

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE FÍSICA

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE FEIXES NÃO DIFRATANTES POSSUINDO MOMENTO  
ANGULAR ORBITAL

*Willamys Cristiano Soares Silva*

*Dissertação de mestrado apresentada ao Ins-  
tituto de Física da Universidade Federal de  
Alagoas, para obtenção do Título de Mestre em  
Física Básica*

ORIENTADOR: *Prof. Dr. Jandir Miguel Hickmann*

CO-ORIENTADOR: *Prof. Dr. Dilson Pereira Caetano*

Maceió, Alagoas

2006



**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE  
TESE DE MESTRADO**

***"Representação geométrica de feixes não difratantes  
Possuindo momento angular orbital"***

***por***

***Willamys Cristiano Soares Silva***

A Banca Examinadora composta pelos professores Jandir Miguel Hickmann (orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Marcio André Rodrigues Cavalcanti de Alencar, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas e Pablo Vaveliuk do Departamento de Física da Universidade Estadual de Feira de Santana, consideram o candidato aprovado com grau "A".

Maceió, 29 de agosto de 2006

Prof. Jandir Miguel Hickmann

Prof. Márcio André Rodrigues Cavalcanti de Alencar

Prof. Pablo Vaveliuk

## **A onda**

a onda anda  
aonde anda  
a onda?  
a onda ainda  
ainda onda  
ainda anda  
aonde?  
aonde?  
a onda a onda

Manuel Bandeira

*Aos meus filhos Cauã e Rafael.*

# Agradecimentos

- Agradeço ao Professor Jandir M. Hickmann pela orientação e confiança que sempre depositou em mim.
- Ao professor Dilson P. Caetano cuja co-orientação foi muito importante para esse trabalho.
- Aos meus colegas do LOQNL que proporcionam um ambiente alegre e dinâmico no processo de formação.
- À minha amiga Luciana Telles pelo apoio e incansável encorajamento.
- Aos professores, funcionários e alunos do Instituto de Física da UFAL.
- A todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente para minha formação acadêmica e social.
- À CAPES pelo apoio financeiro.

# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Introdução Geral</b>	<b>vii</b>
<b>1 Momento angular da luz</b>	<b>6</b>
1.1 Introdução . . . . .	6
1.2 Equações de Maxwell e Potenciais do campo eletromagnético . . . . .	7
1.3 Momento angular intrínseco e orbital da luz . . . . .	9
1.3.1 Momento angular intrínseco . . . . .	11
1.3.2 Representação do momento angular intrínseco . . . . .	13
1.3.3 Momento angular orbital . . . . .	21
1.4 Conclusão . . . . .	30
<b>2 Feixes Bessel</b>	<b>32</b>
2.1 Introdução . . . . .	32
2.2 Feixes não difratantes . . . . .	33
2.2.1 Solução da equação de Helmholtz . . . . .	33
2.2.2 Representação de feixes Bessel através do espectro angular . . . . .	40
2.3 Momento angular orbital dos feixes Bessel . . . . .	44
2.4 Geração de feixes Bessel . . . . .	47

2.5	Conclusão . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Representação geométrica do momento angular orbital em termos de feixes não difratantes</b>	<b>54</b>
3.1	Introdução . . . . .	54
3.2	Decomposição dos feixes Bessel de alta ordem . . . . .	55
3.3	Experimento . . . . .	65
3.4	Conclusão . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Conclusão geral</b>	<b>74</b>
	<b>Trabalhos publicados</b>	<b>79</b>

# Lista de Figuras

1.1	Decomposição de vários estados de polarização. . . . .	16
1.2	Transformações dos estados de polarização da luz. . . . .	18
1.3	Esfera de Poincaré. . . . .	19
1.4	Perfis de intensidade dos feixes Laguerre-Gauss: <i>a)</i> $LG_2^1$ e <i>b)</i> $LG_3^1$ . . . . .	25
1.5	Perfis de intensidade dos modos Hermite-Gauss: <i>a)</i> $HG_{10}$ , <i>b)</i> $HG_{01}$ , <i>c)</i> $HG_{11}$ , <i>d)</i> $HG_{21}$ , <i>e)</i> $HG_{12}$ e <i>f)</i> $HG_{22}$ . . . . .	27
1.6	representação gráfica da decomposição dos modos: <i>a)</i> $LG_0^{\pm 1}$ nos modos $HG_{10}$ e $HG_{10}$ ; <i>b)</i> $HG_{+45^\circ}$ , quando a diferença de fase entre os modos $HG_{10}$ e $HG_{10}$ é 0 e <i>c)</i> $HG_{-45^\circ}$ , quando a diferença de fase entre os modos $HG_{10}$ e $HG_{10}$ é $\pi$ . . . . .	28
1.7	Esfera de modos de primeira ordem. . . . .	29
1.8	Conversores de modos. . . . .	30
2.1	Perfil de intensidade para o feixe Bessel de ordem zero. . . . .	37
2.2	Perfil transversal dos feixes Bessel. <i>a)</i> Para $l = 1$ e <i>b)</i> $l = 4$ . . . . .	38
2.3	Visualização de <i>vórtices ópticos</i> . Este padrão de interferência é característico de um feixe que possui uma carga topológica igual a 1. . . . .	39
2.4	Visualização de <i>vórtices ópticos</i> . Este padrão de interferência é característico de um feixe que possui uma carga topológica igual a 2. . . . .	39
2.5	Espectro do feixe Bessel. A transformada de Fourier do Feixe Bessel é um anel no espaço $k$ . . . . .	44



2.6	Hologramas gerados no computador para preparação de feixes Bessel; Feixes Bessel com a) $l = 1$ e b) $l = 4$ . . . . .	49
2.7	Holograma gerados quando $\gamma = 0$ . a) Para $l = 1$ e b) para $l = 4$ . . . . .	50
2.8	Aparato experimental. $SF$ é um filtro espacial. $M_1, M_2, M_3$ são espelhos. $BS_1$ e $BS_2$ são divisores de feixes 50/50. . . . .	51
2.9	Medida experimental do perfil de intensidade para um feixe Bessel de primeira ordem. . . . .	52
2.10	Padrão de interferência entre um feixe Bessel de primeira ordem e uma onda plana . . . . .	53
3.1	Modo Hermite-Bessel $HB_{10}$ : a) amplitude e b) perfil transversal. . . . .	57
3.2	Modo Hermite-Bessel $HB_{01}$ : a) amplitude e b) perfil transversal de intensidade. . . . .	57
3.3	Representação gráfica da decomposição do feixe Bessel de primeira ordem. . . . .	58
3.4	Perfil transversal de intensidade dos feixes Hermite-Bessel: a) $HB_{+45^\circ}$ e b) $HB_{-45^\circ}$ . . . . .	58
3.5	Amplitude do espectro angular dos feixes Hermite-Bessel: a) $HB_{10}$ e b) $HB_{01}$ . . . . .	60
3.6	Padrão de interferência entre o feixe $HB_{10}$ e onda uma plana. . . . .	63
3.7	Distribuição de amplitude do feixe $HB_{10}$ ao longo da coordenada $x$ . . . . .	63
3.8	Esfera para feixes Bessel e Hermite-Bessel. Esta esfera mostra uma representação geométrica do momento angular orbital em termos de feixes não difratantes. . . . .	65
3.9	Aparato experimental. $SF$ é um filtro espacial. $M_1, M_2, M_3$ são espelhos. $BS_1$ e $BS_2$ são divisores de feixes 50/50. . . . .	66
3.10	Perfil transversal de intensidade medido nas portas de saída do interferômetro $DEFG$ : a) feixe $HB_{10}$ e b) feixe $HB_{01}$ . . . . .	68

- 
- 3.11 Perfil transversal de intensidade dos feixes Hermite-Bessel. Os perfis dos feixes giram quando giramos a placa de vidro, que é colocada no braço  $EF$  do interferômetro  $DEFG$ . . . . . 69
- 3.12 Padrão de interferência entre um feixe Hermite-Bessel e uma onda plana. . . 69
- 3.13 Distribuição de intensidade do feixe  $HB_{10}$  ao longo da coordenada  $x$ . A linha pontilhada azul corresponde à distribuição teórica do feixe e a linha preta corresponde à distribuição experimental. . . . . 70
- 3.14 Perfil transversal de intensidade do feixe Bessel de primeira ordem depois de passar pelo par de lentes cilíndricas. . . . . 72
- 3.15 Padrão de interferência do feixe Bessel depois de passar pelas lentes cilíndricas. . . . . 72

# Resumo

Neste trabalho, desenvolvemos uma representação geométrica para estados de momento angular orbital da luz, em termos de feixes não difratantes, chamada de *esfera de feixes Bessel e Hermite-Bessel*. Esta representação é análoga à esfera de Poincaré, que representa os estados de polarização da luz, e a esfera de modos de primeira ordem, que representa os estados de momento angular orbital da luz, em termos dos feixes Laguerre-Gauss e Hermite-Gauss. Este resultado foi obtido através do estudo da decomposição dos feixes Bessel em termos de uma nova classe de feixes, chamados de *feixes Hermite-Bessel*, que são soluções da equação de Helmholtz em coordenadas Cartesianas e não possuem momento angular orbital. Para feixes de ordem 1, verificamos que os feixes Hermite-Bessel são feixes não difratantes, pois podem ser escritos como uma combinação linear de feixes Bessel e seu espectro angular corresponde ao espectro angular de um feixe não difratante. Nossos resultados teóricos foram comprovados experimentalmente, onde mostramos a decomposição de um feixe Bessel de ordem 1 em termos dos feixes Hermite-Bessel. Por fim, mostramos que é possível realizarmos uma transformação unitária na esfera de feixes Bessel e Hermite-Bessel utilizando um par de lentes cilíndricas, transformando um estado inicial de momento angular orbital, descrito por um feixe Bessel de ordem 1, em um estado descrito por um feixe Bessel de ordem  $-1$ .

# Abstract

In this work, we developed a geometric representation for orbital angular momentum states of light in terms of nondiffracting beams, so-called *sphere of Bessel and Hermite-Bessel beams*. This representation is analogous to the Poincare sphere, which represents polarization states of light, and the sphere of first-order modes, which represents orbital angular momentum states of light in terms of Laguerre-Gauss and Hermite-Gauss beams. This result was obtained by studying the decomposition of Bessel beams in terms of a new class of beams, so-called *Hermite-Bessel beams*, which are solutions of the Helmholtz equation in Cartesian coordinates and do not possess orbital angular momentum. For first-order beams, we verify that Hermite-Bessel beams are nondiffracting beams, since they can be written as a linear combination of Bessel beams and their angular spectrum corresponds to a angular spectrum of a nondiffracting beam. Our theoretical results were experimentally demonstrated showed the decomposition of a Bessel beam of order 1 in terms of Hermite-Bessel beams. Finally, we showed that it is possible to apply an unitary transformation in the sphere of Bessel and Hermite-Bessel beams using a pair of cylindrical lenses, which transforms an initial state of orbital angular momentum, described by a Bessel beam of order 1, in a state described by a Bessel beam of order  $-1$ .

# Introdução Geral

O estudo da luz desempenhou um papel fundamental durante o século *XX* no desenvolvimento de novas teorias físicas. Seja teoricamente ou experimentalmente, o estudo das ondas eletromagnéticas sempre contribuiu para a expansão das fronteiras da ciência. Com a teoria eletromagnética de Maxwell foi possível explicar muitos fenômenos, em particular demonstrou-se que uma onda eletromagnética transporta energia, momento linear e momento angular [1].

O momento angular da luz tem duas componentes. A primeira está associada ao estado de polarização do campo elétrico, correspondendo ao momento angular intrínseco. Os estados do momento angular intrínseco correspondem à polarização circular no sentido horário e à polarização circular no sentido anti-horário. Estes estados podem ser decompostos em estados de polarização linear. Por exemplo, um feixe de luz circularmente polarizado pode ser escrito como uma superposição de feixes linearmente polarizados com uma diferença de fase de  $\pi/2$ . A segunda componente está associada à distribuição transversal do campo elétrico e corresponde ao momento angular orbital.

Quando a luz interage com a matéria, podemos observar efeitos da transferência de momento angular da luz para matéria. Em 1909, Poynting [2] descreveu um equivalente mecânico para o momento angular intrínseco. Um feixe de luz circularmente polarizado deveria exercer um torque ao atravessar uma placa birrefringente e que a razão entre o momento angular e o momento linear era igual a  $\lambda/2\pi$ , onde  $\lambda$  é o comprimento de onda

da radiação. Baseado nessa idéia, em 1936, Beth [3] observou pela primeira vez a presença do momento angular intrínseco de um feixe de luz. Em seu experimento, um feixe de luz circularmente polarizado no sentido horário passa por uma placa birrefringente de  $\lambda/2$ , suspensa por uma fibra de quartzo. A placa muda à polarização do feixe para circular no sentido anti-horário, e como consequência, a placa birrefringente sofre um torque, devido à transferência do momento angular intrínseco.

Em 1992, Allen e colaboradores, demonstraram que o momento angular orbital é uma consequência de feixes com uma distribuição de amplitude que possui uma fase azimutal da forma  $\exp(il\phi)$ , onde  $\phi$  é a coordenada azimutal e  $l$  é um número inteiro. Este resultado é independente dos estados de polarização e é típico para feixes com uma frente de onda helicoidal [4]. A presença deste tipo de fase faz com que o feixe apresente uma singularidade na fase, ou seja, a fase é indeterminada, portanto, a intensidade do feixe deve ser nula no centro. Na óptica tais singularidades são conhecidas como *vórtices ópticos* [5,6].

Para feixes com uma frente de onda helicoidal, o vetor de Poynting tem uma componente azimutal, que produz um momento angular orbital na direção de propagação do feixe [7,8]. Usualmente, feixes de luz possuindo momento angular orbital são descritos em termos de modos Laguerre-Gauss ( $LG_p^l$ ). Estes modos são soluções da equação paraxial em coordenadas cilíndricas. É possível decompor modos Laguerre-Gauss em termos de modos Hermite-Gauss ( $HG_{nm}$ ) de forma análoga a que é feita na decomposição do momento angular intrínseco. Por exemplo, um feixe  $LG_0^1$  pode ser escrito como uma superposição de feixes  $HG_{10}$  e  $HG_{01}$  com uma diferença de fase de  $\pi/2$ . Padgett e Courtial [9] propõem uma representação geométrica equivalente à esfera de Poincaré para feixes possuindo momento angular orbital, baseados na semelhança entre a decomposição do momento angular intrínseco e orbital.

Tradicionalmente, define-se um feixe de luz como um cone de luz estreito composto

de raios quase paralelos. O tipo mais comum de feixe de luz é o feixe gaussiano, cujo perfil transversal de intensidade é dado por uma função gaussiana. Em geral, qualquer feixe está sujeito ao efeito de difração, que modifica o perfil transversal do feixe ao longo da propagação livre. Para feixes gaussianos, a difração alarga o perfil transversal de intensidade do feixe [10]. A difração pode ser um fator limitante para aplicações onde se requer que um feixe mantenha o seu perfil transversal, como por exemplo, imagens ópticas [11], pinças ópticas [12], etc.. Devido às limitações impostas pela difração, existe um grande interesse no desenvolvimento de técnicas que possibilitem a geração de feixes que não sofram os efeitos da difração.

Em 1987, Durnin [13] impressionou a comunidade científica da área, obtendo uma solução para a equação de onda, cujo perfil transversal do feixe era dado por uma função de Bessel. Tal solução, hoje conhecida como feixe Bessel, não sofre modificações transversais devido à difração, mantendo seu perfil transversal ao longo da propagação.

Um feixe Bessel é gerado por uma superposição de ondas planas cujos vetores de onda se localizam na superfície de um cone, onde o ângulo de abertura desse cone é igual a  $\theta$ . Durnin et al. [14] mostraram que é possível gerar um feixe Bessel utilizando aberturas finitas. Neste caso, foi mostrado que os feixes Bessel são capazes de se propagar por longas distâncias mantendo o perfil transversal aproximadamente inalterado. Estas distâncias dependem dos parâmetros de preparação do feixe.

Além de possuírem propriedades não difratantes, os feixes Bessel de alta ordem transportam momento angular orbital [15]. Entre as aplicações dos feixes Bessel, uma que vem causando grande impacto é o uso dos feixes Bessel como pinças ópticas [16–18], onde é possível aprisionar e mover pequenas partículas. O uso de feixes gaussianos para essa finalidade é limitado pelo efeito da difração.

É possível decompor os feixes Bessel em uma nova classe de feixes não difratantes de forma equivalente a decomposição dos feixes Lagurre-Gauss em termos dos feixes Hermite-

Gauss [19, 20]. Com o desígnio de compreender a teoria envolvida e os resultados desse trabalho, apresentaremos esta dissertação em três capítulos. No capítulo 1, discutiremos o momento angular transportado pela luz. Veremos que os estados de polarização da luz e os estados de momento angular orbital de um feixe na aproximação paraxial, possuem representações geométricas equivalentes.

No capítulo 2, faremos um estudo dos feixes Bessel e algumas de suas propriedades. Apresentaremos um experimento para geração de um feixe Bessel de primeira ordem, e caracterização do seu estado de momento angular orbital.

O resultado principal desta dissertação é apresentado no capítulo 3. Inicialmente, estudaremos a decomposição de feixes Bessel de alta ordem em uma nova família de feixes, que chamaremos de feixes Hermite-Bessel. Com base nesta decomposição, construiremos uma representação geométrica para os estados de momento angular orbital em termos de feixes não difratantes. Por fim, demonstraremos experimentalmente esta decomposição, e um exemplo de uma transformação unitária dentro da nossa representação geométrica.



# Capítulo 1

## Momento angular da luz

### 1.1 Introdução

Neste capítulo, discutiremos a teoria do momento angular transportado por um feixe de luz. O momento angular da luz tem duas componentes: o momento angular intrínseco devido aos estados de polarização; e o momento angular orbital (extrínseco) que está relacionado com a distribuição espacial do campo eletromagnético.

Iniciaremos o estudo partindo das equações de Maxwell, as quais descrevem os campos eletromagnéticos. Nosso objetivo será o de deduzir as expressões para o momento angular intrínseco e orbital. Em seguida, mostraremos que um feixe de luz circularmente polarizado possui momento angular intrínseco de  $\pm\hbar$  por fóton. Apresentaremos a representação matricial de Jones para feixes de luz polarizados e mostraremos uma representação geométrica para descrever os estados de polarização da luz, conhecida como esfera de Poincaré. Por fim, mostraremos que um feixe de luz, com uma dependência na fase azimutal do tipo  $\exp(il\phi)$ , com  $l$  inteiro, possui momento angular orbital de  $l\hbar$  por fóton. Utilizando a aproximação paraxial, veremos que modos Laguerre-Gauss possuem momento angular orbital bem definido e que, para os modos de ordem 1, é possível construir uma representação geométrica, análoga à esfera de Poincaré, para os estados de

momento angular orbital.

## 1.2 Equações de Maxwell e Potenciais do campo eletromagnético

Na eletrodinâmica clássica, o comportamento do campo eletromagnético é descrito pelas equações de Maxwell [1]. Essas equações formam um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem acopladas para os vetores campo elétrico e campo magnético. No Sistema Internacional de Unidades as equações de Maxwell no vácuo podem ser escritas como:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.4)$$

onde  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  são os vetores campo elétrico e magnético, respectivamente.  $\mathbf{J}$  é o vetor densidade de corrente,  $\rho$  a densidade de cargas,  $\varepsilon_0$  e  $\mu_0$  são a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do vácuo.

Para evitar as complicações inerentes ao uso das equações de Maxwell para os vetores campo elétrico e campo magnético, é conveniente introduzirmos os conceitos de potenciais escalar e vetorial, para obtermos um conjunto de equações mais simples. Usaremos  $\phi$  para denominar o potencial escalar e  $\mathbf{A}$  para o potencial vetor. Sabendo que o divergente do rotacional de qualquer campo vetorial é nulo, neste caso podemos definir a indução magnética em função do potencial vetor como:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.5)$$

Usando esta expressão para  $\mathbf{B}$ , a equação (1.1) pode ser escrita como:

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.6)$$

O termo dentro dos parênteses da equação (1.6) pode ser escrito como o gradiente de uma função escalar, o potencial escalar  $\phi$ , logo:

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (1.7)$$

Substituindo as equações (1.5) e (1.7) na equação (1.2), teremos:

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{J}. \quad (1.8)$$

Usando a identidade  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ , obtemos:

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \varepsilon_0 \mu_0 \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (1.9)$$

A substituição da equação (1.7) na equação (1.3) fornece a expressão:

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \left[ -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = \rho, \quad (1.10)$$

Portanto, temos que:

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (1.11)$$

Assim, reduzimos as quatro equações de Maxwell às equações (1.9) e (1.11), que no entanto, ainda permanecem acopladas. Podemos desacoplar estas duas equações usando o calibre de Lorentz, que pode ser escrito como:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (1.12)$$

onde,  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  é a velocidade da luz no vácuo. Com isso as equações (1.9) e (1.11) podem ser escritas como:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.13)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (1.14)$$

As equações (1.13) e (1.14) juntamente com a equação (1.12) formam um conjunto completo de equações equivalentes às equações de Maxwell no vácuo.

### 1.3 Momento angular intrínseco e orbital da luz

Nesta secção, estudaremos o momento angular total do campo eletromagnético. Mostraremos que o momento angular pode ser escrito como uma soma das contribuições intrínseca e orbital.

No vácuo, a densidade de momento linear  $\mathbf{p}$  é dada pelo produto vetorial entre o campo elétrico e a indução magnética [1], ou seja:

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (1.15)$$

A densidade de momento angular  $\mathbf{j}_m$  está associada com a densidade de momento linear através da relação:

$$\mathbf{j}_m = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \epsilon_0 \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (1.16)$$

O momento angular total é obtido integrando a densidade de momento angular em todo espaço. Utilizando a definição do potencial vetor  $\mathbf{A}$ , podemos escrever:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \sum_{j=1}^3 (E_j \nabla A_j) - (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{A}, \quad (1.17)$$

onde usamos a identidade  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$  e  $j$  representa as componentes

$x$ ,  $y$  e  $z$  dos vetores. Substituindo a equação (1.17) na equação (1.16), obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_m &= \varepsilon_0 \mathbf{r} \times \left[ \sum_{j=1}^3 (E_j \nabla A_j) - (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{A} \right] \\ &= \varepsilon_0 \left\{ \sum_{j=1}^3 [E_j (\mathbf{r} \times \nabla) A_j] - \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{A} \right\}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Utilizando as seguintes identidades vetoriais:

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \sum_{j=1}^3 [\nabla_j (E_j \mathbf{r} \times \mathbf{A})] - \mathbf{r} \times \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{A} \times (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{r} \quad (1.19)$$

$$(\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{E}. \quad (1.20)$$

Das equações de Maxwell na ausência de cargas livres, temos que  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , logo o segundo termo do lado direito da equação (1.19) é nulo.

Assim, podemos expressar a densidade de momento angular como:

$$\mathbf{j}_m = \varepsilon_0 \left\{ \sum_{j=1}^3 [E_j (\mathbf{r} \times \nabla) A_j] - \sum_{j=1}^3 [\nabla_j (E_j \mathbf{r} \times \mathbf{A})] + \mathbf{E} \times \mathbf{A} \right\}. \quad (1.21)$$

Esta equação foi obtida substituindo as equações (1.19) e (1.20) na equação (1.18). O momento angular total é obtido integrando a densidade de momento angular em todo espaço, ou seja:

$$\mathbf{J}_m = \varepsilon_0 \left\{ \sum_{j=1}^3 \int [E_j (\mathbf{r} \times \nabla) A_j] dv - \sum_{j=1}^3 \int [\nabla_j (E_j \mathbf{r} \times \mathbf{A})] dv + \int (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) dv \right\}. \quad (1.22)$$

Aplicando o teorema da divergência a segunda integral desta equação, obtemos:

$$\int [\nabla_j (E_j \mathbf{r} \times \mathbf{A})] dv = \oint_s E_j (\mathbf{r} \times \mathbf{A}) ds_j. \quad (1.23)$$

Se supormos que o campo elétrico se anula quando  $r \rightarrow \infty$ , a integral de superfície na

equação anterior é nula. Finalmente o momento angular total do campo eletromagnético é dado por:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_m &= \varepsilon_0 \int (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) dv + \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \int [E_j (\mathbf{r} \times \nabla) A_j] dv \\ \mathbf{J}_m &= \mathbf{S} + \mathbf{L},\end{aligned}\tag{1.24}$$

onde o termo  $\mathbf{S} = \varepsilon_0 \int (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) dv$  pode ser associado ao momento angular intrínseco e o termo  $\mathbf{L} = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \int [E_j (\mathbf{r} \times \nabla) A_j] dv$  pode ser associado ao momento angular orbital. A justificativa para tal distinção entre o momento angular intrínseco e orbital na equação (1.24), é devida simplesmente ao fato de que  $\mathbf{S}$  é independente da posição  $\mathbf{r}$ , enquanto  $\mathbf{L}$  depende de  $\mathbf{r}$ . Nas próximas secções discutiremos com mais cuidado estes dois casos e ficará mais clara a distinção.

### 1.3.1 Momento angular intrínseco

Considere uma onda circularmente polarizada que se propaga no vácuo ao longo da direção  $z$ . O vetor campo elétrico é expresso da seguinte forma:

$$\mathbf{E}_{\mp} = \hat{x}E_0 \cos(kz - \omega t) \mp \hat{y}E_0 \sin(kz - \omega t),\tag{1.25}$$

onde,  $E_0$  é a amplitude da onda,  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  são vetores unitários nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente,  $\omega$  é a frequência angular e  $k$  é o módulo do vetor de onda  $\mathbf{k}$ .  $\mathbf{E}_-$  representa uma onda circularmente polarizada no sentido horário e  $\mathbf{E}_+$  representa uma onda circularmente polarizada no sentido anti-horário. Admitindo a ausência de cargas e correntes elétricas no vácuo, o potencial escalar é nulo ( $\phi = 0$ ) e a expressão (1.7) para o campo elétrico pode ser reescrita como:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.\tag{1.26}$$

Assim, o potencial vetor  $\mathbf{A}$  é dado por:

$$\mathbf{A}_{\mp} = - \int \mathbf{E}_{\mp} dt = \hat{x} \frac{E_0}{\omega} \sin(kz - \omega t) \pm \hat{y} \frac{E_0}{\omega} \cos(kz - \omega t). \quad (1.27)$$

Desta forma, o momento angular intrínseco da onda é:

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 \int (\mathbf{E}_{\mp} \times \mathbf{A}_{\mp}) dv = \pm \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{\omega} \hat{z} \int dv. \quad (1.28)$$

O sentido do momento angular intrínseco depende dos estados de polarização, ou seja, se a onda é circularmente polarizada no sentido horário ou anti-horário. Note que quando a onda é polarizada linearmente o momento angular intrínseco é nulo, pois  $\mathbf{E} \times \mathbf{A} = 0$ .

A densidade de energia da onda é expressa por:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \\ u &= \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Substituindo a equação (1.27) na equação (1.5), obtemos:

$$\mathbf{B} = \pm \hat{x} \frac{E_0 k}{\omega} \sin(kz - \omega t) + \hat{y} \frac{E_0 k}{\omega} \cos(kz - \omega t). \quad (1.30)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{\mu_0} \frac{k^2 E_0^2}{\omega^2} \right) \\ u &= \varepsilon_0 E_0^2. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Calculando a relação entre o momento angular intrínseco da onda circularmente polarizada

e sua energia, encontramos:

$$\frac{(\mathbf{S})_z}{U} = \pm \frac{\int \frac{\epsilon_0 E_0^2}{\omega} dv}{\int \epsilon_0 E_0^2 dv} = \pm \frac{1}{\omega}. \quad (1.32)$$

Agora aplicando as equações (1.25) e (1.30) na expressão (1.15) para a densidade de momento linear da onda, obtemos:

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\epsilon_0 E_0^2 k}{\omega} \hat{z}. \quad (1.33)$$

Comparando o spin da onda circularmente polarizada com seu momento linear, encontramos:

$$\frac{(\mathbf{S})_z}{(\mathbf{P})_z} = \pm \frac{\int \frac{\epsilon_0 E_0^2}{\omega} dv}{\int \frac{\epsilon_0 E_0^2 k}{\omega} dv} = \pm \frac{1}{k}. \quad (1.34)$$

Os resultados obtidos nas equações (1.32) e (1.34) são os mesmos encontrados na mecânica quântica para a razão entre o spin do fóton ( $\pm\hbar$ ) e sua energia ( $\hbar\omega$ ) e a razão entre o spin do fóton e seu momento linear ( $\hbar k$ ). Esta predição teórica foi verificada experimentalmente por Beth [3] em 1936.

Portanto, podemos interpretar que uma onda circularmente polarizada no sentido horário ou anti-horário é constituída por fótons com spin bem definido de  $+\hbar$  ou  $-\hbar$ , ou seja, a onda circularmente polarizada no sentido horário (sentido anti-horário) tem seu vetor momento angular intrínseco paralelo (antiparalelo) ao vetor momento linear.

### 1.3.2 Representação do momento angular intrínseco

Na secção anterior, vimos que o momento angular intrínseco está associado aos estados de polarização. O estado de polarização da luz e a sua interação com componentes ópticos birrefringentes são bem descritos através das matrizes de Jones [21]. Nesta descrição,



o estado de polarização é representado por uma matriz (vetor de Jones) e os elementos da matriz são as amplitudes complexas das componentes do campo com polarizações ortogonais. Os componentes ópticos tais como polarizadores, retardadores de fase e etc., são representados por matrizes  $2 \times 2$  (matrizes de Jones).

Consideremos um campo com polarização arbitrária, dado por:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp i(kz - \omega t), \quad (1.35)$$

onde  $\mathbf{E}_0 = \hat{\mathbf{x}}E_{0x} + \hat{\mathbf{y}}E_{0y}$ , com  $E_{0x}$  e  $E_{0y}$  sendo amplitudes complexas, escritas na forma:

$$\begin{aligned} E_{0x} &= |E_{0x}| e^{-i\phi_x} \\ E_{0y} &= |E_{0y}| e^{-i\phi_y}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Usando a descrição em termos do vetor de Jones, temos:

$$\mathbf{E}_0 = \begin{bmatrix} |E_{0x}| e^{-i\phi_x} \\ |E_{0y}| e^{-i\phi_y} \end{bmatrix}. \quad (1.37)$$

A razão  $\frac{|E_{0y}|}{|E_{0x}|}$  e a diferença de fase  $\phi = \phi_y - \phi_x$  entre as componentes determinam o estado de polarização. A forma normalizada do vetor de Jones é obtida dividindo as componentes da matriz por  $\sqrt{|E_{0x}|^2 + |E_{0y}|^2}$ . Os estados de polarização horizontal e vertical são dados por:

$$\mathbf{E}_H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{E}_V = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.38)$$

Os vetores

$$\mathbf{E}_{+45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{E}_{-45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (1.39)$$

representam luz linearmente polarizada a  $+45^\circ$  e  $-45^\circ$ , isso ocorre quando as amplitudes

do campo são iguais e a diferença de fase é  $0$  e  $\pi$ , respectivamente. Agora, quando as diferenças de fase entre as amplitudes do campo são  $\pi/2$  e  $3\pi/2$ , teremos polarização circular no sentido horário e polarização circular no sentido anti-horário, respectivamente.

Na representação de Jones temos:

$$\mathbf{E}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{E}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad (1.40)$$

onde  $\mathbf{E}_R$  representa polarização circular no sentido horário e  $\mathbf{E}_L$  representa polarização circular no sentido anti-horário.

Um estado de polarização pode ser escrito como uma combinação linear de dois estados de polarização ortonormais, a Fig. 1.1 mostra esse resultado graficamente. Dois vetores são ortonormais se  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^* = 0$  e  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^* = 1$ , onde o asterisco representa o complexo conjugado. Na Fig. 1.1 são mostrados alguns estados de polarização escritos como uma combinação de polarização linear na horizontal e na vertical, por exemplo, luz circularmente polarizada pode ser decomposta em uma combinação linear de luz linearmente polarizada com uma diferença de fase de  $\pi/2$ .

Vejamos agora a representação da atuação de componentes ópticos birrefringentes nos estados de polarização. As transformações dos estados de polarização serão descritas através de transformações unitárias.

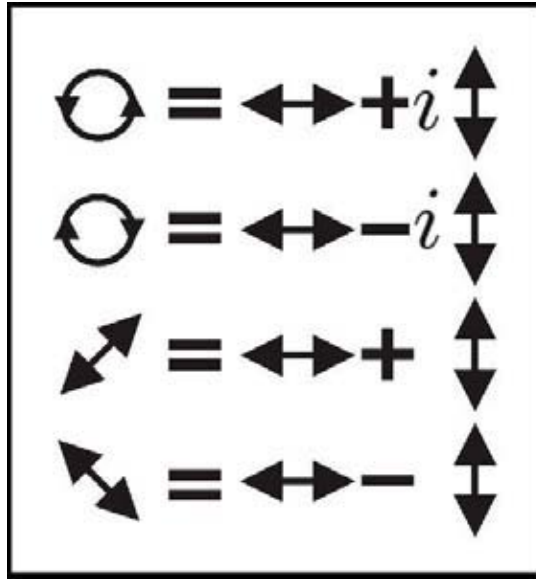


Figura 1.1: Decomposição de vários estados de polarização.

Considere uma onda polarizada, representada pelo vetor de Jones incidente  $\mathbf{E}_i$ , atravessando um elemento óptico. Na saída, obtemos um vetor de Jones  $\mathbf{E}_t$ , correspondendo à onda transmitida, a ação do elemento óptico foi transformar  $\mathbf{E}_i$  em  $\mathbf{E}_t$ . Essa transformação pode ser descrita matematicamente usando uma matriz  $2 \times 2$ , ou seja:

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{M}\mathbf{E}_i, \quad (1.41)$$

onde  $\mathbf{M}$  representa a matriz do elemento óptico. Na Tab. 1.1 são mostradas as matrizes de Jones para vários componentes ópticos.

A Fig. 1.2 mostra esquematicamente as transformações sofridas por alguns estados de polarização depois de passarem por certos elementos ópticos. Inicialmente, um feixe linearmente polarizado passa por uma placa de onda de  $\lambda/4$  com seu eixo rápido na direção horizontal. A placa transforma polarização linear em polarização circular. O feixe com polarização circular passa por uma placa de onda de  $\lambda/2$  e emerge dessa placa com a polarização circular no sentido contrário.

Tabela 1.1: Matrizes de Jones

Elemento óptico linear	matriz de Jones
Polarizador linear horizontal	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Polarizador linear vertical	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Polarizador linear a $+45^\circ$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
Polarizador linear a $-45^\circ$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
Placa de onda de $\lambda/4$ com o eixo rápido na horizontal	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$
Placa de onda de $\lambda/4$ com o eixo rápido na vertical	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$
Placa de onda de $\lambda/2$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

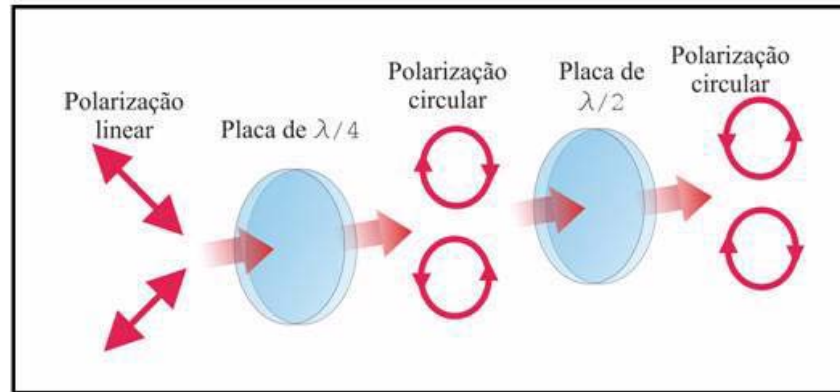


Figura 1.2: Transformações dos estados de polarização da luz.

Uma observação importante é que as matrizes de Jones não necessariamente comutam, ou seja, elas devem ser aplicadas na ordem adequada. Suponha que um feixe polarizado passe por uma seqüência de  $n$  elementos ópticos, representados por matrizes de Jones  $\mathbf{M}_1$ ,  $\mathbf{M}_2$ , ...,  $\mathbf{M}_n$ . Então, a onda transmitida é dada por:

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{M}_n \dots \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \mathbf{E}_i, \quad (1.42)$$

ou seja, devemos aplicar primeiro a matriz correspondente ao primeiro elemento óptico, seguida pela aplicação da matriz correspondente ao segundo elemento óptico, e assim por diante.

Utilizando as matrizes de Jones, as transformações sofridas pelo feixe da Fig. 1.2 seriam calculadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \mp i \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

onde o resultado encontrado na equação (1.43) é a descrição matemática das transfor-

mações dos estados de polarização mostradas na Fig. 1.2.

Uma representação geométrica equivalente à formulação de Jones para descrever os estados de polarização da luz é a superfície da esfera de Poincaré [10]. Na esfera de Poincaré cada estado de polarização é representado por um único ponto na superfície da esfera.

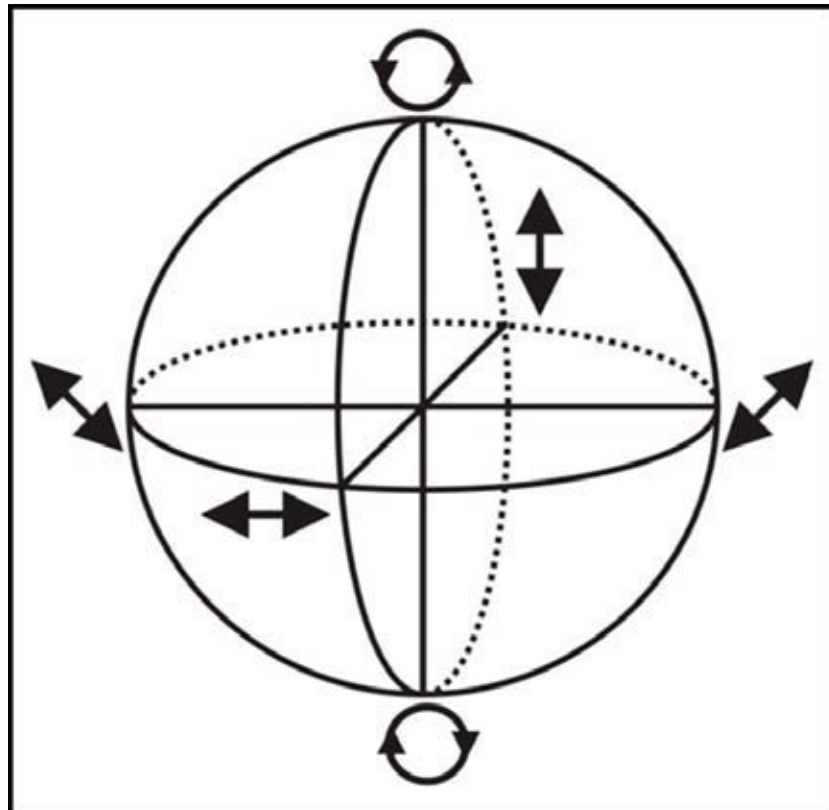


Figura 1.3: Esfera de Poincaré.

Os estados de polarização circular são representados pelos pólos norte e sul da esfera de Poincaré, com luz circularmente polarizada no sentido horário sendo representada pelo pólo sul e luz circularmente polarizada no sentido anti-horário pelo pólo norte, pontos no plano equatorial da esfera descrevem luz linearmente polarizada, como é mostrado na Fig. 1.3. Os estados de polarização ortogonais ocupam pontos diametralmente opostos na esfera. Os estados de polarização elíptica no sentido horário são representados por pontos

abaixo do plano equatorial e os estados de polarização elíptica no sentido anti-horário são representados por pontos acima do plano equatorial. Usualmente, qualquer estado de polarização da luz, pode ser descrito como uma superposição linear de luz circularmente polarizada no sentido horário e luz circularmente polarizada no sentido anti-horário, ou seja:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\theta,\phi} = \cos \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + \exp(i\phi) \sin \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, \quad (1.44)$$

que na esfera de Poincaré, corresponde a pontos na superfície com coordenadas angulares  $\theta$  e  $\phi$ , onde  $\theta$  é o ângulo polar e  $\phi$  é o ângulo azimutal. Por exemplo, luz linearmente polarizada é uma superposição linear de luz circularmente polarizada no sentido horário e anti-horário com amplitudes iguais, a diferença de fase entre as duas polarizações determina a orientação da polarização linear.

A esfera de Poincaré também pode ser usada para mostrar os efeitos de componentes ópticos no estado de polarização incidente. Os componentes ópticos agem na esfera de Poincaré transladando um ponto inicial na superfície da esfera, correspondendo a um dado estado de polarização inicial, para um ponto final, correspondendo a um estado de polarização final. Por exemplo, considerando luz polarizada linearmente na horizontal incidindo em uma placa de onda de  $\lambda/4$  com o eixo rápido fazendo um ângulo de  $+45^\circ$  com o eixo  $x$ , utilizando as matrizes de Jones, encontramos que luz circularmente polarizada no sentido anti-horário sai da placa de onda. Na esfera de Poincaré, Fig. 1.3, esta transformação é representada transladando um ponto do equador até o pólo norte da esfera. Semelhantemente, uma placa de onda de  $\lambda/2$  transforma luz circularmente polarizada no sentido anti-horário em luz circularmente polarizada no sentido horário, esta transformação é representada movendo-se um ponto no pólo norte até o pólo sul da esfera.

### 1.3.3 Momento angular orbital

Em 1992, Allen e colaboradores [4], demonstraram teoricamente que feixes de luz com uma estrutura de fase azimutal  $\exp(il\phi)$  possuem momento angular orbital de  $l\hbar$  por fóton ao longo da direção de propagação, onde  $l$  é o índice azimutal.

Admitindo que um feixe de luz monocromática tenha polarização linear e seja definido pelo seguinte potencial vetor:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}) \exp [i(kz - \omega t)] \hat{x}, \quad (1.45)$$

onde  $\hat{x}$  é o vetor unitário na direção do eixo  $x$ ,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  é o módulo do vetor de onda,  $\lambda$  é o comprimento de onda do feixe,  $\omega$  é a frequência angular e  $u(\mathbf{r})$  é uma função complexa que descreve a distribuição de amplitude do feixe, esta função é solução da equação paraxial. A aproximação paraxial é feita ignorando o termo  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  comparado com  $k \frac{\partial u}{\partial z}$ , e ignorando o termo  $\frac{\partial u}{\partial z}$  comparado com  $ku$  na equação de onda escalar. A equação paraxial é descrita por:

$$\nabla_t^2 u + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (1.46)$$

onde  $\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  é o Laplaciano transversal.

Adotando a representação do campo eletromagnético pelos potenciais escalar e vetorial, apresentada na seção 1.2 e admitindo a ausência de cargas e correntes elétrica no vácuo, podemos assim, usar calibre de Coulomb (o calibre de Coulomb é freqüentemente usado quando não existem fontes) que é dado por:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \implies \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial x} = 0, \quad (1.47)$$

onde  $\mathbf{A}$  satisfaz à equação de onda homogênea e a equação (1.7) para o campo elétrico fica reduzida à expressão (1.26).



Vamos agora calcular a densidade do momento angular total, dada pela equação (1.16). Visto que os campos são complexos, vamos calcular primeiro a parte real de  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ , ou seja:

$$\text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*) = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{B}^*). \quad (1.48)$$

Para um vetor potencial dado pela equação (1.45) as expressões para os campos elétrico e magnético são:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = i\omega u \exp[i(kz - \omega t)] \hat{x} \quad (1.49)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + iku \right] \exp[i(kz - \omega t)] \hat{y} - \frac{\partial u}{\partial y} \exp[i(kz - \omega t)] \hat{z}. \quad (1.50)$$

Portanto,

$$\mathbf{E}^* \times \mathbf{B} = -i\omega u^* \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{z} \right] + \omega k |u|^2 \hat{z}, \quad (1.51)$$

como  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ , então:

$$\mathbf{E}^* \times \mathbf{B} = -i\omega u^* \nabla u + \omega k |u|^2 \hat{z}, \quad (1.52)$$

equivalentemente

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B}^* = i\omega u \nabla u^* + \omega k |u|^2 \hat{z}. \quad (1.53)$$

Consequentemente, a média temporal da densidade de momento linear do campo eletromagnético é dada por:

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \text{Re}[\varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}^*] = \frac{\varepsilon_0}{2} [\mathbf{E}^* \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{B}^*] = \frac{i\omega\varepsilon_0}{2} (u \nabla u^* - u^* \nabla u) + \varepsilon_0 \omega k |u|^2 \hat{z}. \quad (1.54)$$

Note que este resultado é independente do sistema de coordenadas. Admitindo que a função complexa que descreve a distribuição de amplitude do feixe  $u$  seja escrita como:

$$u(r, \phi, z) = u_0(r, z) \exp(i\ell\phi), \quad (1.55)$$

sendo solução da equação paraxial em coordenadas cilíndricas, onde  $l$  é o índice azimutal. Note que, embora a equação (1.55) viole (1.47), isso não é preocupante dentro da faixa de validade da aproximação paraxial como foi notado por Lax et al. [22]. A aproximação paraxial é a solução de ordem zero das equações de Maxwell obtida pela expansão dos campos em series de potência.

Utilizando a aproximação paraxial podemos desprezar os termos com  $\frac{\partial u}{\partial z}$  comparados com  $ku$  na média temporal da densidade de momento linear. Por conseguinte, a densidade de momento linear é expressa como:

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \frac{i\omega\varepsilon_0}{2} \left( u_0 \frac{\partial u_0^*}{\partial r} - u_0^* \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) \hat{r} + \frac{l\varepsilon_0\omega}{r} |u_0|^2 \hat{\phi} + \varepsilon_0\omega k |u_0|^2 \hat{z}, \quad (1.56)$$

onde  $\hat{r}$ ,  $\hat{\phi}$  e  $\hat{z}$  são vetores unitários em coordenadas cilíndricas. Na equação acima podemos notar que a média temporal do vetor de Poynting que é dado por  $c^2 \langle \mathbf{p} \rangle$ , descreve uma trajetória na forma de um helicóide ao longo da direção de propagação, onde a componente  $\hat{r}$  está relacionada com a dispersão do feixe, a componente  $\hat{\phi}$  é responsável pelo surgimento do momento angular orbital na direção de propagação e a componente  $\hat{z}$  relaciona-se com o momento linear na direção  $z$ .

Calculando a média temporal da densidade de momento angular, temos:

$$\langle \mathbf{l} \rangle = -\frac{l\varepsilon_0\omega}{r} z |u_0|^2 \hat{r} + \frac{i\omega\varepsilon_0}{2} \left[ \left( u_0 \frac{\partial u_0^*}{\partial r} - u_0^* \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) z + 2ikr |u_0|^2 \right] \hat{\phi} + l\varepsilon_0\omega |u_0|^2 \hat{z}. \quad (1.57)$$

Integrando  $\langle \mathbf{l} \rangle$  e  $\langle \mathbf{p} \rangle$  no perfil do feixe, constatamos que restará apenas a componente paralela ao sentido de propagação, pois as outras componentes são simétricas em relação ao eixo  $z$ . Consequentemente, o mesmo acontecerá integrando no volume do feixe.

Sabendo que a densidade de energia do feixe é  $u = cp_z = \varepsilon_0\omega^2 |u_0|^2$ , isto é, a velocidade da luz multiplicada pela densidade de momento linear [23], então o momento angular

orbital por unidade de energia do feixe, é dado por:

$$\frac{\mathbf{L}_z}{U} = \frac{\int \mathbf{l} dv}{\int u dv} = \frac{\int l \varepsilon_0 \omega |u_0|^2 dv}{\int \varepsilon_0 \omega^2 |u_0|^2 dv} = \frac{l}{\omega}. \quad (1.58)$$

A relação entre o momento angular orbital e o momento linear é:

$$\frac{\mathbf{L}_z}{\mathbf{P}_z} = \frac{\int \mathbf{l} dv}{\int \mathbf{p} dv} = \frac{\int l \varepsilon_0 \omega |u_0|^2 dv}{\int \varepsilon_0 \omega k |u_0|^2 dv} = \frac{l}{k} = l \frac{\lambda}{2\pi}. \quad (1.59)$$

Como o feixe é polarizado linearmente, então o momento angular não poder ser devido ao spin. Evidentemente, a equação (1.58) é equivalente à relação entre o momento angular de spin do fóton e sua energia,  $\pm 1/\omega$ , para um feixe de luz polarizado circularmente e aparece devido ao termo de fase azimutal. A analogia entre óptica paraxial e mecânica quântica sugere que feixes com variação de fase de  $\exp(il\phi)$  sejam auto-modos do operador momento angular orbital  $\mathbf{L}_z$ . Assim sendo, um feixe com dependência azimutal de  $\exp(il\phi)$  possui momento angular orbital de  $l\hbar$  por fóton.

A maior parte da literatura a respeito de feixes com momento angular orbital tem sido dedicada aos modos Laguerre-Gauss (*LG*). Os modos  $LG_p^l$  são autofunções da equação de onda na aproximação paraxial em coordenadas cilíndricas [24], onde  $p$  e  $l$  são inteiros que definem a ordem dos modos que é dada por  $N = 2p + |l|$ .  $l$  é o número de  $2\pi$  ciclos da fase na direção azimutal ao redor do modo e  $(p + 1)$  dá o número de anéis através da distribuição radial do campo. Na Fig. 1.4 é mostrado os perfis de intensidade para alguns modos *LG*.

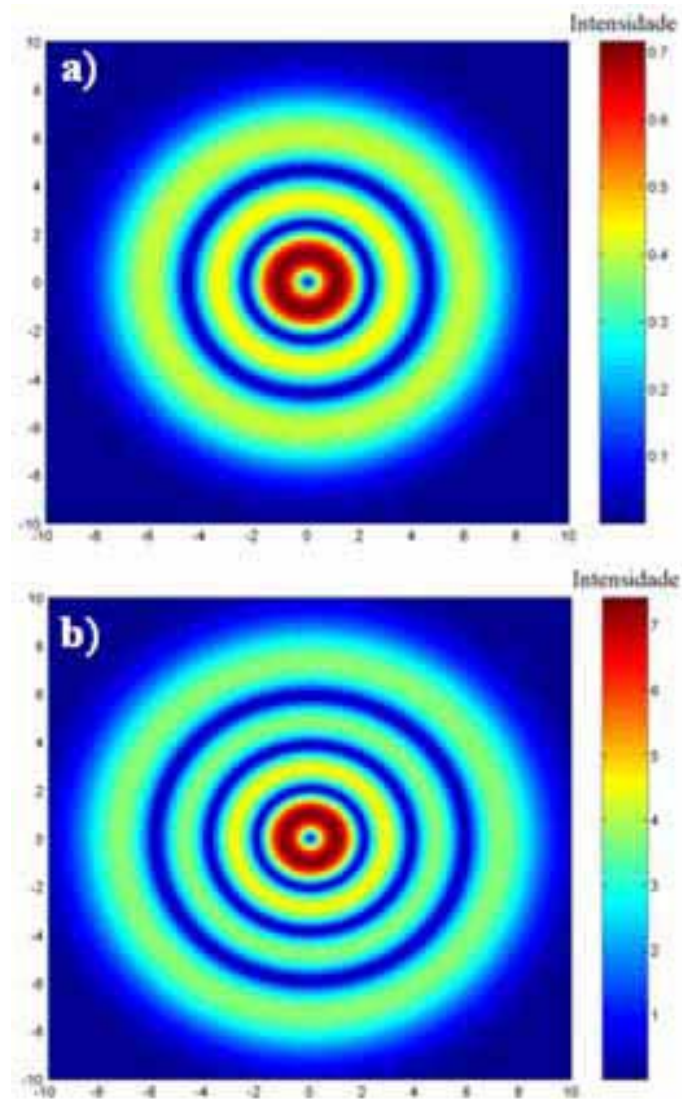


Figura 1.4: Perfis de intensidade dos feixes Laguerre-Gauss: a)  $LG_2^1$  e b)  $LG_3^1$ .

Os modos  $LG$  com  $l \neq 0$  são interessantes porque possuem uma fase azimutal que causa o surgimento de uma frente de onda helicoidal, e assim, possuem momento angular orbital bem definido de  $l\hbar$  por fóton [4]. A descrição dos modos Laguerre-Gauss é dada

por [24]:

$$\begin{aligned}
 u_{pl}(r, \phi, z) \propto & (-1)^p \left( \frac{r\sqrt{2}}{w(z)} \right)^l \exp \left[ -\frac{r^2}{w^2(z)} \right] \exp \left[ -i \frac{kr^2 z}{2(z_r^2 + z^2)} \right] \exp(il\phi) \\
 & \times L_p^l \left( \frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \exp \left[ -i(2p + l + 1) \arctan \left( \frac{z}{z_r} \right) \right], \quad (1.60)
 \end{aligned}$$

onde  $w(z)$  é a cintura do feixe na posição  $z$ ,  $z_r$  é o comprimento Rayleigh,  $L_p^l$  é o polinômio generalizado de Laguerre e o termo  $(2p + l + 1) \arctan \left( \frac{z}{z_r} \right)$  é a fase de Gouy do modo.

Os modos  $LG_p^l$  podem ser decompostos em termos dos modos Hermite-Gauss  $HG_{mn}$  [25]. Os índices  $(m, n)$  são relacionados com os índices  $(p, l)$  por  $l = |m - n|$  e  $p = \min(m, n)$ , a ordem do modo  $HG_{mn}$  é definida por  $N = m + n$ . Os modos  $HG_{mn}$  são soluções da equação de onda na aproximação paraxial, mas diferentes dos modos  $LG_p^l$  esses modos são deduzidos em coordenadas Cartesianas e não possuem momento angular orbital. Os modos Hermite-Gauss são descritos por:

$$\begin{aligned}
 E_{mn}(x, y, z) \propto & \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right] H_m \left( \sqrt{2} \frac{x}{w(z)} \right) H_n \left( \sqrt{2} \frac{y}{w(z)} \right) \exp(ikz) \\
 & \times \exp \left[ -i \frac{k(x^2 + y^2)z}{2(z_r^2 + z^2)} \right] \exp \left[ -i(m + n + 1) \arctan \left( \frac{z}{z_r} \right) \right], \quad (1.61)
 \end{aligned}$$

onde  $H_n(\xi)$  é o polinômio de Hermite de ordem  $n$ . Os Perfis de intensidade para alguns modos Hermite-Gauss são mostrados na Fig. 1.5.

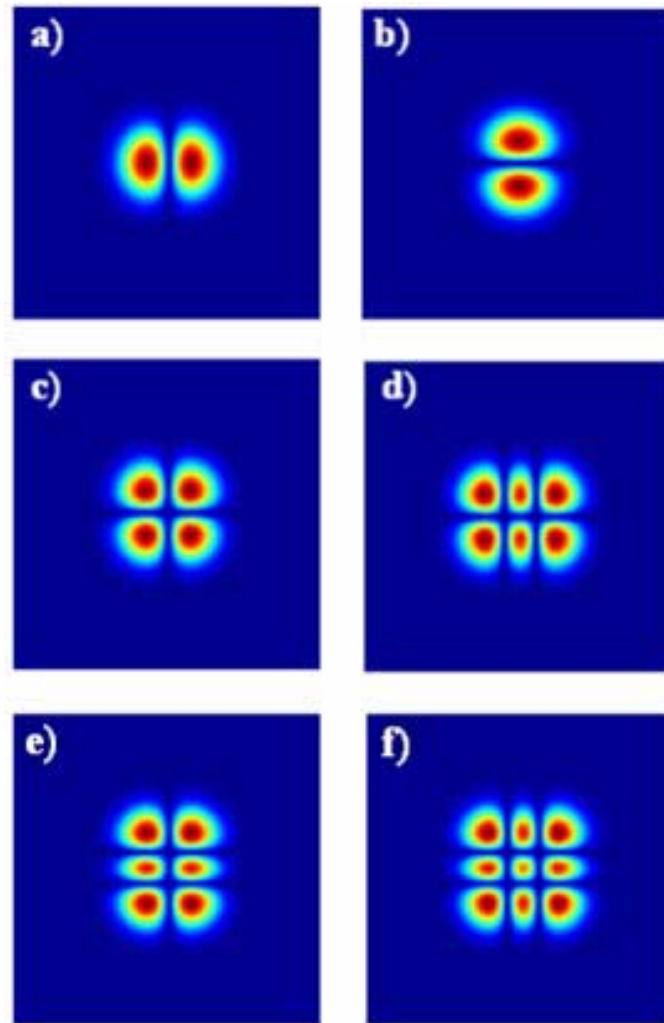


Figura 1.5: Perfis de intensidade dos modos Hermite-Gauss: a)  $HG_{10}$ , b)  $HG_{01}$ , c)  $HG_{11}$ , d)  $HG_{21}$ , e)  $HG_{12}$  e f)  $HG_{22}$ .

Os modos de primeira ordem compostos por  $LG_0^1$ ,  $LG_0^{-1}$ ,  $HG_{10}$  e  $HG_{01}$  são especialmente interessantes porque são análogos aos estados de polarização da luz. Os modos  $LG_0^{\pm 1}$  podem ser decompostos como  $HG_{10} \pm iHG_{01}$ , como mostra a Fig. 1.6.

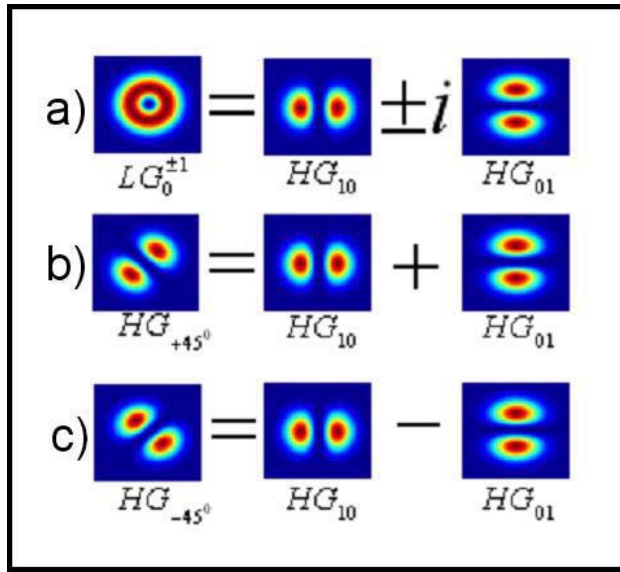


Figura 1.6: representação gráfica da decomposição dos modos: a)  $LG_0^{\pm 1}$  nos modos  $HG_{10}$  e  $HG_{01}$ ; b)  $HG_{+45^\circ}$ , quando a diferença de fase entre os modos  $HG_{10}$  e  $HG_{01}$  é 0 e c)  $HG_{-45^\circ}$ , quando a diferença de fase entre os modos  $HG_{10}$  e  $HG_{01}$  é  $\pi$ .

Os modos  $LG_0^1$  e  $LG_0^{-1}$  são equivalentes à luz circularmente polarizada no sentido horário e anti-horário, respectivamente. Os modos  $HG_{10}$  e  $HG_{01}$  são análogos às duas polarizações lineares ortogonais, polarização linear na horizontal e linear na vertical, respectivamente. Baseado nesta semelhança, Padgett e Courtial [9] construíram uma esfera análoga à esfera de Poincaré para feixes com momento angular orbital, Fig. 1.7. Os modos Laguerre-Gauss  $LG_0^1$  e  $LG_0^{-1}$  possuem momento angular orbital de  $+\hbar$  e  $-\hbar$  por fóton, respectivamente.

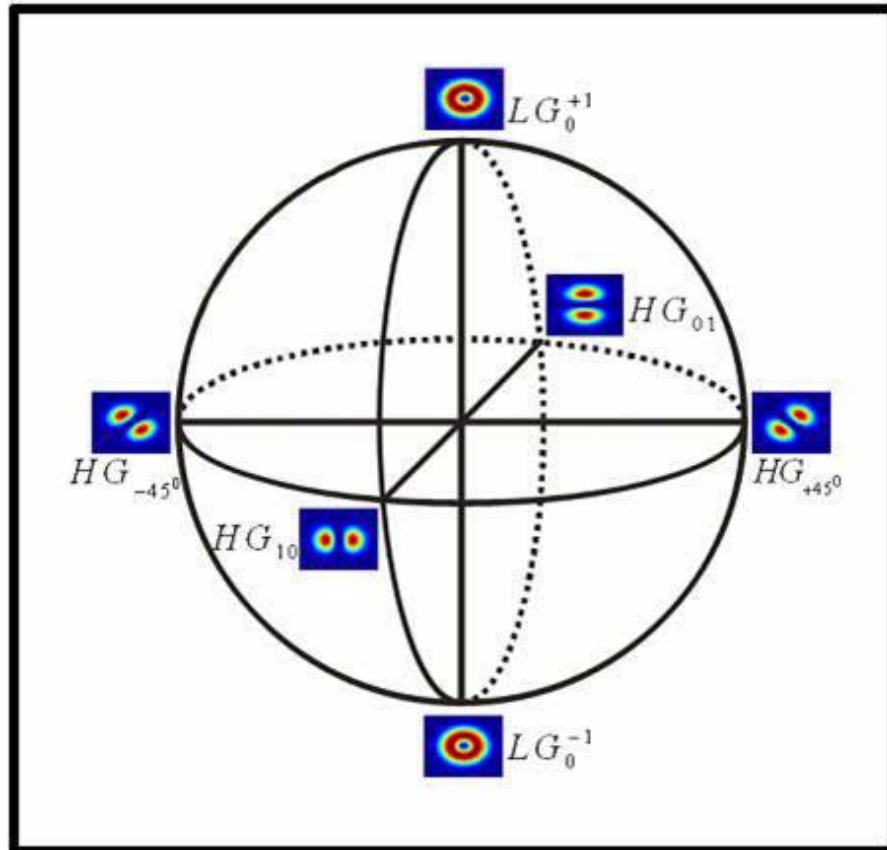


Figura 1.7: Esfera de modos de primeira ordem.

Os pólos da esfera são representados pelos modos  $LG_0^1$  e  $LG_0^{-1}$  e os pontos no plano equatorial são representados pelos modos  $HG$  de ordem  $N = 1$ . Assim, cada ponto nesta esfera corresponde a um modo de ordem  $N = 1$ , e cada modo de ordem 1 corresponde a um ponto na esfera, essa representação é chamada de esfera de modos de primeira ordem. Qualquer ponto na superfície da esfera pode ser descrito por uma superposição linear dos modos  $LG_0^1$  e  $LG_0^{-1}$ . Por exemplo, uma superposição dos modos  $LG_0^1$  e  $LG_0^{-1}$  com intensidades iguais forma o modo  $HG_{10}$ , onde a fase relativa entre os dois modos Laguerre-Gauss é zero. Outros modos  $HG$  são obtidos variando a fase relativa. Similar às placas de onda, que controlam os estados de polarização, lentes cilíndricas são usadas para converter os modos Hermite-Gauss nos modos Laguerre-Gauss e vice-versa [26]. Se um



par de lentes cilíndricas idênticas com comprimento focal  $f$  estiverem separadas por  $\sqrt{2}f$ , então um modo Hermite-Gauss passando por esse conjunto de lentes será convertido no modo Laguerre-Gauss, esse dispositivo é chamado de conversor  $\pi/2$ . Esse sistema de lentes cilíndricas é equivalente a uma placa de  $\lambda/4$  que transforma luz linearmente polarizada em luz circularmente polarizada possuindo momento angular intrínseco. Quando a separação entre as lentes é aumentada para  $2f$ , um modo  $LG$  com índice azimutal  $l$  é convertido em um modo  $LG$  com índice azimutal  $-l$ , esse sistema de lentes é chamado de conversor  $\pi$ . Esse conversor é análogo a uma placa de  $\lambda/2$  que inverte o sentido da luz circularmente polarizada transmitida. A Fig. 1.8 mostra esse sistema de lentes cilíndricas.

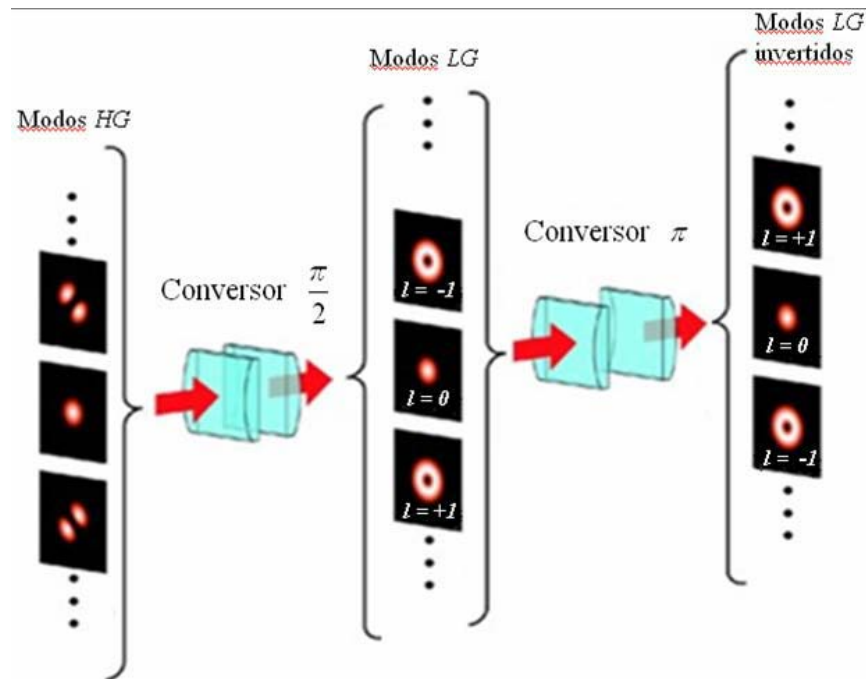


Figura 1.8: Conversores de modos.

## 1.4 Conclusão

Utilizando a teoria eletromagnética, vimos que o momento angular total de um feixe de luz pode ter duas componentes bem definidas: o momento angular intrínseco que

depende apenas do estado de polarização do feixe; e o momento angular orbital, que depende da estrutura de fase azimutal. Dentro da aproximação paraxial mostramos que um feixe de luz linearmente polarizado com uma fase azimutal  $\exp(il\phi)$  possui momento angular orbital bem definido na direção de propagação. Diferentemente do momento angular intrínseco, que tem exclusivamente três estados independentes, correspondendo às polarizações circular no sentido horário e anti-horário e a polarização linear, o momento angular orbital tem um número ilimitado de estados, correspondendo a todos os valores inteiros de  $l$ .

Feixes de luz possuindo momento angular intrínseco são produzidos usando uma placa de  $\lambda/4$  que através de uma transformação unitária converte luz linearmente polarizada em luz circularmente polarizada. Analogamente, feixes com momento angular orbital podem ser criados usando um par de lentes cilíndricas que converte um feixe Hermite-Gauss em um feixe Laguerre-Gauss.

A esfera de Poincaré fornece um método geométrico para a representação dos estados de polarização. Equivalentemente, a esfera de modos de primeira ordem, fornece uma representação geométrica para o momento angular orbital em termos dos feixes Laguerre-Gauss e Hermite-Gauss. Nesta esfera, pares de lentes cilíndricas executam transformações unitárias, análogas àquelas realizadas por placas de onda na esfera de Poincaré.

# Capítulo 2

## Feixes Bessel

### 2.1 Introdução

Os fenômenos de difração são conhecidos há muito tempo, sendo muitas vezes um fator limitante nas aplicações que usam feixes ópticos. Neste capítulo, apresentaremos a descrição de uma família de feixes que tem características não difratantes e que são soluções da equação de Helmholtz. Esta família de feixes é conhecida como feixes Bessel [13, 14]. Primeiro estudaremos a equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas. Em seguida, faremos uma análise de feixes não difratantes através do espectro angular. Mais adiante, dentro da aproximação escalar, veremos que os feixes Bessel de alta ordem possuem momento angular orbital [15]. Mostraremos ainda, como gerar um feixe Bessel através de técnicas holográficas [27]. Por fim, produziremos experimentalmente um feixe Bessel de primeira ordem e verificaremos que esse feixe possui momento angular orbital.

## 2.2 Feixes não difratantes

A amplitude complexa de um feixe não difratante monocromático se propagando ao longo do eixo  $z$  pode ser escrita da seguinte forma [27]:

$$U(x, y, z; t) = u(x, y) \exp i(\beta z - \omega t), \quad (2.1)$$

onde  $u(x, y)$  se refere à amplitude transversal do feixe,  $\omega$  é a frequência angular e  $\beta$  é a componente longitudinal do vetor de onda. A variação da amplitude  $u$  é independente da coordenada  $z$ , assim, a intensidade do feixe  $I = |U|^2$  é invariante com a propagação,  $I(x, y, z > 0) = I(x, y, 0)$ , ou seja, o perfil transversal do feixe não muda com a propagação no vácuo. A amplitude complexa  $U$  deve satisfazer a equação de onda homogênea:

$$\nabla^2 U = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (2.2)$$

Substituindo a equação (2.1) na equação (2.2), chegamos à equação de Helmholtz,

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0, \quad (2.3)$$

onde  $E(x, y, z) = u(x, y) \exp i\beta z$  é a amplitude complexa independente do tempo,  $k = \omega/c$  e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. A descrição matemática de feixes não difratantes monocromáticos pode ser baseada no formalismo diferencial ou integral. Aqui discutiremos apenas o primeiro caso.

### 2.2.1 Solução da equação de Helmholtz

A equação de Helmholtz descreve a propagação da luz levando em conta a difração, que é um efeito intrínseco da propagação espacial. Porém, em 1987 J. Durnin, publicou

um importante trabalho que mostra que a equação de Helmholtz possui uma família de soluções que se propagam livres de difração [13]. Ele obteve essas soluções para a equação de Helmholtz utilizando o sistema de coordenadas cilíndricas sob a condição de que a amplitude complexa do feixe é separável como o produto das funções  $R(\rho)$ ,  $\Phi(\phi)$  e  $Z(z)$ , onde  $\rho$ ,  $\phi$  e  $z$  são as coordenadas cilíndricas.

Vamos escrever a equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$ . Com isso, a equação (2.3) pode ser escrita como [28]:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial E}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k^2 E = 0. \quad (2.4)$$

Fazendo a substituição:

$$E(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Phi(\phi) \exp(i\beta z), \quad (2.5)$$

e dividindo por  $R(\rho)\Phi(\phi) \exp(i\beta z)$ , encontramos:

$$\frac{1}{\rho R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + (k^2 - \beta^2) = 0. \quad (2.6)$$

Multiplicando a equação (2.6) por  $\rho^2$  e fazendo  $\alpha^2 = k^2 - \beta^2$ , obtemos:

$$\frac{\rho}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \alpha^2 \rho^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}, \quad (2.7)$$

onde o termo do lado direito da equação (2.7) é função apenas da coordenada  $\phi$ . Igualando este termo a uma constante de separação  $l^2$ , teremos:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = -l^2 \Phi. \quad (2.8)$$

A solução desta equação é dada por:

$$\Phi(\phi) = \exp(il\phi). \quad (2.9)$$

Mas a função  $E(\rho, \phi, z)$  por continuidade, deve estar univocamente definida para  $\phi = 0$  e  $\phi = 2\pi$ , ou seja,  $E(\rho, 0, z) = E(\rho, 2\pi, z)$  para qualquer  $\rho$  e qualquer  $z$ . Portanto, devemos impor a condição  $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$ , o que implica que  $l$  deve ser inteiro ou igual a zero, ou seja,  $l = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ . Finalmente, resta-nos uma equação diferencial para  $R(\rho)$  que, multiplicada por  $R(\rho)$ , fica assim:

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + (\alpha^2 \rho^2 - l^2)R = 0. \quad (2.10)$$

Esta equação pode ser ainda reescrita na forma:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R}{\partial \rho} + \left( \alpha^2 - \frac{l^2}{\rho^2} \right) R = 0, \quad (2.11)$$

que é conhecida como equação diferencial de Bessel de ordem  $l$ . As soluções da equação (2.11) são as funções de Bessel de ordem  $l$  [28],  $J_l(\alpha\rho)$ . Portanto, a amplitude complexa do feixe  $E(\rho, \phi, z)$  é dada por:

$$E(\rho, \phi, z) = E_0 J_l(\alpha\rho) \exp(il\phi) \exp(i\beta z), \quad (2.12)$$

onde  $E_0$  é uma constante,  $J_l$  é a função de Bessel de ordem  $l$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são as componentes transversal e longitudinal do vetor de onda, com  $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  e  $\rho$ ,  $\phi$  e  $z$  são as componentes radial, azimutal e longitudinal do feixe, respectivamente. Usualmente, chamamos de feixe Bessel um feixe cuja distribuição de amplitude do campo elétrico é dada pela equação (2.12).

O resultado interessante é que esta solução para a equação de Helmholtz tem sua distribuição de intensidade constante ao longo da propagação. A intensidade do feixe obedece a seguinte igualdade:

$$I(\rho, \phi, z > 0) = I(\rho, \phi). \quad (2.13)$$

Isto significa que não existe variação no perfil transversal do feixe durante a propagação no vácuo.

No entanto, um feixe Bessel perfeito possui energia infinita, pois se estende por todo o plano transversal. Este fato impossibilita a realização experimental dos feixes Bessel. No entanto, podemos considerar feixes Bessel truncados, que podem ser gerados por aberturas finitas. Nestes casos, é possível mostrar que os feixes Bessel se propagam por uma distância que depende dos parâmetros de preparação, mantendo o padrão transversal aproximadamente inalterado [14, 27]. Por exemplo, a distância  $z_{\max}$  de propagação sem sofrer difração de um feixe Bessel, que é gerado iluminando uma fenda circular de diâmetro  $d$  colocada no plano focal de uma lente de raio  $R$  e comprimento focal  $f$ , é dada por  $z_{\max} = \frac{2fR}{d}$ .

Os feixes Bessel são caracterizados por sua estrutura de anéis concêntricos. No caso do feixe Bessel da ordem zero, o centro do feixe é a região onde a intensidade é máxima, veja Fig. 2.1, enquanto que nos feixes de ordem superior ( $l > 0$ ), o centro do feixe é ocupado por uma região cuja intensidade é nula, como é mostrado na Fig. 2.2. A intensidade para o feixe Bessel de ordem zero ( $l = 0$ ), mostrado na Fig. 2.1, é dada por:

$$I(\rho) = |E_0|^2 J_0^2(\alpha\rho). \quad (2.14)$$

O raio do *spot* central do feixe  $\rho_0$  é dado pelo primeiro zero da função de Bessel  $J_0(\alpha\rho)$ ,

que é igual a  $\rho_0 = \frac{2.405}{\alpha}$ .

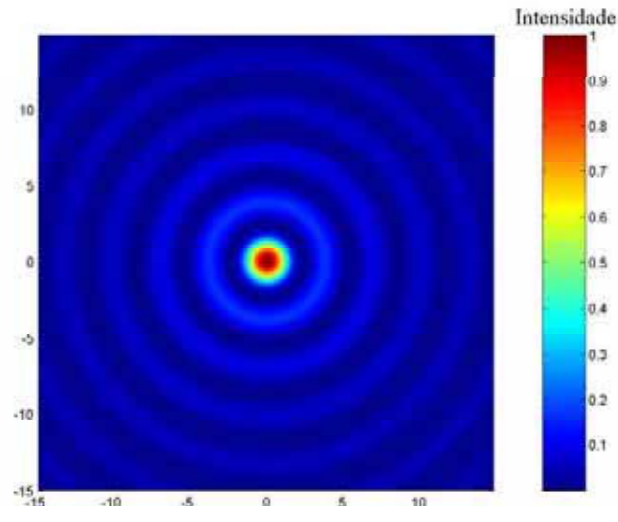


Figura 2.1: Perfil de intensidade para o feixe Bessel de ordem zero.

Os feixes Bessel de alta ordem ( $l > 0$ ) possuem singularidades na fase e uma frente de onda helicoidal. Em óptica tais singularidades são conhecidos como *vórtices ópticos*, onde a ordem do feixe Bessel  $l$  é chamada de carga topológica do feixe. O raio do anel interno pode ser escrito como  $\rho_l = \frac{r_l}{\alpha}$ , onde  $r_l$  é o primeiro máximo da função de Bessel de ordem  $l$ . Os perfis de intensidade para os feixes Bessel de alta ordem são mostrados na Fig. 2.2. Note que, a medida que a ordem do feixe aumenta, o raio interno  $\rho_l$  cresce.



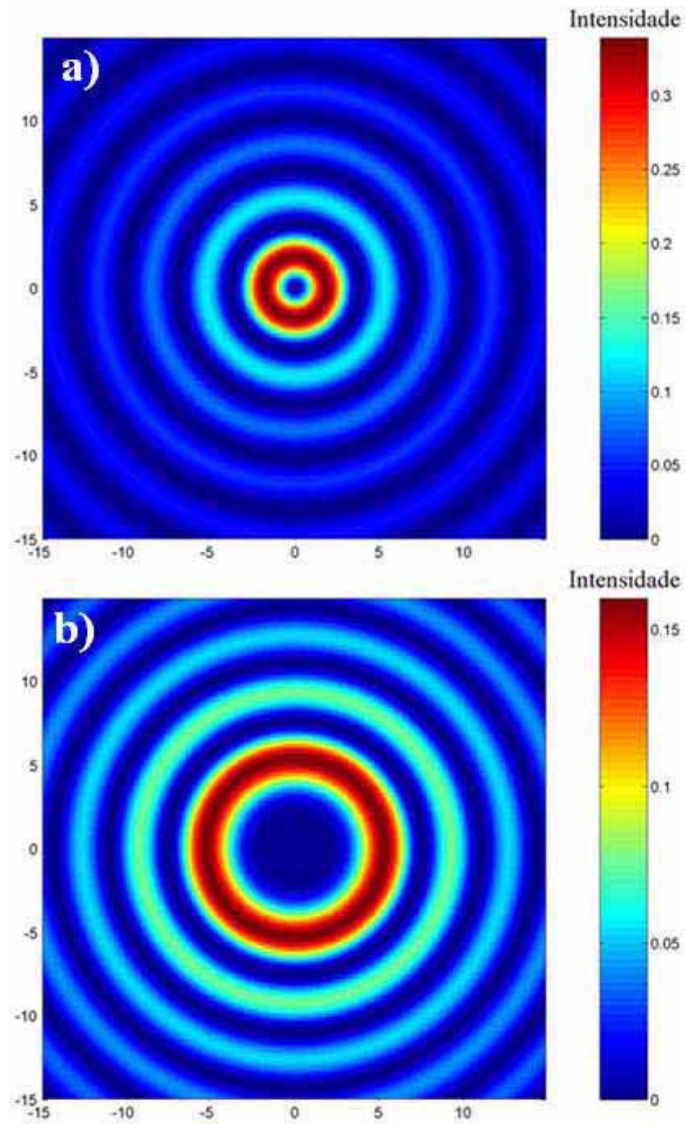


Figura 2.2: Perfil transversal dos feixes Bessel. a) Para  $l = 1$  e b)  $l = 4$ .

Os *vórtices ópticos* podem ser identificados experimentalmente através de técnicas interferométricas. O padrão de interferência entre um feixe contendo um *vórtice óptico* e uma onda plana apresenta bifurcações, onde o número destas bifurcações é igual ao índice do feixe Bessel,  $l$ . Este resultado é mostrado nas Fig. 2.3 e 2.4, para feixes com carga topológica  $l = 1$  e  $l = 2$ , respectivamente.

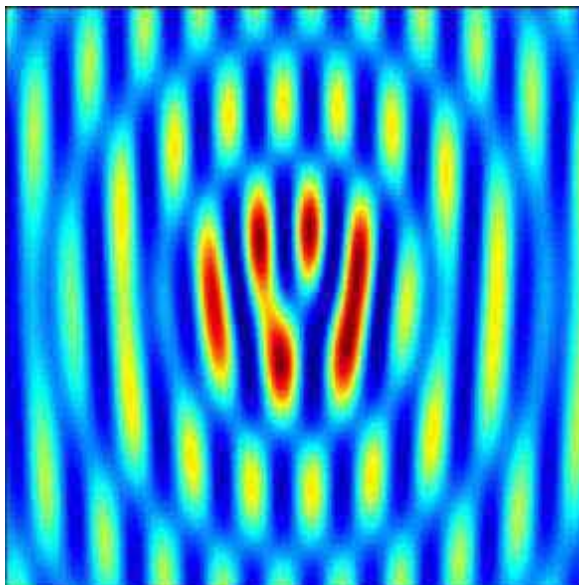


Figura 2.3: Visualização de *vórtices ópticos*. Este padrão de interferência é característico de um feixe que possui uma carga topológica igual a 1.

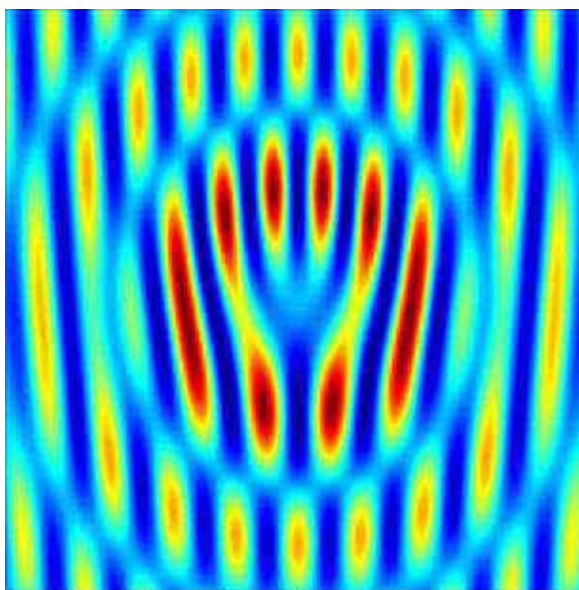


Figura 2.4: Visualização de *vórtices ópticos*. Este padrão de interferência é característico de um feixe que possui uma carga topológica igual a 2.

## 2.2.2 Representação de feixes Bessel através do espectro angular

A solução exata da equação (2.3) em algum plano  $z \geq 0$  pode ser expressa na forma [29]:

$$E(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(k_x, k_y) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) dk_x dk_y, \quad (2.15)$$

onde  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  é o vetor posição e  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  é o vetor de onda. Escrevendo ambos os vetores posição e de onda em coordenadas cilíndricas, isto é,  $\mathbf{r} = (\rho, \phi, z)$  e  $\mathbf{k} = (\alpha, \psi, \beta)$ , assim, o campo é dado por:

$$E(\rho, \phi, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} A(\alpha, \psi) \exp[i\alpha\rho \cos(\psi - \phi)] \exp(i\beta z) \alpha d\alpha d\psi. \quad (2.16)$$

onde,

$$\beta = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \alpha^2} & \text{para } \alpha < k \\ i\sqrt{\alpha^2 - k^2} & \text{para } k < \alpha \end{cases} \quad (2.17)$$

A transformada de Fourier inversa do campo no plano  $z = 0$  é expressa como:

$$A(\alpha, \psi) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} E(\rho, \phi, 0) \exp[-i\alpha\rho \cos(\psi - \phi)] \rho d\rho d\phi, \quad (2.18)$$

Para valores reais de  $\beta$ , a equação (2.16) representa uma superposição homogênea de ondas planas se propagando na direção definida pelo vetor de onda  $\mathbf{k}$ . Para valores imaginários de  $\beta$ , as amplitudes das ondas decaem exponencialmente ao longo da direção  $z$ , que correspondem às ondas evanescentes.

A quantidade  $A(\alpha, \psi)$  que aparece nas equações (2.16) e (2.18) é conhecida como espectro angular do campo em  $z = 0$ . A representação do campo através do espectro angular é extremamente útil, pois se o campo é conhecido em  $z = 0$ , podemos encontrar a distribuição do campo em um plano arbitrário  $z \geq 0$  usando as equações (2.16) e (2.18).

Para obtermos feixes não difratantes a condição exigida é que o módulo ao quadrado

do campo  $E(\rho, \phi, z)$  permaneça constante em cada plano transversal. Matematicamente, podemos expressar essa condição na forma:

$$E(\rho, \phi, z + \Delta z) = \exp [i\xi(\rho, \phi, \Delta z)] E(\rho, \phi, z), \quad (2.19)$$

que deve ser verdade para todo  $\Delta z$ . Onde  $\xi(\rho, \phi, \Delta z)$  é uma função de fase arbitrária.

Inserindo a equação (2.19) na equação (2.16) teremos:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} A(\alpha, \psi) \exp [i\alpha\rho \cos(\psi - \phi)] \exp [i\beta(z + \Delta z)] \alpha d\alpha d\psi \\ = & \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} A(\alpha, \psi) \exp [i\alpha\rho \cos(\psi - \phi)] \exp(i\beta z) \exp [i\xi(\rho, \phi, \Delta z)] \alpha d\alpha d\psi, \end{aligned} \quad (2.20)$$

ou ainda,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} A(\alpha, \psi) \exp [i\alpha\rho \cos(\psi - \phi)] \exp(i\beta z) \{ \exp(i\beta\Delta z) - \exp [i\xi(\rho, \phi, \Delta z)] \} \alpha d\alpha d\psi = 0 \quad (2.21)$$

Para que a equação (2.21) seja verdadeira para todo  $\rho$  e  $\phi$ , o integrando deve ser nulo, isto conduz imediatamente a seguinte expressão:

$$\xi(\rho, \phi, \Delta z) = \xi(\Delta z) = \beta\Delta z + p2\pi, \quad (2.22)$$

onde  $p$  é inteiro. Assumindo que  $\xi(\Delta z)$  é contínuo e que  $\xi(0) = 0$ ,  $p$  deve ser zero e  $\beta$  é uma constante que chamaremos de  $\beta_0$ . Admitindo que o espectro angular de um feixe não difratante não contenha ondas evanescentes, pois o nosso interesse é estudar campos distantes ( $z \gg \lambda$ ), onde as contribuições de ondas evanescentes são desprezíveis, então  $\beta_0$  deve ser real na equação (2.22). Com isso, obtemos a seguinte forma para o espectro

angular:

$$A(\alpha, \psi) = A(\psi)\delta(\alpha - \alpha_0), \quad (2.23)$$

onde  $\alpha_0$  é uma constante relacionada com  $\beta_0$  pela equação (2.17) e  $\delta(\alpha)$  é a função delta de Dirac. Portanto, o espectro angular é confinado em um anel de raio  $\alpha_0$  no espaço das frequências. A propriedade de propagação não difratante aparece como uma consequência da composição do espectro angular. Fisicamente, este espectro angular representa uma superposição de ondas planas se propagando em um cone, onde o ângulo de abertura desse cone é dado por  $2\theta = 2 \tan^{-1}(\frac{\alpha_0}{\beta_0})$ , as amplitudes e as fases relativas das ondas planas sobrepostas podem ser arbitrárias. Os parâmetros  $\alpha_0$  e  $\beta_0$ , dados por  $\alpha_0 = k \sin \theta$  e  $\beta_0 = k \cos \theta$ , representam as projeções dos vetores de onda das ondas planas no plano transversal e na direção de propagação coincidindo com o eixo  $z$ , respectivamente.

A equação (2.23) representa a condição suficiente para propagação não difratante. Devido a arbitrariedade da modulação azimutal no espectro angular um número infinito de feixes não difratantes com diferentes perfis transversais podem ser obtidos. Neste momento estamos interessados no caso especial em que as amplitudes das componentes de onda plana do espectro angular são constantes e a fase é modulada por:

$$A(\psi) = A_0 \exp(i l \psi), \quad (2.24)$$

onde  $A_0$  é uma constante. Substituindo as equações (2.23) e (2.24) na equação (2.16), encontramos uma expressão integral para os feixes não difratantes:

$$E(\rho, \phi, z) = A_0 \exp(i\beta_0 z) \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \exp(il\psi) \exp[i\alpha\rho \cos(\psi - \phi)] \delta(\alpha - \alpha_0) \alpha d\alpha d\psi. \quad (2.25)$$

Sabendo que as integrais da equação anterior são resolvidas da seguinte forma [30]:

$$f(x_0) = \int_0^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx \quad (2.26)$$

$$J_l(x) = \frac{i^{-l}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(il\theta) \exp[ix \cos \theta] d\theta. \quad (2.27)$$

Enfim, a equação (2.25) tem como solução:

$$E(\rho, \phi, z) = B_0 J_l(\alpha\rho) \exp(il\phi) \exp(i\beta z), \quad (2.28)$$

onde  $B_0 = 2\pi i^l A_0 \alpha_0$  é uma constante. A solução (2.28) é idêntica a solução (2.12) e representa um feixe Bessel de ordem  $l$ . A Fig. 2.5 mostra o espectro angular do feixe Bessel de primeira ordem. O espectro angular dos feixes Bessel é representado por um anel no plano dos vetores de onda transversais. O parâmetro básico do espectro é a componente transversal do vetor de onda do feixe que está relacionado com o raio do anel. A componente transversal do vetor de onda é inversamente proporcional a dimensão do perfil transversal do feixe.

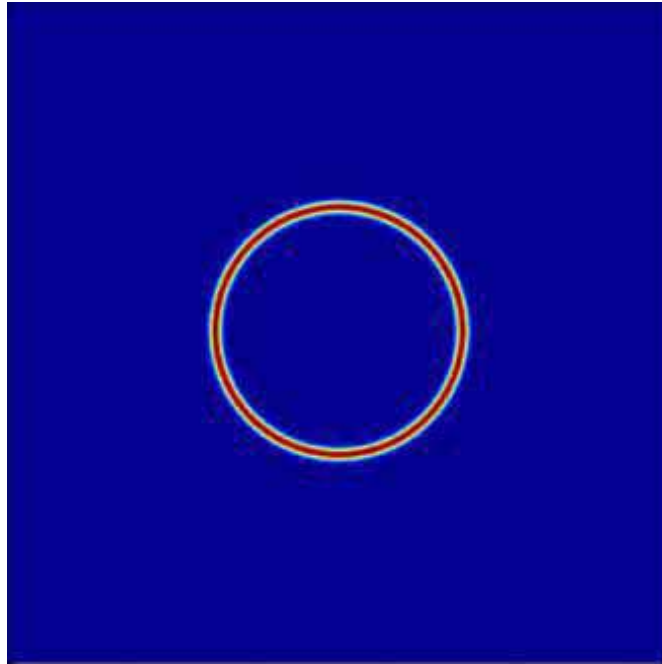


Figura 2.5: Espectro do feixe Bessel. A transformada de Fourier do Feixe Bessel é um anel no espaço  $k$ .

## 2.3 Momento angular orbital dos feixes Bessel

Aqui usaremos a aproximação escalar para os feixes Bessel a fim de mostrar que estes feixes possuem momento angular orbital. Admitindo que um feixe Bessel monocromático tenha polarização linear e seja definido pelo seguinte potencial vetor:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}, t)\hat{x}, \quad (2.29)$$

onde  $\hat{x}$  é o vetor unitário na direção do eixo  $x$  e  $U(\mathbf{r}, t)$  é uma função de amplitude complexa do feixe. Adotando a representação do campo eletromagnético pelos potenciais escalar e vetorial e adotando a condição de Coulomb, que é dado por:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \implies \frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial x} = 0, \quad (2.30)$$

onde  $\mathbf{A}$  satisfaz a equação de onda, desta forma as equações para os campos elétrico e magnético ficam reduzidas às expressões:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \hat{x} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial z} \hat{y} - \frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial y} \hat{z}. \quad (2.32)$$

A densidade de momento angular  $\mathbf{j}$  é escrita como o produto vetorial entre o vetor posição  $\mathbf{r}$  e a densidade de momento linear  $\mathbf{p}$ , ou seja:

$$\mathbf{j} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (2.33)$$

onde  $\mathbf{p}$  é dado por:

$$\mathbf{p} = \frac{\varepsilon_0}{2} [\mathbf{E}^* \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{B}^*]. \quad (2.34)$$

Mas,

$$\mathbf{E}^* \times \mathbf{B} = -\frac{\partial U^*(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \left[ \frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial z} \hat{z} \right], \quad (2.35)$$

como  $\frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial x} = 0$ , temos:

$$\mathbf{E}^* \times \mathbf{B} = -\frac{\partial U^*(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \nabla U(\mathbf{r}, t), \quad (2.36)$$

e,

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B}^* = -\frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \nabla U^*(\mathbf{r}, t). \quad (2.37)$$

Consequentemente, a densidade de momento linear é escrita como:

$$\mathbf{p} = -\frac{\varepsilon_0}{2} \left[ \frac{\partial U^*(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \nabla U(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \nabla U^*(\mathbf{r}, t) \right]. \quad (2.38)$$

Este resultado é independente do sistema de coordenadas. Assumindo que o feixe se



propaga ao longo da direção  $z$ , a densidade de momento angular orbital é dada por:

$$j_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z. \quad (2.39)$$

Aplicando o sistema de coordenadas cilíndricas, obtemos:

$$j_z = \rho p_\phi, \quad (2.40)$$

onde  $p_\phi$  é a componente azimutal da densidade de momento linear. Admitindo que  $U(\mathbf{r}, t)$  descreve a distribuição de amplitude complexa do feixe Bessel e que é dada por:

$$U(\rho, \phi, z, t) = J_l(\alpha\rho) \exp(il\phi) \exp(i\beta z - \omega t). \quad (2.41)$$

Substituindo a equação (2.41) na equação (2.38), temos:

$$\mathbf{p} = \varepsilon_0 \left[ \frac{l\omega}{\rho} |U|^2 \hat{\phi} + \beta\omega |U|^2 \hat{z} \right]. \quad (2.42)$$

Portanto a densidade de momento angular orbital é expressa como:

$$j_z = \varepsilon_0 l\omega |U|^2. \quad (2.43)$$

Supomos o feixe linearmente polarizado, portanto o mesmo não possui momento angular intrínseco. Assim sendo, para os feixes Bessel de alta ordem, esta contribuição deve ser associada ao momento angular orbital. Uma análise da densidade de momento angular dentro de um rigoroso tratamento vetorial é apresentada na referência [15].

Sabendo que a densidade de energia do feixe é  $u = cp_z = c\varepsilon_0\beta\omega |U|^2$ , isto é, a velocidade da luz multiplicada pela componente  $z$  da densidade de momento linear, a razão entre a

densidade de momento angular orbital e a densidade de energia do feixe é dada por:

$$\frac{j_z}{u} = \frac{l}{c\beta}. \quad (2.44)$$

No limite paraxial, o resultado (2.44) reproduz um resultado bem conhecido para a expressão do momento angular orbital que foi derivado originalmente para os feixes Laguerre-Gauss. Admitindo que  $\beta \gg \alpha$ , e expandindo  $\beta$ , temos:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^3}\right), \quad (2.45)$$

onde  $k$  é o módulo do vetor de onda. Substituindo apenas o primeiro termo da equação (2.45) na equação (2.44), obtemos:

$$\frac{j_z}{u} = \frac{l}{\omega}. \quad (2.46)$$

Este resultado é idêntico ao resultado (1.58) apresentado no capítulo 1.

## 2.4 Geração de feixes Bessel

Matematicamente, um feixe Bessel perfeito contém um número infinito de anéis, e assim, sobre uma área infinita transportaria uma energia infinita. Portanto, não é possível criar um feixe Bessel perfeito. Na prática, consegue-se uma boa aproximação para os feixes Bessel, mesmo eles sendo produzidos em regiões finitas.

A geração experimental de feixes Bessel pode ser feita iluminando uma fenda circular colocada no plano focal de uma lente [14], usando holograma gerado por computador [27] ou utilizando um áxicon (lente cônica) [31]. Nesta dissertação descreveremos apenas a técnica de geração de feixes Bessel através de holograma gerado por computador.

Essencialmente um holograma é a gravação do padrão de interferência entre o feixe de interesse com um feixe de referência, em geral uma onda plana. Ao iluminarmos o

holograma com o feixe de referência, reconstruímos o feixe de interesse pela difração da luz. No caso dos feixes Bessel com a onda plana como o feixe de referência o padrão de interferência formado possui bifurcações no centro do holograma, como vimos na seção (2.2.1) o número destas bifurcações é igual a o índice do feixe Bessel. A função transmissão de um holograma circular de raio  $R$  é dada por [27]:

$$t(\rho, \phi) = \exp \left[ i \left( 2\pi\nu\rho \cos(\phi) + l\phi - \frac{2\pi}{\rho_0}\rho \right) \right] \quad (2.47)$$

onde  $\rho$  e  $\phi$  são as coordenadas radial e azimutal no plano do holograma, respectivamente. O termo  $\exp [i (2\pi\nu\rho \cos(\phi))]$  define o parâmetro que especifica o ângulo de difração pela projeção no plano do holograma da onda plana de referência, incidindo com um ângulo  $\gamma$  em relação a normal ao plano do holograma, sendo  $\nu = \frac{\sin\gamma}{\lambda}$  a frequência que separa as ordens de difração produzida pelo holograma e  $\lambda$  é o comprimento de onda. O fator  $\exp \left( -i\frac{2\pi}{\rho_0}\rho \right)$  corresponde a uma onda cônica, que é característica dos feixe Bessel [14], onde  $\rho_0$  é uma constante e o termo  $\frac{2\pi}{\rho_0}$  é a frequência espacial transversal do feixe Bessel. A Fig. 2.6 mostra hologramas que geram feixes Bessel de ordem,  $l = 1$  e  $l = 4$ . Um feixe Bessel gerado por esse tipo de holograma se propaga sem sofrer difração por uma distância dada por  $z_{\max} = \frac{\rho_0 R}{\lambda}$ .

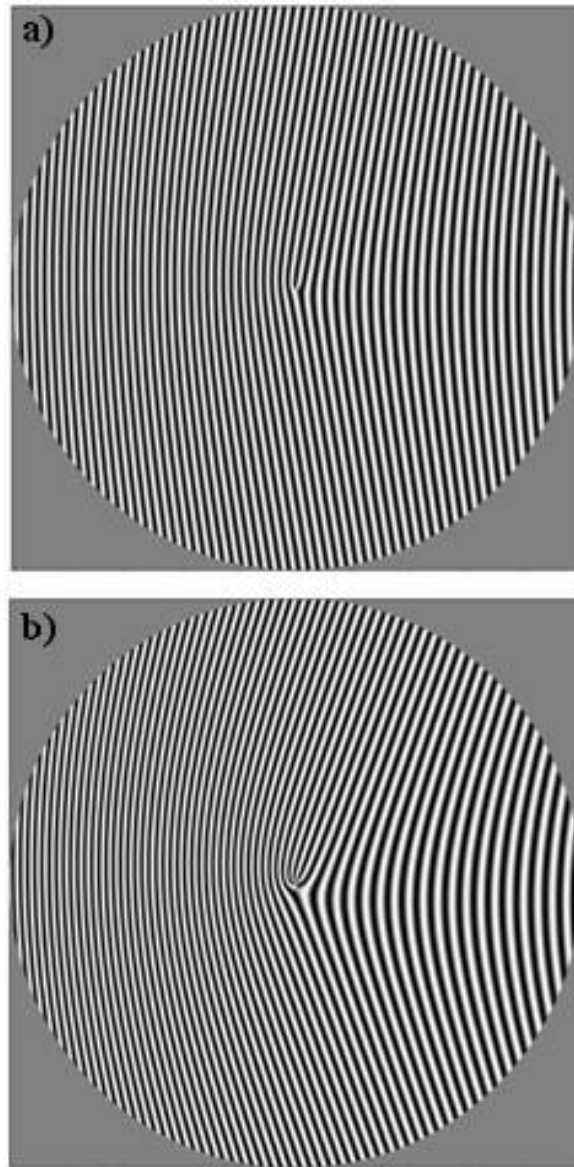


Figura 2.6: Hologramas gerados no computador para preparação de feixes Bessel; Feixes Bessel com *a)*  $l = 1$  e *b)*  $l = 4$ .

Para  $\gamma = 0$ , a onda plana tem o vetor de propagação perpendicular ao holograma, desta forma, a estrutura do holograma gerado no computador terá um padrão de espiral, como indica a Fig. 2.7, onde o número de espirais é igual ao índice  $l$  do feixe Bessel.

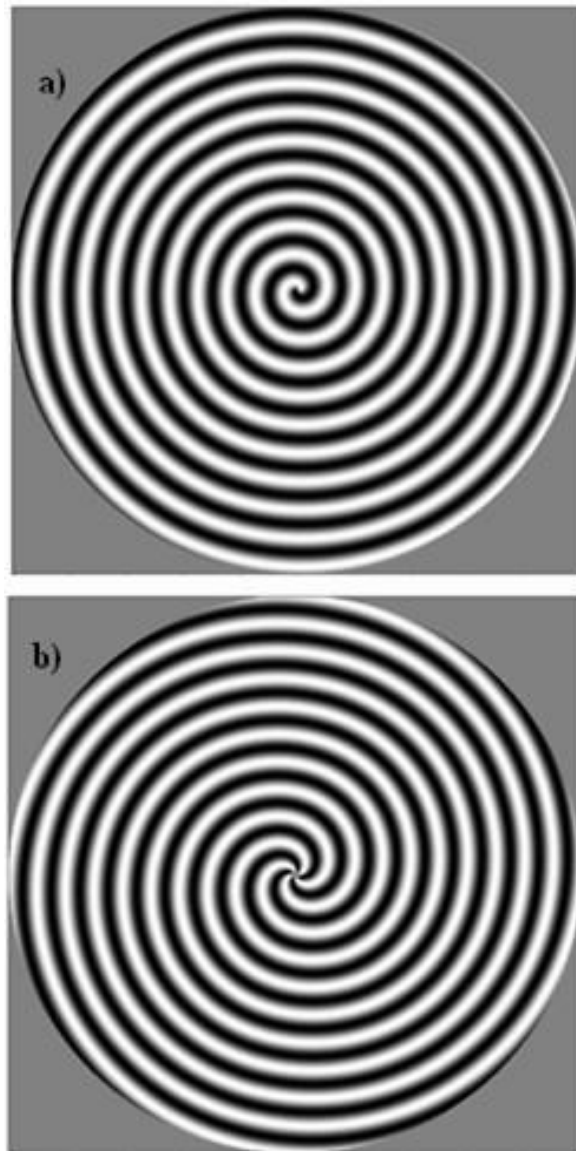


Figura 2.7: Holograma gerados quando  $\gamma = 0$ . a) Para  $l = 1$  e b) para  $l = 4$ .

Utilizando um holograma gerado por computador, realizamos e caracterizamos um experimento para gerar um feixe Bessel de primeira ordem. O holograma gerado foi gravado em um filme de *slide* a partir da fotografia da tela do computador. Os parâmetros usados na geração do holograma foram:  $\nu = 6000m^{-1}$ ,  $\rho_0 = 1mm$  e  $R = 10mm$ .

O aparato experimental é mostrado na Fig. 2.8. O laser de argônio emitindo no comprimento de onda  $\lambda = 514.5nm$  com potência de  $10mW$ , passa por um filtro espacial ( $SF$ ),

de forma a gerarmos um feixe bem próximo de uma onda plana. Depois o feixe entra em um interferômetro de Mach-Zehnder que chamaremos de interferômetro *ABCD*. Os feixes que surgem nas portas de saída são detectados por uma câmera *CCD* (*Charge-Coupled Device*) modelo 4910 Series da CoHU Electronics Division, conectada a um computador através de uma placa de aquisição de imagens modelo IMAQ PCI/PXI-1408 da National Instruments, o software de aquisição de dados foi o LabVIEW 6.1.

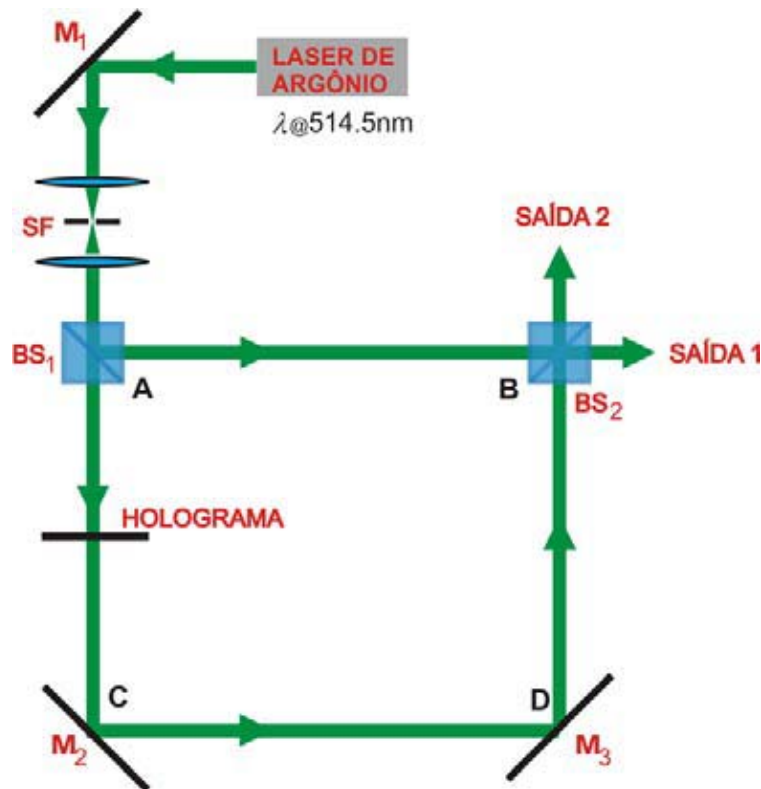


Figura 2.8: Aparato experimental. *SF* é um filtro espacial.  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  são espelhos.  $BS_1$  e  $BS_2$  são divisores de feixes 50/50.

Bloqueando o braço *AB* do interferômetro, nós medimos o perfil de intensidade gerado pelo o holograma que foi colocado no braço *AC*. O perfil do feixe gerado é mostrado na Fig. 2.9, onde podemos ver uma estrutura de anéis de intensidade concêntricos. Esse feixe se propaga sem sofrer difração por aproximadamente  $19,4m$ .

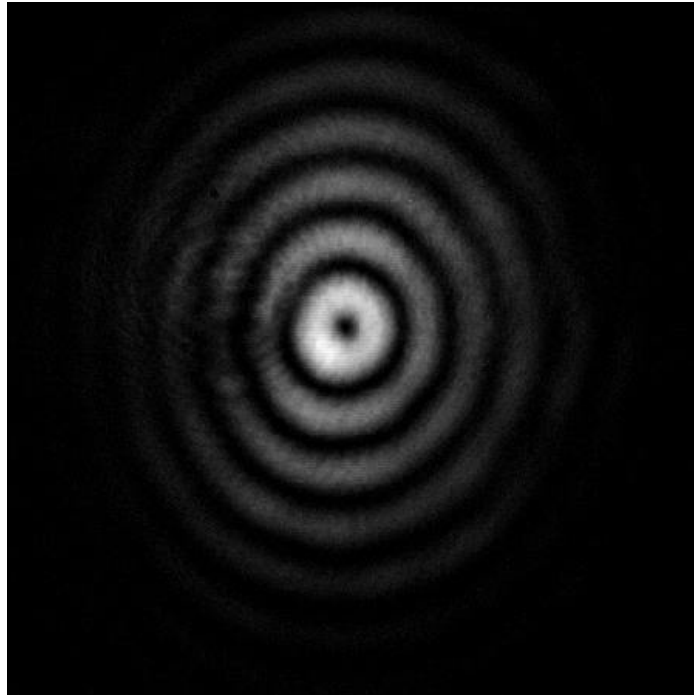


Figura 2.9: Medida experimental do perfil de intensidade para um feixe Bessel de primeira ordem.

Para demonstrar que esse feixe possui momento angular orbital, a estrutura de fase do feixe foi medida desbloqueando o braço  $AB$ . Como resultado obtemos o padrão de interferência de um feixe Bessel de ordem 1 e uma onda plana. O padrão de interferência resultante é mostrado na Fig. 2.10. Podemos notar que existe uma bifurcação na região central do padrão de interferência. Esta bifurcação é uma assinatura característica de feixes com carga topológica igual a um, ou seja,  $l = 1$ . Este resultado demonstra que o feixe produzido pelo holograma é um feixe Bessel e possui momento angular bem definido para  $l = 1$ . A inclinação das franjas e da bifurcação é devido ao desalinhamento transversal do interferômetro.

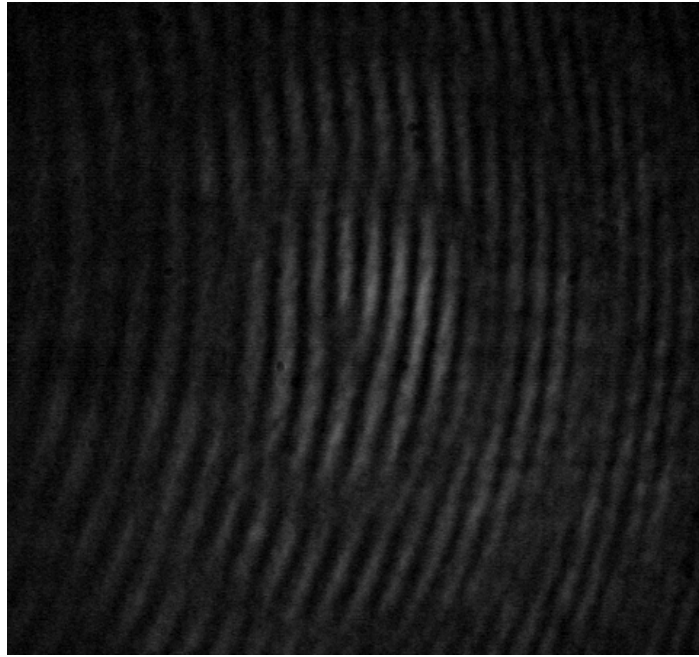


Figura 2.10: Padrão de interferência entre um feixe Bessel de primeira ordem e uma onda plana

## 2.5 Conclusão

Neste capítulo, estudando os feixes Bessel, vimos que tais feixes formam uma família de soluções da equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas, que se propagam no vácuo livres de difração. Vimos ainda que um feixe Bessel de alta ordem possui momento angular orbital, que pode ser identificado experimentalmente através de métodos interferométricos. Produzimos experimentalmente um feixe Bessel de ordem  $l = 1$  usando um holograma gerado por computador. Por fim, através de um experimento de interferência, utilizando o interferômetro de Mach-Zehnder, confirmamos que esse feixe possui momento angular orbital.



## Capítulo 3

# Representação geométrica do momento angular orbital em termos de feixes não difratantes

### 3.1 Introdução

No capítulo anterior, discutimos várias propriedades dos feixes Bessel, entre elas a de que os feixes de ordem diferente de zero possuem momento angular orbital. Neste capítulo, estudaremos a decomposição dos feixes Bessel de alta ordem, no intuito de encontrar uma representação geométrica de feixes possuindo momento angular orbital em termos de feixes não difratantes, equivalente a esfera de Poincaré para os estados de polarização [19, 20]. Um estudo teórico e experimental desta decomposição será descrito, onde apresentaremos uma nova família de feixes não difratantes, os quais chamaremos de *feixes Hermite-Bessel*. Além disso, implementaremos uma transformação unitária em um feixe Bessel de ordem 1 para transformá-lo em um feixe Bessel de ordem  $-1$ , de maneira análoga ao que faz uma placa de onda de  $\lambda/2$  em um estado de luz circularmente polarizada, que é transformada de circular no sentido anti-horário para circular no sentido horário e vice-versa.

## 3.2 Decomposição dos feixes Bessel de alta ordem

Consideremos um feixe Bessel ( $BB$ ), cuja amplitude complexa é dada por:

$$BB_l(\rho, \phi, z) = E_0 J_l(\alpha\rho) \exp(il\phi) \exp(i\beta z), \quad (3.1)$$

onde  $E_0$  é uma constante,  $\rho$  é a coordenada radial,  $\phi$  é a coordenada azimutal,  $J_l(\alpha\rho)$  é a função de Bessel de ordem  $l$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são respectivamente as componentes radial e longitudinal do vetor de onda. A equação (3.1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$BB_l(\rho, \phi, z) = \frac{J_l(\alpha\rho)}{\rho^l} \exp(i\beta z) (x + iy)^l, \quad (3.2)$$

onde usamos coordenadas Cartesianas  $x = \rho \cos \phi$  e  $y = \rho \sin \phi$  para reescrever o termo de fase azimutal. Usando a relação de recorrência para as funções de Bessel  $\frac{2l}{\xi} J_l(\xi) = J_{l+1}(\xi) + J_{l-1}(\xi)$  e multiplicando e dividindo a equação (3.2) por  $\alpha^l$ , obtemos:

$$BB_l(\rho, \phi, z) = \frac{\alpha^l \exp(i\beta z)}{2l (\alpha\rho)^{l-1}} [J_{l+1}(\alpha\rho) + J_{l-1}(\alpha\rho)] (x + iy)^l. \quad (3.3)$$

Nesta dissertação iremos analisar o caso particular onde  $l = \pm 1$ . Neste caso, temos:

$$BB_{\pm 1}(\rho, \phi, z) = \pm \frac{\alpha}{2} \exp(i\beta z) \{ [J_0(\alpha\rho) + J_2(\alpha\rho)] x \pm i [J_0(\alpha\rho) + J_2(\alpha\rho)] y \}, \quad (3.4)$$

onde usamos a relação  $J_{-l}(\xi) = (-1)^l J_l(\xi)$ , para o caso  $l = -1$ . Este resultado mostra que os feixes Bessel de primeira ordem podem ser escritos como uma superposição do produto de funções de Bessel e as coordenadas Cartesianas  $x$  e  $y$ , com uma diferença de fase de  $\pi/2$  entre os termos.

Vamos definir dois modos:

$$\begin{aligned} HB_{10} &= \exp(i\beta z) [J_0(\alpha\rho) + J_2(\alpha\rho)] H_1(x)H_0(y) \\ HB_{01} &= \exp(i\beta z) [J_0(\alpha\rho) + J_2(\alpha\rho)] H_0(x)H_1(y), \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde  $H_n(\xi)$  é o polinômio de Hermite de grau  $n$ , com  $H_0(\xi) = 1$  e  $H_1(\xi) = 2\xi$ . Chamaremos esta nova classe de feixes  $HB_{10}$  e  $HB_{01}$  de feixes Hermite-Bessel. Dessa forma, a equação (3.4) pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} BB_1 &= \alpha [HB_{10} + iHB_{01}] \exp(i\beta z) \\ BB_{-1} &= -\alpha [HB_{10} - iHB_{01}] \exp(i\beta z). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Portanto, mostramos que um feixe Bessel de primeira ordem pode ser decomposto em uma superposição dos feixes Hermite-Bessel ( $HB$ ) com uma diferença de fase de  $\pi/2$ . Esta decomposição é análoga a decomposição de um feixe de luz com polarização circular em termos das polarizações lineares horizontal e vertical, e a decomposição dos modos Laguerre-Gauss  $LG_0^{\pm 1}$  em termos dos modos Hermite-Gauss  $HG_{10}$  e  $HG_{01}$ , mostradas no capítulo 1 desta dissertação.

A Fig. 3.1 mostra a amplitude e o perfil transversal de intensidade do modo  $HB_{10}$  e a Fig. 3.2 mostra a amplitude e o perfil transversal de intensidade do modo  $HB_{01}$ . A representação gráfica do resultado (3.6) é mostrada na Fig. 3.3.

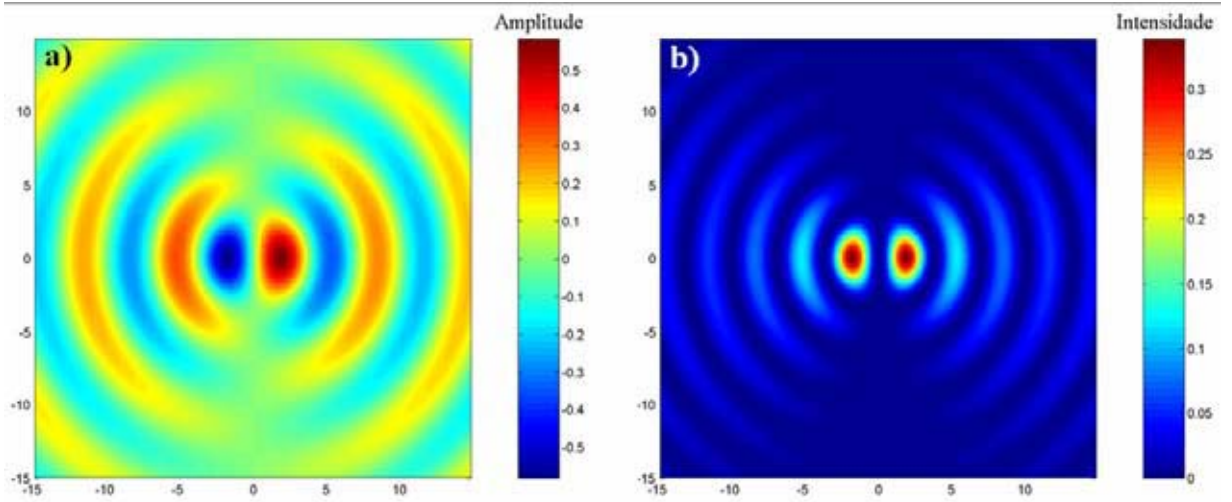


Figura 3.1: Modo Hermite-Bessel  $HB_{10}$ : a) amplitude e b) perfil transversal.

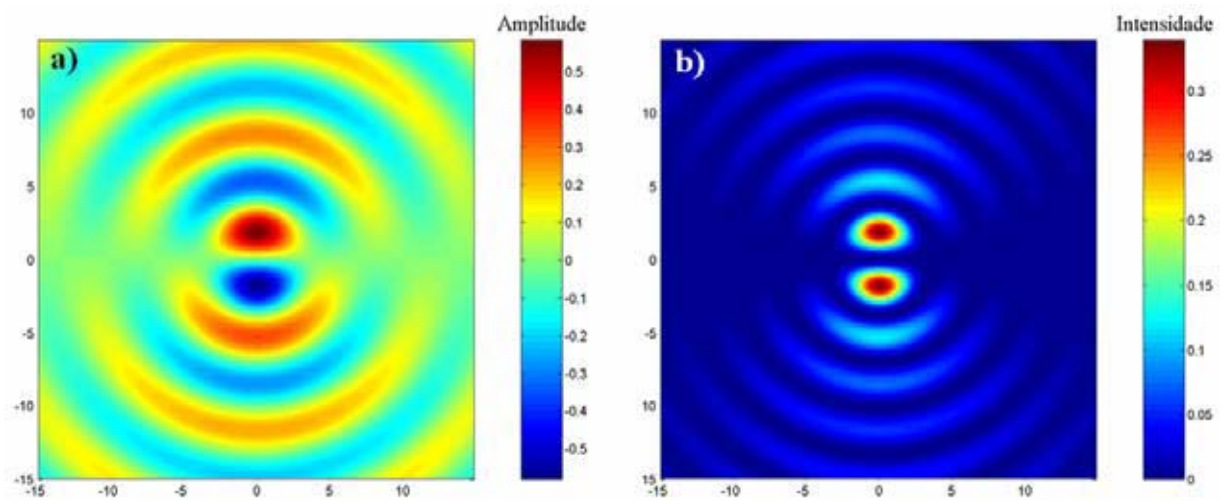


Figura 3.2: Modo Hermite-Bessel  $HB_{01}$ : a) amplitude e b) perfil transversal de intensidade.

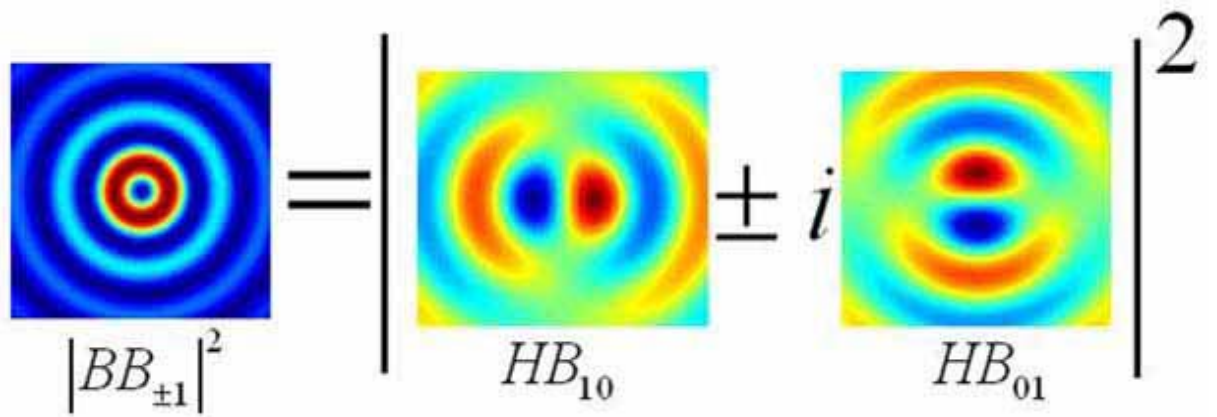


Figura 3.3: Representação gráfica da decomposição do feixe Bessel de primeira ordem.

Por outro lado, se a diferença de fase entre os feixes  $HB$  for  $0$  ou  $\pi$  obteremos o análogo dos feixes Hermite-Gauss  $+45^\circ$  e  $-45^\circ$ , respectivamente, ou seja:

$$\begin{aligned} HB_{+45^\circ} &= HB_{10} + HB_{01} \\ HB_{-45^\circ} &= HB_{10} - HB_{01}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

A Fig. 3.4 mostra o perfil de intensidade dos feixes  $HB_{+45^\circ}$  e  $HB_{-45^\circ}$ .

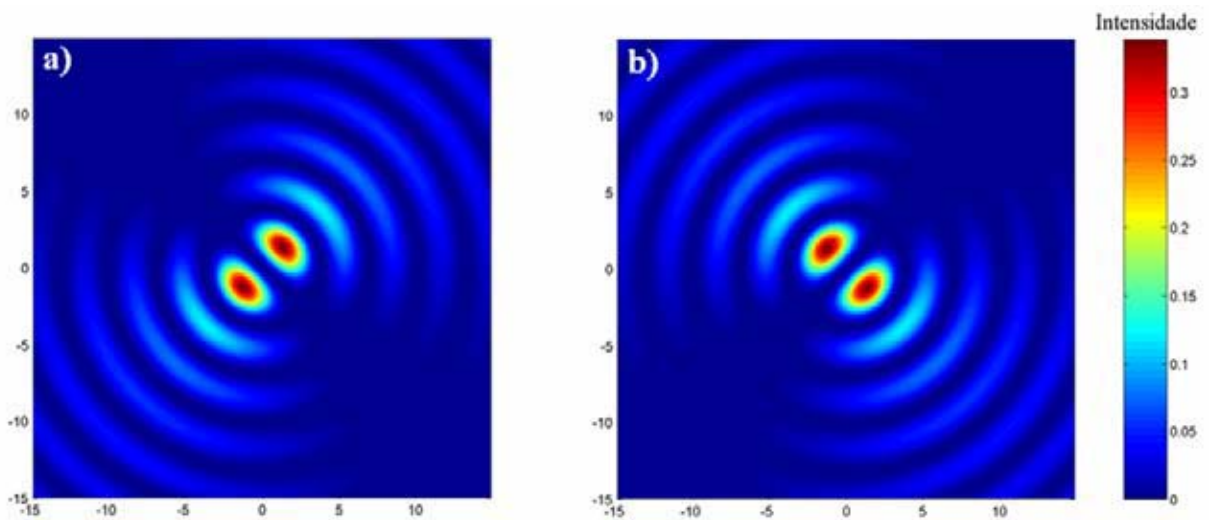


Figura 3.4: Perfil transversal de intensidade dos feixes Hermite-Bessel: a)  $HB_{+45^\circ}$  e b)  $HB_{-45^\circ}$ .

Vimos que os feixes Hermite-Bessel podem ser expressos como uma superposição de feixes Bessel. Este resultado sugere que os feixes Hermite-Bessel formam uma nova família de feixes não difratantes. O caráter não difratante dos feixes Hermite-Bessel pode ser observado explicitamente ao analisarmos o seu espectro angular.

No capítulo anterior, vimos que a amplitude de um feixe não difratante é dada por:

$$E(\rho, \phi, z) = A_0 \exp(i\beta_0 z) \int_0^{2\pi} A(\psi) \exp[i\alpha\rho \cos(\psi - \phi)] d\psi, \quad (3.8)$$

onde  $A_0$  é uma constante e  $A(\psi)$  é uma função da fase que modula o espectro angular.

Consideremos uma amplitude de espectro angular dada por:

$$A(\psi) \propto \cos(\psi). \quad (3.9)$$

Com isso, a equação (3.8) pode ser escrita como:

$$E(\rho, \phi, z) = A_0 \exp(i\beta_0 z) \cos(\phi) \int_0^{2\pi} \exp[i\alpha\rho \cos(u)] \cos(u) du, \quad (3.10)$$

onde fizemos a mudança de variável  $u = \psi - \phi$ . Sabendo que o resultado da integral da equação anterior é [32]:

$$\int_0^{2\pi} \exp[i\alpha\rho \cos(u)] \cos(u) du = 2\pi i J_1(\alpha\rho), \quad (3.11)$$

temos:

$$E(\rho, \phi, z) = 2\pi i A_0 \exp(i\beta_0 z) J_1(\alpha\rho) \cos(\phi). \quad (3.12)$$

Escrevendo  $\cos(\phi) = \frac{x}{\rho}$  e  $\frac{J_1(\alpha\rho)}{\alpha\rho} = \frac{1}{2} [J_0(\alpha\rho) + J_2(\alpha\rho)]$ , obtemos:

$$E(x, y, z) = B_0 \exp(i\beta_0 z) [J_0(\alpha\rho) + J_2(\alpha\rho)] H_1(x) H_0(y), \quad (3.13)$$

onde  $B_0 = 2\pi i\alpha A_0$  é uma constante. Este resultado se refere ao feixe  $HB_{10}$ . De forma análoga chegamos ao feixe  $HB_{01}$ , se a amplitude do espectro angular for da forma  $A(\psi) \propto \sin(\psi)$ . Com estes resultados, vemos claramente que os feixes Hermite-Bessel têm propriedades não difratantes. O espectro angular dos feixes Hermite-Bessel é um anel de raio  $\alpha$  modulado por uma função periódica, tipo seno e cosseno. A Fig. 3.5 mostra a amplitude do espectro angular dos feixes  $HB_{10}$  e  $HB_{01}$ .

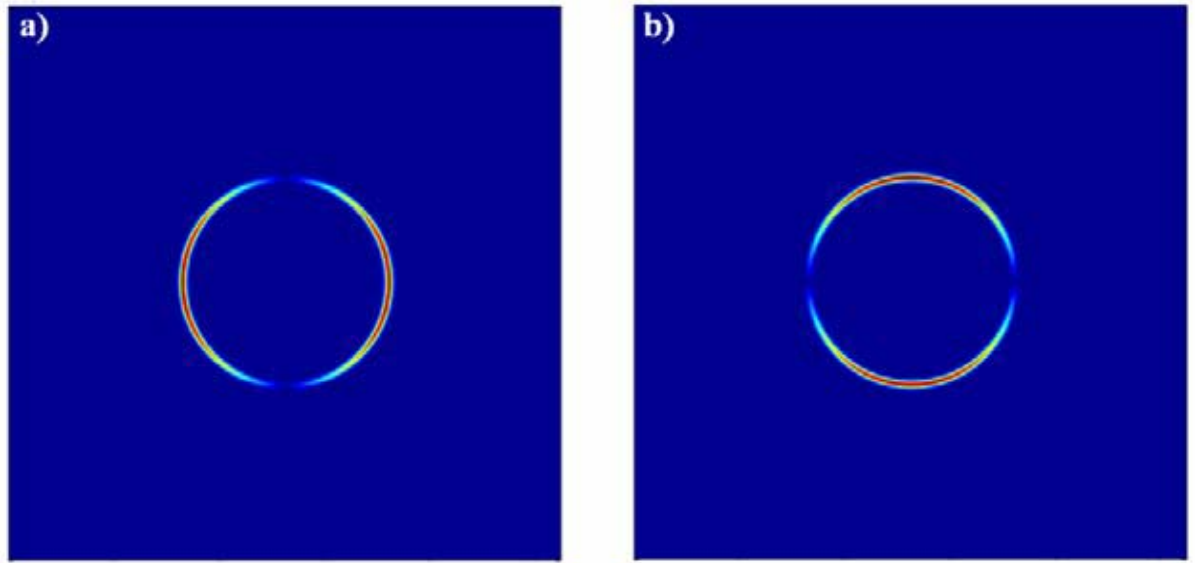


Figura 3.5: Amplitude do espectro angular dos feixes Hermite-Bessel: a)  $HB_{10}$  e b)  $HB_{01}$ .

Também verificamos que os feixes Hermite-Bessel são soluções da equação de Helmholtz em coordenadas Cartesianas, assim como a onda plana. Para mostrar esse resultado, substituímos a equação (3.5) na equação de Helmholtz. Assim, ficamos com:

$$\nabla_t^2 U + \alpha^2 U = 0, \quad (3.14)$$

onde  $\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  é o Laplaciano transversal em coordenadas Cartesianas e  $U = [J_0(\alpha\rho) + J_2(\alpha\rho)] H_1(x)H_0(y)$  é a amplitude transversal do feixe  $HB_{10}$ . Então, calculando

as segundas derivadas parciais de  $U$ , temos:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{-6}{\rho^2} J_2(\alpha\rho) H_1(x) + \frac{\alpha}{2\rho^3} J_3(\alpha\rho) [H_1(x)]^3 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{-2}{\rho^2} J_2(\alpha\rho) H_1(x) + \frac{\alpha}{2\rho^3} J_3(\alpha\rho) H_1(x) [H_1(y)]^2, \quad (3.16)$$

onde  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Para chegarmos às equações (3.15) e (3.16) usamos as seguintes relações de recorrência para as funções de Bessel e polinômios de Hermite:

$$\frac{d}{d\xi} J_l(\xi) = -J_{l+1}(\xi) + \frac{l}{\xi} J_l(\xi) \quad (3.17)$$

$$\frac{2l}{\xi} J_l(\xi) = J_{l-1}(\xi) + J_{l+1}(\xi) \quad (3.18)$$

$$\frac{d}{d\xi} H_n(\xi) = 2n H_{n-1}(\xi). \quad (3.19)$$

Com isso, o Laplaciano transversal de  $U$  nesse caso fica:

$$\nabla_t^2 U = \frac{-2\alpha}{\rho} J_1(\alpha\rho) H_1(x) H_0(y). \quad (3.20)$$

Logo, a equação (3.14) torna-se:

$$\frac{-2\alpha}{\rho} J_1(\alpha\rho) H_1(x) H_0(y) + \alpha^2 [J_0(\alpha\rho) + J_2(\alpha\rho)] H_1(x) H_0(y) = 0. \quad (3.21)$$

Usando mais uma vez a relação (3.18) teremos como resultado:

$$\frac{-2\alpha}{\rho} J_1(\alpha\rho) H_1(x) H_0(y) + \frac{2\alpha}{\rho} J_1(\alpha\rho) H_1(x) H_0(y) = 0,$$

confirmando que o feixe  $HB_{10}$  é solução da equação de Helmholtz em coordenadas Cartesianas. De forma análoga podemos mostrar que o feixe  $HB_{01}$  também é solução da equação de Helmholtz no sistema de coordenadas Cartesianas.



Diferentemente dos feixes Bessel, os feixes Hermite-Bessel não transportam momento angular orbital. A densidade de momento linear para esses feixes tem apenas uma componente na direção de propagação do feixe. Usando a aproximação escalar para os feixes Hermite-Bessel, a densidade de momento linear desses feixes será igual a equação (2.38) do capítulo anterior, ou seja:

$$\mathbf{p} = -\frac{\varepsilon_0}{2} \left[ \frac{\partial U^*(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \nabla U(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \nabla U^*(\mathbf{r}, t) \right], \quad (3.22)$$

onde desta vez temos que  $U = [J_0(\alpha\rho) + J_2(\alpha\rho)] H_1(x)H_0(y) \exp[i(\beta z - \omega t)]$  é a amplitude do feixe  $HB_{10}$ . Com isso, a densidade de momento linear para o feixe  $HB_{10}$  é dada por:

$$\mathbf{p} = \varepsilon_0 \beta \omega |U|^2 \hat{z}. \quad (3.23)$$

Como o momento angular orbital é uma consequência da componente azimutal do momento linear, vemos que os feixes Hermite-Bessel possuem momento angular orbital nulo. Este resultado pode ser verificado quando analisamos a distribuição de fase dos feixes Hermite-Bessel. A Fig. 3.6 mostra o padrão de interferência entre o feixe  $HB_{10}$  e uma onda plana. Como observamos, a figura de interferência do feixe Hermite-Bessel não exibe qualquer sinal de que o feixe possua momento angular orbital, ou seja, a presença de bifurcações. Notamos que as linhas de interferências estão deslocadas de  $\pi$  entre dois semi-anéis adjacentes, isso se deve ao fato que a função  $HB_{10}(x) = [J_0(x) + J_2(x)] H_1(x)$  oscila entre valores positivos e negativos para a coordenada  $x$ , como é mostrado na Fig. 3.7.

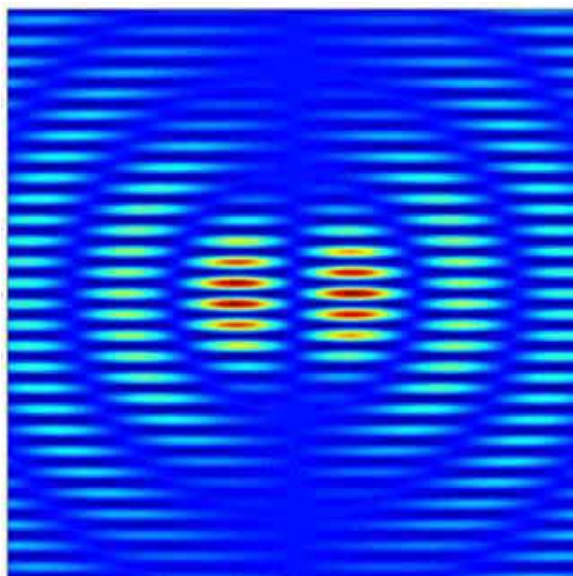


Figura 3.6: Padrão de interferência entre o feixe  $HB_{10}$  e onda plana.

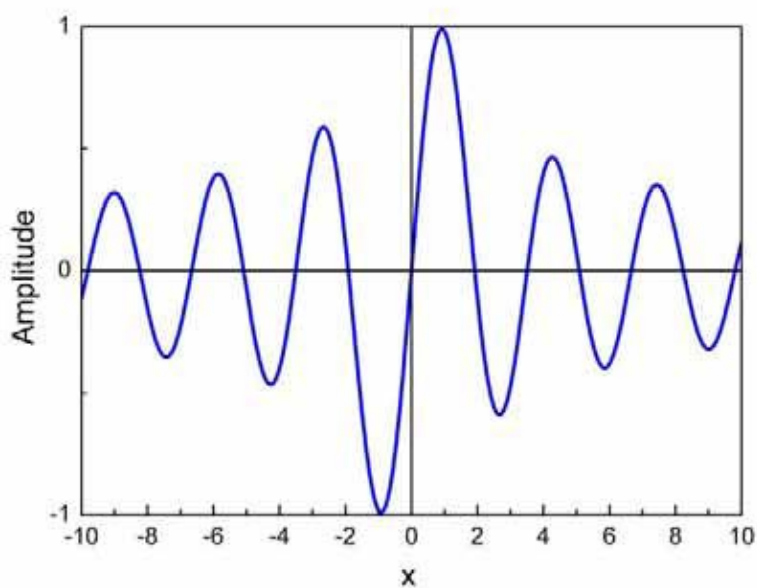


Figura 3.7: Distribuição de amplitude do feixe  $HB_{10}$  ao longo da coordenada  $x$ .

Baseado na decomposição dos feixes Bessel em termos dos feixes Hermite-Bessel, construímos uma representação geométrica para feixes de luz possuindo momento angular or-

bital em termos de feixes não difratantes, chamada de *Esfera para feixes Bessel e Hermite-Bessel*. Esta representação geométrica é mostrada na Fig. 3.8. Os feixes Bessel são representados pelos pólos norte e sul da esfera, os diferentes feixes Hermite-Bessel são representados na linha do equador da esfera.

Nossa representação é equivalente à esfera de Poincaré, que representa os diferentes estados de polarização da luz, e também é equivalente a esfera de modos de primeira ordem, que representa feixes de luz possuindo momento angular orbital em termos dos feixes Laguerre-Gauss e Hermite-Gauss. Em comparação com a esfera de Poincaré, na nossa representação o feixe  $HB_{10}$  é equivalente a polarização linear na horizontal, o feixe  $HB_{01}$  é equivalente a polarização linear na vertical, o feixe Bessel de ordem 1 é análogo a polarização circular no sentido anti-horário e o feixe Bessel de ordem  $-1$  é análogo a polarização circular no sentido horário. Cada ponto na superfície dessa esfera representa um estado de momento angular orbital em termos de feixes não difratantes, podendo ser escrito como uma superposição linear dos feixes Bessel de primeira ordem. Por exemplo, uma superposição dos feixes Bessel  $BB_1$  e  $BB_{-1}$  possuindo as mesmas intensidades, formam o feixe Hermite-Bessel  $HB_{10}$ , onde a fase relativa entre os dois feixes Bessel é zero. Outros feixes Hermite-Bessel são obtidos variando a fase relativa.

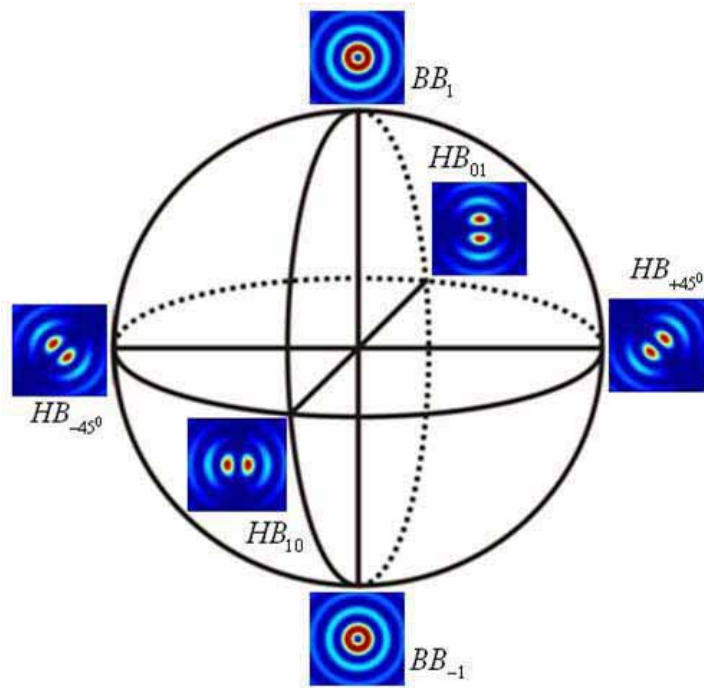


Figura 3.8: Esfera para feixes Bessel e Hermite-Bessel. Esta esfera mostra uma representação geométrica do momento angular orbital em termos de feixes não difratantes.

### 3.3 Experimento

Nesta seção, vamos demonstrar experimentalmente a decomposição dos feixes Bessel em termos dos feixes Hermite-Bessel. O aparato experimental é mostrado na Fig. 3.9. Um laser de argônio, operando no comprimento de onda  $\lambda = 514.5nm$  e potência de  $10mW$ , passa por um filtro espacial ( $SF$ ), de forma a gerarmos um feixe bem próximo de uma onda plana. Depois o feixe entra em dois interferômetros tipo Mach-Zehnder. O primeiro interferômetro, que chamaremos de interferômetro  $ABCD$ , será utilizado para medirmos a estrutura de fase dos feixes Bessel e Hermite-Bessel. Um feixe Bessel de ordem 1 é gerado no braço  $AC$  deste interferômetro, através de um holograma gerado por computador. O holograma utilizado neste experimento é o mesmo usado no experimento do capítulo 2. O segundo interferômetro que será designado como interferômetro  $DEFG$ , consiste em

dois divisores de feixes 50/50, um espelho, um penta-prisma e uma placa de vidro. Esta última é usada para controlar a diferença de fase entre os feixes que se propagam pelos dois braços do interferômetro. O interferômetro *DEFG* tem uma reflexão adicional em um dos braços, devido a presença do penta-prisma em seu caminho. Esta reflexão adicional inverte a componente do campo elétrico ao longo do eixo  $x$ , produzindo uma transformação de  $x$  para  $-x$ . Este interferômetro funciona como um divisor de modos transversos [33], sendo equivalente a um divisor de feixes polarizado, o qual decompõe um feixe com determinada polarização em suas componentes de polarização linear horizontal e vertical. Os feixes nas saídas 1 e 2 dos interferômetros, são detectadas por uma câmera *CCD* (*Charge-Coupled Device*) modelo 4910 Series da CoHU Electronics Division, conectada a um computador através de uma placa de aquisição de imagens modelo IMAQ PCI/PXI-1408 da National Instruments, o software de aquisição de dados foi o LabVIEW 6.1.

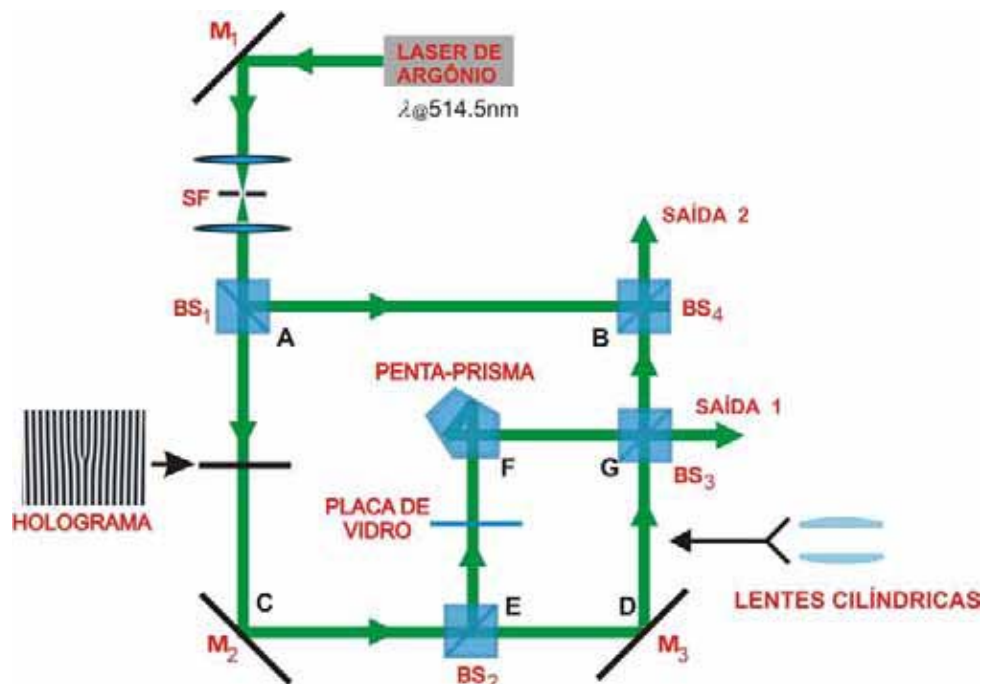


Figura 3.9: Aparato experimental.  $SF$  é um filtro espacial.  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  são espelhos.  $BS_1$  e  $BS_2$  são divisores de feixes 50/50.

Para demonstrar a decomposição de um feixe Bessel em termos dos feixes Hermite-

Bessel, bloqueamos o braço  $AB$  do interferômetro  $ABCD$ . Quando o feixe Bessel entra no interferômetro  $DEFG$ , a divisão em suas componentes transversais ortogonais é observada nas portas de saída desse interferômetro. Isto acontece porque o penta-prisma inverte a fase azimutal do feixe Bessel, de forma que, no divisor de feixes  $BS_3$ , temos uma superposição de feixes Bessel com  $l = 1$  e  $l = -1$ . Os perfis transversais de intensidade dos feixes que emergem das portas de saída do interferômetro são mostrados na Fig. 3.10. Estes resultados confirmam os nossos resultados teóricos, mostrados na Fig. 3.1(b) e Fig. 3.2(b).

Girando a placa de vidro colocada no braço  $EF$  do interferômetro, podemos variar o caminho óptico em um dos braços deste interferômetro. Com isso, podemos gerar quaisquer outros dois feixes Hermite-Bessel ortogonais, por exemplo, os feixes  $HB_{+45^\circ}$  e  $HB_{-45^\circ}$ . Este resultado é mostrado na Fig. 3.11.

Para mostrarmos que esses feixes são realmente feixes Hermite-Bessel, medimos sua estrutura de fase desbloqueando o braço  $AB$  do interferômetro  $ABCD$ . O resultado é mostrado na Fig. 3.12. O padrão de interferência é semelhante ao padrão da Fig. 3.6, mostrando mais uma vez a concordância entre nossos resultados teóricos e experimentais.

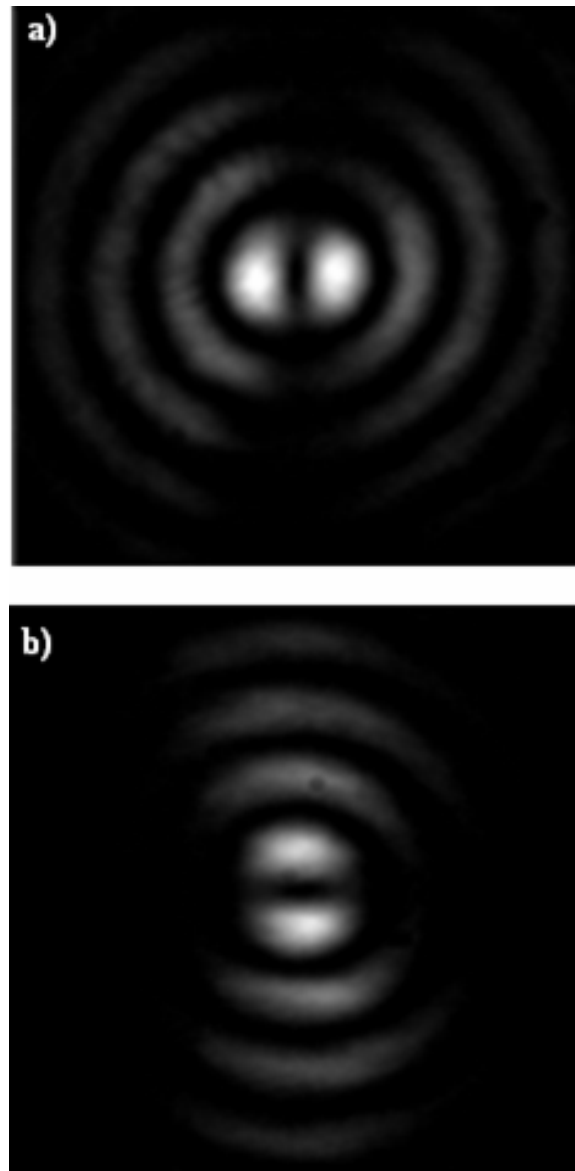


Figura 3.10: Perfil transversal de intensidade medido nas portas de saída do interferômetro *DEFG*: a) feixe  $HB_{10}$  e b) feixe  $HB_{01}$ .

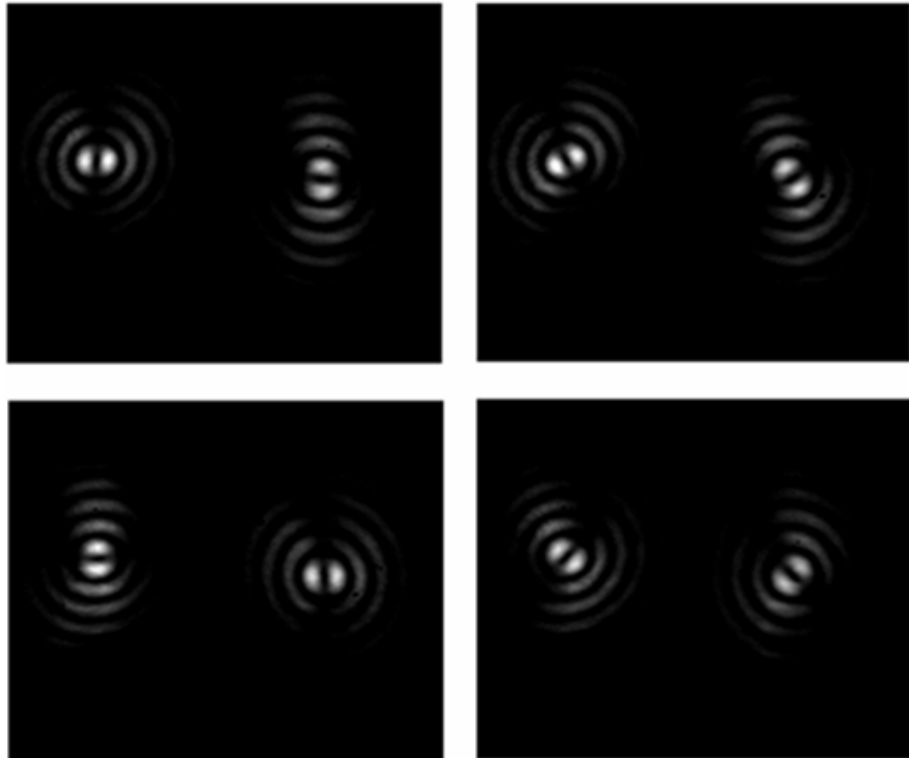


Figura 3.11: Perfil transversal de intensidade dos feixes Hermite-Bessel. Os perfis dos feixes giram quando giramos a placa de vidro, que é colocada no braço  $EF$  do interferômetro  $DEFG$ .



Figura 3.12: Padrão de interferência entre um feixe Hermite-Bessel e uma onda plana.

Na Fig. 3.13 comparamos os nossos resultados teóricos e experimentais através de um



gráfico da distribuição de intensidade ao longo da linha que corta o centro dos feixes mostrados nas Figs. 3.1(b) (teoria) e 3.10(a) (experimento). Note que as distribuições de intensidade teórica e experimental do feixe  $HB_{10}$  são equivalentes.

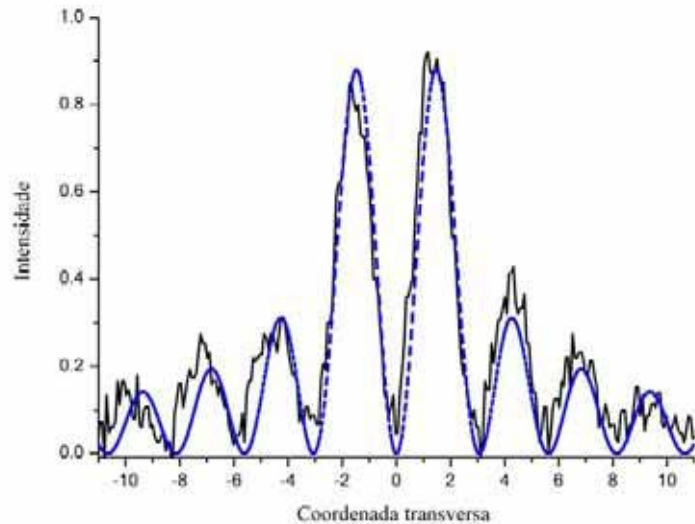


Figura 3.13: Distribuição de intensidade do feixe  $HB_{10}$  ao longo da coordenada  $x$ . A linha pontilhada azul corresponde à distribuição teórica do feixe e a linha preta corresponde à distribuição experimental.

Vamos agora mostrar um exemplo de transformação unitária que podemos realizar sobre os estados descritos na superfície da esfera de feixes Bessel e Hermite-Bessel, mostrada na Fig. 3.8. Considerando inicialmente o estado de momento angular orbital, descrito por um feixe Bessel de ordem 1. Queremos transformá-lo em um estado de momento angular orbital, descrito por um feixe Bessel com  $l = -1$ . Esta transformação é representada na esfera para feixes Bessel e Hermite-Bessel movendo um estado inicial, que é representado no pólo norte da esfera até um estado final, que é representado no pólo sul da esfera.

Esta transformação pode ser feita experimentalmente utilizando um par de lentes cilíndricas confocais [26]. Tanto o par de lentes cilíndricas como o interferômetro de Mach-Zehnder assimétrico foram apresentados para os feixes Laguerre-Gauss e Hermite-

Gauss. Aqui estamos aplicando tais resultados para os feixes Bessel e Hermite-Bessel, demonstrando sua equivalência. Esta transformação para os feixes Bessel é análoga a mudança feita por uma placa de onda de  $\lambda/2$ , que muda a luz circularmente polarizada no sentido anti-horário para luz circularmente polarizada no sentido horário e vice-versa.

Para demonstrarmos a mudança do estado inicial do momento angular orbital para os feixes Bessel com  $l = 1$  para o estado final com  $l = -1$ , inserimos um par de lentes cilíndricas no braço  $DG$  do interferômetro  $DEFG$ . O experimento foi realizado bloqueando o braço  $AB$  do interferômetro  $ABCD$  e o braço  $EF$  do interferômetro  $DEFG$ . Medimos o perfil transversal de intensidade do feixe após a passagem pelas lentes cilíndricas. O resultado é mostrado na Fig. 3.14. Vemos que o feixe tem o mesmo perfil transversal do feixe Bessel de primeira ordem.

Uma segunda medida é feita, desbloqueando o braço  $AB$  do interferômetro  $ABCD$ , para observarmos a estrutura de fase desse feixe e verificarmos sua carga topológica. O resultado é mostrado na Fig. 3.15. Note que a bifurcação teve sua orientação invertida com relação à do feixe Bessel mostrada na Fig. 2.10 do capítulo anterior. Desta forma, temos a confirmação de que a carga topológica desse feixe é  $l = -1$ . Este resultado demonstra que, com um par de lentes cilíndricas, pode-se transformar um feixe Bessel de ordem 1 em um feixe Bessel de ordem  $-1$ .

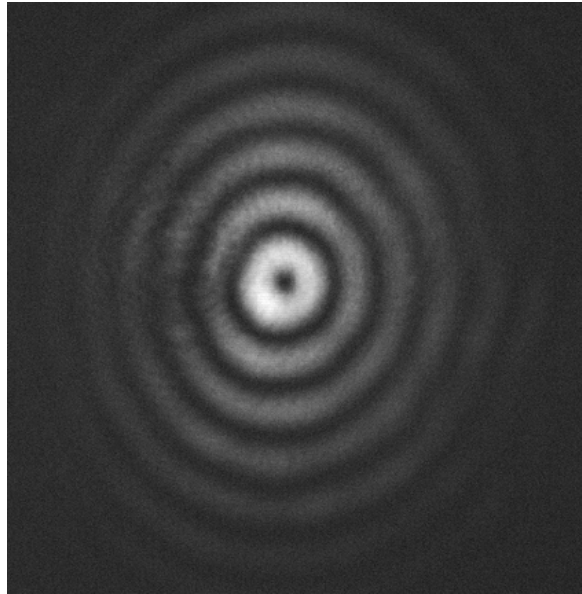


Figura 3.14: Perfil transversal de intensidade do feixe Bessel de primeira ordem depois de passar pelo par de lentes cilíndricas.

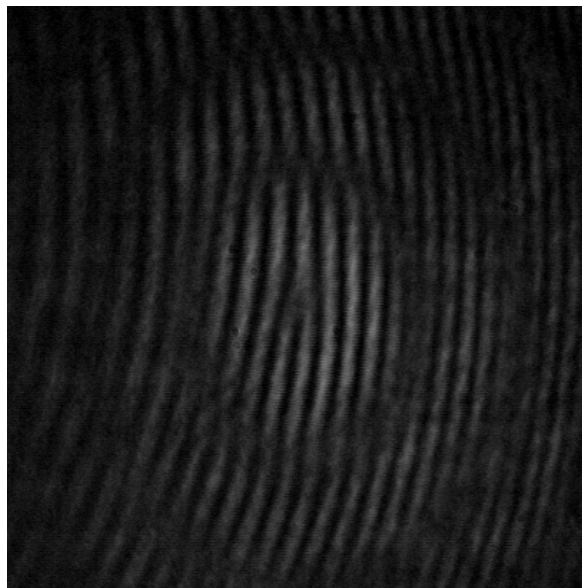


Figura 3.15: Padrão de interferência do feixe Bessel depois de passar pelas lentes cilíndricas.

## 3.4 Conclusão

Neste capítulo, demonstramos que os feixes Bessel podem ser decompostos em termos dos feixes Hermite-Bessel. Os feixes Hermite-Bessel são soluções da equação de Helmholtz em coordenadas Cartesianas e possuem propriedades não difratantes, mas diferem dos feixes Bessel por não possuírem momento angular orbital. Baseado nesta decomposição, desenvolvemos uma representação geométrica para feixes de luz possuindo momento angular orbital em termos de feixes não difratantes, onde cada ponto na superfície da esfera representa um estado de momento angular orbital e vice-versa.

Verificamos a validade dos nossos resultados teóricos, através da decomposição experimental de um feixe Bessel de ordem 1 em termos dos feixes Hermite-Bessel  $HB_{10}$  e  $HB_{01}$ . Mostramos, também, que variando o caminho óptico de um dos feixes Bessel (e conseqüentemente sua fase), podemos gerar quaisquer outros dois feixes Hermite-Bessel ortogonais, por exemplo, os feixes  $HB_{+45^{\circ}}$  e  $HB_{-45^{\circ}}$ .

Finalmente, demonstramos experimentalmente que é possível realizar uma transformação do estado de momento angular orbital de um feixe Bessel de primeira ordem de 1 para  $-1$ , com um par de lentes cilíndricas confocais.

# Capítulo 4

## Conclusão geral

Inicialmente, nesta dissertação, revisamos o conceito do momento angular transportado pela luz. Vimos que um feixe com polarização circular transporta momento angular intrínseco na direção de propagação, e que feixes possuindo uma fase azimutal possuem momento angular orbital. Vimos ainda que os estados de polarização da luz e os estados de momento angular orbital de um feixe de luz, descritos através de feixes paraxiais, possuem representações geométricas equivalentes, chamadas de esfera de Poincaré e esfera de modos de primeira ordem, respectivamente.

Em seguida, estudamos os feixes Bessel, que apresentam características não difratantes ao se propagarem no espaço livre, e que também descrevem estados de momento angular orbital. Discutimos os conceitos de geração de um feixe Bessel, em particular, estudamos a geração e caracterização de um feixe possuindo momento angular orbital em termos de um feixe Bessel de ordem 1.

No intuito de encontrar uma representação geométrica de feixes possuindo momento angular orbital em termos de feixes não difratantes, estudamos a decomposição de feixes Bessel de alta ordem em uma nova família de feixes, chamados de *feixes Hermite-Bessel*. Esta decomposição foi feita expandindo o termo de fase azimutal dos feixes Bessel em

termos dos polinômios de Hermite. Analisando o espectro angular dos feixes Hermite-Bessel, demonstramos que eles apresentam características não difratantes. Mostramos que os feixes Hermite-Bessel formam uma família de soluções da equação de Helmholtz em coordenadas Cartesianas, e correspondem aos estados de momento angular orbital nulo. Com base nesta decomposição, construímos a *esfera de feixes Bessel e Hermite-Bessel*, que representa geometricamente os estados de momento angular orbital em termos de feixes não difratantes. Realizamos experimentalmente a decomposição dos feixes Bessel em termos dos feixes Hermite-Bessel, através de um interferômetro de Mach-Zehnder assimétrico. Vimos que, variando o caminho óptico em um dos braços do interferômetro, podemos gerar quaisquer outros dois feixes Hermite-Bessel ortogonais. Observamos que variando o caminho óptico de forma contínua, é possível girar os feixes Hermite-Bessel continuamente. Este resultado sugere que esses feixes podem ser aplicados em micromanipulação óptica, por exemplo, controlando rotações de micro partículas. Por fim, utilizando um par de lentes cilíndricas confocais, conseguimos realizar uma transformação unitária em estados de momento angular orbital, descritos por feixes Bessel de ordem 1. Em nosso caso, transformamos um estado inicial com  $l = 1$  para um estado final  $l = -1$ . Na esfera de feixes Bessel e Hermite-Bessel, esta transformação é descrita pela mudança do estado inicial, representado no pólo norte da esfera para um estado final, representado no pólo sul da esfera.

Entre as diversas perspectivas, pretendemos generalizar a decomposição dos feixes Bessel para ordens maiores do que um e explorar as propriedades do espectro angular da luz para estudar a geração de outras famílias de feixes não difratantes.

# Bibliografia

- [1] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed, Wiley, New York, (1999).
- [2] M. J. Padgett, J. Courtial, and L. Allen, *Phys. Today*, 35 (may 2004).
- [3] R. A. Beth, *Phys. Rev.* **50**, 115 (1936).
- [4] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, and J. P. Woerdman, *Phys. Rev. A* **45**, 8185 (1992).
- [5] I. Freund, N. Shvartsman, *Phys. Rev. A* **50**, 5164 (1994).
- [6] M. S. Soskin, V. N. Gorshkov, and M. V. Vasnetsov, *Phys. Rev. A* **56**, 4064 (1997).
- [7] M. J. Padgett and L. Allen, *Opt. Commun.* **121**, 36 (1995).
- [8] L. Allen and M. J. Padgett , *Opt. Commun.* **184**, 67 (2000).
- [9] M. J. Padgett and J. Courtial, *Opt. Lett.* **24**, 430 (1999).
- [10] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon, New York, (1980).
- [11] Joseph W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, Second Edition McGraw-Hill, 1996.
- [12] J. E. Curtis, B. A. Koss, and D. G. Grier, *Opt. Commun.* **207**, 169 (2002).
- [13] J. Durnin, *J. Opt. Soc. Am. A* **4**, 651 (1987).

- [14] J. Durnin, J. J. Miceli Jr., and J. H. Eberly, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1499 (1987).
- [15] K. Volke-Sepulveda, V. Garcés-Chéz, S. Chávez-Cerda, J. Arlt, and K. Dholakia, *J. Opt. B: Quantum and Semiclass. Opt.* **4**, S82 (2002).
- [16] J. Arlt, V. Garcés-Chávez, W. Sibbett, and K. Dholakia, *Opt. Commun.* **197**, 239 (2001).
- [17] V. Garcés-Chávez, D. McGloin, H. Melville, W. Sibbett, and K. Dholakia, *Nature* **419**, 145 (2002).
- [18] D. McGloin, V. Garcés-Chávez, and K. Dholakia, *Optics Letters* **28**, 657 (2003).
- [19] W. C. Soares, D. P. Caetano, and J. M. Hickmann, *Proc. of SPIE* **6131**, 61310A (2006).
- [20] W. C. Soares, D. P. Caetano, and J. M. Hickmann, *Opt. Exp.* **14**, 4577 (2006).
- [21] G. R. Fowles, *Introduction to Modern Optics*, Dover Publications, Inc., New York, (1989).
- [22] M. Lax, W. H. Louisell, and W. B. McKnight, *Phys. Rev. A* **11**, 1365 (1975).
- [23] L. Allen, M. J. Padgett, M. Bibiker, *Progress in Optics*, Ed. E. Wolf, **39**, 291 (1999).
- [24] A. E. Siegman, *Lasers*, University Science Books, Mill Valley, CA, 1986.
- [25] E. Abramochkin and V. Volostnikov, *Opt. Commun.* **83**, 123 (1991).
- [26] M. W. Beijersbergen, L. Allen, H. E. L. O. van der Veen, and J. P. Woerdman, *Opt. Commun.* **96**, 123 (1993).
- [27] A. Vasara, J. Turunen, and A. T. Friberg, *J. Opt. Soc. Am. A* **6**, 1748 (1989).



- [28] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 4th ed, Academic Press, New York, (1995).
- [29] L. Mandel, E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press, New York, (1995).
- [30] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, Inc., New York, (1965).
- [31] J. Arlt and K. Dholakia, *Opt. Commun.* **177**, 297 (2000).
- [32] G. N. Watson, *Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, New York, (1966).
- [33] H. Sasada and M. Okamoto, *Phys. Rev. A* **68**, 012323 (2003).

## Trabalhos publicados

W. C. Soares, D. P. Caetano, and J. M. Hickmann, "Hermite-Bessel beams and the geometrical representation of nondiffracting beams with orbital angular momentum," *Opt. Exp.* **14**, 4577 (2006).

W. C. Soares, D. P. Caetano, and J. M. Hickmann, "Poincare sphere for nondiffracting beams with orbital angular momentum," *Proc. of SPIE* **6131**, 61310A (California, USA, 2006).

D. P. Caetano, W. C. Soares, and J. M. Hickmann, "Cartesian decomposition of high-order Bessel beams: a new class of nondiffracting beams," *CLEO/QELS JTuD106* (California, USA, 2006).

W. C. Soares, D. P. Caetano, and J. M. Hickmann, "Geometric representation for nondiffracting beams possessing orbital angular momentum," *XXIX ENFMC - Annals of Optics* (Minas Gerais, Brazil, 2006).

W. C. Soares, D. P. Caetano, J. M. Hickmann, "Decomposição de feixes não difratantes possuindo momento angular orbital," *XXII EFNNE*, 105 (Alagoas, Brazil, 2005).