

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA DA MATÉRIA  
CONDENSADA

WESLEY SOARES SILVA

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LONDON NO ESPAÇO HIPERBÓLICO

MACEIÓ  
2016

WESLEY SOARES SILVA

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LONDON NO ESPAÇO HIPERBÓLICO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Matéria Condensada da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. ALEXANDRE MANOEL

Maceió  
2015

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecário Responsável: Valter dos Santos Andrade

S586s Silva, Wesley Soares.  
Solução da Equação de London no espaço hiperbólico / Wesley Soares Silva. –  
2016.  
64 f. : il. graf.

Orientador: Alexandre Manoel de Moraes Carvalho.  
Dissertação (mestrado em Física da Matéria Condensada) – Universidade  
Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2016.

Bibliografia: f. 61-64.

1. Supercondutividade. 2. London, Equação de. 2. Espaço de Lobachevsky.  
I. Título.

CDU: 538.945

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE**  
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

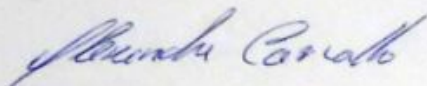
*“Soluções da equação de London em espaços hiperbólicos”*

por

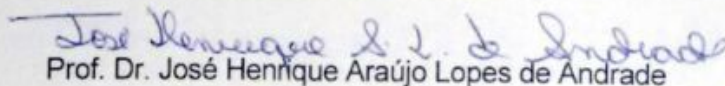
**Wesley Soares Silva**

A Banca Examinadora composta pelos professores Alexandre Manoel de Moraes Carvalho (Orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, José Henrique Araújo Lopes de Andrade, da Universidade Federal de Alagoas – Campus Arapiraca, e Iram Marcelo Gléria, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, consideram o candidato **aprovado com grau “A”**.

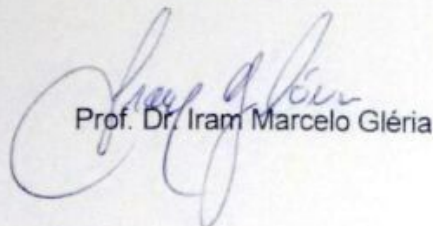
Maceió, 08 de março de 2016



Prof. Dr. Alexandre Manoel de Moraes Carvalho



Prof. Dr. José Henrique Araújo Lopes de Andrade



Prof. Dr. Iram Marcelo Gléria

*Aos meus pais...  
Aos meus irmãos...  
E a minha noiva.*

# AGRADECIMENTOS

Primeiramente quero agradecer a Deus por mais uma conquista em minha vida, sem sua presença tenho certeza que não estaria onde estou, e sem ele ao meu lado não consigo ir à lugar algum. Que ele sempre me ilumine com sua benção e me cubra como seu manto de amor.

Quero agradecer toda minha família em especial meus pais Laene Julia Soares Silva e João Alfredo Soares Silva, e meus irmão Eudes Soares Silva e José Wylames Soares Silva, por toda força que me deram e por nunca me abandonar nas horas difíceis.

Também queria agradecer meu orientador pelas suas horas dedicadas a me orientar, agradecer pelo conhecimento adquirido ao longo do mestrado, falar que sua colabaração foi de suma importância para o desenvolvimento do presente trabalho. Ao mesmo tempo quero aproveitar para parabeniza-lo pela forma como ele trata seus alunos e o desenvolvimento da ciência.

Aos meus colegas de instituição, Tasso, Rafael e Ricardo, nos quais considero como irmão, Ruy, minha comadre Rozi, e em especial ao Djair pela sua ajuda que nos momentos de dificuldades ele sempre esteve presente para me dar uma mão, antes do mestrado não o conhecia, mas aqui encontrei um amigo que sempre na medida do possível está para ajudar, obrigado de verdade.

A banca examinadora meus agradecimentos, professor Dr. Iram Gléria e professor Dr. Henrique Lopes

E por último, mas não menos importante, quero agradecer muito minha noiva e futura esposa por tudo que ela tem proporcionado em minha vida, seu companherismo é de uma importante grandiosa. Nos momentos onde tudo não parece ter mais sentido é nela que me pego e sempre tenho um retorno satisfatório, mesmo não sendo fácil a distância e a saudades que sentimos um do outro, ela sempre está para apoiar nas minhas decisões. Muito obrigado amor!

Somente a verdade traz a liberdade.  
Ribeiro, R.S.

# RESUMO

Neste trabalho abordamos a teoria de London de um supercondutor no espaço hiperbólico de Lobachevsky. Apresentamos suas origens, características e resultados mais importantes. A ideia dessa teoria é explicar o fenômeno da supercondutividade, observando o comportamento do campo e algumas propriedades. O estudo começa com uma introdução sobre a teoria de London, onde apresentamos a equação fenomenológica de London. Em seguida, é feita uma discussão sobre as principais características dos supercondutores como a resistência zero, o efeito Meissner-Ochsenfeld, os tipos de supercondutores, o surgimento de vórtices e uma análise sobre a teoria de Landau-Ginzburg para transição de fase metal-supercondutor. Após isto, é feita uma abordagem de alguns aspectos matemáticos, geometria hiperbólica, geometria de Lobachevsky. Foi encontrada solução da equação de London para um supercondutor em um sistema de coordenadas quase-cartesianas, mostra-se que, quando o raio do espaço da curvatura de Lobachevsky  $\rho$  é menor do que uma quantidade dupla da profundidade de penetração  $\lambda$  London, o campo magnético pode aumentar com a profundidade de penetração, foram ainda feita a análise da densidade de corrente supercondutora e energia do sistema, observou-se a dependência dessas propriedades com o raio da curvatura do espaço de Lobachevsky.

**Palavras-chave:** Supercondutividade. Equação de London. Espaço de Lobachevsky



# ABSTRACT

In this work we approach the London theory of a superconductor in the Lobachevsky's hyperbolic space. We present their origins, characteristics and most important results. The idea of this theory is to explain the phenomenon of superconductivity by observing the field behavior and some properties. This study begins with an introduction about London theory, where we present the London's phenomenological equation. Then we do a discussion of the main characteristics of the superconductors as the zero resistance, the Meissner-Ochsenfeld effect, the types of superconductors, the onset of vortices and an analysis of the Landau-Ginzburg theory for metal- superconductor transition phase. After this, an approach is made of some mathematical aspects, hyperbolic geometry, Lobatchevsky geometry. London equation solution for a superconductor in a system of quasi-Cartesian coordinates. It is shown that when the radius of Lobachevsky's curvature space  $\rho$  is smaller than a double amount of the London penetration depth  $\lambda$ , magnetic field can increase with penetration depth, yet it has done the analysis of the superconducting current density and system energy, It was observed the dependency with these properties to the curvature radius of the Lobachevsky space.

**Keywords:** Superconductivity. London equation. Lobachevsky space.

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Resistividade . . . . .	17
Figura 2 – Resistência elétrica do mercúrio em função da temperatura . . . . .	19
Figura 3 – Efeito Meissner-Ochsenfeld . . . . .	20
Figura 4 – Diamagnéticos Perfeitos . . . . .	22
Figura 5 – Supercondutor Tipo I . . . . .	23
Figura 6 – Supercondutor Tipo II . . . . .	24
Figura 7 – Região de Abrikosov . . . . .	25
Figura 8 – Densidade de Corrente do vórtice de London . . . . .	28
Figura 9 – Par de Cooper . . . . .	30
Figura 10 – Densidade de energia livre, $f_s - f_n$ , em função de $\psi$ . . . . .	31
Figura 11 – Parâmetro de ordem de um supercondutor perto de uma superfície . . . . .	34
Figura 12 – Anel supercondutor submetido a um campo magnético externo uniforme . . . . .	37
Figura 13 – Postulado das Paralelas de Euclides . . . . .	40
Figura 14 – Quinto postulado na formulação de Playfair . . . . .	41
Figura 15 – Retas Paralelas . . . . .	43
Figura 16 – Superfícies de curvatura negativa . . . . .	44
Figura 17 – Triângulo Hiperbólica . . . . .	44
Figura 18 – Quadrilátero de Saccheri . . . . .	45
Figura 19 – Quadriláteros de Lambert . . . . .	45
Figura 20 – Triângulo Retângulo . . . . .	46
Figura 21 – Triângulo Retângulo II . . . . .	46
Figura 22 – Retas Paralelas de Lobatchevisky . . . . .	48
Figura 23 – Retas hiperbólicas como semirretas e semicírculos euclidianos . . . . .	49
Figura 24 – Retas hiperbólicas paralelas . . . . .	50
Figura 25 – O campo magnético em função dependência da profundidade de penetração . . . . .	56
Figura 26 – Comportamento da densidade de elétrons supercondutora em função da curvatura $\rho$ . . . . .	58
Figura 27 – O campo magnético com dependência da profundidade de penetração com diferentes valores de $z$ no espaço de Lobachevsky com curvatura $\rho = 10\lambda$ . . . . .	61

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>SUPERCONDUTIVIDADE</b>	<b>14</b>
<b>2.1</b>	<b>Modelo de Drude</b>	<b>14</b>
2.1.1	Resistividade e condutividade elétrica nos metais	15
<b>2.2</b>	<b>Principais Características dos Supercondutores</b>	<b>17</b>
2.2.1	Resistência Zero	17
2.2.2	Efeito Meissner-Ochsenfeld	19
2.2.3	Diamagnetismo perfeito	21
<b>2.3</b>	<b>Supercondutores: Tipo I e Tipo II</b>	<b>23</b>
2.3.1	Supercondutor Tipo I	23
2.3.2	Supercondutor Tipo II	23
<b>2.4</b>	<b>Equação de London</b>	<b>24</b>
<b>2.5</b>	<b>Vórtice de London</b>	<b>27</b>
<b>2.6</b>	<b>Pares de Cooper</b>	<b>29</b>
<b>2.7</b>	<b>Teoria de Ginzburg-Landau para Supercondutor</b>	<b>30</b>
2.7.1	Breve descrição da teoria	30
2.7.2	Sistemas não-homogêneos para supercondutores	32
2.7.3	Superfície Supercondutora	33
2.7.4	Teoria de Ginzburg-Landau com campo magnético	35
2.7.5	Quantização do Fluxo Magnético	36
<b>3</b>	<b>ASPECTOS MATEMÁTICOS: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES TEÓ- RICAS</b>	<b>39</b>
<b>3.1</b>	<b>Breve História</b>	<b>39</b>
<b>3.2</b>	<b>Geometria Euclidiana e Geometrias não Euclidianas</b>	<b>40</b>
3.2.1	O quinto postulado de Euclides	40
3.2.2	O surgimento das novas geometrias	41
<b>3.3</b>	<b>Geometria Hiperbólica ou Geometria de Lobatchevsky</b>	<b>42</b>
3.3.1	Geometria Hiperbólica	42
<b>3.4</b>	<b>Fundamentos da geometria de Lobatchevsky: Axiomas e Modelo</b>	<b>47</b>
3.4.1	Apresentação dos Axiomas	47
3.4.2	Interpretação dos modelos da geometria de Lobatchevsky	48
3.4.2.1	Modelo do Semi-Plano	49
<b>3.5</b>	<b>Sistema de Coordenadas Curvilínea</b>	<b>50</b>

3.5.1	Métrica . . . . .	50
<b>4</b>	<b>SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LONDON NO ESPAÇO DE LOBACHEVSKY . . . . .</b>	<b>53</b>
<b>4.1</b>	<b>Solução da equação de London . . . . .</b>	<b>53</b>
4.1.1	Supercondutor com simetria plana . . . . .	54
4.1.2	Supercondutor com simetria cilíndrica . . . . .	58
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>62</b>
<b>6</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>63</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Com a descoberta do elétron, em 1897, muitas áreas da física puderam se desenvolver, mas de forma grosseira. Uma das áreas favorecidas foi o estudo da condução elétrica e térmica em metais. Em 1900, o físico P. Drude desenvolveu um mecanismo lógico para a condução em metais. O modelo de Drude considerava basicamente que dentro de um metal existia um gás de elétrons, responsável pelos fenômenos de condução elétrica e térmica no metal. Claramente, Drude estava sob influência da teoria cinética dos gases que já estava muito bem fundamentada.

O modelo de Drude foi muito bem aceito, e as previsões do modelo estavam sendo confirmada pelos experimentos muito rapidamente. Uma destas previsões consistia na ideia de que a resistividade de um metal cairia com o decréscimo da temperatura, mas que ela se aproximava de um valor constante devido as impurezas dos metais. A resistividade podia até ser nula quando a temperatura também o fosse.

Afim de verificar a previsão teórica de Drude sobre a resistividade, em 1911, o físico Heike Kamerlingh Onnes [1] mediu a resistividade a baixas temperaturas de alguns metais. Para a platina e para o ouro os resultados experimentais estavam de acordo com os teóricos, porém para o mercúrio um resultado inesperado ocorreu. Onnes optou pelo mercúrio devido ao seu alto grau de pureza, esperando obter a baixas temperaturas uma curva de resistividade perto de zero quando a temperatura fosse nula. Porém, ele obteve que a resistividade do mercúrio a uma temperatura de 4K caía a zero abruptamente. Baseado neste comportamento do mercúrio, ele então propôs um nome apropriado para este novo estado da matéria: a supercondutividade.

A partir de então, as pesquisas sobre a supercondutividade não pararam de crescer, já que elas proporcionavam uma gama enorme de descobertas. Em 1933 foi descoberto um efeito conhecido como efeito Meissner Ochsenfeld [2], foi demonstrado experimentalmente que um supercondutor, além de possuir uma resistividade nula em seu interior, também apresentava campo magnético nulo quando sujeito a um campo magnético externo. Em outras palavras, um supercondutor é um condutor perfeito e também um diamagnético perfeito. O nome foi dado pela descoberta dos físicos Fritz Meissner e Robert Ochsenfeld.

Em 1935, os irmãos F. London e H. London [3] finalmente conseguiram mostrar a primeira teoria capaz de explicar a supercondutividade. Esta teoria era descrita por duas equações, hoje conhecidas como primeira e segunda equações de London. Embora a teoria de London da supercondutividade fosse útil, ela não descrevia o comportamento do sistema de um ponto de vista microscópico nem das transições de fase.

Em 1950, os físicos V. L. Ginzburg e L. D. Landau [4] descrevendo a supercon-

atividade do ponto de vista fenomenológico, ou seja, este modelo é baseado sobre as características gerais observadas da supercondutividade e não sobre algum modelo microscópico particular. A teoria microscópica de Bardeen-Cooper-Schrieffer (teoria BCS) foi lançada em 1957 [5], e descreve muito bem a supercondutividade, mas por ser muito complexa em determinadas situações, seu uso ainda se torna restrito.

A teoria GL é baseada inteiramente na ideia de um parâmetro de ordem (complexo) para poder explicar a transição de fase normal/supercondutora. O fator importante desta teoria é que ela consegue determinar o comportamento dos supercondutores perfeitamente [6].

No entanto, a teoria de London é satisfatória quando se deseja estudar o fenômeno de expulsão do campo magnético de um supercondutor. Além disso, a curvatura não-trivial, o que não é originado pela geometria do espaço, tem um efeito sobre alguns processos físicos [7]. Além disso, alguns modelos de um supercondutor em um espaço hiperbólico desempenham um papel significativo para o estudo de campo aplicado. O presente trabalho é dedicado a estudar o efeito da geometria sobre as propriedades do supercondutor. Em particular, será descrito o modelo de London no espaço hiperbólico de Lobachevsky e a investigação da influência do parâmetro adicional - raio de curvatura do espaço de Lobachevsky.

Essa dissertação está dividida em quatro capítulos: o primeiro capítulo e segundo capítulo são destinados a fundamentação teórica da pesquisa, o primeiro referisse à falar sobre supercondutividade, tratamos das principais características e as teorias desenvolvidas ao longo da história, teoria de London nosso principal objeto de estudo, uma breve descrição da teoria de Ginzburg-Landau para supercondutor e uma rápida discussão sobre a teoria quântica (BCS). No segundo, serão descritos alguns aspectos matemáticos relacionados à geometria hiperbólica. O terceiro capítulo destinamos os resultados e discussões a respeito da supercondutividade estudada no espaço de hiperbólico de Lobachevsky. O quinto e último apresentamos nossas considerações finais a respeito do tema trabalhado.

## 2 SUPERCONDUTIVIDADE

Apresentaremos inicialmente, uma breve descrição do modelo de Drude para a condução de elétrons em metais, que consiste em uma analogia com a teoria cinética dos gases. Nessa abordagem os elétrons da banda de condução do metal são tratados como um gás ideal. Feito isso, descreveremos as principais características da supercondutividade: a resistência zero, o efeito Meissner-Ochsenfeld, o diamagnetismo perfeito, através de um modelo teórico simples, a equação de London e as consequências desta equação, como a existência de vórtices nos supercondutores e a diferença entre os supercondutores tipo I e tipo II. Além de uma breve discussão sobre a teoria de de Ginzburg-Landau para a supercondutividade.

### 2.1 Modelo de Drude

Drude adaptou a teoria cinética dos gases [8] para desenvolver um modelo para a condutividade em metais e com isso foi capaz de descrever e prever uma série de propriedades desses materiais. Essa teoria fornece informações sobre as grandezas macroscópicas do gás, descrevendo-o como um grande número de moléculas em movimento caótico, que colidem elasticamente entre si. Entre as colisões sucessivas, o movimento das moléculas é retilíneo e cada colisão tem duração desprezível. Podemos supor que as forças aplicadas estão distribuídas em todas as direções, ou seja, se cancelam globalmente, sendo nula a sua resultante. Os elétrons possuem cargas elétricas negativas, com base nisso, Drude assumiu que a compensação das cargas positivas nos metais, a fim de garantir a neutralidade elétrica do material, estaria ligada à partículas muito pesadas que são consideradas imóveis.

Fazendo uma comparação com o que conhecemos hoje sobre a estrutura da matéria, podemos dizer que os elétrons do gás proposto por Drude são os elétrons que se localizam na camada de condução dos átomos e as partículas pesadas e imóveis de carga positiva são os íons metálicos, compostos por núcleos atômicos e elétrons fortemente ligados a eles, que chamamos de elétrons do núcleo. Quando esses átomos isolados estão condensados formando um metal, os elétrons do núcleo continuam ligados ao núcleo formando o íon metálico, mas os elétrons de valência podem se deslocar para muito longe do átomo de origem. Nesse contexto, isto é chamado de **Condução Elétrica** [9].

De maneira resumida, as hipóteses do modelo são:

- Quando escolhido de forma aleatoriamente, um elétron, em média, pode deslocar-se por um tempo  $\tau$ , que é chamado de tempo livre médio ou tempo de relaxamento, antes da sua próxima colisão;

- Os elétrons alcançam o equilíbrio térmico com o meio somente através das colisões e quanto maior for a temperatura onde ocorre a colisão, mais rápido um elétron emerge dessa colisão;
- Na falta de campos externos, os elétrons movem-se em movimento retilíneo uniforme. Na presença de campo eletromagnético externo atuando, os elétrons se movem em uma linha reta entre as colisões obedecendo as leis da mecânica Newtoniana, livre de qualquer influência, seja de elétrons ou de íons;
- As colisões de elétrons com os íons no modelo de Drude, como na teoria cinética, são eventos instantâneos que alteram a velocidade do elétron. Com base nessas hipóteses, pode-se descrever o comportamento da resistividade e condutividade elétrica para os metais.

### 2.1.1 Resistividade e condutividade elétrica nos metais

Na descrição da teoria cinética, o modelo de Drude estabelece a condutividade elétrica  $\sigma$ , dada por [8,10]:

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}, \quad (2.1)$$

onde  $m$  é a massa do elétron,  $e$  é a carga do elétron e  $\tau$  é chamado de tempo livre médio ou tempo de relaxamento. A expressão (2.1) é uma boa estimativa da condutividade elétrica em termos de quantidades conhecidas, exceto para o tempo de relaxamento, que é uma grandeza ainda desconhecida.

A condutividade é definida pela **equação constitutiva**,

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (2.2)$$

aqui  $\mathbf{j}$  é a densidade de corrente elétrica que surge em resposta ao campo elétrico externo,  $\mathbf{E}$ . A resistividade  $\rho$  obedece a relação,

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}, \quad (2.3)$$

e como a resistividade  $\rho$  é simplesmente o inverso da condutividade,  $\rho = \frac{1}{\sigma}$ . Utilizando a equação (2.1) de Drude da condutividade elétrica, teremos,

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau^{-1}}, \quad (2.4)$$

na equação acima a resistividade  $\rho$  é proporcional a taxa de espalhamento de condução de elétrons.



Num metal típico, haverá três principais processos de espalhamento: espalhamento por impurezas  $\tau_{imp}^{-1}$ , por interações elétron-elétron  $\tau_{el-el}^{-1}$ , e por colisões dos elétrons com a rede, também conhecida como interação elétron-fônon  $\tau_{el-ph}^{-1}$ . Estes são processos independentes, e por isso, devemos adicionar as taxa de espalhamento de cada processo para obter a taxa de espalhamento total eficaz,

$$\tau^{-1} = \tau_{imp}^{-1} + \tau_{el-el}^{-1} + \tau_{el-ph}^{-1}, \quad (2.5)$$

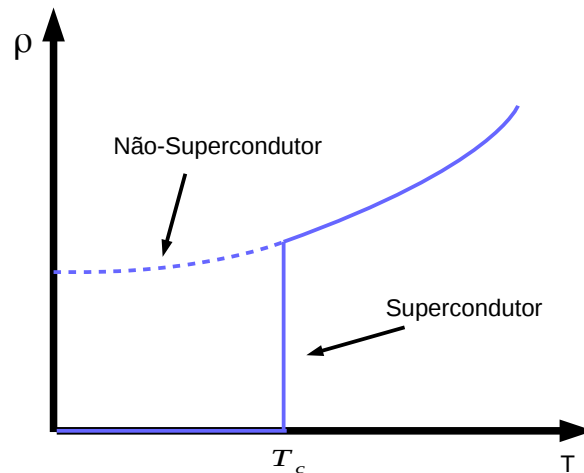
Cada um destes tempos de vida é uma função característica de temperatura, a taxa de espalhamento de impureza,  $\tau_{imp}^{-1}$ , será essencialmente independente da temperatura, pelo menos, para no caso de impurezas não magnéticas. A taxa de espalhamento elétron-elétron,  $\tau_{el-el}^{-1}$ , é proporcional a  $T^2$ , onde  $T$  é a temperatura. Enquanto a baixas temperaturas a taxa de espalhamento elétron-fônon,  $\tau_{el-ph}^{-1}$ , é proporcional a  $T^5$ . Portanto, seria de esperar que a resistência de um metal a baixas temperaturas fosse representada por,

$$\rho = \rho_0 + aT^2 + \dots, \quad (2.6)$$

onde, de acordo com a equação acima, a resistividade a temperatura zero, a resistividade residual,  $\rho_0$ , depende apenas da concentração de impurezas.

Foi observado que para a maioria dos metais, que a resistividade de fato se comporta desta maneira a baixas temperaturas. No entanto, para uma classe de materiais algo completamente diferente acontecia. Após o resfriamento, a resistividade, primeiro segue o comportamento suave simples, equação (2.6), mas, de repente, desaparece por completo, como esboçado na fig.(1). A temperatura em que se anula a resistividade é chamada de temperatura crítica,  $T_c$ . Abaixo desta temperatura a resistividade não é apenas pequena, mas é, na medida em que pode ser medido, exatamente zero. Foi então que descobriram um novo estado da materia, e esse fenômeno é conhecido como **supercondutividade** [1].

Figura 1: Resistividade de um Metal Típico em função da Temperatura



Fonte:Autor, 2016

## 2.2 Principais Características dos Supercondutores

O fenômeno da supercondutividade vem se tornando uma das áreas da física que está em constante avanço, se apresenta como uma das grandes fronteiras para o conhecimento científico, e avanço tecnológico. Ao longo do tempo, algumas teorias se destacam na tentativa de explicar o fenômeno, cada uma na sua esfera de importância e necessidade, teorias clássicas como: teoria de London e Ginzburg-Landau, além da teoria quântica (BCS) para a supercondutividade. No entanto, nesta sessão, vamos expor algumas características do fenômeno [10,11,12], que podem ser explicadas independente de qualquer modelo proposto.

### 2.2.1 Resistência Zero

Como visto anteriormente, em um supercondutor a resistividade  $\rho$ , é zero e a condutividade  $\sigma$  é infinita para temperaturas abaixo de  $T_c$ . Outra característica do supercondutor é resistência zero, e que para ser consistente com a equação (2.2), o campo elétrico dever ser nulo,  $E = 0$ , no entanto, vai existir uma corrente que circulará no material mesmo sem a presença de um campo elétrico para induzir essa corrente.

A existência de uma resistência nula no supercondutor é representada por uma transição de fase termodinâmica, como por exemplo um líquido passando para o estado gasoso. As propriedades de cada fase são completamente diferentes. Aqui, denomina-se duas fases diferentes: “estado normal”, quando o material apresenta temperaturas acima da temperatura crítica, e “estado supercondutor”, quando o material apresenta temperaturas abaixo da temperatura crítica. No estado normal a resistividade e outras

propriedades físicas seguem o comportamento de um metal normal, enquanto que no estado supercondutor várias propriedades físicas são diferentes, incluindo a resistividade.

Um dos grandes problemas encontrado é ter a noção precisa para distinguir uma resistência muito pequena de uma resistência nula. Visto que, quando se medir uma resistência de uma amostra supercondutora, o multímetro também apresenta uma resistência nos fios de medição, o que nos dá uma resposta de uma resistência muito pequena, mas diferente de zero. Uma boa técnica para saber distinguir entre uma resistência muito pequena e uma resistência nula e termos uma evidência convincente de que os supercondutores têm realmente  $\rho = 0$ , é a observação da existência de uma corrente chamada **corrente persistente**[13]. Se aplicarmos uma corrente  $I$  circulando em um anel feito por um fio supercondutor, por exemplo, a energia armazenada no campo magnético do anel permanecerá constante e como não há resistência, esta corrente irá circular sem perda alguma.

Para ver como a corrente persistente pode ser configurado em um material supercondutor, considere o fluxo do campo magnético através do centro do anel supercondutor. O fluxo é definido pela superfície integrante dada por,

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}, \quad (2.7)$$

com  $\mathbf{B}$  sendo um vetor perpendicular a o plano do anel. O  $d\mathbf{s}$ , é um elemento infinitesimal da área delimitada pelo anel. Utilizando a equação de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.8)$$

e recorrendo ao teorema de Stoker que estabelece que,

$$\int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \quad (2.9)$$

o que resulta em,

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \quad (2.10)$$

aqui a integral é feita em torno do caminho fechado do interior do anel. Se a integração for feita apenas dentro do supercondutor, então  $\mathbf{E}=\mathbf{0}$  ao longo do caminho. Portanto,

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0, \quad (2.11)$$

e, por conseguinte, o fluxo magnético através do anel permanece constante em função do tempo.

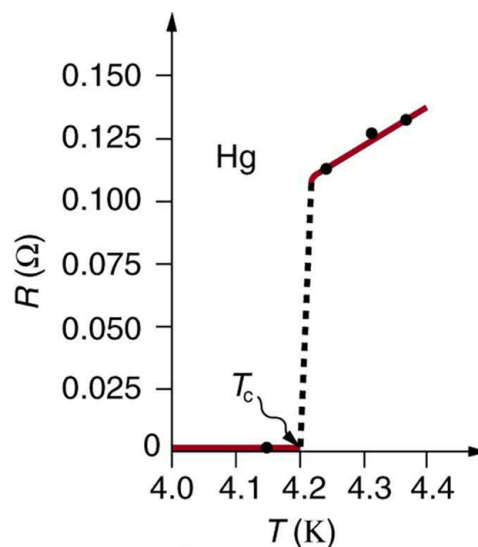
Usaremos essa propriedade para criar uma corrente persistente em um anel supercondutor. Primeiro vamos começar com o material a uma temperatura superior a  $T_c$ , de

modo que ele esteja em seu estado normal. Em seguida, aplica-se um campo magnético externo,  $\mathbf{B}_{ext}$ . Este passa facilmente através do material uma vez que o sistema está no estado normal. Agora resfria-se o sistema até abaixo de  $T_c$ . Temos que o fluxo no anel é dado por  $\Phi = \int \mathbf{B}_{ext} ds$ , mas sabe-se que da equação (2.11) que este se mantém constante. É constante, mesmo que desligue a fonte de campo magnético externo, de modo que agora  $B_{ext} = 0$ . A única maneira do supercondutor poder manter constante o fluxo, é gerar o seu próprio campo magnético através do centro do anel, que deve existir por ter uma corrente de circulação  $I$ , em torno do anel. O valor de  $I$  será exatamente o necessário para induzir um fluxo magnético igual dentro do anel. Além disso, como  $\Phi$  é constante, a corrente  $I$  também deve ser constante, criando assim uma corrente persistente no anel.

Além disso, se houvesse qualquer resistência elétrica no caminho, haveria dissipação de energia e, portanto, a corrente  $I$  decairia gradualmente ao longo do tempo. Mas as experiências foram feitas e foram observadas correntes persistentes que se mantenha constante ao longo de um período de anos. Portanto, a resistência deve realmente ser exatamente igual à zero para todos os efeitos.

Na tentativa de testar a validade da teoria de Drude medindo a resistividade à temperatura mais baixa possível, Onnes mediu a resistência elétrica do mercúrio fig.(2) [1]. Esta figura de Kamerlingh Onnes marcou a descoberta da supercondutividade.

Figura 2: Resistência elétrica do mercúrio em função da temperatura



Fonte: [1]

## 2.2.2 Efeito Meissner-Ochsenfeld

A resistividade zero ( $\rho = 0$ ) não é suficiente para definir supercondutividade. Atualmente existe outra propriedade que define e comprova a ocorrência do fenômeno em certas materias, é a demonstração do efeito Meissner-Ochsenfeld [12,14]. O nome foi dado aos pesquisadores Walther Meissner e seu assistente, Robert Ochsenfeld em 1933, quando

observaram amostras supercondutoras de estanho submetidas em um campo magnético externo.

Meissner e Ochsenfeld verificaram que quando um supercondutor é resfriado num campo magnético até uma temperatura abaixo de sua temperatura de transição, as linhas de campo  $\mathbf{B}$  são expulsas para fora do corpo. Eles mostraram que o supercondutor num  $B_a$  (campo aplicado), não possui indução, ou seja,  $\mathbf{B} = 0$  em seu interior.

A expulsão do campo magnético do interior do supercondutor é descrito pela lei de Faraday,

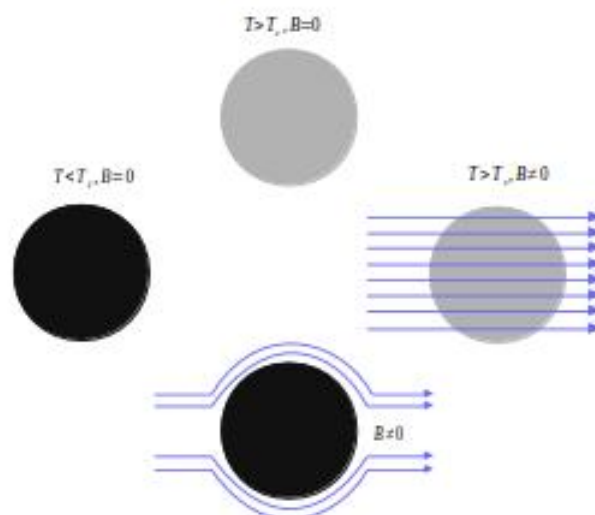
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.12)$$

com o fato de o campo elétrico ser nulo,  $E = 0$ , no supercondutor, temos que,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (2.13)$$

O campo magnético  $\mathbf{B}$  no supercondutor não pode variar no tempo. Então, do ponto de vista da física clássica, um campo magnético pode ser mantido no interior de um supercondutor, desde que este seja constante no tempo. Entretanto, os resultados experimentais mostraram que, quando um supercondutor é resfriado até atingir uma temperatura  $T < T_c$ , na presença de um campo magnético externo, as linhas de campo são espelidas do material, isto é, o campo anula-se no interior do material, como mostra na fig.(3).

Figura 3: Efeito Meissner-Ochsenfeld



Fonte: Autor, 2016

Agora vamos pensar em fazer as coisas de outro modo. Suponha o exemplo na qual a temperatura do material esteja acima de  $T_c$  e aplicamos o campo externo,  $B_{ext}$ . Neste caso, o campo magnético vai facilmente penetrar na amostra,  $\mathbf{B} = B_{ext}$ , como mostrado

na imagem da direita na (fig.3), em seguida, resfriamos o sistema para temperatura abaixo de  $T_c$  e observamos o surgimento do efeito Meissner-Ochsenfeld, o campo magnético é expelido. Então, por resfriamento que acontece a partir da situação ilustrada na direita para a mostrada na parte inferior da (fig.3). Este fato não pode ser deduzido a partir do simples fato de resistividade zero ( $\rho = 0$ ) e por isso este é um fenômeno físico novo associado a supercondutores.

Existem muitas razões para que a existência do efeito Meissner-Ochsenfeld seja a principal prova da supercondutividade. A razão mais fundamental é que o efeito Meissner-Ochsenfeld é uma propriedade do equilíbrio térmico, enquanto a resistividade é um efeito de transporte que não está em equilíbrio. Chega-se ao mesmo estado final do sistema resfriando-se o material até a temperatura crítica e depois aplicamos o campo, ou o inverso. Portanto, o estado final do sistema não depende do estado inicial da amostra, que é uma condição necessária para o equilíbrio térmico.

### 2.2.3 Diamagnetismo perfeito

A fim de manter o campo magnético nulo dentro do supercondutor como observado pelo efeito Meissner-Ochsenfeld, deve existir uma corrente de blindagem [15] circulando na borda do supercondutor. Isto produz um campo magnético igual em módulo, mas oposto ao campo magnético externo aplicado no supercondutor, ou seja, o campo magnético resultante é zero.

Para descrever as correntes que circulam nas bordas do supercondutor, basta usar as equações de Maxwell para o magnetismo e analisar as densidades de correntes existentes nas amostras. A corrente total é dividida em corrente aplicada externa,  $\mathbf{j}_{ext}$ , e a corrente interna  $\mathbf{j}_{int}$ , ou seja,

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{ext} + \mathbf{j}_{int}, \quad (2.14)$$

as correntes de blindagem geram uma magnetização por unidade de volume,  $\mathbf{M}$ , no supercondutor, que é definida por,

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{j}_{int}, \quad (2.15)$$

como na teoria de meios magnéticos que também define um campo magnético  $\mathbf{H}$ , em termos das correntes externas, temos,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{ext}, \quad (2.16)$$

os três vetores  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}$  estão relacionados por:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (2.17)$$

Impondo a condição de Meissner-Ochsenfeld, quando ( $\mathbf{B} = 0$ ) no interior da amostra, na equação (2.17), obtemos uma relação da magnetização e o campo, dado por,

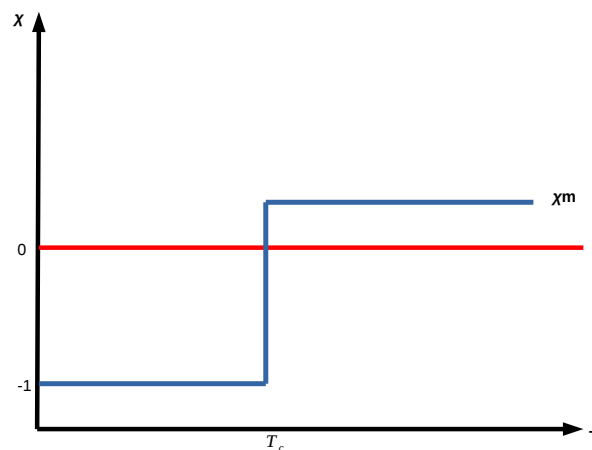
$$\mathbf{H} = -\mathbf{M}. \quad (2.18)$$

Uma importante grandeza que serve para caracterizar propriedades magnéticas é a susceptibilidade, definida por

$$\chi = \left( \frac{dM}{dH} \right)_{H=0}. \quad (2.19)$$

Assim, temos que para os supercondutores,  $\chi = -1$ . Materiais com valores negativos de  $\chi$  são chamados de **diamagnéticos** (quando  $\chi$  é positivo o material pode ser chamado de paramagnético ou ferromagnético). Os diamagnéticos blindam parte do campo magnético externo e se magnetizam em oposição ao campo magnético externo. Nos supercondutores o campo magnético externo é totalmente blindado. Por isso podemos dizer que os supercondutores são **diamagnéticos perfeitos**.

Figura 4: Diamagnéticos Perfeitos



Fonte:Autor, 2016

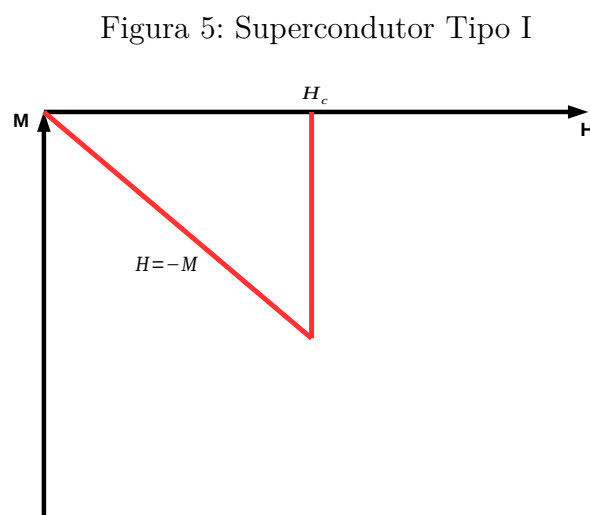
O gráfico do comportamento da susceptibilidade magnética é apresentado na (fig.4). A melhor forma de detectar a supercondutividade em alguma amostra desconhecida é, portanto, medir sua susceptibilidade. Assim, através da medição  $\chi$  encontrará uma  $\chi = -1$  num supercondutor, evidência para diamagnetismo perfeito, ou o efeito Meissner. Isso geralmente é considerado uma prova muito mais confiável para a supercondutividade em uma amostra de que só a resistência zero.

## 2.3 Supercondutores: Tipo I e Tipo II

Não há nenhuma diferença no mecanismo da supercondutividade em supercondutor do tipo I e o supercondutor do tipo II [16]. Nos dois tipos, as propriedades térmicas são semelhantes na transição do estado normal para o estado supercondutor. A diferença entre os dois tipos se diz respeito ao efeito Meissner, quando o campo aplicado se torna mais forte. Ao contrário da susceptibilidade  $\chi$ , onde o campo é definido no limite de campos fracos.

### 2.3.1 Supercondutor Tipo I

O supercondutor do tipo I, encontrado na grande maioria de metais a baixas temperatura, é caracterizado pela existência de um campo crítico,  $H_c$ , a supercondutividade ocorre até um certo valor ( $H_c$ ), ou seja, o campo magnético  $\mathbf{H}$  continua sendo nulo no interior do supercondutor até a supercondutividade ser destruída, a partir desse valor não é mais observado o efeito Meissner, desfazendo assim o fenômeno [13]. Como já visto, a magnetização obedece a relação descrita por  $M = -H$ , para todos os valores de campos menores que  $H_c$ , e se torna nula para valores de campo maiores de  $H_c$ . A maneira como as mudanças da magnetização  $\mathbf{M}$  e o campo  $\mathbf{H}$  são observados no supercondutor são mostrados na (fig.5).



Fonte: Autor, 2016

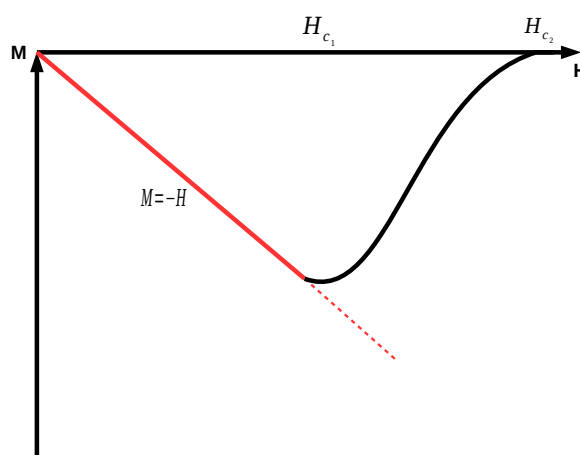
### 2.3.2 Supercondutor Tipo II

Agora, no caso do supercondutor tipo II, encontrado em cerâmicas, ligas, apresenta dois campos críticos diferentes, denotados por:  $H_{c1}$ , que é o campo crítico inferior, e  $H_{c2}$ , que é o campo crítico superior. Para pequenos valores do campo magnético  $\mathbf{H}$  aplicado no supercondutor, o supercondutor continua apresentando o efeito Meissner-Ochsenfeld,



$\mathbf{M} = -\mathbf{H}$ , não existe a densidade do fluxo magnético no interior da amostra [12,13]. Contudo, se o campo magnético  $\mathbf{H}$  chegar a um valor maior que o campo crítico inferior,  $H_{c1}$ , o fluxo magnético começa a entrar no interior do supercondutor e o campo no seu interior fica diferente de zero. Com isso, a magnetização começa tender a zero à medida que aumentamos o campo magnético  $\mathbf{H}$ . Mediante o aumento do campo  $\mathbf{H}$ , a densidade do fluxo magnético também aumenta gradualmente. A magnetização atinge o valor zero quando, o campo  $\mathbf{H}$  chega ao valor do campo crítico superior  $H_{c2}$ , destruindo assim o estado supercondutor do material. Este comportamento é descrito na (fig.6).

Figura 6: Supercondutor Tipo II

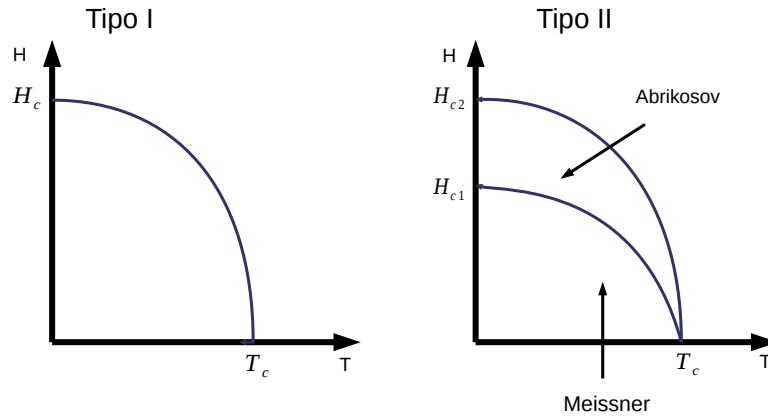


Fonte: Autor, 2016.

O fenômeno que acontece na fase termodinâmica entre  $H_{c1}$  e  $H_{c2}$  foi estudado por Abrikosov [16]. A explicação vem no surgimento de vórtices. Os vórtices consistem em uma região onde circula uma supercorrente ao redor de um pequeno núcleo. Ele mostrou que o campo magnético pode penetrar no supercondutor na forma que é essencialmente um metal normal. Através de um diagrama de  $\mathbf{H} \times \mathbf{T}$ , (fig.7), onde é mostrado o comportamento dos supercondutores tipo I e tipo II. É observado claramente as regiões de Meissner (A expulsão total do campo magnético) e a região de Abrikosov (A expulsão parcial do campo magnético).

## 2.4 Equação de London

O primeiro êxito na tentativa de descrever as propriedades eletrodinâmicas dos supercondutores como a condutividade infinita e o efeito Meissner, foi desenvolvida pelos irmãos, Fritz e Heinz London em 1935 [12]. Nesta teoria eles assumiram que uma fração dos elétrons tornam-se supercondutores e podem mover-se livremente, sem dissipação, enquanto que o restante dos elétrons continua no estado condutor normal, ou seja, tendo uma resistividade finita, formularam sua teoria baseando-se no modelo de dois fluidos.

Figura 7: Diagrama  $\mathbf{H} \times \mathbf{T}$  dos supercondutores tipo I e tipo II

Fonte: Autor, 2016.

Sejam  $n$ ,  $n_n$  e  $n_s$  densidades de elétrons total, normal e supercondutora, respectivamente com ( $n = n_n + n_s$ ). Essas frações dependem da temperatura, e como a supercondutividade desaparece na temperatura crítica, deve-se ter  $n_s(T_c) = 0$  e  $n_s(0) = n$ . No interior de um supercondutor não há resistência elétrica, qualquer intensidade de campo fará com que a corrente flua, logo não tem sentido considerar os elétrons normais nos cálculos porque toda a corrente será conduzida pelos superelétrons.

Apesar desse modelo ser bem simples, ele é bastante satisfatório para aquilo que o modelo se propõe. Este modelo nos leva a **equação de London**, que relaciona a densidade de corrente elétrica dentro do supercondutor,  $\mathbf{j}$ , campo magnético externo,  $\mathbf{B}$ . Utilizando a segunda lei de Newton para um elétron se movendo sob um campo eletromagnético, Obtemos

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = -e\mathbf{E}, \quad (2.20)$$

daí,

$$-\frac{m}{n_s e} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = -e\mathbf{E}, \quad (2.21)$$

ou ainda

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{\mathbf{E}}{\lambda^2}. \quad (2.22)$$

Onde o fator  $\lambda = \left(\frac{m_e}{n_s e^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ , é chamado de **comprimento de penetração London** ou (profundidade de penetração), que define o quanto o campo magnético pode penetrar na superfície do supercondutor.

A equação (2.22) é conhecida como primeira equação de London. Ela representa claramente uma equação de aceleração: isto implica que depois de um pulso curto de campo elétrico, o sistema terá uma corrente que não decairá, que é uma propriedade da supercondutividade.

Para se chegar na segunda equação de London, toma-se o rotacional de (2.22), para então

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\lambda^2}, \quad (2.23)$$

Utilizando a lei de Faraday (2.8), teremos finalmente,

$$\nabla \times \mathbf{j} = -\frac{n_s e^2}{m_e} \mathbf{B}, \quad (2.24)$$

que é a segunda equação de London. Esta equação relaciona as grandezas físicas  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{B}$ , que ainda podem se relacionar através das equações de Maxwell, da seguinte forma,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (2.25)$$

Calculando o rotacional em ambos os lados da equação (2.25), e combinando com a equação (2.24), obtemos,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \frac{n_s e^2}{m_e} \mathbf{B}, \quad (2.26)$$

ou ainda,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B}. \quad (2.27)$$

As duas equações de London também podem ser condensadas em uma equação com a densidade de corrente elétrica dentro do supercondutor,  $\mathbf{j}$ , e o potencial vetor magnético  $\mathbf{A}$ , seja a relação ( $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ). Daí então teremos,

$$\mathbf{j} = -\frac{n_s e^2}{m_e} \mathbf{A} \quad (2.28)$$

ou

$$\mathbf{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \mathbf{A}. \quad (2.29)$$

Com a relação (2.27) podemos obter o campo magnético. Vale também ressaltar que se a corrente for contínua, a equação de continuidade se reduz a  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ . Se aplicarmos isto na equação de London, obtemos o calibre de London:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (2.30)$$

Em outras palavras, a equação de London permite descrever o efeito Meissner-Ochsenfeld, indica a profundidade de penetração de campos externos, substitui a relação  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  em supercondutores e prevê o comportamento do campo magnético nos supercondutores.

A equação (2.29) é uma das mais importantes equações que descrevem a supercondutividade. Aproximadamente 20 anos após essa teoria ser elaborada, Bardeen, Cooper e Schrieffer desenvolveram uma teoria chamada de **teoria BCS** [6,13], que reproduz a teoria de London em um limite adequado.

## 2.5 Vórtice de London

Os vórtices são definidos como um núcleo cilíndrico na amostra supercondutora, com propriedades de condutores normais que possuem um raio dado por  $\xi_0$ , que é conhecido como **comprimento de coerência**. O comprimento de coerência está intimamente relacionado ao gap de energia (energia necessária para retirar um elétron do átomo e colocá-lo na banda de condução), cuja interpretação é representar o tamanho físico do par de Cooper (faz parte do estudo da Teoria BCS). Dentro deste núcleo teremos um campo magnético finito, digamos  $B_0$ .

Através da equação de London podemos encontrar um modelo matemático que descreve os vórtice nos supercondutores [10,11]. Os campos conseguem penetrar na superfície dos supercondutores formando os vórtices. Vamos descrever como o campo magnético decresce até um valor nulo quando partimos de uma região dentro do núcleo do vórtice (ou seja, onde temos um condutor normal) até a área onde ocorre novamente a supercondutividade.

Dentro do núcleo existe um campo magnético finito,  $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$ . O rotacional, em coordenadas cilíndricas, desse campo magnético é dado por:

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\partial B_z}{\partial r} \hat{e}_\phi. \quad (2.31)$$

Aplicando (2.31) em (2.27), teremos então,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dB_z}{dr} \right) = \frac{B_z}{\lambda^2}, \quad (2.32)$$

Ou ainda,

$$\frac{d^2 B_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dB_z}{dr} - \frac{B_z}{\lambda^2} = 0. \quad (2.33)$$

Para solucionar essa equação temos que analisar a situação de quando  $r$  for muito pequeno,  $r \ll \lambda$ , desta forma a equação (2.32) apresenta a solução do tipo,

$$B_z(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \ln\left(\frac{r}{\lambda}\right), \quad (2.34)$$

onde  $\Phi_0$  é o fluxo magnético quantizado do vórtice.

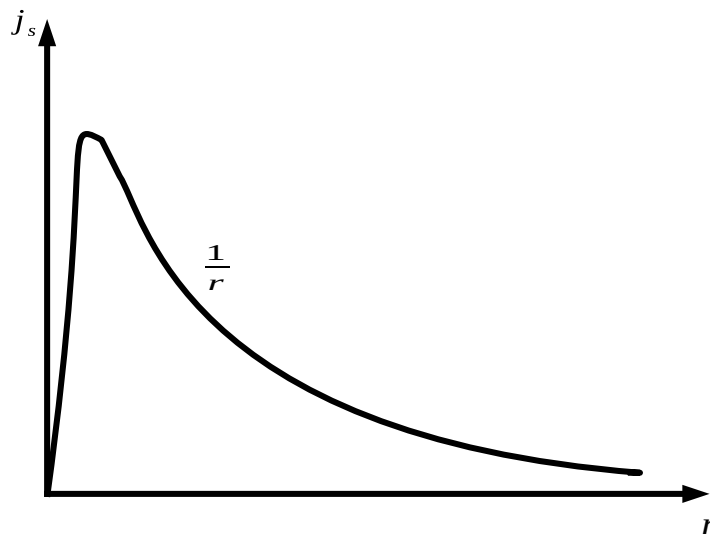
Com base nos valores do campo apresentado, podemos ter uma boa estimativa de como é seu comportamento no vórtice de London. Na região  $r < \xi_0$ , estamos no interior do núcleo do vórtice, ou seja, a supercondutividade será suprimida dentro do núcleo do vórtice. Em  $\xi_0 < r \ll \lambda$ , onde temos uma região intermediária para o campo, ele decai logarithmicamente. Agora para  $r \simeq \lambda$ , em uma região do centro, o campo decai exponencialmente, semelhante ao campo magnético na superfície de um supercondutor.

Utilizando a equação  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ , podemos observar como se comporta a densidade de corrente no vórtice de London. Resolvendo a equação (2.34), temos

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2 r}, \quad (2.35)$$

aqui a corrente supercondutora que circula no vórtice decai com  $\frac{1}{r}$ , como visto da fig.(8) e ainda mais rapidamente quando se aproxima da superfície do material.

Figura 8: Densidade de Corrente do vórtice de London



Fonte: Autor, 2016.

Suponha que uma supercorrente circule no vórtice com uma velocidade  $v$ , cuja forma é  $\mathbf{j} = -en_s v$  e a energia cinética correspondente é  $E = \frac{1}{2} m v^2 n_s$ . Com isso, podemos determinar a energia total do vórtice, que é dada por:

$$E = \frac{\Phi_0^2}{4\pi\mu_0\lambda^2} \ln\left(\frac{\lambda}{\xi_0}\right). \quad (2.36)$$

## 2.6 Pares de Cooper

Antes de apresentar uma definição formal sobre a teoria de Ginzburg-Landau é importante enunciar um fenômeno que foi explicado pela teoria BCS: a formação dos **Pares de Cooper** [17,18]. A ideia dos pares de Cooper foi proposta por Cooper em 1956. Cooper mostrou que, nos supercondutores, dois elétrons interagem formando um par e esse par é responsável pela supercorrente a baixa temperatura.

Em condições normais seria uma coisa improvável de pensar nessa formação de pares, devido a forte repulsão coulombiana entre os elétrons (pois possuem carga de mesmo sinal). Contudo, Cooper mostrou que para ocorrer a formação desses pares, os elétrons contam com a ajuda de uma excitação da rede cristalina conhecida como **Fônon**.

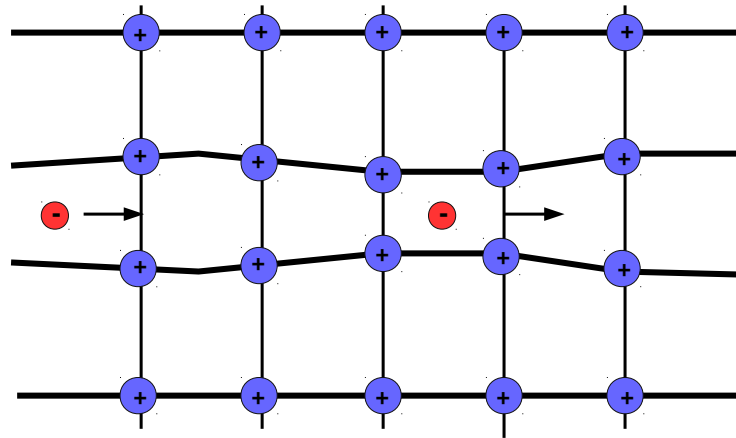
O fônon, de um ponto de vista quântico, se equivalem a um movimento vibracional de uma rede, conhecido como modo normais de vibração na mecânica clássica. Esse movimento se caracteriza por cada parte da rede oscilar com a mesma frequência. Em geral, essa excitação, que se desloca como uma onda pelo material, é causada pela agitação natural existente em todo sistema sujeito a uma temperatura finita, apresentando um pequeno deslocamento dos átomos da rede.

Os átomos que formam a rede cristalina do metal não são eletricamente neutros. Os elétrons de condução deslocam-se para muito longe do átomos de origem, fazendo com que esses átomos fiquem carregados positivamente. Quando um elétron desloca-se no material, ele perturba os átomos da rede, como visto da fig. (9), sendo atraído pela força coulombiana. Essa perturbação do elétron gera um fônon e, conseqüentemente, a interação elétron-fônon na rede.

Como consideramos o fônon como uma onda de átomos positivos deslocados, esses fônons podem atrair outro elétron que esteja próximo, ou seja, com essa configuração conseguiu-se fazer a "atração" entre os elétrons, formando o que chamamos de Pares de Cooper.

Algumas características importantes devem ser citadas nos pares de Cooper como por exemplo se aumentarmos consideravelmente a temperatura do sistema, a agitação térmica faz com que a interação elétron-fônon seja desfeita e com isso deixamos ter os pares, ou seja, essa configuração dos pares de Cooper só é possível a baixas temperaturas. Outra característica importante é que os elétrons isolados possuem spin  $\frac{1}{2}$ , ou seja, são Férmions, mas, quando o par é formado, um spin aponta para cima ( $+\frac{1}{2}$ ) e outro para baixo ( $-\frac{1}{2}$ ), conseqüentemente o spin do par de Cooper é 0, logo ele é um Bóson.

Figura 9: Deformação Local de uma rede cristalina devido ao movimento de um elétron



Fonte: Autor, 2016

Cooper originalmente só considerou o caso de um par isolado formado em um metal. Quando se considera o estado mais realista consistindo em muitos elétrons formando pares faz parte do estudo da **Teoria BCS**.

## 2.7 Teoria de Ginzburg-Landau para Supercondutor

Vamos agora fazer uma descrição completa das propriedades macroscópicas de um supercondutor, usando a teoria formulada por Ginzburg-Landau [11,17,19].

### 2.7.1 Breve descrição da teoria

A Teoria de Ginzburg-Landau (GL), que foi publicado em 1950 [20], é considerada uma teoria fenomenológica, onde descreve as propriedades eletromagnéticas dos supercondutores, incluindo os efeitos de vórtice e o efeito de fixar esses vórtices. Um dos principais sucessos da teoria Ginzburg-Landau é a sua previsão da distinção entre o tipo I e tipo II de supercondutores que possui diferentes propriedades eletromagnéticas, e tinha a vantagem de descrever corretamente a transição de fase supercondutora do ponto de vista termodinâmico.

Uma das primeiras observações da teoria foi que os elétrons supercondutores podem ser descritos por uma função de onda efetiva  $\psi$ , também conhecida como parâmetro de ordem, e relacionada a  $n_s = |\psi|^2$  é igual à densidade de superelétrons (quantidade de elétrons supercondutores do material). Quando o estado normal está acima da temperatura crítica  $T_c$ ,  $\psi$  é zero. Enquanto que no estado supercondutor, abaixo  $T_c$ ,  $\psi$  é diferente de zero. ou seja,

$$\psi = \begin{cases} 0, & \text{se } T > T_c \\ \psi(T) \neq 0, & \text{se } T < T_c \end{cases}$$

Foi postulado que o parâmetro de ordem de  $\psi$  deveria ser um número complexo, como uma função de onda macroscópica para o supercondutor. Depois da formulação da teoria BCS, o parâmetro acima mencionado  $|\psi|^2$ , pode ser identificado como a densidade de elétrons dos pares de cooper associados as amostras.

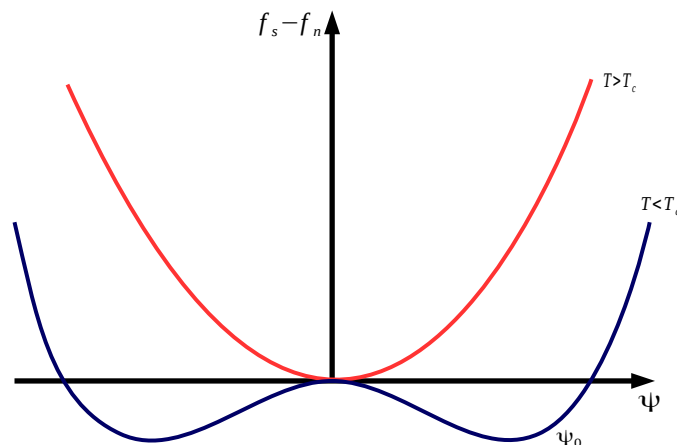
Para tal, é assumido que a energia livre do estado supercondutor difere do metálico por uma quantidade que pode ser escrita em séries de potência de  $\psi$ . Próximo da temperatura crítica é suficiente considerar somente os dois primeiros termos da série, pois próximo de  $T = T_c$ , a quantidade de superelétrons é muito pequena. Com isso, a densidade da energia livre é:

$$f_s(T) = f_n(T) + a(T)|\psi|^2 + \frac{1}{2}b(T)|\psi|^4 + \dots \quad (2.37)$$

Com a densidade de elétrons pequena, o termo  $f_s(T)$  deve se a densidade da energia livre do estado supercondutor e  $f_n(T)$  do estado condutor normal. Os parâmetros  $a(T)$  e  $b(T)$  são parâmetros fenomenológicos da teoria, que dependem da temperatura. Para ter sentido físico, devemos assumir que  $b(T)$  seja positivo, caso contrário, a densidade de energia livre não teria mínimos globais e sim máximos globais e não estariam de acordo com as previsões teóricas.

Quando plotamos  $f_s - f_n$  em função de  $\psi$  podemos observar que existe duas curvas possíveis dependentes do sinal de  $a(T)$ , como é mostrado na fig.(10).

Figura 10: Densidade de energia livre,  $f_s - f_n$ , em função de  $\psi$



Fonte: Autor, 2016.



Para o caso  $a(T) < 0$ , existem mínimos  $|\psi|^2 = -a(T)/b(T)$ . Já no caso  $a(T) > 0$ , a curva tem um mínimo em  $\psi = 0$ . Acima da Temperatura crítica, no estado normal,  $a(T)$  é positivo, abaixo da temperatura crítica, estado supercondutor, temos que  $\psi \neq 0$ . Na temperatura crítica,  $a(T_c) = 0$ . Perto da Temperatura crítica, podemos expandir em série de Taylor,

$$a(T) \simeq \dot{a}(T) \times (T - T_c) + \dots, \quad (2.38)$$

$$b(T) \simeq b + \dots, \quad (2.39)$$

com  $\dot{a}$  e  $b$  são duas constantes fenomenológicas. Em termos dos parâmetros  $a$  e  $b$  temos que:

$$|\psi| = \begin{cases} 0 & \text{se } T > T_c \\ (\frac{\dot{a}}{b})^{\frac{1}{2}}(T_c - T)^{\frac{1}{2}} & \text{se } T < T_c. \end{cases}$$

O valor mínimo da energia livre é facilmente obtido e tem o valor  $-a(T)^2/2b(T)$  que pode ser reescrita na forma:

$$f_s(T) - f_n(T) = -\frac{\dot{a}^2(T - T_c)^2}{2b}. \quad (2.40)$$

A partir da energia livre podemos obter quantidades físicas relevantes como por exemplo, entropia. Derivando  $f$  com relação a  $T$ , obtemos a entropia por unidade de volume,  $s = S/V$ , abaixo de  $T_c$

$$s_s(T) - s_n(T) = -\frac{\dot{a}^2}{b}(T_c - T). \quad (2.41)$$

Isso confirma o fato de que a teoria de **GL** corresponde a uma transição de fase de segunda ordem, já que, na temperatura crítica, não existe descontinuidade na entropia.

## 2.7.2 Sistemas não-homogêneos para supercondutores

Outra suposição importante da teoria de Ginzburg-Landau é o fato de que ela permite a possibilidade do parâmetro de ordem depender da posição,  $\psi(\mathbf{r})$ . Isso nos leva ao fato de que devemos considerar o termo de gradiente vindo da energia cinética. Como a energia livre não pode assumir valores complexos, o termo contendo o gradiente de  $\psi(\mathbf{r})$  tem que ser real [21]. Dessa forma, a energia livre deve ser função do módulo do gradiente de  $\psi(\mathbf{r})$ . Daí,

$$f_s(T) = f_n(T) + \frac{\hbar^2}{2m^*} |\nabla\psi(\mathbf{r})|^2 + a(T)|\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{b(T)}{2} |\psi(\mathbf{r})|^4. \quad (2.42)$$

Esta é uma forma de representar a energia do sistema e, no nosso caso, trata-se de um sistema (ou material) supercondutor. O primeiro termo,  $f_n$ , é a energia livre do estado normal, ou seja, quando não há supercondutividade. O parâmetro  $m^*$  tem dimensões de massa e desempenha o papel de uma massa efetiva para o sistema quântico com a função de onda macroscópica  $\psi(\mathbf{r})$ .

Integrando a equação (2.42), temos:

$$F_s(T) = F_n(T) + \int \left( \frac{\hbar^2}{2m^*} |\nabla\psi(\mathbf{r})|^2 + a(T)|\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{b(T)}{2} |\psi(\mathbf{r})|^4 \right) d^3r. \quad (2.43)$$

Para minimizar a energia, podemos fazer uma variação infinitesimal no parâmetro de ordem na forma,

$$\psi(\mathbf{r}) \rightarrow \psi(\mathbf{r}) + \delta\psi(\mathbf{r}), \quad (2.44)$$

e aplicar esta variação na energia livre. Com isso obtemos que,

$$\delta F_s = \int \delta\psi^* \left( -\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2\psi + a\psi + b\psi|\psi|^2 \right) d^3r + \int \left( -\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2\psi + a\psi + b|\psi|^2 \right)^* \delta\psi d^3r. \quad (2.45)$$

Onde identificamos a equação de movimento que minimiza a energia livre,

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2\psi(\mathbf{r}) + (a + b|\psi(\mathbf{r})|^2)\psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.46)$$

Que é uma equação do tipo Schrödinger não linear, ou seja, não pode ser aplicado o princípio da superposição neste caso.

### 2.7.3 Superfície Supercondutora

A equação de Schrödinger não-linear além, de ter várias aplicações úteis, pode ser usada para estudar a resposta do parâmetro de ordem do supercondutor quando exposto à perturbações externas. Alguns exemplos muito importantes disso são as propriedades das superfícies e interfaces de supercondutores [22,23].

Para tal, vamos considerar um modelo simples de interface entre um estado normal e um supercondutor em 3 dimensões. Suponha que a interface esteja no plano  $yz$ , a separação do estado supercondutor e estado normal acontece em  $x = 0$ , ou seja, na região  $x < 0$ , metal normal, já na região  $x > 0$ , o estado supercondutor. No lado metal normal da interface, o parâmetro de ordem  $\psi(r)$  para o supercondutor deve ser zero. Partindo do princípio de que  $\psi(r)$  deve ser contínuo, devemos resolver a equação de Schrödinger não-linear:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + a(T)\psi(x)b(T)\psi^3(x) = 0. \quad (2.47)$$

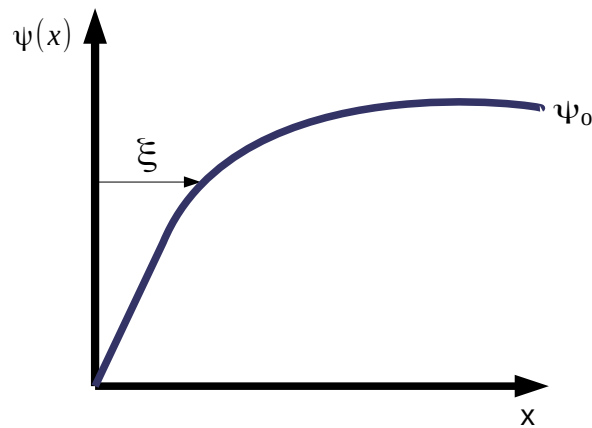
Com a condição de contorno  $\psi(0) = 0$ , analisando na região  $x > 0$ , a solução é:

$$\psi(x) = \psi_0 \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi(T)}\right). \quad (2.48)$$

Esse resultado pode ser visto na fig.(11),  $\xi(T)$  é um parâmetro chamado **Comprimento de Coerência de Ginzburg-Landau**, que é dado pela expressão:

$$\xi(T) = \left(\frac{\hbar^2}{2m^*|a(T)|}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.49)$$

Figura 11: Parâmetro de ordem de um supercondutor perto de uma superfície



Fonte:Autor, 2016.

Isto é um importante parâmetro físico que caracteriza o supercondutor.  $\xi(T)$  é uma medida da distância da superfície sobre a qual o parâmetro de ordem retorna ao seu valor máximo. Usando  $a(T) = a(T - T_c)$  o comprimento de coerência  $\xi(T)$  pode ser escrito como,

$$\xi(T) = \xi(0)|t|^{-1/2}, \quad (2.50)$$

onde

$$t = \frac{T - T_c}{T_c}, \quad (2.51)$$

denomina-se temperatura reduzida. Fica claro de acordo com a expressão que o  $\xi(T)$  diverge na  $T_c$  e que sua divergência é caracterizada por um expoente crítico de  $1/2$ . O comprimento de coerência de Ginzburg-Landau aparece em quase todos os problemas de supercondutores não-homogêneos, incluindo superfícies, interfaces, defeitos e vortices [12,24].

### 2.7.4 Teoria de Ginzburg-Landau com campo magnético

Uma importante diferença entre supercondutores tipo I e tipo II é o comportamento do campo magnético em seu interior [25]. A partir de um certo valor de campo já não se pode considerar a existência do efeito Meissner, o que torna possível que campos relativamente altos penetrem no interior dos supercondutores do tipo II. O efeito Meissner-Ochsenfeld é a principal característica dos supercondutores. Para estudar esse efeito através da teoria de Ginzburg-Landau, temos que incluir um termo de campo magnético na energia livre. Esse termo de campo magnético entra como se  $\psi(r)$  fosse a função de onda de partículas carregadas, ou seja, com a substituição usual na mecânica quântica,

$$\frac{\hbar}{i}\nabla \rightarrow \frac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A}, \quad (2.52)$$

onde  $q$  é a carga e  $\mathbf{A}$  é o potencial vetor magnético. Lembrando que para todos os supercondutores conhecidos, verifica-se que a carga adequada é  $-2e$ , devido a formação dos pares de Cooper.

Dessa forma, fazendo a substituição de (2.52), a densidade de energia livre de Ginzburg-Landau do supercondutor torna-se:

$$f_s(T) = f_n(T) + \frac{1}{2m^*} \left| \left( \frac{\hbar}{i}\nabla + 2eA \right) \psi \right|^2 + a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4. \quad (2.53)$$

Integrando em todo o espaço, incluindo o termo proveniente da energia do campo magnético, temos

$$F_s(T) = F_n(T) + \int \left( \frac{1}{2m^*} \left| \left( \frac{\hbar}{i}\nabla + 2eA \right) \psi \right|^2 + a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 \right) d^3r + \frac{1}{2\mu_0} \int B(\mathbf{r})^2 d^3r. \quad (2.54)$$

As integrais varrem todo o espaço, a primeira exclusivamente é realizada em pontos  $r$  no interior da amostra.

Para encontrar o mínimo de energia, é feito o mesmo procedimento utilizado na sessão que falamos de sistemas não-homogêneos (2.44). Com isso obtemos a equação de Schrödinger não linear na forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left( \nabla + \frac{2ei}{\hbar} \mathbf{A} \right)^2 \psi(\mathbf{r}) + (a + b|\psi|^2)\psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.55)$$

A supercorrente devido ao campo magnético pode ser encontrada a partir da derivada da energia livre de GL em relação ao potencial vetor,

$$\mathbf{j}_s = \frac{\partial F_s}{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r})}. \quad (2.56)$$

De tal sorte que,

$$\mathbf{j}_s = -\frac{2e\hbar i}{2m^*}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{(2e)^2}{m^*}|\psi|^2\mathbf{A}. \quad (2.57)$$

Seja então  $\psi(r) = \psi = cte$  e  $\psi^*(r) = cte$ , dessa forma, temos que o primeiro termo de (2.57) é nulo, pois os gradientes de  $\psi$  e  $\psi^*$  serão nulos, ou seja, a equação (2.57) fica:

$$\mathbf{j}_s = -\frac{(2e)^2}{m^*}|\psi|^2\mathbf{A} \quad (2.58)$$

A equação acima é a nossa conhecida equação de London, onde  $n_s = 2|\psi|^2$  e  $m^* = 2m_e$ . Os valores de  $n_s$  e  $m^*$  comprovam a existência dos pares de cooper nos supercondutores, como era previsto pela teoria BCS.

### 2.7.5 Quantização do Fluxo Magnético

Na teoria de Ginzburg-Landau, a função de onda de um par de cooper num supercondutor é dado por um par de ordem  $\psi(\mathbf{r}, t)$ . Como  $\psi(\mathbf{r}, t)$  não faz referência às proporções dos dois elétrons do parâmetro em relação ao centro massa deles, o uso dessa interpretação restringe-se a fenômenos que não alteram significativamente as distâncias entre os elétrons e os centros de massas [26].

Aqui iremos analisar as consequências sobre o parâmetro de ordem  $\psi(\mathbf{r}, t)$  dos pares de cooper de uma amostra supercondutora na presença de um campo magnético externo  $\mathbf{B}$ .

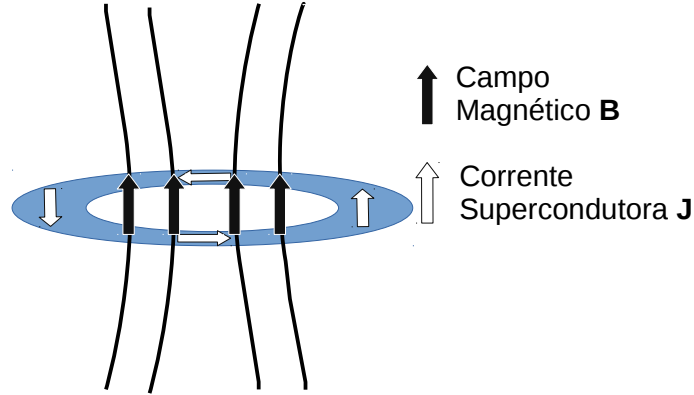
A presença de um campo magnético externo  $\mathbf{B}$ , dá origem a um dos efeitos quânticos mais importantes observados em amostras supercondutora [27,28], que é a quantização do fluxo magnético  $\phi$ . Para se compreender este importante aspecto da supercondutividade, considera-se um anel supercondutor, a uma temperatura  $T < T_c$ , na presença de um campo magnético externo  $B$ , como mostra a fig. (12).

Quando o campo magnético externo  $B$  é desligado, a corrente superficial externa desaparece, mas a corrente superficial interna permanece. Assim, o campo magnético externo original fica confinado na abertura do anel. Essa afirmativa pode ser verificada, lembrando-se que é nulo o campo elétrico  $\mathbf{E}$  no interior de um material supercondutor. Assim, tomando-se uma curva  $C$  fechada no interior do supercondutor, como mostrado da fig.(12), utilizando uma das equações de Maxwell, conclui-se que

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (2.59)$$

isto é, o fluxo magnético  $\phi$  é mantido constante ao longo do tempo no interior do anel supercondutor.

Figura 12: Anel supercondutor submetida a um campo magnético externo uniforme



Fonte:Autor, 2016.

Seja então a integral de linha da densidade de supercorrente  $\mathbf{j}_s = -\left(e\frac{\hbar}{m}\nabla\varphi + 2\frac{e^2}{m}\mathbf{A}\right)$ , em torno da curva  $C$ , é dada por

$$\oint_C \mathbf{j}_s \cdot d\mathbf{l} = -\frac{e\hbar}{m}|\psi|^2 \oint_C \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} - \frac{2e^2}{m}|\psi|^2 \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.60)$$

Como  $\mathbf{j}_s = 0$  sobre essa linha, então

$$-\frac{e\hbar}{m} \oint_C \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} - \frac{2e^2}{m} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (2.61)$$

ou ainda,

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\hbar}{2e} \oint_C \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} \quad (2.62)$$

Na integral do segundo termo dessa equação, não se deve aplicar o teorema de Stokes  $\oint_C \nabla\rho \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \nabla\varphi \cdot da = 0$ , uma vez que  $\nabla \times \nabla\varphi = 0$ , pois, por ser uma fase,  $\varphi$  não se repete após um ciclo completo de  $\mathbf{J}$ , mas sim assume valores inteiros de  $2\pi$ . Utilizando-se, entretanto, a relação vetorial  $d\varphi = \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l}$  e a definição de fluxo magnético  $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{B} \cdot da = \Phi$ , obtém-se

$$\Phi = -\frac{\hbar}{2e} \oint_C d\varphi = -\frac{\hbar}{2e} \Delta\varphi \quad (2.63)$$

Para que o parâmetro de ordem  $\psi(\mathbf{r}, t)$  seja unívoco, é necessário que, para uma volta completa em torno da curva  $C$ , a fase  $\varphi$  seja um múltiplo inteiro de  $2\pi$ , isto é,

$$\Phi = -\frac{\hbar}{2e} 2n\pi = -n\Phi_0 \quad (2.64)$$

onde

$$\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{2e} = \frac{\hbar}{2e} \quad (2.65)$$

é denominado de **quantum de fluxo magnético ou fluxóide**

Assim, a descrição de um supercondutor por meio de um parâmetro de ordem  $\psi(\mathbf{r}, t)$  quântico, resulta na quantização do fluxo magnético em unidade de fluxóide  $\Phi_0$ .

A quantização do fluxo magnético é de fato observado e isso reforça a teoria de Ginzburg-Landau. Além disso, nos vórtices magnético dos supercondutores do tipo II, essa teoria prevê que cada vórtices contém exatamente um fluxo, o que é comprovado experimentalmente.

## 3 ASPECTOS MATEMÁTICOS: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

Neste capítulo apresentaremos alguns aspectos matemáticos relacionados a geometria hiperbólica, com destaque a geometria de Lobatchevsky. Fazemos um breve histórico sobre a Geometria de Euclides e o desenvolvimento de novas Geometrias, destacando a descrição de modelo hiperbólico. Apresentamos os aspectos da geometria de Lobatchevsky, foco do nosso trabalho, fundamentando os axiomas e modelos.

### 3.1 Breve História

Durante muito tempo a matemática e os matemáticos ficaram intrigados com o enunciado do 5º postulado de Euclides. Tanto devido ao contraste do enunciado original com a clareza com que foram enunciados os outros postulados, como devido ao fato de Euclides evitar o máximo possível fazer uso deste postulado na demonstração das proposições. Por muito tempo esse postulado foi colocado em dúvida, imaginava-se que este fosse apenas uma proposição que pudesse ser demonstrada utilizando-se os outros.

No decorrer dos séculos, diversos enunciados equivalentes ao 5º postulado de Euclides foram feitos, o de John Fairplay se tornou o mais popular: *Por um ponto não contido em uma reta dada, pode ser traçada uma e apenas uma reta paralela a reta dada*[Fairplay]. Este enunciado ficou conhecido como *Postulado das Paralelas*.

Outros grandes matemáticos, tais como Girolomo Saccheri [30] e Johann Heinrich Lambert [31], tentaram demonstrar o 5º postulado. Apesar do fracasso, conseguiram diversos e importantes avanços. Foi provado, por exemplo, que sem o postulado das paralelas, obtém-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo pode ser maior ou menos que  $\pi$  [32].

A independência do postulado deu-se com os matemáticos Carl Friedrich Gauss (1777-1855), János Bolyai (1802-1860) e Nicolai Lobatchevsky (1793-1856), trataram a questão ao considerar três situações: Por um ponto contido em uma reta paralela dada, passa, *mais de uma, apenas uma* ou *nenhuma* reta paralela a reta dada. Por acharem que a negação do postulado poderia gerar uma geometria consistente, sem contradições, desenvolveram de forma axiomática um estudo de uma geometria que assumia a existência de mais de uma reta paralela, criando o que veio a ser chamado de *Geometria Hiperbólica* ou *Geometria de Lobatchevsky* [33].



## 3.2 Geometria Euclidiana e Geometrias não Euclidianas

### 3.2.1 O quinto postulado de Euclides

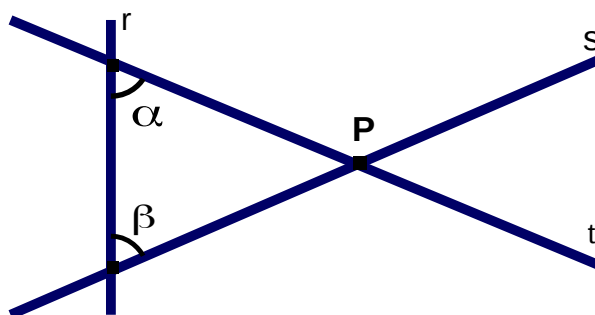
A Geometria de Euclides por muito tempo foi considerada como a única geometria possível. Durante quase dois mil anos, sua obra mais importante *Os elementos* tornou-se referência, sendo pouco questionada. Com essa obra, o matemático grego Euclides deu forma sistemática ao saber geométrico. De fato, essa geometria inicialmente baseia-se na intuição e no aspecto empírico (experiência), ou melhor, não contraria nossos sentidos, sendo seus axiomas, em geral, noções facilmente aceitas pela nossa intuição [34].

A negação do quinto postulado foi o que provocou grandes dúvidas dos matemáticos e desencadeou a construção de novas geometrias, as geometrias não-euclidianas, que são assim chamadas, pois não estão de acordo com pelo menos um dos cinco postulados de Euclides. O quinto postulado foi assim anunciando por Euclides:

*Se uma reta  $r$  corta duas outras retas  $s$  e  $t$  (no mesmo plano) de modo que a soma dos ângulos interiores ( $\alpha$  e  $\beta$ ) de um mesmo lado de  $r$  é menor que dois retos, então  $s$  e  $t$ , quando prolongadas suficientemente, se cortam em um ponto [36, 37].*

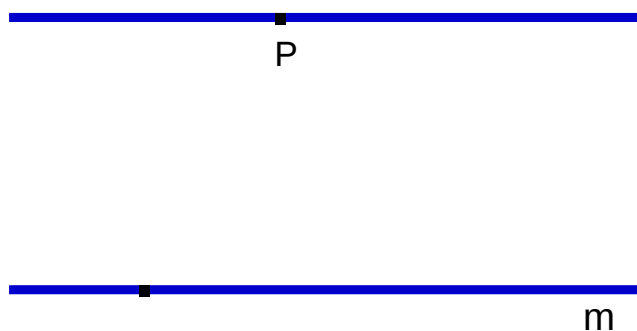
Esse postulado chama muito atenção principalmente por sua formulação, uma vez que um postulado deveria ser enunciado de forma breve e simples, o que não é o caso. A sua veracidade jamais foi questionada, pelo menos até meados do século XIX [38]. Provavelmente, isto pode ser explicado pelo fato de que duas retas acabariam por se encontrar, num ponto teórico, não havendo necessidade de ser construído, uma vez que sua existência estaria garantida racionalmente. O que preocupava Euclides, não era, portanto, sua veracidade, mas sua praticidade.

Figura 13: Postulado das Paralelas de Euclides



Em linguagem moderna, o quinto postulado, agora chamado de axioma ou postulado das paralelas, é apresentado na seguinte formulação: *um ponto  $P$  exterior a uma reta  $m$ , considerados em um mesmo plano, existe uma única reta paralela à reta  $m$*  [39],

Figura 14: Quinto postulado na formulação de Playfair



Fonte:Autor, 2016

O axioma das paralelas não era tão simples quanto os outros postulados que nunca geraram questões filosóficas, sendo essencialmente auto-evidentes e em geral não remetendo o pensamento à idéia de infinito. Assim, havia um problema no sistema de Euclides: suas "evidências" não eram tão evidentes.

A suposta verdade sobre a existência de uma única paralela estava tão inserida no pensamento científico que era fácil usá-la sem se dar conta. São tantos os resultados obtidos como consequência direta da unicidade das paralelas, que até então eram inquestionáveis, como a simples existência de retângulos cuja a soma dos ângulos internos de um deve ser dois retos.

Em síntese, na tentativa de demonstrar o quinto postulado de Euclides, sempre se esbarrava em outras afirmações que também eram logicamente equivalentes ao quinto postulado. Esse processo culminou com a "descoberta" da Geometrias não Euclidianas.

### 3.2.2 O surgimento das novas geometrias

A Falta de provas do quinto postulado levou, assim, à consideração de que este axioma não é uma consequência lógica dos quatro anteriores. A substituição desse postulado nos leva a criação de novas geometrias, tão boas quanto a geometria proposta por Euclides. Alguns matemáticos se destacam no desenvolvimento dessas novas geometrias, tais como, Janos Bolyai [40], Nikolai Ivanovich Lobachevsky [41], Carl Friedrich Gauss [42] e Georg Friederich Bernhard Riemann [43], lançaram as bases dessas geometrias que são logicamente aceitas assim como a euclidiana e consistente tal quanto.

A Geometria neutra ou geometria absoluta [44] é uma geometria que omite o postulado das paralelas, isto é, admite todos os axiomas de Hilbert [37], exceto o de paralelismo. Com os axiomas da geometria neutra e negando a unicidade das paralelas do quinto postulado, surgem novas geometrias que são tão consistente quanto a geometria de proposta por Euclides.

Há duas maneiras de negar a unicidade das paralelas no quinto postulado de Euclides: uma é supor que por qualquer ponto fora de uma reta dada, é possível traçar pelo menos duas paralelas a esta reta; a outra é supor que nenhuma paralela é possível, isto é, que o espaço não admite paralelas. No primeiro caso, obteremos a chamada Geometria Hiperbólica, no segundo, o espaço sem paralelas é chamado de Geometria Esférica, ou ainda, elíptica ou riemanniana.

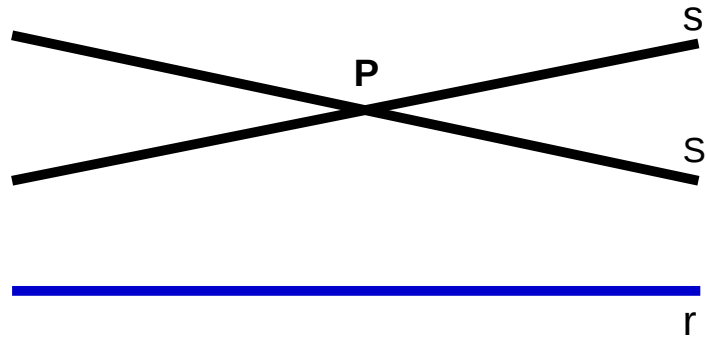
### 3.3 Geometria Hiperbólica ou Geometria de Lobatchevsky

#### 3.3.1 Geometria Hiperbólica

Nesta secção, apresentaremos as conseqüências do fracasso nas tentativas de demonstrar o quinto postulado. Como tínhamos citado anteriormente, Bolyai[40] e Lobachevski [41] estudaram a geometria resultante da junção dos quatro primeiros postulados de Euclides, e da variação do quinto proposto por Playfair *por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada* [39], eles compreenderam a situação lógica do quinto postulado e que este é independente dos outros postulados de Euclides, ou seja, que é possível existir sistemas geométricos consistentes nos quais o quinto postulado pode ser substituído por uma afirmação contrária [45].

Os princípios dessa nova geometria eram diferentes dos princípios euclidianos. Nessa nova geometria é possível obter mais de uma reta paralela a uma reta dada, por um ponto fora dessa reta; a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que dois retos; triângulos que limitam áreas diversas não são semelhantes, qualquer quadrilátero terá a soma de seus ângulos internos menor que quatro retos. Princípios que fugiam dos padrões euclidianos, mas perfeitamente coerentes, sem contradição com os demais [45]. Um fato importante sobre a consistência da geometria de Lobachevsky, foi que ele rejeitou somente o quinto postulado de Euclides, mas conservou os demais postulados e os axiomas da Geometria Euclidiana. Esta Geometria ficou sendo chamada de Geometria Hiperbólica, cuja axiomatização é idêntica à axiomatização da Geometria Euclidiana, exceto ao 5º postulado, que passa a ser enunciado como: *uma reta  $r$  e existe um ponto  $P$  fora desta reta por onde passam duas retas que não intercepta  $r$* , como pode ser observado na fig.(15).

Figura 15: Retas Paralelas

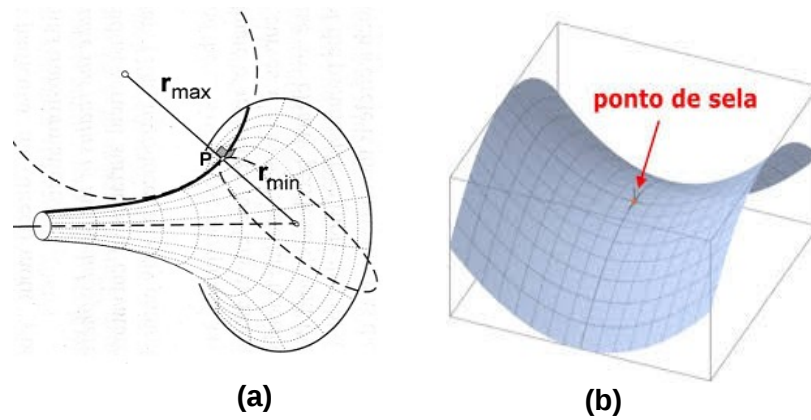


Fonte: Autor, 2016.

Uma comparação entre a geometria hiperbólica e a geometria Euclidiana está no conceito de  $(\pm\infty)$  das retas da geometria euclidiana. Desse modo, a reta teria dois destes pontos, um localiza-se antes de todos os seus pontos e outro localiza-se depois de todos os seus pontos. Assim admitiremos que estes pontos existem de tal modo que retas paralelas tenham em comum um ponto ideal na direção do paralelismo.

As propriedades desta geometria podem ser observadas em superfícies de curvatura negativa, alguns exemplos podem ser observado da fig.(16), na figura (a) temos a pseudo-esfera e a figura (b) a Sela. Estas superfícies, em qualquer ponto, apresentam os círculos oscilantes de maior e menor raio em lados opostos da superfície, logo sua curvatura é negativa.

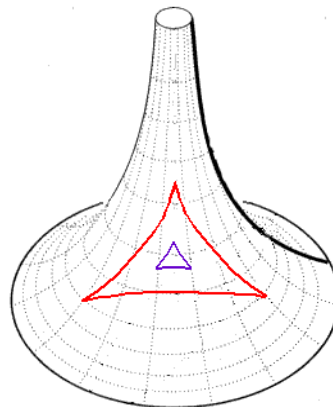
Figura 16: Superfícies de curvatura negativa: (a) Pseudoesfera e (b) Sela



Fonte: Autor, 2016.

A intersecção de três geodésicas, ou seja, três retas hiperbólicas formará um triângulo, chamado de triângulo hiperbólico, cuja característica importante é fato de que a soma dos ângulos internos é menor que dois retos.

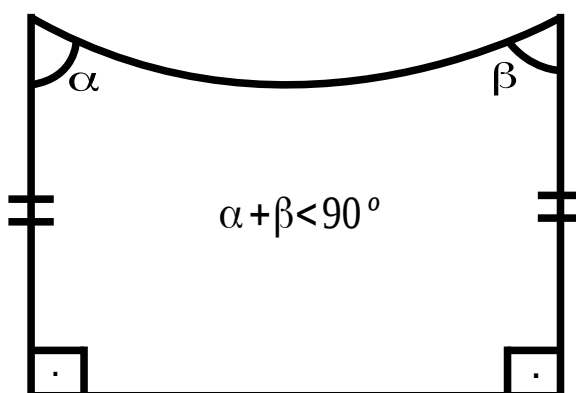
Figura 17: Triângulo Hiperbólico



Fonte: Autor, 2016.

A verificação desse fato segue por considerarmos o quadrilátero de Saccheri [30], e conhecer o quadrilátero de Lambert [31]. Lembrando que no quadrilátero de Saccheri os ângulos do topo são agudos:

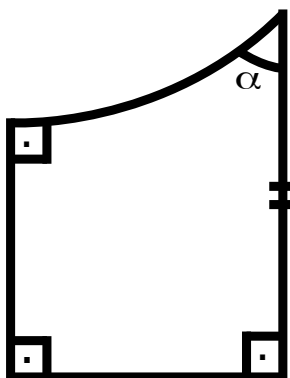
Figura 18: Quadrilátero de Saccheri



Fonte: Autor, 2016

Outro fato importante, é que o ângulos do topo do quadrilátero são iguais, e, se ligarmos os pontos médios da base e do topo deste quadrilátero, os ângulos formados com a base e o topo serão retos. Dessa forma, nesta geometria, a partir do quadrilátero de Saccheri, obtemos dois quadriláteros chamados quadriláteros de Lambert [31]. Observe que os quadriláteros de Lambert possuem três ângulos retos e um ângulo agudo. Assim, verifica-se que se em um quadrilátero três ângulos forem retos, o outro será necessariamente agudo, fig(19).

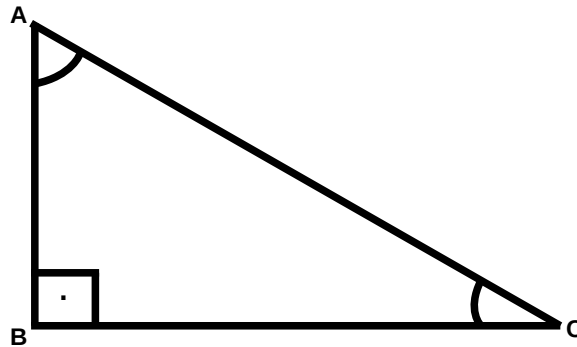
Figura 19: Quadriláteros de Lambert



Fonte: Autor, 2016.

Agora vamos fazer a análise da soma dos ângulos internos do triângulo, consideramos o triângulo retângulo ABC na fig.(20),

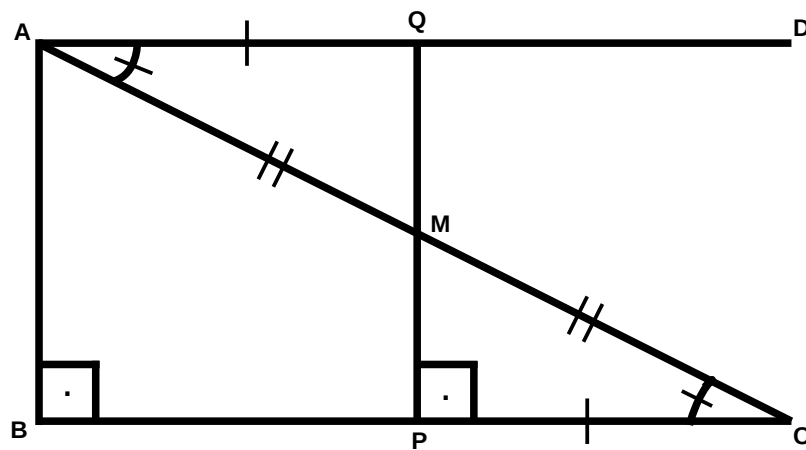
Figura 20: Triângulo Retângulo



Fonte:Autor, 2016

Agora, marquemos um ponto  $M$  no ponto médio do segmento  $AC$  e tracemos o segmento  $AD$  de modo que os ângulos dos  $A\hat{C}B$  e  $C\hat{A}D$  sejam iguais. Baixemos a perpendicular  $MP$  ao lado  $BC$  e marquemos o ponto  $Q$  pertencente ao segmento  $AD$  de modo que  $\overline{AQ} = \overline{PC}$ . Daí temos,

Figura 21: Triângulo Retângulo II



Fonte:Autor, 2016

Utilizando a proposição 4 do *Elementos* [36], os triângulos  $AQM$  e  $CPM$  são congruentes e dessa forma o ângulo  $A\hat{Q}M$  é reto e os pontos  $Q$ ,  $M$  e  $P$  são colineares, já que os ângulos  $A\hat{M}Q$  e  $C\hat{M}P$  são iguais pela proposição 15 [36].

O quadrilátero  $ABPQ$  fig.(21) é um quadrilátero de Lambert, com o ângulo do vértice  $A$ , pois os  $\hat{B}$ ,  $\hat{P}$  e  $\hat{Q}$  são retos. Com isso, a soma dos ângulos internos do triângulo

$ABC$  é equivalente a soma dos ângulos dos vértices  $A$  e  $B$  do quadrilátero, ou seja, menor que dois retos.

## 3.4 Fundamentos da geometria de Lobatchevsky: Axiomas e Modelo

Aqui, apresentaremos uma breve fundamentação da geometria de Lobatchevsky, com foco na apresentação dos axiomas, com ênfase maior no quinto postulado e interpretação de modelos para uma consistência da geometria proposta. A discussão dessas peças é realizada tendo em mente o que é necessário para a sua aplicação aos problemas da física.

### 3.4.1 Apresentação dos Axiomas

Ao apresentar os axiomas, Hilbert [46], introduz três diferentes sistemas de "coisas", também referidos de objetos geométricos primários. Os objetos do primeiro sistema são chamados pontos, do segundo linhas (ou linhas retas), e o terceiro sistema, planos. Os pontos são os elementos da geometria linear; os pontos e linhas são os elementos da geometria plana; e os pontos, linhas e planos são os elementos da geometria do espaço. O significado preciso dos termos que expressam relações é especificado pelo conteúdo dos axiomas correspondentes da geometria.

Os axiomas  $I - IV$  apresentados na seção anterior são os mesmos partilhados tanto pela geometria euclidiana, quanto pela geometria de Lobatchevsky, e constituem os axiomas da Geometria absoluta. Acrescentando-lhes o Axioma das Paralelas resulta no sistema completo de axiomas da geometria hiperbólica, ou da geometria não-euclidiana de Lobatchevsky. Desta forma, deixaremos de enunciar os quatro já mencionados primeiros axiomas, e nos deteremos a apresentar e discutir o quinto postulado proposto por Lobatchevsky.

Antes de apresentarmos o quinto postulado descrito por Lobatchevsky, iremos definir um conceito importante de paralelismo de linhas retas, e o axioma das Paralelas que corresponde à geometria euclidiana clássica, que expressou o famoso postulado de Euclides.

**Definição:** Duas linhas retas que se encontram no mesmo plano e não têm ponto em comum são referidos como sendo paralelo [47].

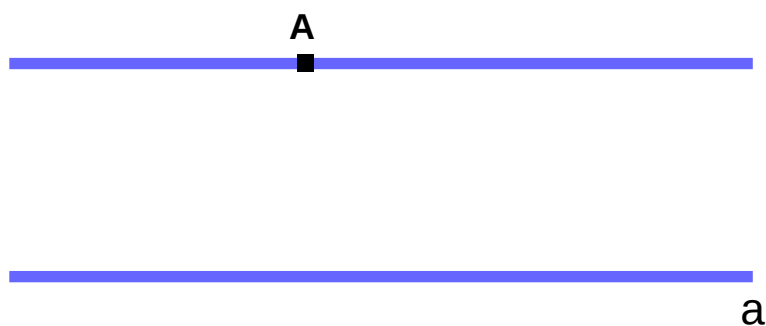
**Axioma da Paralelas:** *E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores de que dois retos.* fig.(13) [36]. O Axioma da Paralelas, juntamente com os axiomas já introduzidos, formam a geometria analítica bem conhecida de Euclides no plano cartesiano.



O estudo de Lobatchevsky dos fundamentos da geometria foi revolucionário pelo fato dele tratar o axioma das paralelas de forma independente dos outros axiomas anteriores. De acordo com Lobatchevsky o quinto postulado (postulado das paralelas) foi enunciado da seguinte forma:

*Deixe  $a$  ser uma linha reta arbitrária e  $A$  ser um ponto que não está sobre  $a$ . Em seguida, no plano determinado pela linha  $a$  e o ponto  $A$ , existem pelo menos duas linhas retas que passam através do  $A$  que não se intersectam a linha  $a$ . [47].*

Figura 22: Retas Paralelas de Lobatchevsky



Fonte:Autor, 2016

Se substituirmos o quinto postulado de Euclides pelo axioma das paralelas de Lobatchevsky (uma afirmação que não é compatível com a "formulação euclidiana"), juntamente com os outros axiomas (os axiomas da geometria Absoluta), então o sistema resultante de axiomas leva a um novo conceito, de uma geometria correta, a geometria não-euclidiana hiperbólica, ou geometria Lobatchevsky. O conteúdo do axioma  $V$  (axioma das paralelas) é suficiente (se considerar os axiomas da geometria absoluta) para estabelecer que através do ponto  $A$  existem infinitas passagens de muitas linhas retas que não cruzam a reta  $a$ .

É portanto, adequado indicar claramente aqui que na geometria de Lobachevsky uma "linha reta" é entendida como uma linha mais curta [48], isto é, uma linha de tal forma que a distância ao longo dela entre dois de seus pontos é o menor. A noção de "paralelismo" de duas "linhas retas" refere-se apenas ao fato de que elas não se cruzam, e não incorporam a propriedade euclidiana habitual de duas linhas retas paralelas sendo equidistante.

### 3.4.2 Interpretação dos modelos da geometria de Lobatchevsky

Apesar da aceitação dos axiomas propostos, as dúvidas referentes à consistência da nova geometria, só foram desfeitas quando matemáticos como Eugenio Beltrami, Henri

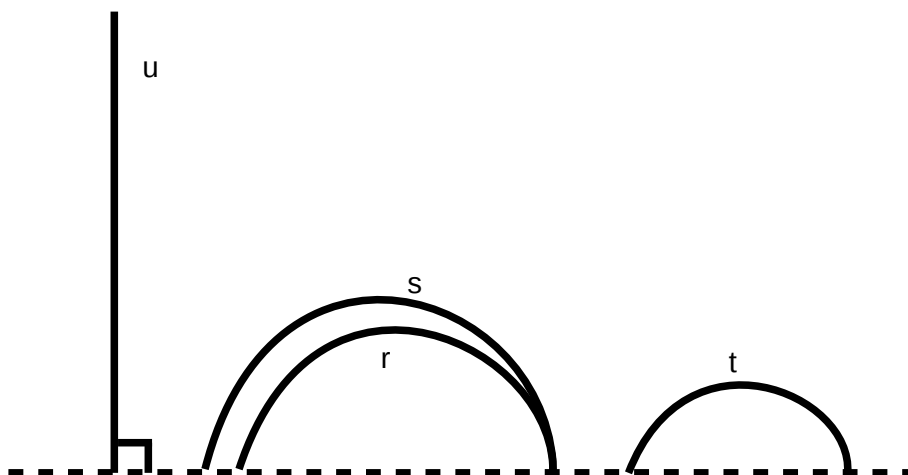
Poincaré e Felix Klein criaram modelos euclidianos para a geometria hiperbólica. A criação de modelos euclidianos para a geometria hiperbólica resolve a questão da consistência desta geometria, pois qualquer eventual contradição existente na geometria euclidiana, ou seja, as geometrias hiperbólica e euclidiana tem o mesmo grau de consistência.

Os modelos propostos por Poincaré para a Geometria Hiperbólica foram desenvolvidos entre 1882 e 1887 [49] e são chamados de modelo do semiplano e modelo do disco. Vamos aqui falar de forma breve modelo do semiplano, pois é nele que é feita a nossa proposta de consistência.

### 3.4.2.1 Modelo do Semi-Plano

O modelo proposto do semiplano, o espaço é um semiplano euclidiano sem fronteira; as retas hiperbólicas são as semirretas perpendiculares a reta euclidiana que limita o semiplano fig.(23) e as semicircunferências com centros pertencentes a esta reta euclidiana que limita o semiplano [47,50]. A reta euclidiana que limita o semiplano é dita reta dos infinitos ou horizonte do semiplano

Figura 23: Retas hiperbólicas como semirretas e semicírculos euclidianos

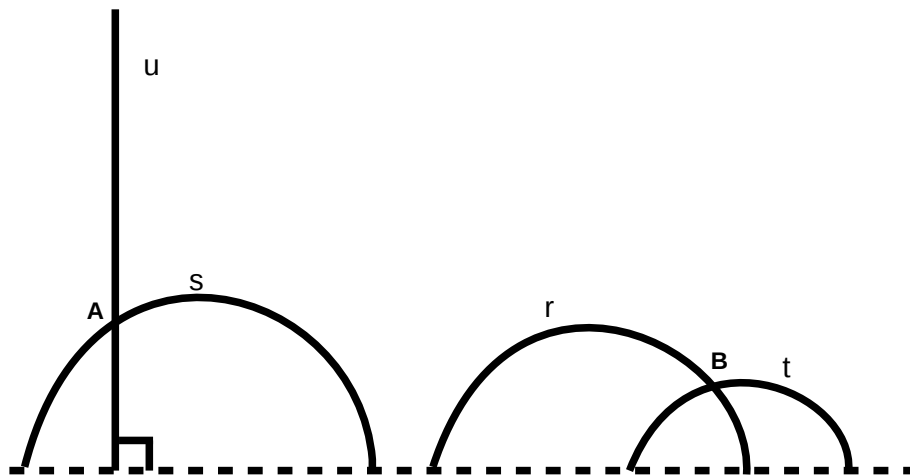


Fonte: Autor, 2016.

Observando com maior detalhe o eixo positivo da reta que limita o semiplano de Poincaré, podemos ver que duas semicircunferências distintas, de centro na reta horizonte, possuem no máximo um ponto de intersecção. Da mesma forma, uma semirreta perpendicular a esta reta também intersecciona um semicírculo em no máximo um ponto. Assim, Poincaré determinou um modelo em que duas retas hiperbólicas distintas se

interseccionam em no máximo um ponto. Na figura abaixo podemos observar estas constatações.

Figura 24: Retas hiperbólicas  $s$ ,  $t$  e  $u$  paralelas a  $r$  passando pelo ponto  $P$



Fonte: Autor, 2016

## 3.5 Sistema de Coordenadas Curvilínea

Aqui apresentaremos alguns conceitos relacionados ao estudo de elementos de espaços curvos, dando especial atenção ao conceito de métrica [50,51] que será utilizados nos próximos capítulos.

### 3.5.1 Métrica

Chamaremos de métrica a "coisa" que está relacionado com a generalização do nosso conceito de distância. A distância como um conceito intuitivo é algo invariante para nós. Por exemplo, ninguém questionará a capacidade de qualquer pessoa de medir o comprimento de uma barra de ferro. Em outras palavras, em nossa visão intuitiva, a medida não dependerá de fatores cinéticos. Entretanto, a realidade física mostrou-se muito mais complicada, pois de fato o comprimento da barra dependerá de fatores cinéticos. Assim, nada mais natural do que procurarmos por objetos que sejam invariantes frente a mudança de observadores. Como consequência dessa busca, o conceito de distância [52] é dos exemplos de generalização da concepção intuitiva de comprimento e medida de espaço.

Em coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ , o quadrado da distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos é expresso da seguinte maneira:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.1)$$

Se considerarmos no espaço  $n$ -dimensional, dizemos que as coordenadas  $\bar{x}^i$  são cartesianas se o quadrado da distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos  $P(\bar{x})$  e  $P(\bar{x} + d\bar{x})$  é dado pela fórmula *pitagórica* [53]:

$$ds^2 = d\bar{x}^k d\bar{x}^k, (k = 1, 2, \dots, n), [\bar{x}^k : \text{coord. cartesianas}] \quad (3.2)$$

A equação (3.2) é a extensão natural da eq.(3.1) para espaços com mais de três dimensões. Podemos então escrever essa equação em coordenadas genéricas  $x^i$ , o qual é feito substituindo  $d\bar{x}^k = (\partial\bar{x}^k/\partial x^i)dx^i$  [54]. Assim, obtemos uma forma quadrática dos diferenciais mediante a transformação coordenadas,  $ds$  então passa a ter a seguinte forma:

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \quad (3.3)$$

onde  $g_{ij}$  é conhecido como métrica. A expressão acima nos dá  $ds$  expresso em um sistema de coordenadas mais geral, pois, sempre é possível encontrar uma transformação que leve (3.1) em (3.3) e da mesma forma o inverso.

No entanto, nem sempre é possível introduzir um sistema de coordenadas cartesianas em todo *espaço*. Por exemplo, considere o *espaço* bidimensional formado pelos pontos na superfície de uma esfera de raio  $R$ , onde a distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos é dada em termos da coordenadas esféricas  $\theta$  e  $\varphi$  por :

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (3.4)$$

Não é possível criar coordenadas (digamos  $\xi$  e  $\eta$ ) em termos da qual essa forma quadrática tome a forma  $ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2$ , por exemplo, uma maneira de introduzir tais espaços consiste em definir espaços dotados de conceito de distância, ou seja, tem-se um espaço métrico sempre que a distância quadrática infinitesimal puder ser escrita como uma forma quadrática dos diferenciais das coordenadas que seja invariante [54], isto é,

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = \text{invariante} \quad (3.5)$$

Em qualquer espaço, se a métrica for definida positiva e for possível introduzir as chamadas *coordenadas cartesianas*, nas quais a métrica e a distância quadrática infinitesimal tomam as formas especiais:

$$(g_{ij} = 1, \text{ se } i = j) e (\bar{g}_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j) \leftrightarrow ds^2 = (d\bar{x}^1)^2 + (d\bar{y}^2)^2 + \dots + (d\bar{x}^n)^2 \quad (3.6)$$

são válidos em todos os pontos, dizemos que o espaço é *não-euclidiano* [52]. Portanto podemos definir o espaço de coordenadas mais adequada para trabalharmos através da escolha da métrica [55].

## 4 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LONDON NO ESPAÇO DE LOBACHEVSKY

É de nosso entendimento hoje que o comprimento de coerência  $\xi$  acima da temperatura crítica ( $T_c$ ) na supercondutividade [14], é consideravelmente menor do que a profundidade de penetração de London  $\lambda$ . Isto implica para nossos estudos que, a menos que o campo exterior se aproxima do campo crítico superior,  $H_{c2}$ , alguns fatos não tão importantes dos detalhes da estrutura do núcleo de vórtice pode ser ignorado, e, portanto, a distribuição do campo magnético no material pode ser estudado através da resolução da equação London. Ao contrário da equação de Ginzburg-Landau, a equação de London demonstra um carácter linear que, reduz o problema de encontrar a distribuição do campo magnético de vários vórtices para o de encontrar a distribuição do campo de um único vórtice. Além de explica o fato de o único campo permitido é amortecido exponencialmente quando penetra na superfície externa do supercondutor puro (Efeito Meissner) [2,10].

### 4.1 Solução da equação de London

A solução da equação de London para supercondutores puro, tem sido bastante útil para o estudo de muitas geometrias e sistemas relativamente simples [11], mas que possui uma grande eficácia em sistemas mais complexos. Estas soluções irão ocorrer em qualquer um dos sistemas de coordenadas bem documentados, no qual o operador de Laplace e as condições de contorno são separáveis. Tendo em consideração estes fatos e uma vez que, alguns modelos de um supercondutor em um espaço não-euclidiano desempenham um papel significativo em alguns processos físicos, Usaremos a equação de London (2.27) na forma:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B}, \quad (4.1)$$

Onde já foi definido o parâmetro de profundidade de penetração, dado por

$$\lambda = \left( \frac{m_e}{\mu_0 n_s e^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.2)$$

Para partículas com cargas  $e$ , massa  $m$ , e a quantidade de elétrons supercondutor  $n_s$ .

A equação (4.1) explica o efeito Meissner por ela não permite uma solução uniforme no espaço, de modo que um campo magnético não pode existir no supercondutor. Isto é,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_0 = cte$  não é solução da equação (4.1), a menos que o campo constante  $B_0$  seja

identicamente zero. O resultado segue do fato de que o lado esquerdo da (4.1) é sempre zero, porém o lado direito nem sempre é zero, a não ser no caso onde  $B_0$  seja nulo. Note ainda que a equação (2.24) garante que a densidade de corrente é zero ( $\mathbf{j} = 0$ ) sempre que o campo for nulo ( $\mathbf{B} = 0$ ).

#### 4.1.1 Supercondutor com simetria plana

Vamos considerar um supercondutor simetricamente plano submetido no sistema de coordenadas quase-cartesiano [15], a métrica (4.3) representa o espaço curvo de Lobachevsky na qual iremos analisar qual a influencia, e as consequências que acontecerá no supercondutor, além de observar o comportamento do campo magnético diante de tal sistema.

$$ds^2 = e^{-\frac{2z}{\rho}}(dx^2 + dy^2) + dz^2, \quad (4.3)$$

O sistema de coordenadas foi escolhido da seguinte forma: coloca-se o eixo  $z$  de forma que ele fique perpendicular a superfície do supercondutor e quando  $z > 0$ , o meio é supercondutor. O campo magnético externo é dirigida ao longo do supercondutor e ao longo do eixo  $x$ . Na equação (4.3) temos ainda o  $\rho$  que representa o raio da curvatura do espaço de Lobachevsky, e que vai ser o nosso objeto de análise.

Usaremos a forma generalizada do rotacional para calcular o campo magnético dado por,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{q}_1 & h_3 \hat{q}_2 & h_3 \hat{q} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 B_1 & h_2 B_2 & h_3 B_3 \end{vmatrix} \quad (4.4)$$

Para a métrica (4.3) identifica-se:  $h_1 = e^{-\frac{z}{\rho}}$ ,  $h_2 = e^{-\frac{z}{\rho}}$  e  $h_3 = 1$ ;  $\hat{q}_1 = \hat{e}_i$ ,  $\hat{q}_2 = \hat{e}_j$  e  $\hat{q}_3 = \hat{e}_k$ ;  $B_1 = B_x = B_x(z)$ ,  $B_2 = B_y = 0$  e  $B_3 = B_z = 0$ . O rotacional do campo magnético  $\mathbf{B}$  é dado por,

$$\nabla \times \mathbf{B} = e^{\frac{2z}{\rho}} \begin{vmatrix} e^{-\frac{z}{\rho}} \hat{e}_i & e^{-\frac{z}{\rho}} \hat{e}_j & \hat{e}_k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{-\frac{z}{\rho}} B_x(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (4.5)$$

Explicitando a dependência do campo magnético apenas na componente de  $z$  e o fato de que as outras coisas componentes não contribui na ação do campo magnético, e resolvendo a única dependência, o rotacional do campo se torna,

$$\nabla \times \mathbf{B} = e^{\frac{2z}{\rho}} \left[ e^{-\frac{z}{\rho}} \left[ -\frac{\partial}{\partial z} \left( e^{-\frac{z}{\rho}} B_x(z) \right) \right] \right] \hat{e}_j, \quad (4.6)$$

ou ainda,

$$\nabla \times \mathbf{B} = A_y \hat{e}_j, \quad (4.7)$$

com a  $A_y = e^{\frac{2z}{\rho}} \left[ e^{-\frac{z}{\rho}} \left[ -\frac{\partial}{\partial z} \left( e^{-\frac{z}{\rho}} B_x(z) \right) \right] \right]$ .

Calculando novamente o rotacional do campo magnético, agora na direção  $\hat{e}_j$ , temos então,

$$\nabla \times \mathbf{B} = e^{\frac{2z}{\rho}} \begin{vmatrix} e^{-\frac{z}{\rho}} \hat{e}_i & e^{-\frac{z}{\rho}} \hat{e}_j & \hat{e}_k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & e^{-\frac{z}{\rho}} A_y & 0 \end{vmatrix} \quad (4.8)$$

Daí então encontra-se uma expressão para o rotacional do rotacional do campo magnético,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = e^{\frac{2z}{\rho}} \left[ -e^{-\frac{z}{\rho}} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( e^{-\frac{z}{\rho}} A_y(z) \right) \right] \right] \hat{e}_i. \quad (4.9)$$

Finalmente substituindo o valor de  $A_y$  na equação (4.9), e eliminando alguns termos,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -e^{\frac{z}{\rho}} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( e^{-\frac{z}{\rho}} B_x(z) \right) \right) \right] \hat{e}_i. \quad (4.10)$$

Aplicando o resultado (4.10) na equação de London (4.1),

$$\lambda^2 e^{\frac{z}{\rho}} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( e^{-\frac{z}{\rho}} B_x(z) \right) \right) \right] - B_x(z) = 0, \quad (4.11)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial^2 B(z)}{\partial z^2} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial B(z)}{\partial z} + \frac{B(z)}{\rho^2} - \frac{B(z)}{\lambda^2} = 0. \quad (4.12)$$

Essa é uma equação diferencial de segunda ordem do campo magnético com dependência apenas na componente  $z$ , com parâmetro que representa a curvatura do espaço de Lobachevsky e o parâmetro que controla a profundidade penetração do campo magnético.

A solução da equação (4.12) é relativamente simples e pode ser obtida sem dificuldades supondo soluções exponenciais, que podem ser do tipo,

$$B(z) = A e^{bz} + D e^{-bz}, \quad (4.13)$$

Com  $z$  sendo a direção onde o campo magnético foi aplicado, o  $b$  é um termo arbitrário que facilmente é encontrado por álgebra direta, dado por,

$$b = \frac{\frac{2}{\rho} \pm \sqrt{\frac{4}{\rho^2} - 4 \left( \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)}}{2}, \quad (4.14)$$



Sendo assim, com (4.14) em (4.13), a solução geral do campo varrendo todo espaço curvo de Lobachevsky é da forma,

$$B(z) = Ae^{(\frac{2}{\rho}-\frac{1}{\lambda})z} + De^{(\frac{2}{\rho}+\frac{1}{\lambda})z}, \quad (4.15)$$

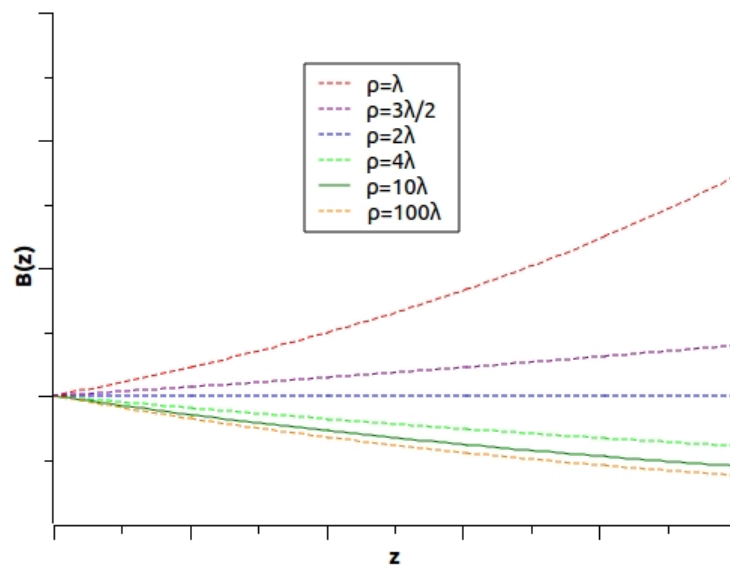
Onde  $A$  e  $D$  são constantes de normalização reais positivas, que podem ser obtidas aplicando as condições de contorno do nosso problema.

Vamos agora aplicar as condições de contorno, nas quais analisaremos o caso onde o espaço de Lobachevsky é muito grande, ou seja, quando o raio de curvatura vai para o infinito ( $\rho \rightarrow \infty$ ), quando o supercondutor é muito pequeno, nesse caso fazemos ( $z \rightarrow 0$ ), e olhamos como o campo se comporta nesse região, e quando o supercondutor é muito grande, ( $z \rightarrow \infty$ ). Primeiramente, temos ( $\rho \rightarrow \infty$ ), e quando fazemos  $B(0)$  e  $B(\infty)$ , temos finalmente nossa expressão para o campo,

$$B(z) = B_0 e^{(\frac{2}{\rho}-\frac{1}{\lambda})z}, \quad (4.16)$$

A equação (4.16) mostra como o campo magnético se comporta no espaço de Lobachevsky, o termo  $e^{\frac{2}{\rho}z}$  é responsável por controlar a profundidade de penetração do campo magnético em um supercondutor no espaço curvo, A seguir mostramos essa solução para diferentes valores do raio da curvatura em função do comprimento de penetração, e observamos qual a influência desses parâmetro no comportamento do campo.

Figura 25: O campo magnético em função dependência da profundidade de penetração com diferentes valores da curvatura do espaço Lobachevsky



Fonte: Autor, 2016.

A figura (25) mostra como o campo se modifica a medida que variamos o valor do raio da curvatura em função do comprimento de penetração, o resultado mais inesperado

acontece quando temos a curvatura assumindo valores inferiores ao dobro do comprimento de penetração,  $\rho = 2\lambda$ , o campo aumenta de intensidade a medida que a profundidade de penetração também aumenta. Na figura (25) com a linha continua conseguimos ainda fazer uma comparação com o resultado encontrado na literatura de um supercondutor no espaço plano.

A partir do campo magnético ( $\mathbf{B}$ ) diferentes quantidades podem ser encontradas e analisadas, tais como a densidade de corrente, que podem ser calculados diretamente. Com efeito, utilizando a equação de Maxwell já apresentada anteriormente equação (2.25),

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (4.17)$$

ou que ainda pode ser escrita como,

$$\mathbf{j}_s = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}. \quad (4.18)$$

Por algebra direta, o rotacional do campo magnético da equação (4.16) em coordenadas quase-cartesianas pode ser escrito como,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{e^{-\frac{2z}{\rho}}} \begin{vmatrix} e^{-\frac{z}{\rho}} \hat{e}_i & e^{-\frac{z}{\rho}} \hat{e}_j & \hat{e}_k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{-\frac{z}{\rho}} B(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (4.19)$$

onde  $\hat{e}_i$ ,  $\hat{e}_j$  e  $\hat{e}_k$  são os vetores unitários de  $X$ ,  $Y$  e  $z$  na direção de um ponto qualquer no espaço  $\mathbf{r} = r(x, y, z)$ . Resolvendo a equação (4.19), obtemos,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial z} [B(z)] \hat{e}_y, \quad (4.20)$$

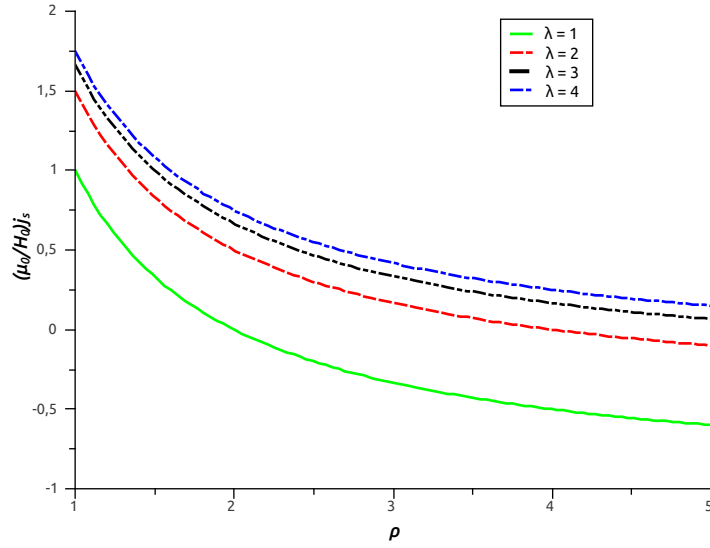
e combinando com a equação (4.18), obtemos o valor da densidade de corrente supercondutora que circula ao longo da amostra,

$$\mathbf{j}_s = \frac{B_0}{\mu_0} \left( \frac{2}{\rho} - \frac{1}{\lambda} \right). \quad (4.21)$$

Note que, a densidade de corrente supercondutora neste sistema depende do valor da curvatura do espaço de Lobachevsky e do comprimento de penetração de London. O comportamento da corrente de elétrons supercondutora pode ser observado na figura (26), com detalhe importante na sua diminuição com o crescimento de  $\rho$ , mantendo de  $\lambda$  constante. Observa-se que as linhas da corrente se aproximam a medida que  $\lambda$  aumenta para um certo valor.

Podemos ainda encontrar uma expressão para a energia total do sistema. Vamos supor que exista uma supercorrente que circula o material no espaço de Lobachevsky, e que tenha uma velocidade  $v$ , nesse caso a expressão para a corrente é

Figura 26: Comportamento da densidade de elétrons supercondutora em função da curvatura



Fonte: Autor, 2016.

$$\mathbf{j} = -en_s v, \quad (4.22)$$

existirá uma energia cinética no sistema correspondente na forma,

$$E = \frac{mv^2 n_s}{2}, \quad (4.23)$$

com  $n_s$  sendo o número de elétrons supercondutor. Combinando as equações (4.22) e (4.23), obtemos a energia total do sistema,

$$E = \frac{B_0}{2\mu_0} e^{\left(\frac{2}{\rho} - \frac{1}{\lambda}\right)}. \quad (4.24)$$

Assim como no campo a energia também tem uma dependência da curvatura do espaço de Lobachevsky, seu valor decai exponencialmente a medida que variamos  $\rho$  em função do comprimento de penetração de London.

Quando comparado com o sistema de coordenadas euclidianas, equação (2.37), observamos que em um sistema plano a energia de um supercondutor possui uma dependência de um logarítmo, e dessa forma decai mais suave do que um sistema de um supercondutor de um espaço curvo de Lobachevsky, à medida que variamos sua dependência espacial.

#### 4.1.2 Supercondutor com simetria cilíndrica

Por analogia com o caso anterior, vamos agora considerar o caso de um supercondutor simetricamente cilíndrico em um sistema de coordenadas horosférico [56]. Escrevemos a métrica para este sistema da forma,

$$ds^2 = e^{-\frac{2z}{\rho}} (dr^2 + r^2 d\varphi^2) + dz^2. \quad (4.25)$$

Aqui escolhemos o sistema de forma que o campo seja aplicado na direção  $z$  e que dependa tanto da componente radial  $r$  quanto da componente  $\varphi$ , novamente o  $\rho$  é o parâmetro adicional da curvatura do espaço de Lobachevsky.

Utilizando o mesmo formalismo do caso anterior, usando a forma do rotacional da equação (4.4), só que agora as restrições do problema são:  $h_1 = e^{-\frac{z}{\rho}}$ ,  $h_2 = re^{-\frac{z}{\rho}}$  e  $h_3 = 1$ ;  $\hat{q}_1 = \hat{e}_r$ ,  $\hat{q}_2 = \hat{e}_\varphi$  e  $\hat{q}_3 = \hat{e}_z$ ;  $B_1 = B_r = 0$ ,  $B_2 = B_\varphi = 0$  e  $B_3 = B_z = B_z(r, z)$ . Com isso temos,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{e^{\frac{2z}{\rho}}}{r} \begin{vmatrix} e^{-\frac{z}{\rho}} \hat{e}_r & re^{-\frac{z}{\rho}} \hat{e}_\varphi & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & B_z(r, z) \end{vmatrix} \quad (4.26)$$

Calculando o rotacional do campo magnético com as mesmas restrições e com dependência apenas nas componentes  $r$  e  $z$ , obtemos

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{e^{\frac{2z}{\rho}}}{r} \left[ re^{-\frac{z}{\rho}} \left[ \frac{\partial}{\partial z} (B_z(r, z)) \right] \right] \hat{e}_\varphi, \quad (4.27)$$

ou ainda,

$$\nabla \times \mathbf{B} = C_\varphi \hat{e}_\varphi, \quad (4.28)$$

com  $C_\varphi$  igual a  $e^{\frac{2z}{\rho}} \left[ \left[ \frac{\partial}{\partial z} (B_z(r, z)) \right] \right]$ .

Resolvendo novamente o rotacional, só que agora a dependência do campo é na direção  $\varphi$ ,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{e^{\frac{2z}{\rho}}}{r} \begin{vmatrix} e^{-\frac{z}{\rho}} \hat{e}_r & re^{-\frac{z}{\rho}} \hat{e}_\varphi & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & re^{-\frac{z}{\rho}} C_\varphi & 0 \end{vmatrix} \quad (4.29)$$

Resolvendo, obtemos o valor do rotacional do rotacional do campo magnético com dependência em  $r$  e  $z$ , da forma,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \frac{e^{\frac{2z}{\rho}}}{r} \left[ e^{-\frac{z}{\rho}} \left[ -\frac{\partial}{\partial z} (re^{-\frac{z}{\rho}} C_\varphi) \right] \hat{e}_r + \left[ \frac{\partial}{\partial r} (re^{-\frac{z}{\rho}} C_\varphi) \right] \hat{e}_z \right]. \quad (4.30)$$

Aplicando o valor de  $C_\varphi$  na equação (4.30), e usando as condições iniciais do problema, temos

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{e^{\frac{2z}{\rho}}}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} B_z(r, z) \right) \right] \hat{e}_z, \quad (4.31)$$

e substituindo na equação de London (4.1), teremos então,

$$-\frac{e^{\frac{2z}{\rho}}}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} B_z(r, z) \right) \right] - \frac{B_z(r, z)}{\lambda^2} = 0. \quad (4.32)$$

Essa é a equação de London para o campo em coordenadas horosférica com dependência em  $r$  e  $z$ , e se resolvemos as derivadas obtemos,

$$e^{\frac{2z}{\rho}} \frac{\partial^2 B_z(r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} e^{\frac{2z}{\rho}} \frac{\partial B_z(r, z)}{\partial r} - \frac{B_z(r, z)}{\lambda^2} = 0, \quad (4.33)$$

Organizando os termos temos, podemos ainda reescrever a equação acima da forma,

$$\frac{\partial^2 B_z(r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_z(r, z)}{\partial r} - \left( \frac{e^{-\frac{z}{\rho}}}{\lambda} \right)^2 B_z(r, z) = 0. \quad (4.34)$$

Fazendo  $k^2 = -\frac{e^{-\frac{2z}{\rho}}}{\lambda^2}$ , a equação (4.34) apresenta a seguinte forma,

$$\frac{\partial^2 B_z(r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_z(r, z)}{\partial r} + k^2 B_z(r, z) = 0. \quad (4.35)$$

E a solução geral para o campo magnético é a combinação linear do tipo,

$$B_z(r, z) = C J_m(kr) + D N_m(kr), \quad (4.36)$$

Onde  $J_m(kr)$  é função de Bessel do primeiro tipo e  $N_m(kr)$  a função de Bessel do segundo tipo, ou também conhecida como funções de Neumann.

Daí, substituindo  $k$  em (4.36), a solução geral do campo é dado por,

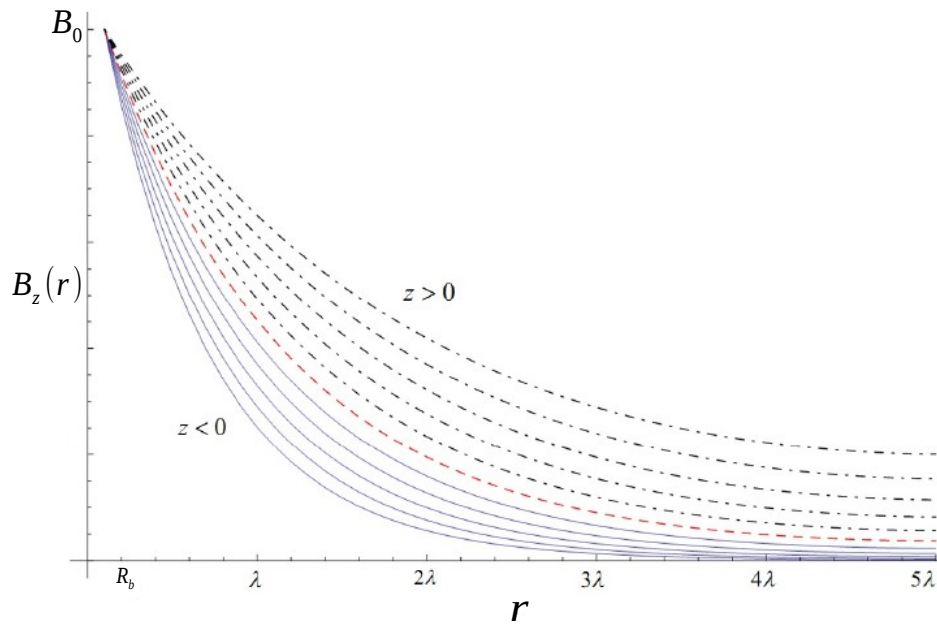
$$B_z(r, z) = C J_m \left( i \frac{e^{-\frac{z}{\rho}} r}{\lambda} \right) + D N_m \left( -i \frac{e^{-\frac{z}{\rho}} r}{\lambda} \right). \quad (4.37)$$

As condições de contorno que vamos aplicar para o supercondutor com simetria cilíndrica são as seguintes: Na fronteira  $r = R_b$  (na superfície da borda) o campo magnético é  $B_0$  e quando a curvatura é muito grande ( $\rho \rightarrow \infty$ ) teremos a solução para o supercondutor com simetria cilíndrica no espaço plano em decomposição. Vamos escolher a direção do eixo  $z$  ao longo da superfície do supercondutor. Neste caso, a solução para o campo magnético no supercondutor cilíndricamente simétrico no espaço de Lobachevsky tem a forma,

$$B_z(r, z) = B_0 J_m \left( i \frac{e^{-\frac{z}{\rho}} r}{\lambda} \right) / J_m \left( i \frac{e^{-\frac{z}{\rho}} R_b}{\lambda} \right). \quad (4.38)$$

Na figura (27), plotamos o comportamento do campo magnético em função da posição, com dependência do comprimento de penetração e para valores de  $z$  do supercondutor simetricamente cilíndrico, fixamos o valor para a curvatura  $\rho = 10\lambda$ .

Figura 27: O campo magnético com dependência da profundidade de penetração com diferentes valores de  $z$  no espaço de Lobachevsky com curvatura  $\rho = 10\lambda$



Fonte: Autor, 2016.

Observamos três possíveis consequências, a linha contínua em destaque mostra o comportamento do supercondutor no espaço plano, as linhas contínuas na região  $z > 0$  e as linhas pontilhadas na região  $z < 0$ . Nota-se que o campo cai a medida que o  $r$  aumenta com a profundidade de penetração. No entanto, se aproxima ainda mais de zero quando os valores de  $z < 0$ . O comportamento do campo magnético segue o previsto do que acontece para o supercondutor no espaço plano submetido a um campo externo. Ao contrário do caso anterior, quando para um certo valor da curvatura do espaço curvo de Lobachevsky o campo aumenta.

## 5 CONCLUSÃO

Ao longo dessa dissertação, fomos capazes de mostrar a fenomenologia por trás da supercondutividade, consideramos o modelo de London no espaço de Lobachevsky e sua solução no espaço com uma curvatura constante.

No primeiro capítulo, revisamos alguns conceitos relevantes sobre a supercondutividade, foi discutido as principais características do fenômeno, as teorias que se desenvolveram ao longo do tempo na tentativa de explicação das causas e consequências, teoria de London, teoria de Ginzburg-Landau, teoria (BCS), e apresentamos o formalismo utilizado para o desenvolvimento da dissertação. Este capítulo serviu como uma base para o modelo proposto no capítulo 3. Apresentamos e discutimos a equação de London, o nosso objeto de estudo, e alguns conceitos importantes como comprimento de penetração de London.

No capítulo seguinte, reservamos à discussão sobre a geometria não-euclidiana, o desenvolvimento da geometria de Lobachevsky, ao qual nos propusemos estudar à supercondutividade, observando as causas que o fenômeno sofria quando era submetido a esse espaço. Apresentamos as geometrias de forma axiomáticas, além de provar através de modelos a consistência dessa geometria.

No capítulo quatro, infringimos nossos resultados e discussões a respeito da supercondutividade no espaço curvo, consideramos o modelo de London no espaço de Lobachevsky e a equação de Londres foi obtida no espaço com uma curvatura constante. Foi encontrado a solução do campo magnético para um supercondutor plano no espaço de Lobachevsky em um sistema de coordenadas quasi-cartesianas e solução do campo magnético para um supercondutor com simetria cilíndrica em um sistema de coordenadas horosférico. No primeiro caso mostrou-se que no espaço o campo magnético pode crescer com uma dupla quantidade de profundidade de penetração. No segundo caso, mostrou-se que no espaço curvo de Lobachevsky o campo magnético segue o comportamento de um supercondutor no espaço plano. Com a expressão do campo conseguimos obter outras quantidades importantes, como a corrente de elétrons supercondutora, e ainda da energia total do sistema, e fazer a análise das mesmas.

## 6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ONNES, Heike. Kamerlingh. The superconductivity of mercury. Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden, Leiden, v. 119, 1911
- [2] MEISSNER, Walther; OCHSENFELD, Robert. Título Original: Ein neuer effekt bei eintritt der . Tradução para o inglês de Allister M. Forrest: A new effect concerning the onset of superconductivity. Paisley (Scotland). Eur. J. Phys., v. 4, p. 117-120, 1983.
- [3] LONDON, Heinz; LONDON, Fritz. The electromagnetic equations of the supraconductor. Proc. Roy. Soc. A, London, v.149, p. 71-88, mar., 1935.
- [4] GINZBURG, Vitaly Lazarevich; LANDAU, Lev Davidovich. On the theory of superconductivity. Sov. Phys. JETP, v. 20, p. 1064-1086, nov., 1950.
- [5] BARDEEN, John; COOPER, Leon Neil; SCHRIEFFER, John Robert. Theory of superconductivity. Phys. Rev., v. 108, p. 1175-1204, dec., 1957.
- [6] TINKHAM, Michael. Introduction to superconductivity. 2 nd ed. [S.l]: McGraw-Hill, 1996, 454p.
- [7] WALDRAM, J. R. Superconductivity of metals and cuprates. Bristol and Philadelphia: Institute of Physics Publishing, 1996, 410p.
- [8] ASCHROFT, N. W.; MERMIN, N. D. Solid State Physics. Cornell: Cornell University, 1976.
- [9] N.W.Ashcroft, N.D.Mermin: Solid State Physics (Brooks/Cole Thomson L, Inc., 1976)
- [10] OSTERMANN, F.; PUREUR, P. Supercondutividade. São Paulo: Livraria da Física, 2005Referencias
- [11] ANNETT, J. F. Superconductivity, Superfluids and Condensates. New York: Oxford University Press, 2004
- [12] RIBEIRO, L. R. Supercondutividade: A equação de London e o Modelo de Ginzburg-Landau. 2010. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.
- [13] Kittel, Charles. Introdução à física do estado sólido. Grupo Gen-LTC, 2000.
- [14] A.C.Rose-Innes, E.H.Rhoderick: Introduction to Superconductivity (Pergamon Press, Oxford 1978)
- [15] V.L. Ginzburg, L.D. Landau, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 20, 1064 (1950), English translation in: L.D. Landau, Collected Papers, Pergamon Press, Oxford 1965.



- [16] ABRIKOSOV, Alexei Alexeyevich. On the magnetic properties of superconductors of the second group. *Sov. Phys. JETP*, v. 5, p. 1174-1182, dec., 1957.
- [17] Tinkham M. *Introduction to superconductivity* (2ed., MGH, 1996)(K)(T)(472s).
- [18] COOPER, L. N. Bound Electron Pairs in a Degenerate Fermi Gas. *Physical Review*, v. 104, n. 4, p. 1189-1190, 1956.
- [19] *Statistical Physics (PHY831): Part 4: Ginzburg-Landau theory, modeling of dynamics and scaling in complex systems*
- [20] Ginzburg, V. L., Landau, L. D., *On the Theory of Superconductivity*. In *Collected papers of L. D. Landau*. Ed. by D. ter Haar, Pergamon Press, New York 1965, 546–568
- [21] Alistair C. Rose-Innes and E.H. Rhoderick, *Introduction to Superconductivity* (Pergamon, Oxford, 1988)
- [22] Richardson, R. A., O. Pla, and Franco Nori. "Confirmation of the modified Bean model from simulations of superconducting vortices." *Physical review letters* 72.8 (1994): 1268.
- [23] Lee, C-S., et al. "Reducing vortex density in superconductors using the 'ratchet effect'." *Nature* 400.6742 (1999): 337-340.
- [24] Plourde, B. L. T., et al. "Influence of edge barriers on vortex dynamics in thin weak-pinning superconducting strips." *Physical Review B* 64.1 (2001): 014503.
- [25] Bean, Charles P. Magnetization of high-field superconductors. *Reviews of Modern Physics* 36.1 (1964): 31.
- [26] STANLEY, H. Eugene. *Introduction to phase transitions and critical phenomena*. London: Oxford University Press, 1971. Capítulo 5.
- [27] FR OHLICH, H. Theory of the superconducting state.I.The ground state of the absolute zero of temperature. *Phys. Rev.*, v. 79, p. 845-856, sep., 1950.
- [28] GINZBURG, Vitaly Lazarevich; LANDAU, Lev Davidovich. On the theory of superconductivity. *Sov. Phys. JETP*, v. 20, p. 1064-1086, nov., 1950
- [29] ALAN F. Beardon – *The geometry of discret groups* – Springer Verlag, 1983
- [30] BONETE, I. P. *As Geometrias não-euclidianas em cursos de licenciatura: algumas experiências*. Dissertação de Mestrado. UNICENTRO/UNICAMP, 2000.
- [31] GREENBERG, M. J. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. New York: W.H. Freeman and Company, 1990.
- [32] BARBOSA, J. L. M. *Geometria Hiperbólica*. 1. Ed. – Rio de Janeiro: IMPA, 1995.
- [33] ROCHA L. F. C.– *Introdução à Geometria Hiperbólica Plana* – 16. Colóquio Bras.de Mat., 1987

- [34] COUTINHO, L. Convite às geometrias não euclidianas. 2. Ed. – Rio de Janeiro: Interciência, 2001.
- [35] KRAUSE, Eugene F. Taxicab geometry: An adventure in non-Euclidean geometry. Courier Corporation, 2012.
- [36] EUCLIDES, Os elementos; tradução e introdução de Irineu Bicudo. 1. Ed. – São Paulo: UNESP, 2009.
- [37] Hilbert, David – Fundamentos de la geometría – Texto Universitarios, 5; Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 1991.
- [38] CARMO, Manfredo P. do. Geometrias Não-Euclidianas . In: Matemática Universitária; no 6.SBM
- [39] CANNON, James W., et al. "Hyperbolic geometry." *Flavors of geometry* 31 (1997): 59-115.
- [40] GRAY, Jeremy J. János Bolyai, non-euclidean geometry, and the nature of space. Vol. 1. Burndy Library MIT Press, 2004.
- [41] Lobachevsky, I. N. 2012. Lobachevsky Geometry and Modern Nonlinear Problems. Birkhäuser Basel, Springer International Publishing Switzerland, 2012. VIII, 310.
- [42] Stillwell, John. Sources of hyperbolic geometry. No. 10. American Mathematical Soc., 1996.
- [43] Eisenhart, Luther Pfahler. Riemannian geometry. Princeton university press, 1997.
- [44] Roberto Bonola, Non-Euclidean geometry: a critical and historical study of its development, Verlag, 1992.
- [45] BARKER, Stephen F. Filosofia da Matemática . Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1969.
- [47] Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie. With supplementary material by Paul Bernays. Teubner Studienbucher Mathematik, B. G. Teubner, Stuttgart, 1987; English translation Foundations o Geometry, Second edition. Translated from the tenth German edition by Leo Unger, Open Court, LaSalle, IL, 1971.
- [48] Aminov, Yu. A., Isometric immersions of domains of n-dimensional Lobachevskii space into Euclidean spaces with a flat normal connection. A gauge field model (Russian). *Mat. Sb. (N.S.)* 137(179) (1988), no. 3, 275–299; English translation in *Math. USSR-Sb.* 65 (1990), no. 2, 279 303.
- [49] Popov, Andrey. "Foundations of Lobachevsky geometry: axiomatics, models, images in Euclidean space." *Lobachevsky Geometry and Modern Nonlinear Problems*. Springer International Publishing, 2014. 15-59.
- [50] Henry Poincaré – Ciência e Hipótese – Editora da UnB, 1996.

- [51] D. Ebert, A.V. Tyukov, V.Ch. Zhukovsky, Dynamical Symmetry Breaking in Hyperbolic Space and in Extra Dimensions, in: Proc. of the Conference "Gauge Fields. Yesterday, Today,
- [52] ARFKEN., G. B.; WEBER., H. J. Física Matemática: Métodos Matemáticos para Engenharia e Física. 6a. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- [53] N.Straumann. Gauge principle and QED. Acta Phys. Polon. V1 12 Sep 2005.
- [54] T. Damour et. al. Nonsymmetric gravity theories: Inconsistencies and a cure Phys. Rev. D, 47: 1541, 1993
- [55] Walecka, D. J. Introduction to general relativity. Word Scientific Publishing. 2017.
- [56] Ovsyuk, E. M. "Spin 1 field in the Lobachevsky space  $H_3$ : horospherical coordinates, exact solutions." arXiv preprint arXiv:1205.3443 (2012).