariante sobre escala. Para realizar uma análise de escala, foram simulados sistemas com tamanhos entre $N = 2048$ e $N = 8192$, para uma região de valores de α que engloba pontos antes e após a transição, sempre utilizando 100 padrões de inicialização para calcular f . Sobre os resultados, foram realizadas 200 médias sobre os conjuntos de padrões para o cálculo de $\langle \ln(f) \rangle$. Para os tamanhos de rede estudados, a intersecção entre as curvas (Figura 4.10) não são dadas no mesmo ponto, mas em uma sequência de valores $\alpha_{N,N'}$ entre $\alpha \simeq 0.176$ e $\alpha \simeq 0.178$, onde para altos valores

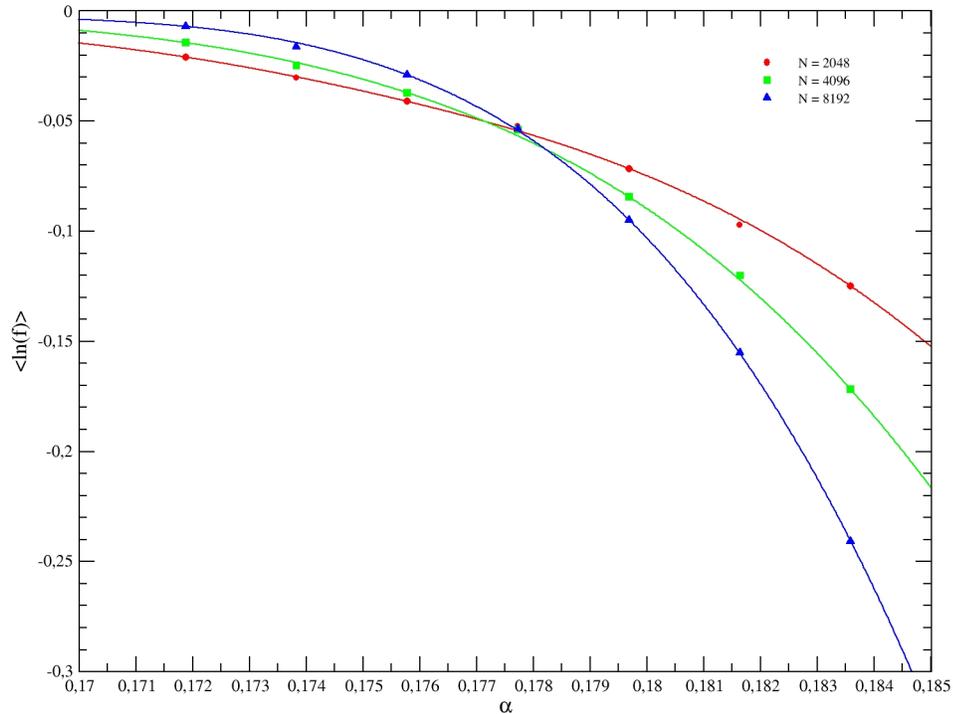


Figura 4.10: Interpolação do tipo Spline para $\langle \ln(f) \rangle \times \alpha = p/N$, para diversos tamanhos de rede com $h = 0.1$. O valor estimado a partir destas curvas para o ponto crítico foi $\alpha_c^{sim} = 0.1777 \pm 0.0004$.

de N e N' , temos que $\alpha_{N,N'}$ deverá convergir para α_c . Como a região onde as curvas (interpolação) se interceptam é estreita, utilizamos uma maneira simples para a estimativa do ponto crítico, que consiste basicamente numa interpolação do tipo spline cúbica para os pontos obtidos para cada tamanho de rede e em seguida realizando a média dos valores de α para os pontos de intersecção. Utilizando este procedimento, encontramos $\alpha_c^{sim} = 0.1777 \pm 0.0004$. A partir da aproximação de campo médio, encontramos $\alpha_c = 0.1745$, um resultado bastante próximo do valor encontrado nas simulações numéricas. O único problema encontrado neste método utilizado para a estimativa de α_c , foi a impossibilidade de estudar estímulos mais intensos, devido ao tempo computacional necessário para obter uma boa estimativa do ponto crítico. No entanto, este método utilizado se mostra bastante poderoso para

o cálculo da capacidade crítica de armazenamento para baixos valores do parâmetro h , que controla a intensidade do estímulo persistente.

Capítulo 5

Conclusões

Neste capítulo faremos um resumo dos principais resultados obtidos neste trabalho de dissertação. No capítulo 1, apresentamos uma visão geral sobre as redes neurais, descrevendo de maneira simplificada a biologia do neurônio compreendendo principalmente seus elementos básicos e suas funcionalidades. Em seguida, seguimos com uma descrição das redes neurais artificiais, apresentando sua história e as principais contribuições encontradas nesta área.

No capítulo 2 descrevemos o *Perceptron* [5], uma rede neural de múltiplas camadas bastante utilizada para problemas de mapeamento entrada-saída. Descrevemos em detalhes o *algoritmo de retropropagação* [9, 10], que criou novas perspectivas nos estudos das redes de múltiplas camadas. Em seguida desenvolvemos uma rede *Perceptron* de múltiplas camadas para a realização de estimativas da permeabilidade das formações rochosas a partir de suas correlações com outras quantidades geofísicas. Basicamente o estudo se deteve em analisar a eficiência e em seguida otimizar o aprendizado para os dados disponíveis [19]. Os resultados encontrados mostram que a maior rede nem sempre possui o maior desempenho e que o desempenho da rede depende basicamente da escolha do melhor conjunto de treinamento.

No capítulo 3 apresentamos o modelo de Hopfield e demonstramos que neste

modelo, o processo de memorização e reconhecimento por associação é dado através da minimização de uma função energia da rede. Utilizamos uma derivação heurística [27, 28] através de uma aproximação de campo médio onde encontramos o mesmo conjunto de equações acopladas encontradas por *Amit et al* [25, 29], que descrevem o comportamento dos parâmetros de ordem m e q para o modelo de Hopfield no regime estacionário. Analiticamente obtivemos para o caso particular $T = 0$, o valor crítico $\alpha_c \simeq 0.1379$. As simulações realizadas nos forneceram $\alpha_c^{sim} = 0.1400 \pm 0.0002$, um resultado bastante próximo ao encontrado analiticamente através da teoria de campo médio. A pequena discrepância entre as simulações e o resultado analítico reflete a necessidade de realizar uma mudança no método analítico utilizado e realizar uma análise com *quebra de simetria de réplicas* [34], que nos fornece um resultado mais próximo das simulações apresentadas.

No capítulo 4, estudamos analiticamente e através de simulações numéricas o comportamento do modelo de Hopfield [7] quando introduzimos em sua dinâmica um parâmetro que exerce o papel de um estímulo persistente que privilegia um dos padrões armazenados na rede. Primeiramente apresentamos os principais resultados encontrados em um trabalho prévio [41], onde introduzimos este termo de estímulo no modelo de Hopfield com assimetria e diluição nas conexões sinápticas (modelo DGZ [37]). Em seguida, estudamos o efeito causado pela introdução deste mesmo termo de estímulo no modelo proposto originalmente por Hopfield [7]. Utilizando os mesmos cálculos realizados no capítulo 3, obtivemos um novo conjunto de equações acopladas para os parâmetros de ordem q e m como funções do ruído estocástico T , do ruído estático α e do parâmetro h que controla a intensidade do estímulo persistente. Analisamos as propriedades da rede quanto à habilidade de reconhecimento e da capacidade de armazenamento. O principal resultado é que para T fixo, há um aumento na capacidade de armazenamento α_c da rede com o aumento do parâmetro h . Além disso, este parâmetro torna a rede mais robusta, pois na região próxima da

transição, permite o reconhecimento de padrões com superposições m menores que para o caso $h = 0$.

Para o caso particular $T = 0$, temos que para $h < 2$ o sistema sofre uma transição de fase de primeira ordem para a fase de não reconhecimento em $\alpha_c(h)$. Com o aumento do parâmetro h , é observado uma diminuição do parâmetro de ordem m na região pouco antes da transição, até atingir o ponto tricrítico $(T, \alpha, h) = (0, 8/\pi, 2)$. Para $h > 2$ a transição para a fase de não reconhecimento será sempre de segunda ordem. Através do uso de um algoritmo computacional que desenvolvemos com o auxílio da técnica *multi-spin coding* [30], realizamos diversas simulações numéricas para comprovar os resultados analíticos. Em particular, para $h = 0.1$ obtivemos $\alpha_c^{sim} = 0.1777 \pm 0.0004$, enquanto a aproximação de campo médio nos forneceu $\alpha_c = 0.1745$. Estes resultados mostra a boa aproximação da derivação heurística [27, 28] empregada nos nossos cálculos. Da mesma maneira que para o modelo sem estímulo, podemos diminuir esta diferença entre os resultado analíticos e numéricos através do emprego de novas ferramentas matemáticas, como o uso do método de quebra de simetria de réplicas.

Como os métodos utilizados para a resolução do conjunto de equações acopladas, que descreve os parâmetros de ordem, não nos fornecem com precisão os resultados para altos valores de h , podemos utilizar novos métodos para resolver estas equações, com a finalidade de encontrar com precisão a localização dos pontos tricríticos para os casos $h \neq 0$ e $T \neq 0$.

Como realizamos somente simulações para o caso determinístico (i.e. $T = 0$), outra análise importante que pode ser realizada, é o estudo do modelo para o caso $T \neq 0$ através de *Simulação Monte Carlo*, na finalidade de comprovar o comportamento apresentado em todo diagrama de fase obtido analiticamente.

O diagrama de fase apresenta uma região com reentrância para altos campos, que se trata de um reconhecimento induzido pelo ruído térmico. Desta maneira,

podemos encontrar diversos resultados importantes em um estudo detalhado do comportamento da rede sob estas condições.

Uma impossibilidade encontrada em nosso modelo, foi o estudo do comportamento do modelo na presença do estímulo perpendicular, já que as equações encontradas são válidas somente para o equilíbrio e não descrevem a dinâmica do sistema. Desta maneira, um desenvolvimento de equações dinâmicas para o modelo podem possibilitar um estudo detalhado do modelo na presença do estímulo perpendicular ao padrão de inicialização.

Por fim, podemos também estudar a introdução de novas características presentes nas redes neurais biológicas como por exemplo períodos refratários [39, 40], buscando cada vez mais uma maior aproximação entre as redes neurais artificiais e biológicas.

Apêndice A

Multi-Spin Coding

Neste apêndice, vamos fazer uma rápida apresentação da técnica computacional utilizada nas nossas simulações numéricas. O emprego das ferramentas computacionais para a análise do comportamento dinâmico de sistemas complexos é de grande importância, já que os resultados das simulações podem ser considerados como verdadeiros experimentos. Ao longo dos anos, novas técnicas foram sendo desenvolvidas, aumentando a eficiência dos algoritmos computacionais e diminuindo o tempo de processamento, que em muitos casos é consideravelmente longo. Uma técnica bastante interessante é a técnica *multi-spin coding* que é utilizada para problemas descritos por variáveis *Booleanas* (variáveis independentes que possuam apenas dois estados). Nesta seção vamos descrever este método através da sua aplicação no modelo de redes neurais estudado neste trabalho. Para aqueles interessados, uma descrição mais completa pode ser encontrada no livro *Computing Boolean Statistical Models* [30].

Operações Booleanas

No modelo de Hopfield, descrevemos o estado do neurônio como sendo $+1$ ou -1 , representando o estado ativo e passivo respectivamente. Para fazer uma otimização dos processos computacionais envolvidos na dinâmica do modelo, vamos tratar o

| AND | OR | XOR | NOT |
|------------------|----------------|-------------------|--------------|
| $0 \wedge 0 = 0$ | $0 \vee 0 = 0$ | $0 \otimes 0 = 0$ | |
| $1 \wedge 0 = 0$ | $1 \vee 0 = 1$ | $1 \otimes 0 = 1$ | $\neg 0 = 1$ |
| $0 \wedge 1 = 0$ | $0 \vee 1 = 1$ | $0 \otimes 1 = 1$ | $\neg 1 = 0$ |
| $1 \wedge 1 = 1$ | $1 \vee 1 = 1$ | $1 \otimes 1 = 0$ | |

Tabela A.1: *Operações lógicas booleanas.*

estado dos neurônios como 0 (passivo) e 1 (ativo). O grande trunfo desta técnica está no fato que agora podemos armazenar em uma variável inteira até 64 estados do sistema, que representam os neurônios, como também a possibilidade de processar os cálculos em paralelo.

Armazenando as variáveis ξ_i^μ em variáveis inteiras de 64 bits, podemos tornar o tamanho da matriz que armazena os padrões da rede 64 vezes menor. Desta maneira, uma rede de 32000 neurônios que necessitava de uma matriz com $32000 \times p$ variáveis inteiras para armazenar os p padrões, utilizando a técnica *multi-spin coding*, necessita de uma matriz com apenas $500 \times p$ variáveis. Esta é a primeira grande vantagem da utilização desta técnica.

Outra vantagem é que a mudança nos estados do sistema $[-1, 1]$ para $[0, 1]$ proporciona o uso das operações lógicas, que são consideravelmente mais rápidas do que uma operação matemática usual (soma, multiplicação, subtração ou divisão), além de proporcionar o processamento em paralelo (realizar 64 operações simultâneas). A Tabela (A.1) apresenta as possíveis operações lógicas Booleanas:

O uso destas operações em duas variáveis inteiras (I_1 e I_2) exercerá efeito em todos os bits destas variáveis. Na Tabela (A.2), temos um exemplo do uso de duas destas operações entre dois número inteiros de 16 bits (exemplo do uso do XOR e OR entre variáveis de 16 bits):

Além destas quatro operações Booleanas apresentadas, usaremos operações de *shift* para manipular os bits. Um *left shift* (lshift), desloca todos os bits do número para a esquerda adicionando um 0 ao primeiro bit da direita e descartando

| | |
|--------------------------------------|-----------------------------------|
| $I_1 = 0110101000111010$ | $I_1 = 0110101000111010$ |
| $I_2 = 1101010101011101$ | $I_2 = 1101010101011101$ |
| $I_1 \otimes I_2 = 1011111101100111$ | $I_1 \vee I_2 = 1111111101111111$ |

Tabela A.2: Exemplo do uso do XOR e OR entre variáveis de 16 bits.

o último bit da esquerda. Um *right shift* (rshift), realiza o reverso.

Desenvolvimento do algoritmo

Os padrões são armazenados no vetor $\xi(p, N_{64})$, onde p é o número máximo de padrões que será armazenado na rede e N_{64} é o número total de neurônios dividido pelo número de bits em cada variável da matriz (64 bits por número inteiro), ou seja, $N_{64} = N/64$. Desta maneira cada bit irá representar um neurônio da rede, onde os neurônios estão divididos em N_{64} blocos de 64 neurônios. Podemos representar a matriz dos padrões armazenados na forma:

$$\xi(p, N_{64}) = \begin{pmatrix} \overbrace{i_{63}, i_{62}, \dots, i_1, i_0}^{\xi(1,1)} & \overbrace{i_{63}, i_{62}, \dots, i_1, i_0}^{\xi(1,2)} & \dots & \overbrace{i_{63}, i_{62}, \dots, i_1, i_0}^{\xi(1, N_{64})} \\ \overbrace{i_{63}, i_{62}, \dots, i_1, i_0}^{\xi(2,1)} & \overbrace{i_{63}, i_{62}, \dots, i_1, i_0}^{\xi(2,2)} & \dots & \overbrace{i_{63}, i_{62}, \dots, i_1, i_0}^{\xi(2, N_{64})} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overbrace{i_{63}, i_{62}, \dots, i_1, i_0}^{\xi(p,1)} & \overbrace{i_{63}, i_{62}, \dots, i_1, i_0}^{\xi(p,2)} & \dots & \overbrace{i_{63}, i_{62}, \dots, i_1, i_0}^{\xi(p, N_{64})} \end{pmatrix},$$

onde cada termo $\xi(i, j)$ é um número inteiro de 64 bits.

De maneira análoga, o estado da rede é representado pelo vetor:

$$S(N_{64}) = \left(\overbrace{i_{63}, i_{62}, \dots, i_1, i_0}^{S(1)}, \overbrace{i_{63}, i_{62}, \dots, i_1, i_0}^{S(2)}, \dots, \overbrace{i_{63}, i_{62}, \dots, i_1, i_0}^{S(N_{64})} \right).$$

Utilizando o método *multi-spin coding* descrito acima para representar os elementos da rede, podemos melhorar consideravelmente o desempenho das simulações

numéricas além de proporcionar o uso de redes de tamanho maiores quando comparadas com o caso do armazenamento usual (uma variável inteira armazenando apenas um sítio da rede).

Armazenamento dos padrões

A primeira etapa do processamento é a fase de armazenamento dos padrões na rede. Como no modelo os padrões armazenados são descorrelacionados, o armazenamento é feito através da escolha aleatória do estado em cada sítio 0 ou 1 com mesma probabilidade $1/2$. Inicialmente fixamos o primeiro elemento da matriz $\xi(p, N_{64})$ e logo em seguida varremos os 64 bits deste elemento. Repetimos este mesmo procedimento para todos os elementos da matriz $\xi(p, N_{64})$, todos os bits escolhidos aleatoriamente, de forma a completar a matriz. Como queremos reconhecer um dado padrão armazenado na rede, vamos escolher a configuração inicial ($S(N_{64})$) como sendo um desses padrões.

A Dinâmica

Queremos medir o reconhecimento da rede que é dado pela equação (3.23):

$$m_\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu S_i. \quad (\text{A-1})$$

O cálculo de m_μ pode ser feito de maneira mais eficiente através da seguinte operação:

$$m_\mu = \sum_{i=1}^{N_{64}} 2\text{popcnt} [\neg (\xi_i^\mu \otimes S_i)] - 64N_{64}, \quad (\text{A-2})$$

onde $\text{popcnt}(x)$ é uma função que retorna o número de bits igual a 1 no número inteiro x . É importante ressaltar que neste cálculo temos na realidade N vezes o valor do parâmetro m_μ , pois isto facilitará os cálculos que serão realizados mais

adiante.

Para facilitar ainda mais os cálculos, considere a equação (4.15) para o campo local induzido. Multiplicando por S_i temos que:

$$h_i S_i = \sum_{j=1}^N J_{ij} S_j S_i + h m_\nu \xi_i^\nu S_i. \quad (\text{A-3})$$

Utilizando a equação (3.6) para J_{ij} , temos que:

$$h_i S_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu S_j S_i + h m_\nu \xi_i^\nu S_i - p, \quad (\text{A-4})$$

onde o $-p$ aparece pelo fato de termos adicionado e subtraído no somatório o termo $i = j$. Substituindo a expressão de m_μ na equação acima temos que:

$$h_i S_i = \sum_{\mu=1}^p m_\mu \xi_i^\mu S_i + h m_\nu \xi_i^\nu S_i - p. \quad (\text{A-5})$$

O produto $\xi_i^\mu S_i$ na expressão acima aparecerá diversas vezes na dinâmica. Podemos fazer este produto de maneira bastante eficiente e armazenar em uma matriz, de tal maneira que vamos precisar calcular somente uma vez para cada valor de μ . Este produto pode ser realizado da seguinte maneira:

$$\xi_i^\mu S_i = K_i(\mu) = \text{lshft} \{ [1 \wedge \text{rshft}(\neg(\xi_i^\mu \otimes S_i), i_j)], 1 \} - 1 \quad (\text{A-6})$$

A função $\text{lshft}(I, j)$ realiza um *left shift* j vezes e $\text{rshft}(I, j)$ realiza um *right shift* j vezes. É importante ressaltar que na expressão acima estamos na realidade realizando a operação no bit de número i_j do sítio i da matriz $\xi(\mu, i)$.

Desta maneira, temos que o produto de h_i por S_i pode ser escrito como:

$$h_i S_i = H'_i = \sum_{\mu=1}^p m_\mu K_i(\mu) + h m_\nu K_i(\nu) - p. \quad (\text{A-7})$$

Se $H'_i \geq 0$, temos que o sítio não será atualizado. Se $H'_i < 0$, o sítio i será atualizado e teremos que calcular o novo valor de m_μ para todos os padrões ($\mu = 1, 2, \dots, p$). Repetimos o mesmo procedimento para todos os outros sítios realizando a mesma análise do sinal.

Os modelos de redes neuronais geralmente levam em conta dois tipos de regras dinâmicas: paralela ou sequencial. Na dinâmica paralela todos os neurônios são atualizados simultaneamente (vamos escolher $\Delta t = 1$ como a unidade temporal de atualização), enquanto que na dinâmica sequencial escolhe-se um único neurônio por vez para ser atualizado ($\Delta t = 1/N$). Em nossas simulações utilizamos uma dinâmica sequencial.

Algoritmo Computacional

```

PROGRAM Mversusalpha
PARAMETER(NN=500,NP=13760,N=32000,pts=30)
PARAMETER(alfa0=0.27,alfaf=0.43,hext=0.4,Namostras=200)
INTEGER*8 S(NN),Qsi(NP,NN),XORVAR2,M(NP),QsiSI(NP)
INTEGER mi,i,P,Pf,idum,atualiza,amostN,dp,p0,N2,I22,Nbits
REAL MMi1,alfa,mdemi1,H,XORVAR
CHARACTER*40 name

Nbits = 64

idum = 1

WRITE(name,11) hext,Namostras,N
11 FORMAT('MvA-',F4.2,'h',I4.4,'A',I5.5,'N.dat')

OPEN(10,file=name)

N2 = N/Nbits

Pf=int(float(N)*Alfaf)

p0=int(float(N)*alfa0)+2

dp=int( (pf-p0) / (pts+1) )

if (dp.LT.1) dp=1

DO 2 P = p0,pf , dp

Mdemi1=0.0

DO 34 amostN=1 , Namostras, 1

c-----
c Escolha aleatoria das memorias p/ reconhecimento Qsi(Mi,i)

idum = idum+1

DO 10 mi = 1,P

DO 20 i = 1,N2

```

```

        Qsi(mi,i)=0
        DO 18 i22 = 0, Nbits-1
        XORVAR = RANO(IDUM)
        IF (XORVAR.LE.0.5) Qsi(mi,i)=ibset(Qsi(mi,i),i22)
18      CONTINUE
20      CONTINUE
10     CONTINUE
c-----
c Escolha da Configuracao inicial S(i) = Qsi(1,i)
        DO 30 i = 1,N2
        S(i) = Qsi(1,i)
30     CONTINUE
c-----
c Calculo do parametro de ordem M(mi)
        DO 40 MI = 1,P
        M(mi)=0
        DO 50 I = 1,N2
        M(mi)=M(mi)+2*popcnt(NOT(XOR(S(i),Qsi(mi,i))))
50     CONTINUE
        M(mi)=M(mi)-N2*Nbits
40     CONTINUE
c-----
c*****
c INICIO DA DINAMICA
c*****
        atualiza = 1 !Numero de Bits trocados no estado do sistema
        DO 60 WHILE (atualiza.NE.0)

```

```

    atualiza = 0
    DO 55 I = 1,N2
    DO 56 I22 = 0,Nbits-1
c Calculo do campo local (H*S(i))
    H = - P
    DO 75 MI = 1,P
    QsiSI(mi)=ishft(AND(1,ishft(NOT(XOR(Qsi(mi,i),S(i))),-i22)),1)-1
    H = H + M(mi)*QsiSI(mi)
    75 CONTINUE
c Atualizacao dos sitios
c Insercao do campo externo no campo local H, que privilegia o padrao mi=1
    H = H + hext*M(1)*QsiSI(1)
c-----
    IF(H.LT.0) THEN
    DO 85 mi = 1,P
    M(mi) = M(mi) - ibclr(ibset(QsiSI(mi),1),0)
    85 CONTINUE
    S(i)=ibchng(S(i),i22)
    atualiza = atualiza + 1
    ENDIF
c-----
    56 CONTINUE
    55 CONTINUE
    60 CONTINUE
    Mdem11=Mdem11+float(M(1)) !media
    34 CONTINUE
c-----

```

```
c Imprime os valores no arquivo de saida
      Mdem1=Mdem1/Float(Namostras)
      WRITE(10,*) float(p)/float(N),Mdem1/float(n)
2 CONTINUE
      END
c*****
c GERADOR DE NUMEROS ALEATORIOS
c*****
      FUNCTION ran0(idum)
      INTEGER idum,IA,IM,IQ,IR,MASK
      REAL ran0,AM
      PARAMETER (IA=16807,IM=2147483647,AM=1./IM,IQ=127773,IR=2836,
      *MASK=123459876)
      INTEGER k
      idum=ieor(idum,MASK)
      k=idum/IQ
      idum=IA*(idum-k*IQ)-IR*k
      if (idum.lt.0) idum=idum+IM
      ran0=AM*idum
      idum=ieor(idum,MASK)
      return
      END
c*****
```

Referências Bibliográficas

- [1] Gupta, M. M.; Jin, L. ; Homma, N. - *Static and Dynamic Neural Networks: From Fundamentals to Advanced Theory*. 1.ed., John Wiley, New York, 2003.
- [2] Nossal, R.; Lecar, H. - *Molecular & Cell Biophysics*. Addison-Wesley Publishing Company, California, 1991.
- [3] McCulloch, W. S.; Pitts, W. H. - *A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity. Bulletin of Mathematical Biophysics*. Vol. 5, n. 1, pp. 115-137, 1943.
- [4] Heeb, D. O. - *The Organization of Behavior: A Neuropsychological Theory*. Wiley, New York, 1949.
- [5] Rosenblatt, F. - *The Perceptron: A Probabilistic Model for Information Storage and Organization in the Brain. Psychological Review*. Vol. 65, pp. 386-408, November, 1958.
- [6] Minsky, M. L.; Papert, S. A. - *Perceptrons: An Introduction to Computational Geometry*. MIT Press, Massachusetts, 1969.
- [7] Hopfield, J. J. - *Neural Networks and Physical Systems With Emergent Collective Computational Abilities. Proc. Natl. Acad. Sci. Usa*. Vol. 79, pp. 2554-2558, April, 1982

- [8] Little, W. A. - *The Existence of Persistent States in the Brain. Mathematical Biosciences*. Vol. 19, pp. 101-120 , 1974.
- [9] Rumelhart, D. E.; Hinton, G. E.; Williams, R. J. - *Learning Representations of Back-propagation Errors. Nature (London)*. Vol. 323, pp. 533-536, 1986a
- [10] Rumelhart, D. E.; McClelland, J. L. - *Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition*. Vol. 1, MIT Press, Cambridge, 1986.
- [11] Amit, D. J.; Gutfreund, H.; Sompolinsky, H. - *Storing Infinite Numbers of Patterns in a Spin-Glass Model of Neural Networks. Physical Review Letters*. Vol. 55, pp. 1530-1533, 1985.
- [12] Nikravesh, M.; Aminzadeh, F. - *Past, Present and Future Intelligent Reservoir Characterization Trends. Journal of Petroleum Science and Engineering*. Vol. 31, 67, 2001.
- [13] Mohaghegh, S.; Arefi, R.; Ameri, S.; Rose, D. - *Design and Development of an Artificial Neural Network for Estimation of Formation Permeability*. SPE28237, 1994.
- [14] Mohaghegh, S.; Ameri, S. - *Artificial Neural Network as a Aaluable Tool for Petroleum Engineers*. SPE29220, 1995.
- [15] Mohaghegh, S.; Arefi, R.; Ameri, S.; Aminiand, K.; Nutter, R. - *Petroleum Reservoir Characterization With the aid of Artificial Neural Networks. Journal of Petroleum Science and Engineering*. Vol. 16, 263, 1996.
- [16] Bishop, C.M. - *Neural Networks for Pattern Recognition*. Oxford University Press, Oxford, 1995.

- [17] Haykin, S. - *Redes Neurais: Princípios e Prática*. 2nd. ed., Bookman, Porto Alegre, 2001.
- [18] Reidmiller, M.; Braun, H. - *A Direct Adaptative Method for Faster Back-propagation Learning: the RPROP Algorithm*, in H. Ruspini, ed. *Proc. Of the IEEE Intl. Conference on neural Networks*. San Fracisco, California, pp. 586-591, 1993.
- [19] Oyerokun, A.A - *Master Degree Thesis, Department of Petroleum and Natural Gas Engineering*. West Virginia, USA, 2002.
- [20] Aase, N.E.; Bjorkum, P.A.; Nadeau, P.H. - *The Effect of Grain-Coating Microquartz on Preservation of Reservoir Porosity*. *American Association of Petroleum Geologists Bulletin*. Vol. 80, n. 10, p. 1654-1673. 1996
- [21] Bak, P.; Chialvo, D.R. - *Adaptative Learning by Exteremal Dynamics and Negative Feedback*, *Physical Review E*. Vol. 63, 031912, 2001.
- [22] Sherrington, D.; Kirkpatrick, S. - *Solvable Model of a Spin-Glass*. *Phys. Rev. Lett.*. Vol. 35, pp. 1792-1796, 1975.
- [23] Edward, S. F.; Anderson, P. W. - *Theory of Spin Glasses*. *J. Phys. F*. Vol. 5, pp. 965-974, 1975.
- [24] Hertz, J.; Krogh, A.; Palmer, R. G. - *Introduction to the Theory of Neural Computation*. Addison-Wesley, Redwood City, 1991.
- [25] Amit, D. J.; Gutfreund, H.; Sompolinsky, H. - *Spin-Glass Models of Neural Networks*. *Physical Review A*. Vol. 32, pp. 1007-1018, 1985.
- [26] Reif, F. - *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*. McGraw-Hill, Singapore, 1985.

- [27] Geszti, T. - *Physical Models of Neural Network*. World Scientific, Singapore, 1990.
- [28] Peretto, P. - *On Learning Rules and Memory Storage Abilities of Asymmetrical Neural Networks*. *Journal of Physics*. Vol. 49, pp. 711-726, 1988.
- [29] Amit, D. J.; Gutfreund, H.; Sompolinsky, H. - *Statistical Mechanics of Neural Networks Near saturation*. *Annals of Physics*. Vol. 173, pp. 30-67, 1987.
- [30] Oliveira, P. M. C. - *Computing Boolean Statistical Models*. World Scientific, Singapore, 1991.
- [31] Crisanti, A.; Amit, D. J.; Gutfreund, H. - *Saturation Level of the Hopfield Model for Neural Network*. *Europhys. Lett.* Vol. 2, pp. 337, 1986
- [32] Horner, H.; Bormann, D.; Frick, M.; Kinzelbach, H.; Schmidt, A. - *Transients and Basins of Attraction in Neural Network Models*. *Z. Phys. B*. Vol. 76, pp. 381-398, 1989
- [33] Kohring, G. A. - *Convergence Time and Finite Size Effects in Neural Networks*. *J. Phys. A*. Vol. 23, pp. 2237-2241, 1990
- [34] Steffan, H.; Kühn, R. - *Replica Symmetry Breaking in Attractor Neural Network Models*. *Z. Phys. B*. Vol. 95, pp. 249-260, 1994
- [35] Stiefvater, T.; Müller, K. R.; Kühn, R. - *Averaging and finite-size analysis for disorder: The Hopfield model*. *Physica A*. Vol. 232, pp. 61-73, 1996.
- [36] Amit D. J. - *Modeling Brain Function - The World of Attractor Neural Network*. Cambridge University Press, 1989.
- [37] Derrida, B.; Gardner, E.; Zippelius, A. - *An Exactly Solvable Asymmetric Neural Network Model* *Europhysics Letters*. Vol. 4, pp. 167-173, 1987.

- [38] Areson, J. J.; Lemke, N. - *Simulating Highly Diluted Neural Networks. Journal of Physics A: Mathematical and General*. Vol. 27, pp. 5161-5166, 1994.
- [39] da Silva, C. R.; Tamarit, F. A.; Curado, E. M. F. - *Influence of Refractory Periods in the Hopfield Model. International Journal of Modern Physics C (Physics and Computers)*. Vol. 7, pp. 43-56, 1996.
- [40] da Silva, C. R.; Tamarit, F. A.; Curado, E. M. F. - *Diluted Neural Network With Refractory Periods. Phys. Rev. E*. Vol. 55, pp. 3320-3327, 1997.
- [41] Sobral Jr, G. A.; Vieira, V. M.; Lyra, M. L.; da Silva, C. R. - *Parallel and Orthogonal Stimulus in Ultradiluted Neural Networks. Phys. Rev. E*. Vol. 74, pp. 046117-1-8, 2006.
- [42] Amit D. J.; Parisi G.; Nicolis S. - *Neural Potentials as Stimuli for Attractor Neural Networks. Network: Computation in Neural Systems*. Vol. 1, pp. 75-88. 1990.
- [43] Engel, A.; Bouten, M.; Komoda, A.; Serneels, R. - *Enlarged Basin of Attraction in Neural Networks with Persistent Stimuli. Phys. Rev. A*. Vol. 42, pp. 4998-5005. 1990.
- [44] Ma, Y.; Zhang; Y.; Ma, Y.; Gong, C. - *Statistical Mechanics of a Hopfield Neural-Network Model in a Transverse Field. Phys. Rev. E*. Vol. 47, pp. 3985,3987-, 1993.
- [45] MA, Y.; Gong, C. - *Statistical Mechanics of a Multiconnected Hopfield Neural-Network Model in a Transverse Field. Phys. Rev. E*. Vol. 51, pp. 1573-1575, 1994.
- [46] Shukla P. - *Response of the Hopfield-Little Model in an Applied Field. Phys. Rev. E*. Vol. 56, pp. 2265-2268. 1997.

- [47] Sobral Jr, G. A. - *Propriedades Dinâmica de Redes de Neurônios com Estímulos Externos e Diluição Assimétrica*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Física. Alagoas, Brasil, 2005.