

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS-UFAL
CAMPUS A. C. SIMÕES
FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA

CARLOS ANTUNIS BONFIM DA SILVA SANTOS

PROCESSAMENTO EM CHIP FOTÔNICO DE UM BIT DE INFORMAÇÃO
QUÂNTICA CODIFICADA EM FÓTONS TORCIDOS

MACEIÓ - AL
2026

CARLOS ANTUNIS BONFIM DA SILVA SANTOS

**PROCESSAMENTO EM CHIP FOTÔNICO DE UM BIT DE
INFORMAÇÃO QUÂNTICA CODIFICADA EM FÓTONS TORCIDOS**

Monografia apresentada como requisito parcial
para obtenção do título de Mestre em Física da
Matéria Condensada da Universidade Federal de
Alagoas - UFAL, Campus A. C. Simões.

Orientador: Prof. Dr. Alcenísio José de
Jesus Silva

Maceió - AL
2026



Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física
Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14. Campus A.C. Simões
Cidade Universitária
Tabuleiro dos Martins
57072-970 Maceió - AL, Brasil
FONE : (82) 3214-1423

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**“Processamento em Chip Fotônico de um Bit de Informação
Quântica Codificada em Fótons Torcidos”**

por

Carlos Antunis Bonfim da Silva Santos

A Banca Examinadora composta pelos professores Alcenísio José de Jesus Silva, como presidente da banca examinadora e orientador, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas; Eduardo Jorge da Silva Fonseca, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas e Jonathas Matias de Oliveira, do Instituto Federal de Alagoas, consideram o **candidato aprovado**.

Maceió, 08 de maio de 2026.

Documento assinado digitalmente
 **ALCENISIO JOSE DE JESUS SILVA**
Data: 08/05/2026 16:03:47-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Alcenísio José de Jesus Silva

Documento assinado digitalmente
 **EDUARDO JORGE DA SILVA FONSECA**
Data: 11/05/2026 13:41:56-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Eduardo Jorge da Silva Fonseca

Documento assinado digitalmente
 **JONATHAS MATIAS DE OLIVEIRA**
Data: 08/05/2026 16:13:46-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Jonathas Matias de Oliveira

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Girlaine da Silva Santos – CRB-4 – 1127

S237p Santos, Carlos Antunis Bonfim da Silva.
Processamento em chip fotônico de um bit de informação quântica
codificada em fótons torcidos / Carlos Antunis Bonfim da Silva Santos. – 2026.
70 f.: il.

Orientador: Alcenísio José de Jesus Silva.
Dissertação (Mestrado em Física da Matéria Condensada) - Universidade
Federal de Alagoas, Instituto de Física. Maceió, 2026.

Bibliografia: f. 44 - 47.

Apêndices: f. 48 - 53.

Anexos: f. 54 -70.

1. Teoria quântica. 2. Computação quântica. 3. Portas lógicas quânticas. 4.
Momento angular orbital. I. Título.

CDU: 530.145

Dedico,

Ao meu "pai véio", Antônio Cândido,
in memoriam.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de primeiramente agradecer a Deus principalmente pelo dom da vida, mas também pela capacidade de raciocinar que me permitiu alcançar voos profundos em direção aos mais belos e ímpares conhecimentos que hoje possuo.

Gostaria de agradecer também aos meus familiares por sempre me apoiarem e servirem em muitos casos como grandes exemplos para mim, e em especial aos meus amados pais Carlos Alberto dos Santos e Ilvaneide Bonfim da Silva, pela sua educação, amor e sabedoria que construíram-me a pessoa que hoje sou, sendo aqueles a quem eu devo a minha vida, meu profundo amor e a minha gratidão.

Meu agradecimento e amor se prolonga também à minha amada esposa Joana Mércia Guimarães Lira Silva, pelo seu apoio incondicional mesmo nos dias em que eu não sou uma boa companhia, pela sua presença que ilumina meus dias e por seu lindo sorriso que aquece meu coração e me motiva a seguir nos momentos mais difíceis.

Aos meus queridos amigos, quero também deixar meus agradecimentos. Adelmo Damião dos Santos Júnior, Alex Rodrigues da Silva, Ismael Felipe Ferreira dos Santos e Samila Ferraz de Oliveira pela amizade profunda que se renova a cada dia. Izaque José da Silva Melo, José Gilson de Melo Nascimento Neto pela amizade e por suportarem minhas discussões desconexas ao laboratório enquanto alinham os aparatos experimentais. Jhonatas Philipe Gomes de Almeida e Messias Zacarias Santos de Lima pela amizade que tem sido aprofundada ao longo do tempo. Katiele Valéria Pereira Brito e a minha amada Joana Mércia Guimarães Lira Silva, por não me expulsarem, ainda, da sala 7 mesmo comigo as atrapalhando recorrentemente. Hentony Viery da Silva Souza, Mateus da Silva, Ronald Santos Cavalcante e Tiago Alves de Moraes pela amizade que ainda tem por mim. A Jefferson da Rocha Silva e Jennifer Nathieli da Silva Rotandaro de Oliveira por, além da profunda amizade que desenvolvemos, me guiarem ao longo do curso quase que como um pai e uma mãe.

Aos servidores e professores do Instituto de Física (IF) da Universidade Federal de Alagoas (UFAL), excetuando-se alguns que em nada representam o papel de professor, meu muito obrigado por seu trabalho vital. Ao Professor Dr. Francisco Anacleto Barros Fidelis de Moura por me introduzir à física segundo a abordagem computacional e pela sua amizade. Ao Professor Dr. Alcenísio José de Jesus Silva pelo seu auxílio em fornecer bases que me possibilitaram compreender a óptica como hoje a compreendo e pela motivação à imergir na área de tecnologias quânticas. Ao Professor

Dr. Eduardo Jorge da Silva Fonseca por me introduzir ao processamento quântico de informação por intermédio de aparatos da óptica. Ao Professor Dr. Jonathas Matias de Oliveira pelo atenção e auxílio no alinhamento da teoria à dispositivos realizáveis na micro fabricação. Ao Professor Dr. Wagner Ferreira da Silva pelas suas incríveis aulas que mesmo sendo exclusivamente sobre métodos matemáticos me deram a base para compreender a beleza da teoria quântica. Ao Professor Dr. Guilherme Martins Alves de Almeida por sua amizade, bem como importantes colocações que me ensinaram, em minha primeira iniciação, o que significa trabalhar com ciência e por fim por aprofundar meus conhecimentos em quântica em suas aulas da pós-graduação. Ao Professor Dr. Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho por me introduzir à óptica quântica. Ao Professor Dr. Iram Marcelo Gléria por consolidar, a mim, a relação entre álgebra linear e equações diferenciais.

Ao grupo de Óptica e Nanoscopia (GON) gostaria de agradecer pela oportunidade ímpar de experienciar a física de uma maneira que nunca antes pensei que comporia minha carreira acadêmica: a experimental. Graças a essa incrível oportunidade pude crescer como pesquisador e alcançar visualizações da natureza que antes estavam apenas no âmbito da abstração, bem como alinhar tais abstrações com a linguagem da experimentação, admito que ainda preciso melhorar muito estes aspectos contudo, sem essa oportunidade, não seria capaz de compreender a física como hoje entendo. Por fim, gostaria de agradecer também pelo entusiasmo dos professores com a pesquisa apresentada nesta dissertação, entusiasmo esse, que permitiu o seu desenvolvimento ao estágio que hoje se encontra.

Meu avô, foi um homem simples, pescador, pedreiro, marceneiro, e tudo mais que a vida o requisitou. Mesmo não podendo aproveitar plenamente de sua companhia em vida, tenho a ele muita admiração - agradecimentos não bastariam. Dessa maneira, gostaria de finalizar meus agradecimentos dedicando todo este trabalho como uma homenagem *in memoriam* a meu avô Antônio Cândido, que para mim será lembrado como meu "pai véio" enquanto consciência eu tiver.

"The predictions of quantum mechanics ... were rather counterintuitive. People wanted to see these in a concrete way in the laboratory."

Manuel Erhard, Robert Fickler, Mario Krenn e Anton Zeilinger.
**Twisted Photons: New Quantum Perspectives in High
Dimensions**

RESUMO

Tecnologias quânticas prometem profundas quebras de paradigma no pensamento algorítmico, segurança de informação e metrologia de alta precisão. Nos anos recentes, fotônica quântica tem sido explorada extensivamente como uma plataforma confiável e robusta na direção destas tecnologias emergentes. Fótons torcidos, fótons portadores de momento angular orbital (MAO), têm sido explorados como uma plataforma de alta-dimensionalidade para codificar informação quântica, contudo, lidar com seus estados quânticos ainda é predominantemente dependente em aparatos de óptica de bancada. O presente trabalho demonstra como assimetrias azimutais podem ser projetadas como uma maneira de manipular fótons torcidos num chip fotônico. Em nossos resultados, nos ativemos principalmente à manipulação de estados quânticos a partir de modos laguerre-gaussianos (LG) com carga topológica $m = \pm 1$, onde demonstramos rotações de Pauli sobre a esfera de Poincaré, bem como algumas portas lógicas quânticas (QLGs) básicas.

Palavras-Chave: Processamento de informação quântica. Fótons torcidos. Portas lógicas quânticas de um qubit.

ABSTRACT

Quantum technologies promise profound breakthroughs in algorithmic thinking, information security and high-precision metrology. In recent years, quantum photonics has been extensively explored as a robust and reliable platform towards these emerging technologies. Twisted-photons, photons carrying orbital angular momenta (MAO), have been explored as a high-dimensional platform to encode quantum information, although, handling their quantum states is still reliant predominantly on bulk optical apparatus. The present work demonstrates how azimuthal asymmetries could be engineered as a manner to manipulate twisted-photons on a photonic chip. In our results, we were mainly attained on the manipulation of quantum states spanned by Laguerre-Gaussian modes with topological charge $m = \pm 1$ where we demonstrate Pauli rotations over the Poincare sphere, as well as some basic quantum logic gates (QLGs).

Keywords: Quantum information processing. Twisted photons. Single-qubit quantum logic gates.

LISTA DE FIGURAS

1	Ilustração do modelo teórico de uma máquina de computação desenvolvido por Alan Turing, sendo esta capaz de ler e processar informação. Tal máquina é caracterizada por um conjunto finito de símbolos de entrada inseridos numa fita, processados por um sistema finito de estados que segue uma programação, denominada função de transição.	19
2	Representação de um bit quântico sobre a esfera de estados. Destacam-se a base computacional, $ 0\rangle$ e $ 1\rangle$, respectivamente no polo norte e sul, ademais a um estado quântico arbitrário $ \psi\rangle$ em superposição representado num ponto da superfície da esfera com ângulos polar θ e azimutal φ	21
3	Exemplos de portas lógicas quânticas, da esquerda para a direita constam nome, representação comum em circuitos quânticos, sua forma matricial que tabula, a cada coluna, as coordenadas dos vetores de estado da base computacional transformados. De cima para baixo, estão expostas o operador Haddamard e as portas Pauli X,Y e Z.	23
4	Ilustração da porta lógica quântica Haddamard H atuando sobre um estado de entrada $(0\rangle + 1\rangle)/\sqrt{2}$ operada com rotações sobre a esfera de estados quânticos. A operação consiste em uma rotação de $\theta = \pi/2$ ao redor do eixo y , seguida de uma rotação de $\theta = \pi$ ao redor do eixo x , que é representado por uma reflexão com respeito ao plano xy , levando a um estado de saída de $ 0\rangle$	23
5	Ilustração do espectro de comprimentos de onda e frequências da luz, que se divide em três principais subdivisões: a luz ultravioleta (UV - 10 nm a 390 nm), a luz visível (390 nm a 760 nm) e o infravermelho (IR - 760 nm a 300 μm). A luz IR compreende as bandas do infravermelho próximo (NIR), infravermelho médio (NIR) e infravermelho distante (FIR). A luz UV, por sua vez, abrange as bandas do ultravioleta próximo (NUV), ultravioleta médio (MUV), o ultravioleta distante (FUV) e ultravioleta extremo (EUV).	26

6	Perfis transversais de intensidade e fase dos modos LG_m^p para distintas cargas topológicas, $m = -2, -1, 0, +1, +2$ respectivamente, e ordem radial $p = 0$. O perfil apresenta a fase onde a intensidade é no mínimo 30% da intensidade máxima. Pode-se observar o perfil de fase variando de $-\pi m$ a $+\pi m$ azimutalmente ao longo do anel de intensidade máxima, conferindo a tais modos um momento angular orbital intrínseco de $m\hbar$ por fóton.	27
7	Perfis transversais de intensidade e fase dos modos $HG_{m,n}$, para $m = 2, 1, 0, 0, 0$ e $n = 0, 0, 0, 1, 2$ respectivamente. O perfil apresenta a fase onde a intensidade é no mínimo 30% da intensidade máxima. Pode-se observar o perfil de fase variando de $-\pi$ a $+\pi$ entre os lóbulos de intensidade máxima.	27
8	Representação da analogia entre estados de bits quânticos e de luz estruturada de primeira ordem sobre a esfera de estados quânticos de um qubit, a esquerda, e a esfera de Poincaré de modos transversais, a direita. A esquerda, destacam-se os estados de base computacional, $ 0\rangle$ e $ 1\rangle$, nos polos e, a direita, destacam-se os modos laguerre-gauss, correspondentes a $m = -1$ e $+1$, nos polos superior e inferior, respectivamente, e os modos hermite-gauss, correspondentes a $m = 1, 0$ e $n = 0, 1$, e suas versões rotacionadas, dispostos ao longo do equador.	29
9	Ilustração do processo iterativo de estimativa numérica da propagação da luz em um chip fotônico, onde a evolução espacial é aplicada iterativamente, numa sequência de planos equiespaçados por uma distância Δz , para obter o perfil do modo óptico em cada plano transversal ao eixo de propagação.	35
10	Visualização do modelo para um guia anular fabricado em vidro ($n_0 = 1.5078$), com um raio a de $4.4\mu m$ e uma largura w de $2.0\mu m$ com um contraste de índice Δn_0 de 2.2×10^{-3} entre o núcleo e a casca. O guia anular possui uma geometria de anel circular, projetada para guiar a luz torcida. Apresentam-se em (a) o perfil tridimensional do guia anular, e em (b) o perfil transversal do guia anular no plano transversal $z = 0\mu m$, que corresponde ao perfil em qualquer outro plano transversal no chip fotônico.	38
11	Visualização do perfil transversal de entrada dos modos LG de carga $m = \pm 1$. O perfil apresenta a fase onde a intensidade é no mínimo 30% da intensidade máxima.	39

12	Visualização da evolução de potência dos modos laguerre-gaussianos $m = \pm 1$ no guia anular. Apresentam-se em (a) e (b) as evoluções de potência para perfis de entrada com cargas topológicas $m = -1$ e $m = +1$, respectivamente, até uma distância de $5mm$	39
13	Visualização do modelo para um guia anular com perturbação do tipo Pauli-X fabricado em vidro ($n_0 = 1.5078$), com um guia anular de raio de $4.4\mu m$ e uma largura de $2.0\mu m$ com um contraste de índice de 2.2×10^{-3} entre o núcleo e a casca e um par de alterações gaussianas diametralmente opostas, a $4.4\mu m$ da origem com um contraste de índice de 1.1×10^{-3} . Apresentam-se em (a) o perfil tridimensional, e em (b), (c) e (d) os perfis transversais nos planos transversais $z = 0.0\mu m$, $z = 1.0mm$ e $z = 5.0mm$, respectivamente.	41
14	Visualização do modelo para um guia anular com perturbação do tipo Pauli-Y fabricado em vidro ($n_0 = 1.5078$), com um guia anular de raio de $4.4\mu m$ e uma largura de $2.0\mu m$ com um contraste de índice de 2.2×10^{-3} entre o núcleo e a casca e um par de alterações gaussianas diametralmente opostas, a $4.4\mu m$ da origem com um contraste de índice de 1.1×10^{-3} . Apresentam-se em (a) o perfil tridimensional, e em (b), (c) e (d) os perfis transversais nos planos transversais $z = 0.0\mu m$, $z = 1.0mm$ e $z = 5.0mm$, respectivamente.	42
15	Visualização da evolução de potência dos modos laguerre-gaussianos $m = \pm 1$ no guia anular com perturbação do tipo Pauli-X. Apresentam-se em (a) e (b) as evoluções de potência para perfis de entrada com cargas topológicas $m = -1$ e $m = +1$, respectivamente, até uma distância de $5mm$	43
16	Visualização da evolução de potência dos modos laguerre-gaussianos $m = \pm 1$ no guia anular com perturbação do tipo Pauli-Y. Apresentam-se em (a) e (b) as evoluções de potência para perfis de entrada com cargas topológicas $m = -1$ e $m = +1$, respectivamente, até uma distância de $5mm$	43
17	Visualização do efeito da QLG Pauli-X, implementada com uma fidelidade média de 0.9941, sobre os modos LG. Apresentam-se em (a) a visualização dos perfis transversais de saída e em (b) e (c) as evoluções de potência para perfis de entrada com cargas topológicas $m = -1$ e $m = +1$, respectivamente, até uma distância de $5mm$	45

18	Visualização do efeito da QLG Pauli-Y, implementada com uma fidelidade média de 0.9936, sobre os modos LG. Apresentam-se em (a) a visualização dos perfis transversais de saída e em (b) e (c) as evoluções de potência para perfis de entrada com cargas topológicas $m = -1$ e $m = +1$, respectivamente, até uma distância de $5mm$	46
19	Visualização da tabela-verdade quântica da QLG Pauli-X.	47
20	Visualização da tabela-verdade quântica da QLG Pauli-Y.	47
21	Visualização do efeito da QLG Pauli-Z, implementada com uma fidelidade média de 0.9866, sobre os modos LG. Apresentam-se em (a) a visualização dos perfis transversais de saída e em (b) e (c) as evoluções de potência para perfis de entrada com cargas topológicas $m = -1$ e $m = +1$, respectivamente, até uma distância de $5mm$	49
22	Visualização do efeito da QLG Haddamard, implementada com uma fidelidade média de 0.9889, sobre os modos LG. Apresentam-se em (a) a visualização dos perfis transversais de saída e em (b) e (c) as evoluções de potência para perfis de entrada com cargas topológicas $m = -1$ e $m = +1$, respectivamente, até uma distância de $5mm$	50
23	Visualização da tabela-verdade quântica da QLG Pauli-Z. .	51
24	Visualização da tabela-verdade quântica da QLG Haddamard.	51
25	Representação gráfica dos polinômios de Hermite $H_0(z) = 1$, $H_1(z) = 2z$, $H_2(z) = 4z^2 - 2$, $H_3(z) = 8z^3 - 12z$, $H_4(z) = 16z^4 - 48z^2 + 12$, definidos segundo a convenção física. . .	60
26	Representação gráfica dos polinômios associados de Laguerre, $L_1^{(\alpha)}(z) = -z + \alpha + 1$, $L_2^{(\alpha)}(z) = \frac{1}{2}(z^2 - 2(\alpha + 2)z + (\alpha + 1)(\alpha + 2))$ e $L_3^{(\alpha)}(z) = \frac{1}{6}(-z^3 - 3(\alpha + 3)z^2 - 3(\alpha + 2)(\alpha + 3)z + (\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3))$ para $\alpha = 0, 1, 2$	61
27	Representação gráfica, para $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$, das funções de Bessel do primeiro tipo $J_\nu(z)$	61
28	Representação gráfica, para $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$, das funções de Bessel modificadas do primeiro tipo $I_\nu(z) = i^{-\nu} J_\nu(iz)$	62

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MAO	Momento angular orbital da luz
SLM	Modulador espacial de luz (do inglês <i>spatial light modulator</i>)
SPP	Placas de fase espirais (do inglês <i>spiral phase plates</i>)
PC	Chip fotônico (do inglês <i>photonic chip</i>)
QIP	Processamento quântico de informação (do inglês <i>quantum information processing</i>)
LG	Modo laguerre-gaussiano
QLG	Porta lógica quântica (do inglês, <i>quantum logic gate</i>)
Bit	Dígito binário (do inglês, <i>binary digit</i>)
QTM	Máquina de Turing quântica (do inglês <i>quantum Turing machine</i>)
Qubit	Bit quântico (do inglês <i>quantum bit</i>)
DOF	Grau de liberdade (do inglês <i>degree of freedom</i>)
QKD	Distribuição quântica de chaves (do inglês <i>quantum key distribution</i>)
SVEA	Aproximação do envelope lentamente variante (do inglês <i>slow varying envelope approximation</i>)
HG	Modo hermite-gaussiano
CMT	Teoria de modos acoplados (do inglês <i>coupled-mode Theory</i>)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Aspectos de teoria da informação quântica	18
1.1.1	Bits quânticos e a esfera de estados	20
1.1.2	Processamento de um bit quântico de informação	22
2	MODELO E FORMALISMO	25
2.1	Modos estruturados de luz	26
2.1.1	Quantização de modos e a esfera de Poincaré de modos transversais	28
2.2	Propagação de fótons torcidos em chips fotônicos	29
2.2.1	Teoria de modos acoplados por perturbações azimutais	30
3	METODOLOGIA	33
3.1	Estimativa da evolução espacial	34
3.2	Fidelidade média de um processo quântico unitário	35
4	RESULTADOS OBTIDOS	37
4.1	Oscilações de modos sobre a esfera de Poincaré de modos transversais	37
4.1.1	Implementações de portas lógicas quânticas	43
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	52
	REFERÊNCIAS	53
	APÊNDICES	57
A	FUNÇÕES ESPECIAIS	58
A.1	Ondas planas e expansão em série de Fourier	59
A.2	Polinômios de Hermite e polinômios associados de Laguerre	60
A.3	Funções de Bessel do primeiro tipo e sua versão modificada	61
	ANEXOS	63
A	CÓDIGO DESENVOLVIDO	64
B	DEMONSTRAÇÕES DE TEOREMAS	74

1 INTRODUÇÃO

Em decorrência do seu caráter eletromagnético, a luz é capaz de transportar momento angular, o qual apresenta-se de duas distintas formas, sendo uma a intrínseca, relacionada à polarizabilidade circular da luz, e uma orbital, relacionada à configuração espacial do campo elétrico^[1]. Em 1992, Allen e seus colaboradores propuseram que modos ópticos que apresentam um perfil helicoidal de frentes de onda, ou seja, uma fase múltipla inteira da coordenada angular, $m\theta$, em cada plano transversal à propagação representam modos ópticos cujos fótons portam em média $m\hbar$ de momento angular orbital (MAO)^[2], sendo tal número inteiro m denominado carga topológica.

Devido à existência de ilimitados modos transversais ortogonais capazes de portar MAO, as cargas topológicas têm sido investigadas como uma importante plataforma para a multiplexação de informações, de modo a permitir uma transmissão de informação mais compacta^[3–5]. Além disso, esta inerente alta-dimensionalidade é igualmente apresentada no regime quântico pelos chamados fótons torcidos, fótons que carregam quantidades bem definidas de MAO, propiciando assim um importante fundamento às emergentes tecnologias quânticas^[6–11]. Ainda que alguns resultados presentes na literatura científica apontem integrações em chip relacionadas a estados de luz torcida^[12–16], estas são mais voltadas à sua geração e preservação, de modo que a manipulação do estado quântico de fótons torcidos ainda depende predominantemente de aparatos de óptica de bancada^[9, 17, 18], como moduladores espaciais de luz (SLMs, do inglês *spatial light modulators*) e placas de fase espirais (SPPs, do inglês *spiral phase plates*).

O objetivo do presente trabalho foi demonstrar como estruturar azimuthalmente o índice de refração em um chip fotônico (PC, do inglês *photonic chip*) pode permitir a miniaturização do processamento quântico de informação (QIP, do inglês *quantum information processing*) incorporada em fótons torcidos de maneira fidedigna. Nos ativemos, em particular, ao subespaço de modos gerado pelos modos laguerre-gaussianos (LG), abordados na Seção 2.1, com carga topológica $m = \pm 1$, por ser o sistema de dois níveis com fótons torcidos mais natural a se tratar em guias de onda¹. Para este subespaço, demonstramos a capacidade de processar estados de luz torcida com alta fidelidade em chips fotônicos. Implementamos as rotações sobre a esfera de Poincaré de modos transversais, estabelecendo

¹Os modos LG com carga topológica ± 1 apresentam maior estabilidade comparado a ordens superiores em dispositivos microfabricados.

assim uma rota realizável na direção de implementações microfabricadas de portas lógicas quânticas (QLGs, do inglês *quantum logic gates*) para um único bit quântico.

No decorrer do presente capítulo, abordaremos ainda alguns aspectos fundamentais teóricos da informação quântica, bem como suas aplicações para as tecnologias da informação, a fim de dar contexto a respeito dos fundamentos de informação quântica. Posteriormente, no Capítulo 2, iremos nos aprofundar no referencial teórico acerca de luz torcida, introduzindo a forma com a qual o presente trabalho propõe manipulá-la estruturando inomogeneidades azimutais em chips fotônicos. No Capítulo 3 nos ateremos aos métodos empregados na construção dos resultados numéricos obtidos neste trabalho, os quais serão, por fim, apresentados no Capítulo 4.

1.1 Aspectos de teoria da informação quântica

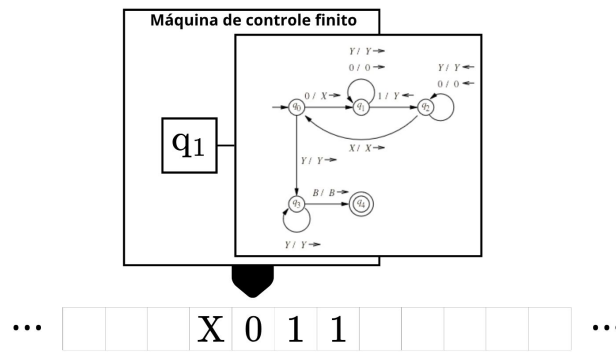
A teoria da informação quântica investiga tarefas de processamento de informação que podem ser cumpridas por intermédio de aspectos quânticos da natureza^[19], tal como objetivamos realizar por meio do presente trabalho. Sendo esta, um ramo de interface entre as recentes teorias que modelam máquinas computadoras modernas, descritas pelo matemático Alan Turing^[20], e aspectos quânticos da natureza, introduzidas por físicos como Max Planck, Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger^[21–23] e diversos outros.

A abstrata máquina descrita por Turing, ilustrada na Figura 1, captura completamente a essência do processo de computação, e junto à álgebra de Boole^[24] forneceu as bases da arquitetura moderna de máquinas capazes de computar^[25] baseada em sistemas de dois estados que permitem codificar a informação em dígitos binários (bits, do inglês *binary digits*)^[26]. Dada a sua aparente completude, Turing, em colaboração com Alonzo Church, conjecturou que todo processo algorítmico realizável num dispositivo físico pode ser eficientemente computado por meio de seu modelo de computação, conjectura conhecida como *tese de Church-Turing*.

Conjectura 1 (Tese de Church-Turing). *Qualquer processo algorítmico pode ser simulado eficientemente por meio de uma máquina de Turing.*

Uma importante contraposição à esta conjectura ocorreu em 1977, quando Robert Solovay e Volker Strassen propuseram um algoritmo capaz de testar quando um inteiro é primo ou composto^[28], onde a aleatoriedade

Figura 1: Ilustração do modelo teórico de uma máquina de computação desenvolvido por Alan Turing, sendo esta capaz de ler e processar informação. Tal máquina é caracterizada por um conjunto finito de símbolos de entrada inseridos numa fita, processados por um sistema finito de estados que segue uma programação, denominada função de transição.



Fonte: Modificada de J. E. Hopcroft, R. Motwani, e J. D. Ullman [27] pelo autor, 2026.

é parte fundamental da computação, isto é, o algoritmo não determina com certeza a primalidade de um número. A vantagem em comparação a quaisquer outros processos algorítmicos determinísticos apresentada por alguns algoritmos probabilísticos^[29], ilustra que máquinas de Turing que se beneficiam de aleatoriedade podem resolver problemas de maneira mais eficiente que suas versões puramente determinísticas.

Em 1985, David Deutsch investigou até que nível a complexidade de processos algorítmicos podem ser reduzidas^[30]. Deutsch notou que as leis físicas poderiam amplamente ser empregadas para tal fim, contudo, uma vez que apresentam-se quânticas em essência, máquinas careceriam da compreensão de tal aspecto da natureza para serem verdadeiramente capazes de tratar quaisquer processos algorítmicos impelindo-o assim a conjecturar que apenas máquinas de Turing quânticas (QTM's, do inglês *quantum Turing machines*) seriam, em tese, capazes de processar de maneira eficiente quaisquer processos^[30].

Conjectura 2 (Tese de Church-Turing-Deutsch). *Qualquer processo algorítmico pode ser simulado eficientemente por meio de uma máquina de Turing quântica.*

A verificação da [modificação da tese de Church-Turing](#) feita por Deutsch, no entanto, ainda representa um importante problema científico e tecnológico em aberto à teoria da informação quântica, dado que o conheci-

mento humano acerca dos fenômenos da natureza é extremamente limitado à sua capacidade de experimentação e pode ser ultrapassado celeremente por pesquisas na fronteira da física. Assim demonstrando a necessidade de descrever formalmente o funcionamento das máquinas propostas por Deutsch, de modo que abarque rigorosamente a sua capacidade de armazenar e processar informação levando em conta os aspectos quânticos da natureza, rigor este que é introduzido pelos postulados fundamentais da teoria quântica.

1.1.1 Bits quânticos e a esfera de estados

A premissa fundamental a ser feita quanto a uma QTM reside em seus estados de máquina. O processamento quântico de informação exige, obrigatoriamente, a sua codificação em uma plataforma física, como no momento angular carregado por um fóton no caso do presente trabalho. Nesse sentido, os estados de processamento de uma máquina quântica têm de corresponder a estados, tais quais os definidos no [primeiro postulado da teoria quântica](#)^[19, 31] que estabelece o formalismo matemático capaz de expressar o conceito de informação quântica.

Postulado 1. *Associado a qualquer sistema físico isolado existe um vetor de estado, elemento de um espaço vetorial complexo dotado de produto interno, cuja norma é a unidade, que permite descrevê-lo completamente em um dado tempo.*

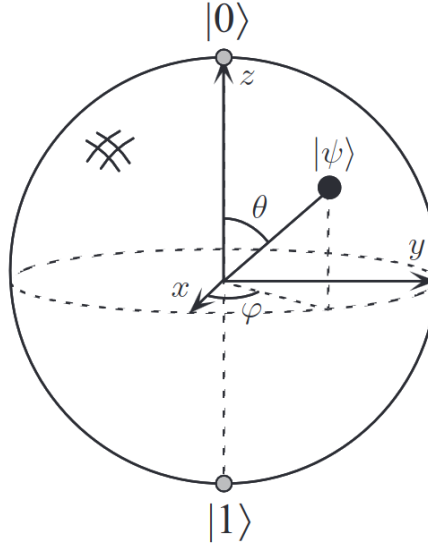
Para sistemas quânticos cujo alfabeto de estados é binário, ou seja, possuem apenas dois estados acessíveis², denominamos o estado de processamento de uma QTM por bit quântico (qubit, do inglês *quantum bits*), dada a sua analogia aos bits clássicos^[19, 32, 33].

Definição 1 (Bit quântico). Um bit quântico consiste num estado de uma máquina de Turing quântica em que dois estados independentes são acessíveis, representando à máquina os valores binários 0 e 1.

As características quânticas inerentes aos qubits permitem a uma QTM acessar estados de máquina inacessíveis aos seus análogos clássicos, conferindo assim a estes ganho de performance em certas tarefas. Estados esses que correspondem a interferências entre os dois estados independentes

²Da mesma maneira que no presente trabalho onde um fóton pode ser caracterizado com carga topológica $m = \pm 1$.

Figura 2: Representação de um bit quântico sobre a esfera de estados. Destacam-se a base computacional, $|0\rangle$ e $|1\rangle$, respectivamente no polo norte e sul, ademais a um estado quântico arbitrário $|\psi\rangle$ em superposição representado num ponto da superfície da esfera com ângulos polar θ e azimutal φ .



Fonte: M. A. Nielsen e I. L. Chuang [19], 2000.

denotados por $|0\rangle$ e $|1\rangle$, denominados base computacional, ou seja,

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (1)$$

onde as coordenadas α, β são números complexos que representam a similitude do estado quântico a cada estado da base computacional, cujos quadrados dos valores absolutos, $|\alpha|^2$ e $|\beta|^2$, correspondem a probabilidades de o estado ser detectado em seu respectivo estado da base computacional, $|0\rangle$ e $|1\rangle$, de maneira que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, restrição que corresponde à normalização do estado quântico[19, 32, 33].

Complementarmente, como estados quânticos que diferem apenas por uma fase global Γ são fisicamente equivalentes, um qubit pode ser parametrizado utilizando coordenadas angulares

$$|\psi\rangle = e^{i\Gamma} \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} |1\rangle \right) \equiv \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} |1\rangle, \quad (2)$$

tal representação permite ilustrar um *qubit* como um vetor abstrato sobre a superfície de uma esfera como ilustrado na Figura 2, onde θ e φ consistem nos ângulos polar e azimutal em que o estado se localiza sobre a esfera de estados[19, 32, 33]. Deve-se destacar que os ângulos apresentados na Equação 2 apenas servem como parâmetros abstratos na esfera de estados, não

representando, a priori, propriedades geométricas intrínsecas do sistema quântico.

1.1.2 Processamento de um bit quântico de informação

Outra importante consideração a ser feita, em especial ao presente trabalho, a respeito da QTM é quanto à forma com a qual ela efetua o seu processamento. O processamento quântico de informação efetivamente consiste, analogamente à computação clássica, em alterar o estado de uma QTM. Nessa linha de raciocínio, devemos impor que o processamento ocorra também segundo os postulados da mecânica quântica, conforme descrito pelo [segundo postulado da teoria quântica](#)^[19].

Postulado 2. *A evolução do vetor de estado de um sistema quântico fechado é completamente caracterizada por um operador linear unitário. Isto é, sob as restrições impostas, um processo quântico altera um vetor de estado $|\psi\rangle$ por um operador unitário U , de modo que este se torna $|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$.*

É digno de destaque que tal postulado é válido apenas no contexto de sistemas quânticos fechados, como modelaremos no presente trabalho. Ao se levar em conta efeitos de acoplamentos com o ambiente, tal qual é experimentado fisicamente em decorrência de imperfeições na fabricação e outros, a dinâmica de um fóton em um guia de onda apresenta-se de maneira extremamente diversa^[13, 34], introduzindo erros ao processamento efetivo de informação de modo a afetar a pureza do bit quântico^[13, 19, 33].

Para um único qubit, aplicar uma QLG, como as exemplificadas na [Figura 3](#), a um estado quântico, que corresponde a processar a informação, modifica sua similitude a cada estado da base canônica, ou seja,

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \mapsto U|\Psi\rangle = \eta|0\rangle + \zeta|1\rangle. \quad (3)$$

Devido ao operador U ser unitário, a normalização do estado quântico $|\eta|^2 + |\zeta|^2 = 1$ se mantém^[19, 32, 33]. Pode-se visualizar com mais clareza o efeito das QLGs, ao se considerar a [representação angular dos qubits](#), dado que na sua operação os ângulos são alterados,

$$|\Psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|1\rangle \mapsto U|\Psi\rangle = \cos\frac{\gamma}{2}|0\rangle + \sin\frac{\gamma}{2}e^{i\xi}|1\rangle, \quad (4)$$

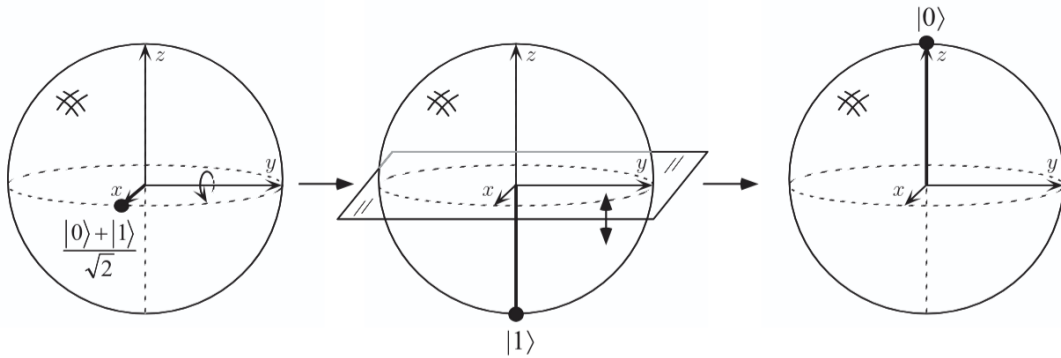
assim ilustrando que estas consistem em uma forma abstrata de rotação sobre a esfera de estados.

Figura 3: Exemplos de portas lógicas quânticas, da esquerda para a direita constam nome, representação comum em circuitos quânticos, sua forma matricial que tabula, a cada coluna, as coordenadas dos vetores de estado da base computacional transformados. De cima para baixo, estão expostas o operador Haddamard e as portas Pauli X,Y e Z.

Pauli X		$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$X 0\rangle = 1\rangle$ $X 1\rangle = 0\rangle$
Pauli Y		$Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$	$Y 0\rangle = +i 1\rangle$ $Y 1\rangle = -i 0\rangle$
Pauli Z		$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$Z 0\rangle = + 0\rangle$ $Z 1\rangle = - 1\rangle$
Hadamard		$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	$H 0\rangle = (0\rangle + 1\rangle)/\sqrt{2}$ $H 1\rangle = (0\rangle - 1\rangle)/\sqrt{2}$

Fonte: Modificada de P. Lambropoulos e D. Petrosyan [33] pelo autor, 2026.

Figura 4: Ilustração da porta lógica quântica Haddamard H atuando sobre um estado de entrada $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ operada com rotações sobre a esfera de estados quânticos. A operação consiste em uma rotação de $\theta = \pi/2$ ao redor do eixo y , seguida de uma rotação de $\theta = \pi$ ao redor do eixo x , que é representado por uma reflexão com respeito ao plano xy , levando a um estado de saída de $|0\rangle$.



Fonte: M. A. Nielsen e I. L. Chuang [19], 2000.

Dado que toda alteração possível de um qubit corresponde a uma espécie abstrata de rotação sobre a esfera de estados quânticos, adota-se a [assunção](#) que qualquer processo quântico pode ser decomposto como uma composição de rotações geradas pelos operadores X e Y de Pauli^[19], como exemplificado na [Figura 4](#), tal como verdadeiras rotações. Essa

decomposição é a base para o design de chips fotônicos que codificam QLGs mais robustas utilizando a estruturação azimutal como gerador físico do processamento.

Definição 2 (Operador unitário de rotação). Seja U um operador unitário tal que $U^2 = I$, onde I é a operação identidade que mantém o estado da mesma forma, definimos o operador

$$R_u(\theta) = \exp(-iU\theta/2) = \cos(\theta/2)I - i\sin(\theta/2)U, \quad (5)$$

como operador unitário de rotação gerado por U .

Conjectura 3. *Toda operação unitária U atuando sobre um único qubit pode ser expressa como a composição de rotações geradas pelos operadores de Pauli, X e Y , ou seja,*

$$U = R_x(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma), \quad (6)$$

onde α , β e γ são números reais que atuam como parâmetros da representação do operador.

É importante salientar que, não apenas uma revolução científica nas bases da teoria da computação e uma profunda quebra de paradigma no pensamento algorítmico^[35–41], a teoria da informação quântica é uma proeminente plataforma para novos desenvolvimentos tecnológicos não somente para QIP e, nesse contexto, é vital compreender como explorar os diferentes graus de liberdade (DOFs, do inglês *degree of freedom*) da luz. No âmbito da metrologia, a utilização da natureza quântica da luz confere alta resolução à medidas obtidas^[42]. Paralelamente, na segurança de informação, a distribuição de chaves criptográficas utilizando as regras do regime quântico (QKD, do inglês *quantum key distribution*)^[6, 7, 10, 43] prometem protocolos robustos a tentativas de espionagem.

2 MODELO E FORMALISMO

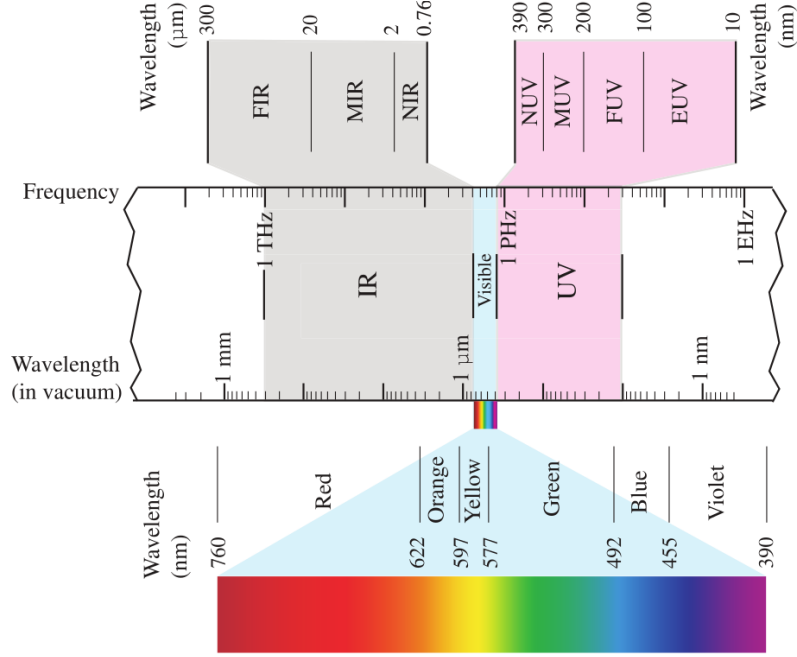
No capítulo anterior introduzimos alguns aspectos da proposta feita por Deutsch para aprimorar as máquinas propostas por Turing, ao permitir que estas operem com as vantagens computacionais do regime quântico, no entanto, a sua realização exige uma plataforma física capaz de codificar e manipular estados quânticos de maneira estável. A óptica, por ser o ramo da física que se atém em compreender os fenômenos luminosos na natureza fornece um arcabouço teórico, experimental e tecnológico robusto e com fundamentos sólidos para tal finalidade^[1, 44].

Ainda que, fundamentalmente, a óptica se baseie na teoria eletromagnética, esta pode ser abordada segundo uma variedade de modelos e formalismos^[1, 44], para o presente trabalho, a modelagem tem de ser capaz de compreender a natureza ondulatória dos fenômenos ópticos no interior de um chip fotônico, bem como as condições de sua experimentação, de maneira que algumas assunções devem ser feitas permitindo simplificações na teoria. Primeiramente abstrairmos da luz a sua característica vetorial, eliminando assim seu momento angular de spin, adotando que esta é linearmente polarizada^[1, 44]. Ademais, ainda que fisicamente a luz possa assumir diversos comprimentos de onda dentro do espectro eletromagnético, ilustrado na [Figura 5](#), tomaremos por pressuposto que este é bem definido, $\lambda = 780nm$, dado que a fonte de luz utilizada experimentalmente é comumente um Laser, que é temporalmente coerente^[44]. Por fim, em nossa modelagem adotaremos também a aproximação do envelope lentamente variante (SVEA, do inglês *slow varying envelope approximation*)^[44, 45], onde a envoltória do campo eletromagnético não sofre variações abruptas na escala do comprimento de onda, de modo que o estado da luz pode ser caracterizado completamente segundo a Equação paraxial de Helmholtz^[44, 45],

$$\imath\lambda\dot{\psi}(\mathbf{r}_{\perp}, z) = \left[-\frac{\lambda^2 \nabla_{\perp}^2}{2n_0} + \Delta n(\mathbf{r}_{\perp}, z) \right] \psi(\mathbf{r}_{\perp}, z), \quad (7)$$

onde $\dot{\psi}$ corresponde à derivada na direção de propagação, doravante adotada como o eixo das cotas z , $\psi(\mathbf{r}_{\perp}, z)$ corresponde a um campo que codifica a amplitude da onda de luz em cada ponto do espaço, $(\mathbf{r}_{\perp}, z)$, a constante λ corresponde ao comprimento de onda reduzido, $\lambda/2\pi$ onde λ é o comprimento de onda da luz, Δn consiste na variação do índice de refração num dado ponto do espaço, $\nabla_{\perp}^2$ corresponde ao operador diferencial laplaciano no plano transversal à propagação que promove a difração dos feixes ao longo da propagação e n_0 consiste no índice de refração base do material^[44, 45].

Figura 5: Ilustração do espectro de comprimentos de onda e frequências da luz, que se divide em três principais subdivisões: a luz ultravioleta (UV - 10 nm a 390 nm), a luz visível (390 nm a 760 nm) e o infravermelho (IR - 760 nm a 300 μm). A luz IR compreende as bandas do infravermelho próximo (NIR), infravermelho médio (MIR) e infravermelho distante (FIR). A luz UV, por sua vez, abrange as bandas do ultravioleta próximo (NUV), ultravioleta médio (MUV), o ultravioleta distante (FUV) e ultravioleta extremo (EUV).



Fonte: B. Saleh e C. Teich [44], 2007.

2.1 Modos estruturados de luz

Sendo uma equação diferencial parcial linear, para solucionar a [Equação paraxial de Helmholtz](#), é necessário e suficiente introduzir uma base completa de funções de modo a definir um espaço linear de soluções^[1]. No presente trabalho, adotaremos como tal base ortonormal canônica de soluções, os modos laguerre-gaussianos³, que apresentam estrutura helicoidal de frente de onda, conferindo-lhes um MAO intrínseco^[2, 44], cujo perfil transversal será doravante ilustrado segundo o padrão da [Figura 6](#).

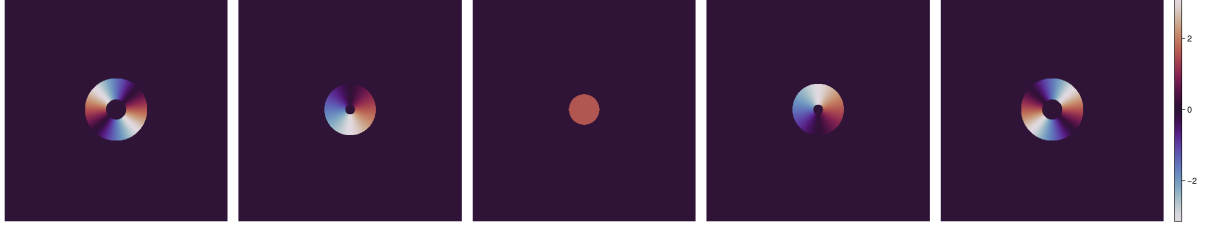
Definição 3 (modos laguerre-gaussianos).

$$LG_m^p(\mathbf{r}_\perp) = \sqrt{\frac{2p!}{\pi(p+|m|)!w_0^2}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0}\right)^{|m|} L_p^{|m|}\left(\frac{2r^2}{w_0^2}\right) e^{-\frac{r^2}{w_0^2}} e^{im\theta}, \quad (8)$$

Para além dos modos LG, outra importante base ortonormal de modos

³Consulte o [Apêndice A](#), para mais detalhes quanto aos polinômios de Laguerre e as ondas planas.

Figura 6: Perfis transversais de intensidade e fase dos modos LG_m^p para distintas cargas topológicas, $m = -2, -1, 0, +1, +2$ respectivamente, e ordem radial $p = 0$. O perfil apresenta a fase onde a intensidade é no mínimo 30% da intensidade máxima. Pode-se observar o perfil de fase variando de $-\pi m$ a $+\pi m$ azimutalmente ao longo do anel de intensidade máxima, conferindo a tais modos um momento angular orbital intrínseco de $m\hbar$ por fóton.



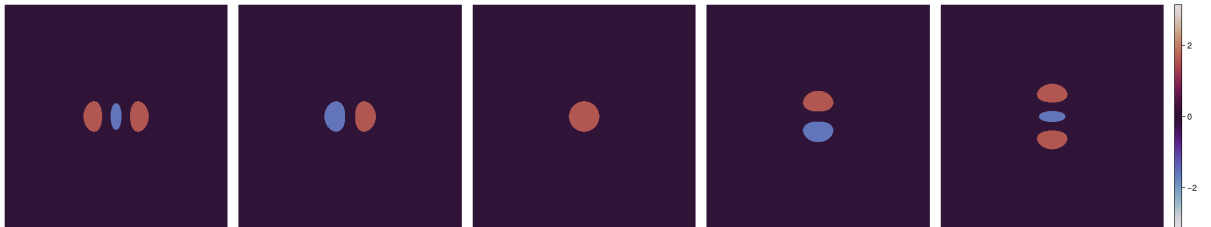
Fonte: Autor, 2026.

estruturados de luz são os modos hermite-gaussianos⁴ (HG), ilustrados na Figura 7, que para o presente trabalho representará os estados com superposição máxima de modos LG com cargas opostas, dado que nos focaremos no subespaço de modos com carga topológica $m = \pm 1$, e ordem radial $p = 0$ ^[44].

Definição 4 (modos hermite-gaussianos).

$$HG_{m,n}(\mathbf{r}_\perp) = \sqrt{\frac{2}{2^{m+n}\pi m!n!w_0^2}} H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w_0}\right) H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{w_0}\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}}, \quad (9)$$

Figura 7: Perfis transversais de intensidade e fase dos modos $HG_{m,n}$, para $m = 2, 1, 0, 0, 0$ e $n = 0, 0, 0, 1, 2$ respectivamente. O perfil apresenta a fase onde a intensidade é no mínimo 30% da intensidade máxima. Pode-se observar o perfil de fase variando de $-\pi$ a $+\pi$ entre os lóbulos de intensidade máxima.



Fonte: Autor, 2026.

Tais modos são nomeados comumente como modos estruturados de luz, pois apresentam uma estrutura no perfil transversal do campo eletromagnético. Em particular, os modos LG apresentam uma estrutura

⁴Consulte o Apêndice A, para mais detalhes quanto aos polinômios de Hermite.

azimutal do tipo $\exp(\imath m\theta)$, tornando-os autofunções do operador de MAO, $\hat{\mathcal{L}}_z = \imath\partial_\theta$, cujo autovalor é sua carga topológica m conferindo-lhes um momento angular orbital bem definido de $m\hbar$ por fóton^[2, 44]. Embora a natureza ilimitada da carga topológica ofereça um vasto potencial para a implementação de qudits em sua alta dimensionalidade^[6, 18], no presente trabalho iremos focar ao subespaço gerado apenas pelos modos de carga topológica $m = \pm 1$, onde estão definidos os modos com MAO bem definido

$$\text{LG}_{\pm 1}^{p=0}(\mathbf{r}_\perp) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \left(\frac{2r}{w_0^2} \right) e^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}} e^{\pm \imath\theta} = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \left(\frac{2(x \pm \imath y)}{w_0^2} \right) e^{-\frac{r^2}{w_0^2}}, \quad (10)$$

bem como os modos com indeterminação máxima de carga topológica ± 1 , dados pelos modos HG de ordem $m = 1, n = 0$ e $m = 0, n = 1$,

$$\text{HG}_{1,0}(\mathbf{r}_\perp) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \left(\frac{2\sqrt{2}x}{w_0^2} \right) e^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\text{LG}_{-1}^{p=0}(\mathbf{r}_\perp) + \text{LG}_{+1}^{p=0}(\mathbf{r}_\perp)), \quad (11)$$

$$\text{HG}_{0,1}(\mathbf{r}_\perp) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \left(\frac{2\sqrt{2}y}{w_0^2} \right) e^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}} = \frac{\imath}{\sqrt{2}} (\text{LG}_{-1}^{p=0}(\mathbf{r}_\perp) - \text{LG}_{+1}^{p=0}(\mathbf{r}_\perp)), \quad (12)$$

e suas versões rotacionadas no plano transversal.

2.1.1 Quantização de modos e a esfera de Poincaré de modos transversais

Ainda que tenhamos fundamentado os modos estruturados de luz a partir da solução da [Equação paraxial de Helmholtz](#), a luz apresenta uma natureza quântica^[33], onde o campo eletromagnético pode ser abordado segundo excitações fundamentais de modos LG, denominados fótons torcidos^[6]. A quantização de modos estruturados de luz, se dá analogamente à quantização na base de ondas planas^[33], é efetuada ao promover as amplitudes da expansão modal a operadores quânticos de aniquilação, ou seja,

$$\sum_{\ell} a_{\ell}(z) \text{LG}_{\ell}^{p=0}(\mathbf{r}_\perp) \rightarrow \sum_{\ell} \hat{\mathbf{a}}_{\ell}(z) \text{LG}_{\ell}^{p=0}(\mathbf{r}_\perp). \quad (13)$$

Dado que, no presente trabalho, iremos nos restringir ao subespaço de modos com carga topológica $m = \pm 1$, iremos adotar como estados da base computacional, respectivamente, $|0\rangle = \hat{\mathbf{a}}_-^\dagger |\text{vac}\rangle$ e $|1\rangle = \hat{\mathbf{a}}_+^\dagger |\text{vac}\rangle$, correspondentes a excitações de fótons portando $-\hbar$ e $+\hbar$ de MAO, com as suas superposições sendo equivalentes à estrutura do modo clássico, como expresso no [Teorema 1](#).

possibilitando a manipulação dos modos de luz que portam MAO, como apresentado no [Teorema 2](#).

Teorema 2. *Sejam $\tau = i\bar{\psi}\partial_\phi\psi$ e $\mathbf{J}_\tau(\mathbf{r}_\perp, z) = \frac{\lambda}{2n_0} (\bar{\psi}\nabla_\perp \frac{\partial}{\partial\theta}\psi - \frac{\partial}{\partial\theta}\psi\nabla_\perp \bar{\psi})$ as densidades de carga e corrente de torção do modo óptico, respectivamente, bem como $T(\mathbf{r}_\perp, z) = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial\theta}\Delta n$ a fonte de torção do modo óptico*

$$\dot{\tau}(\mathbf{r}_\perp, z) + \text{div}_\perp \mathbf{J}_\tau(\mathbf{r}_\perp, z) = T(\mathbf{r}_\perp, z)\rho(\mathbf{r}_\perp, z), \quad (15)$$

Ainda que o [Teorema 2](#) ateste a possibilidade de manipular o MAO de um modo óptico por meio de perturbações azimutais no índice de refração em chips fotônicos, este não introduz a maneira com a qual estas devem ser microfabricadas. Para isso, no presente trabalho, aplicaremos à [Equação paraxial de Helmholtz](#) uma abordagem de teoria de modos acoplados (CMT, do inglês *coupled-mode theory*)^[47, 48], modelando assim a interação efetiva introduzida entre modos pelas estruturas microfabricadas no interior do chip fotônico, sendo aplicada extensivamente na descrição da evolução ao longo de guias de onda^[49–53].

2.2.1 Teoria de modos acoplados por perturbações azimutais

Para a construção de um formalismo de teoria de modos acoplados, é necessário primeiramente introduzir uma base de funções, neste trabalho, adotada como a base dos modos LG de carga topológica $m = \pm 1$, assim sendo, qualquer modo óptico em qualquer plano transversal no guia será uma superposição linear de tais modos, ou seja,

$$\psi(\mathbf{r}_\perp, z) = a_{+1}(z)\text{LG}_{+1}^{p=0}(\mathbf{r}_\perp) + a_{-1}(z)\text{LG}_{-1}^{p=0}(\mathbf{r}_\perp), \quad (16)$$

onde $a_\pm(z)$ são as amplitudes modais dos modos LG com cargas topológicas ± 1 num dado plano com z fixo. Ao substituir nosso [ansatz modal](#) nos termos da [Equação paraxial de Helmholtz](#), aplicando o produto interno com os modos LG de carga $m' = \pm 1$ e observando que $\langle \text{LG}_{m'}^{p=0}, \text{LG}_m^{p=0} \rangle = \delta_{m',m}$, obtemos,

$$\begin{aligned} i\lambda\dot{a}_{m'}(z) = & \left\langle \text{LG}_{m'}^{p=0}, \left[-\frac{\lambda^2\nabla_\perp^2}{2n_0} + \Delta n \right] \text{LG}_{-1}^{p=0} \right\rangle a_{-1}(z) + \\ & \left\langle \text{LG}_{m'}^{p=0}, \left[-\frac{\lambda^2\nabla_\perp^2}{2n_0} + \Delta n \right] \text{LG}_{+1}^{p=0} \right\rangle a_{+1}(z), \end{aligned} \quad (17)$$

onde os coeficientes $\langle \text{LG}_m^{p=0}, [-\frac{\lambda^2 \nabla_\perp^2}{2n_0} + \Delta n] \text{LG}_{m'}^{p=0} \rangle$, denominados elementos da matriz de acoplamento, correspondem à intensidade de acoplamento entre os modos LG de carga $m = \pm 1$ introduzido por perturbações azimutais no índice de refração^[47, 48].

Para a computação dos elementos da matriz de acoplamento, notemos que o termo de difração $-\lambda^2 \nabla_\perp^2 / 2n_0$ não acopla modos LG azimutalmente, conferindo apenas uma mesma fase de caminho a estes, assim, como já exposto no [Teorema 2](#), o índice de refração é o único termo capaz de introduzir acoplamento entre os modos LG de carga $m = \pm 1$. Dessa maneira, notando que, pela estrutura azimutal dos modos LG ser análoga às ondas planas na coordenada angular do plano transversal, θ , modulações azimutais senoidais induzem o acoplamento entre modos LG com cargas topológicas distintas, tal qual descrito no [Teorema 3](#).

Teorema 3. *Seja a alteração do índice de refração expandida em série de Fourier na coordenada angular do plano transversal*

$$\Delta n(\mathbf{r}_\perp) = \sum_k \alpha_k(r) \cos(k\theta) + \beta_k(r) \sin(k\theta), \quad (18)$$

então os elementos da matriz de acoplamento serão

$$\langle \psi_m, \Delta n \psi_{m'} \rangle = \sum_k \overline{\gamma_k^{(m,m')}} \delta_{m', m-k} + \gamma_k^{(m,m')} \delta_{m', m+k}, \quad (19)$$

onde os coeficientes $\gamma_k^{(m,n)}$ são dados por

$$\gamma_k^{(m,m')} = \frac{2}{w_0 \sqrt{|m|!|m'|!}} \int_0^\infty r dr \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0} \right)^{|m|+|m'|} e^{-\frac{2r^2}{w_0^2}} (\alpha_k(r) + i\beta_k(r)) \quad (20)$$

Utilizando o [Teorema 3](#), inferimos que para acoplar os modos LG de carga $m = \pm 1$, é suficiente introduzir alterações de índice de refração com modulações azimutais senoidais de frequência angular $k = \Delta m = 2$, podendo também conter termos que independam do ângulo, ou seja,

$$\Delta n(\mathbf{r}_\perp) = \alpha_0(r) + \alpha_2(r) \cos(2\theta) + \beta_2(r) \sin(2\theta), \quad (21)$$

onde $\alpha_0(r)$ corresponde a um termo puramente radial do índice de refração, que não acopla os modos LG de carga $m = \pm 1$, e os termos $\alpha_2(r)$ e $\beta_2(r)$ correspondem aos coeficientes radiais das modulações azimutais senoidais de frequência angular $k = 2$, que acoplam os modos LG de carga $m = \pm 1$ com intensidade proporcional aos coeficientes $\gamma_2^{(\pm 1, \mp 1)}$ anteriormente computados,

e pela [Equação 17](#) restrita aos modos LG com carga topológica $m = \pm 1$, segue que

$${}_i\lambda \begin{bmatrix} \dot{a}_{-1}(z) \\ \dot{a}_{+1}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\beta_0 + \gamma_0^{-1,-1}) a_{-1}(z) + \overline{\gamma_2^{-1,+1}} a_{+1}(z) \\ \gamma_2^{+1,-1} a_{-1}(z) + (\beta_0 + \gamma_0^{+1,+1}) a_{+1}(z) \end{bmatrix}, \quad (22)$$

onde $\beta_0 = -\lambda^2 \langle \text{LG}_{\pm 1}^{p=0}, \nabla_{\perp}^2 \text{LG}_{\pm 1}^{p=0} \rangle / 2n_0$, de modo que, notando a igualdade entre os elementos $\gamma_0^{-1,-1} = \gamma_0^{+1,+1}$ e $\gamma_2^{-1,+1} = \gamma_2^{+1,-1}$ os quais definiremos doravante respectivamente por γ_0 e γ_2 , pode ser representada de maneira matricial por

$${}_i\lambda \begin{bmatrix} \dot{a}_{-1}(z) \\ \dot{a}_{+1}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\beta_0 + \gamma_0) & \overline{\gamma_2} \\ \gamma_2 & (\beta_0 + \gamma_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{-1}(z) \\ a_{+1}(z) \end{bmatrix}, \quad (23)$$

onde as partes reais e imaginárias de γ_2 são nulas quando as funções $\beta_2(r)$ e $\alpha_2(r)$ são nulas, respectivamente, pela [Equação 20](#) do [Teorema 3](#).

3 METODOLOGIA

Introduzimos, no capítulo anterior, o modelo físico proposto para a implementação do processamento quântico de informação codificada em fótons torcidos, para tal tomaremos uma abordagem numérica visando estimar a evolução espacial dos modos transversos a fim de verificar quão fidedigno são as implementações segundo nossa modelagem. A evolução espacial dos modos transversos consiste numa família contínua de operadores que permite transladar um modo óptico ao longo do eixo de propagação, de modo que este abarca todo o comportamento da propagação da luz no interior de um chip fotônico.

Definição 5 (Operador de evolução espacial). Seja $\hat{S}(z)$ um operador linear que atua sobre um modo óptico $\Psi(\mathbf{r}_\perp, z_0)$, de maneira a transladá-lo no eixo de propagação por um deslocamento z , ou seja,

$$\hat{S}(z)\Psi(\mathbf{r}_\perp, z_0) = \Psi(\mathbf{r}_\perp, z_0 + z), \quad (24)$$

então $\hat{S}(z)$ é denominado evolução espacial, apresentando assim a propriedade

Propriedade 1 (composição). $\hat{S}(z_1)\hat{S}(z_2) = \hat{S}(z_1 + z_2)$.

Para conectarmos, tal formalismo de operadores à propagação da luz, devemos notar que sendo uma família contínua de operadores podemos definir para estes uma equação diferencial parcial, descrita no [Teorema 4](#)^[54].

Teorema 4. *Seja $\Psi(\mathbf{r}_\perp, z) = \hat{S}(z)\Psi_0(\mathbf{r}_\perp)$ um modo óptico transversal evoluindo ao longo do eixo de propagação z segundo a família de evoluções espaciais $\hat{S}(z) = \exp[-i\hat{\mathcal{H}}(z)/\lambda]$ ^a, equivale a*

$$i\lambda\dot{\Psi}(\mathbf{r}_\perp, z) = \hat{H}(z)\Psi(\mathbf{r}_\perp, z), \quad (25)$$

onde $\hat{H}(z) = \partial_z \hat{\mathcal{H}}(z)$ denominado gerador da evolução espacial.

^aAssumimos aqui o princípio da continuidade analítica para a álgebra dos operadores, ou seja, a expressão $\exp \hat{A}$ corresponde à aplicação da expansão em série de MacLaurin da exponencial no operador $\hat{A}$.

Dessa forma, podemos caracterizar a [Equação paraxial de Helmholtz](#) iden-

tificando o seu gerador imediatamente por

$$\hat{H}(z) = \left[-\frac{\lambda^2 \nabla_{\perp}^2}{2n_0} + \Delta n(\mathbf{r}_{\perp}, z) \right], \quad (26)$$

de maneira que, podemos conjecturar que para quaisquer alterações de índice de refração $\Delta n(\mathbf{r}_{\perp}, z)$, há uma família destes parametrizados pela posição z no eixo de propagação^[45, 48, 54, 55].

Conjectura 4 (Existência de evolução espacial). *Dado uma alteração de índice de refração $\Delta n(\mathbf{r}_{\perp}, z)$, existe uma família de operadores de evolução espacial $\hat{S}(z)$ parametrizados pela posição $z \in \mathbb{R}$ no eixo de propagação, tal que $\Psi(\mathbf{r}_{\perp}, z) = \hat{S}(z)\Psi_0(\mathbf{r}_{\perp})$ onde $\Psi_0(\mathbf{r}_{\perp})$ é uma condição de contorno no plano $z = 0$.*

3.1 Estimativa da evolução espacial

Dado que introduzimos a equivalência entre a computação da evolução espacial e a da propagação da luz, ao definir um modo de entrada $\Psi_0(\mathbf{r}_{\perp})$ num chip fotônico no plano $z = 0$, o operador evolução espacial permite-nos, em decorrência da [Propriedade 1](#), obter seu perfil em quaisquer planos transversos ao eixo de propagação de maneira iterativa, ou seja,

$$\Psi(\mathbf{r}_{\perp}, z_{i+1}) = \hat{S}(\Delta z_i)\Psi(\mathbf{r}_{\perp}, z_i), \quad (27)$$

tomando quaisquer sequências $0\mu m = z_0 < z_1 < \dots < z_n = z_f$ de planos transversos, onde $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$, tal qual ilustrado na [Figura 9](#)^[45, 55].

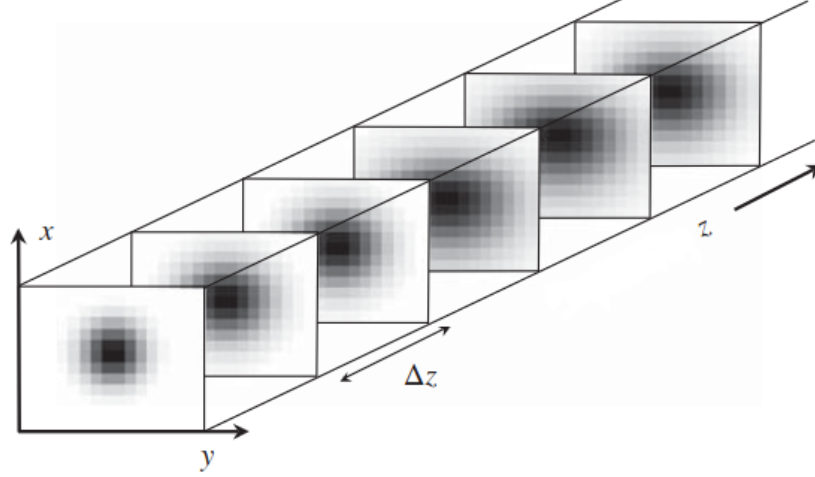
Para estimar a evolução espacial, aqui utilizaremos o método de *split-step*, que consiste em modelar a propagação de um modo óptico como uma propagação livre seguida de uma correção de fase decorrente da inhomogeneidade do meio a cada passo de iteração da [Equação 27](#)^[48, 55], ou seja,

$$\hat{S}(\Delta z) \approx \exp \left[-i \frac{\Delta n(\mathbf{r}_{\perp}, z)}{\lambda} \Delta z \right] \exp \left[+i \frac{\lambda \nabla_{\perp}^2}{2n_0} \Delta z \right]. \quad (28)$$

O termo de propagação livre pode computado utilizando o algoritmo de transformada rápida de Fourier, de maneira a simplificar e tornar mais eficiente a exponenciação do operador diferencial que encapsula os efeitos de difração, resultando assim na seguinte expressão^[45, 55]

$$\hat{S}(\Delta z) \approx \exp \left[-i \frac{\Delta n(\mathbf{r}_{\perp}, z)}{\lambda} \Delta z \right] \mathcal{F}^{-1} \left\{ \exp \left[+i \frac{\lambda (\kappa_x^2 + \kappa_y^2)}{2n_0} \Delta z \right] \mathcal{F} \{ * \} \right\}, \quad (29)$$

Figura 9: Ilustração do processo iterativo de estimativa numérica da propagação da luz em um chip fotônico, onde a evolução espacial é aplicada iterativamente, numa sequência de planos equiespaçados por uma distância Δz , para obter o perfil do modo óptico em cada plano transversal ao eixo de propagação.



Fonte: G. L. Pedrola [45], 2015.

obtendo, por fim, a representação do estado quântico dos fótons que se propagam ao longo do chip por intermédio da decomposição dos operadores apresentada no [Teorema 1](#) a cada plano transversal^[33].

3.2 Fidelidade média de um processo quântico unitário

Ainda que a simulação da propagação da luz seja o passo fundamental para a metodologia deste trabalho, é necessário também interpor uma métrica que permita quantificar quão robustas são as implementações segundo nossa modelagem, para isso, utilizaremos a fidelidade média de um processo quântico unitário^[19, 56].

Definição 6 (Fidelidade média de um processo quântico unitário). A fidelidade média entre a implementação real $\hat{U}$ e ideal $\hat{T}$ de um processo quântico unitário definido é dada por

$$\overline{\mathcal{F}[\hat{U}, \hat{T}]} = \int d\Psi |\langle \Psi | \hat{T}^\dagger \hat{U} | \Psi \rangle|^2. \quad (30)$$

A Fidelidade média consiste numa métrica fundamental na teoria de informação quântica, mensurando a qualidade com o qual um processo quântico é implementado, resultando em 1 quando a implementação é completamente

fiel e decrescendo à medida que a implementação se torna mais ruidosa, ou seja, menos precisa^[19, 56].

Contudo, computar a fidelidade média diretamente da definição consiste às máquinas um trabalho complexo, pois envolve uma integral sobre o espaço de Hilbert, que é contínuo e pode apresentar alta dimensionalidade. No entanto, para sistemas quânticos de dois níveis (qubits), a fidelidade média pode ser expressa de maneira mais simples, como estabelecido na [Propriedade 2](#)^[56].

Propriedade 2. *A fidelidade média entre a implementação real $\hat{U}$ e ideal $\hat{T}$ de um processo quântico unitário definido sobre um único qubit é dada por*

$$\overline{\mathcal{F}[\hat{U}, \hat{T}]} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \sum_{u=x,y,z} \text{tr}(\hat{T}\hat{\sigma}_u\hat{T}^\dagger\hat{U}\hat{\sigma}_u\hat{U}^\dagger). \quad (31)$$

4 RESULTADOS OBTIDOS

Em nosso estudo, objetivamos implementar quatro exemplos de QLGs elementares, as quais correspondem à composições de rotações geradas pelos operadores de Pauli X e Y, tal qual descrito na [Conjectura 3](#), dessa forma, primeiramente tornou-se necessário executar simulações das oscilações dos modos LG em guias construídos com as perturbações azimutais correspondentes a tais rotações. Contudo, é necessário notar que no [Teorema 3](#) os coeficientes de acoplamento dependem da cintura do feixe, assim para garantir uma manipulação de alta fidelidade, é necessário suprimir a difração dos feixes ao longo da propagação. Para isso adicionaremos um guia de onda anular, ilustrado na [Figura 10](#), que consiste numa variação do índice de refração com perfil radialmente simétrico, dado por

$$\Delta n_a(\mathbf{r}_\perp) = \Delta n_0 e^{-\frac{(r-a)^2}{w^2}}, \quad (32)$$

onde a corresponde ao raio do guia de onda anular e w à sua largura, o qual permite o confinamento dos modos LG de carga $m = \pm 1$ como automodos^[12, 16].

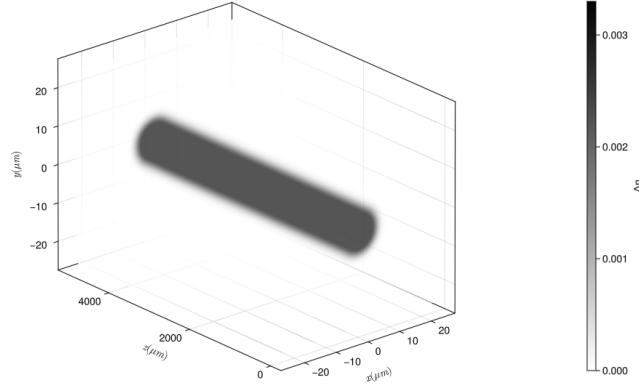
Ao simular a evolução dos modos LG de carga $m = \pm 1$ no guia anular, expostos na [Figura 11](#), ainda que, parte da luz inserida no guia escape do guia, o que se traduz em uma perda de potência ao longo da propagação tal qual ilustrado na [Figura 12](#) onde apresenta-se um gráfico da potência ao longo da propagação $|\langle LG_\pm^{p=0}, \hat{S}(z)\Psi_0(\mathbf{r}_\perp) \rangle|^2$ para os modos mencionados anteriormente, observamos que ambos os modos são acoplados mantendo seu perfil transversal, obtendo fase global, expressa como rotações em sentidos opostos dos modos ópticos, devido a sua característica de automodo do guia anular, tal qual descrito na literatura^[12, 16].

4.1 Oscilações de modos sobre a esfera de Poincaré de modos transversais

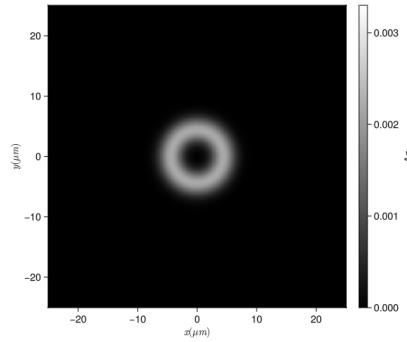
Focamos aqui em propor uma rota realizável à microfabricação de QLGs, no entanto, segundo o que foi apresentado na [metodologia](#) seria, a princípio, necessário microfabricar alterações no índice de refração com um contraste preciso tal qual exigido em funções senoidais, o que representa uma tarefa de engenharia extremamente desafiadora⁵. Devemos notar, porém, que a microfabricação de quaisquer estruturas que quebrem a simetria radial

⁵Note que a [Equação 32](#) apresenta uma aproximação continua de guias de ondas fabricáveis, que são comumente implementados por meio de perturbações localizadas microfabricadas.

Figura 10: Visualização do modelo para um guia anular fabricado em vidro ($n_0 = 1.5078$), com um raio a de $4.4\mu m$ e uma largura w de $2.0\mu m$ com um contraste de índice Δn_0 de 2.2×10^{-3} entre o núcleo e a casca. O guia anular possui uma geometria de anel circular, projetada para guiar a luz torcida. Apresentam-se em (a) o perfil tridimensional do guia anular, e em (b) o perfil transversal do guia anular no plano transversal $z = 0\mu m$, que corresponde ao perfil em qualquer outro plano transversal no chip fotônico.



(a) Perfil tridimensional do guia anular.



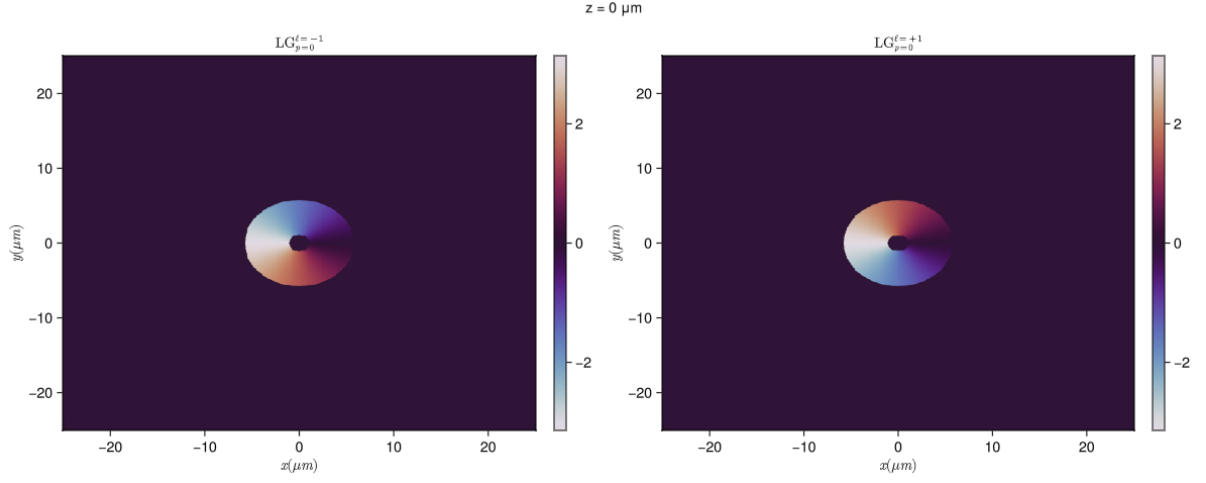
(b) Perfil transversal em $0\mu m$.

Fonte: Autor, 2026.

pode ser expandida em série de Fourier, como exposto no [Teorema 3](#), de modo que, necessitamos apenas de uma estrutura que quebre a simetria azimutal cujo termo de segunda ordem seja o mais pronunciado.

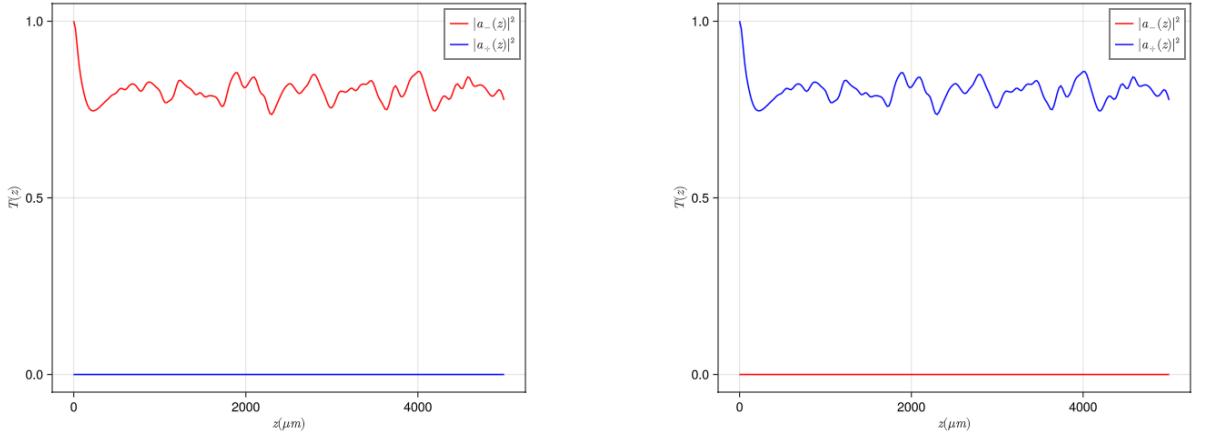
No presente trabalho, utilizamos um par de alterações gaussianas de índice microfabricadas sobre o guia de onda anular com metade de seu

Figura 11: Visualização do perfil transversal de entrada dos modos LG de carga $m = \pm 1$. O perfil apresenta a fase onde a intensidade é no mínimo 30% da intensidade máxima.



Fonte: Autor, 2026.

Figura 12: Visualização da evolução de potência dos modos laguerre-gaussianos $m = \pm 1$ no guia anular. Apresentam-se em (a) e (b) as evoluções de potência para perfis de entrada com cargas topológicas $m = -1$ e $m = +1$, respectivamente, até uma distância de $5mm$.



(a) Evolução do modo com carga topológica $m = -1$.

(b) Evolução do modo com carga topológica $m = +1$.

Fonte: Autor, 2026.

contraste de índice, nos ângulos θ_0 e seu oposto $\theta_0 + \pi$, ou seja,

$$\begin{aligned}
 \Delta n(\mathbf{r}_{\perp}) &= \Delta n_a(\mathbf{r}_{\perp}) + \frac{1}{2} \Delta n_0 \left(e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2}{w^2}} + e^{-\frac{|\mathbf{r}+\mathbf{a}|^2}{w^2}} \right) \\
 &= \Delta n_a(\mathbf{r}_{\perp}) + \Delta n_0 e^{-\frac{r^2+a^2}{w^2}} \cosh \left(\frac{2ar}{w^2} \cos(\theta - \theta_0) \right) \\
 &\approx \Delta n_a(\mathbf{r}_{\perp}) + 2\Delta n_0 e^{-\frac{r^2+a^2}{w^2}} \left[I_0 \left(\frac{2ar}{w^2} \right) + 2I_2 \left(\frac{2ar}{w^2} \right) \cos(2(\theta - \theta_0)) \right] \\
 &\approx \Delta n_a(\mathbf{r}_{\perp}) + 2\Delta n_0 e^{-\frac{r^2+a^2}{w^2}} I_0 \left(\frac{2ar}{w^2} \right) + \\
 &\quad 4 \cos(2\theta_0) \Delta n_0 e^{-\frac{r^2+a^2}{w^2}} I_2 \left(\frac{2ar}{w^2} \right) \cos(2\theta) - 4 \sin(2\theta_0) \Delta n_0 e^{-\frac{r^2+a^2}{w^2}} I_2 \left(\frac{2ar}{w^2} \right) \sin(2\theta)
 \end{aligned}$$

expandido em série de Fourier pelo [Teorema 7](#) apresentado no [Apêndice A](#), tendo seus demais termos apresentando contribuições desprezíveis.

Como apresentado em nosso [modelo](#), podemos expressar a [Equação paraxial de Helmholtz](#) por meio de uma CMT para os modos LG de carga topológica ± 1 , acoplados por meio de tal perturbação azimutal, podendo seu coeficiente de acoplamento γ_2 ser real positivo, ao escolher $\theta_0 = 0$, ou imaginário positivo, para $\theta_0 = -\pi/4$, representando assim os geradores Pauli-X e Pauli-Y, tendo as estruturas tridimensionais ilustradas nas Figuras [13](#) e [14](#), onde a assimetria azimutal é inserida apenas numa região central da propagação, por uma distância de $\tau_z = 2220\mu m$. Dado que a nossa CMT, expressa na [Equação 23](#), pode ser escrita como,

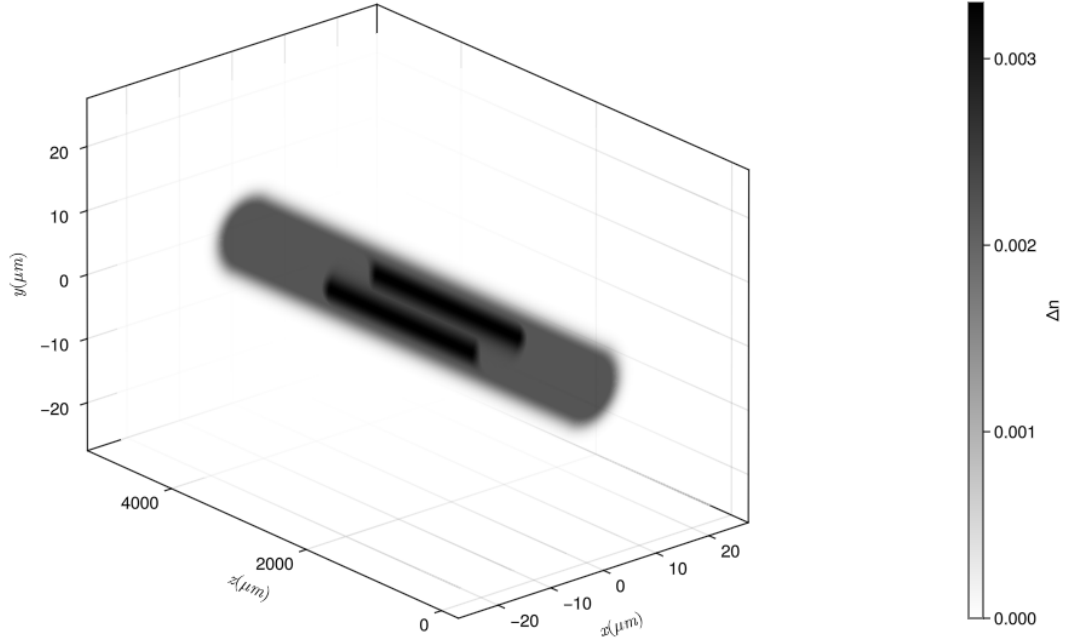
$$i\lambda \dot{a}(z) = \hat{H}a(z), \quad (34)$$

onde $\hat{H}$ corresponde à matriz de acoplamento, podemos expressar a evolução dos modos LG de carga $m = \pm 1$ utilizando o [Teorema 4](#), ou seja,

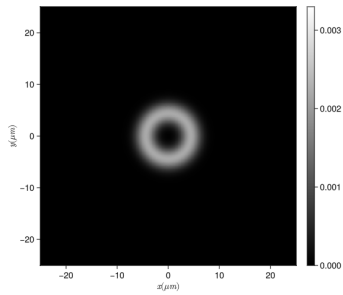
$$a(z) = \exp \left[-i\hat{H} \frac{z}{\lambda} \right] a(0), \quad (35)$$

de maneira que, ao tomar como gerador os operadores de Pauli, a evolução dos modos LG de carga $m = \pm 1$ os faz rotacionar sobre a esfera de Poincaré de modos transversais, apresentando oscilações de potência, tal qual ilustrado nas Figuras [15](#) e [16](#), onde se observa que as potências dos modos LG de carga $m = \pm 1$ oscilam com um período dado por τ_z .

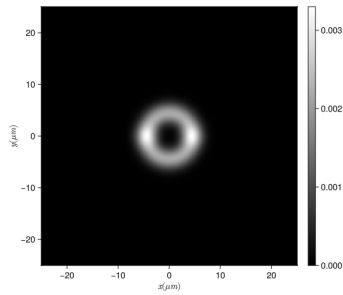
Figura 13: Visualização do modelo para um guia anular com perturbação do tipo Pauli-X fabricado em vidro ($n_0 = 1.5078$), com um guia anular de raio de $4.4\mu m$ e uma largura de $2.0\mu m$ com um contraste de índice de 2.2×10^{-3} entre o núcleo e a casca e um par de alterações gaussianas diametralmente opostas, a $4.4\mu m$ da origem com um contraste de índice de 1.1×10^{-3} . Apresentam-se em (a) o perfil tridimensional, e em (b), (c) e (d) os perfis transversais nos planos transversais $z = 0.0\mu m$, $z = 1.0mm$ e $z = 5.0mm$, respectivamente.



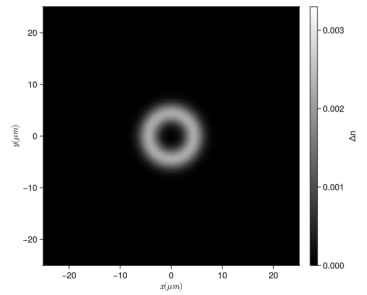
(a) Perfil tridimensional do guia anular com perturbação do tipo Pauli-X.



(b) Perfil transversal em $0\mu m$.



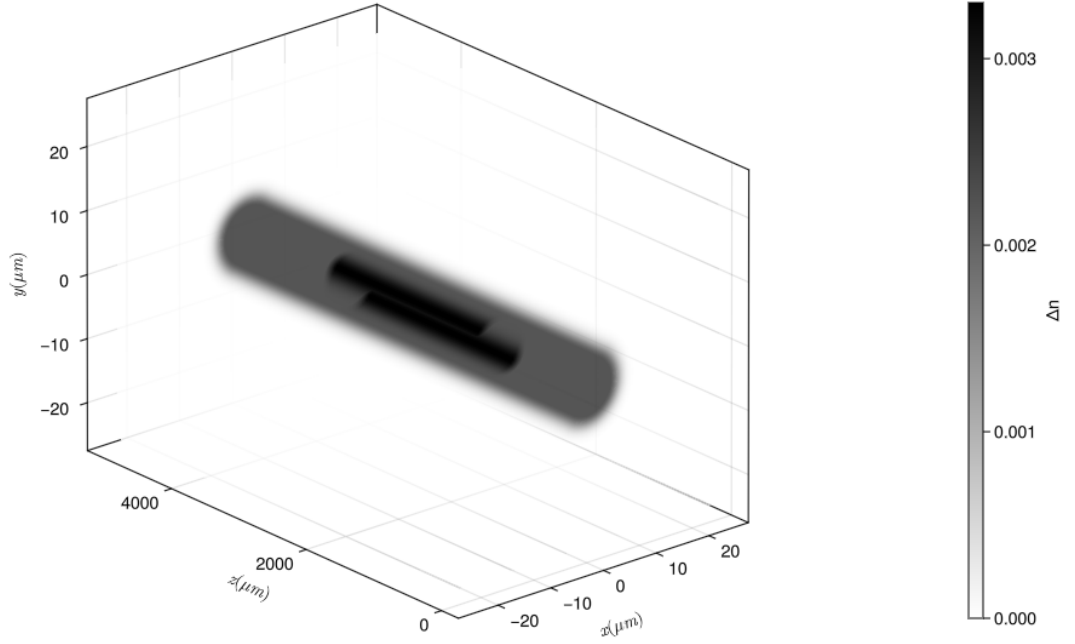
(c) Perfil transversal em $1000\mu m$.



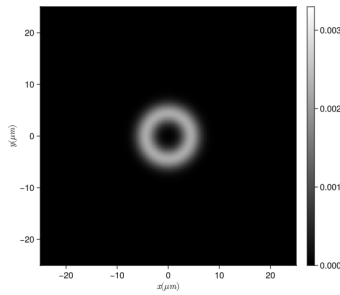
(d) Perfil transversal em $5000\mu m$.

Fonte: Autor, 2026.

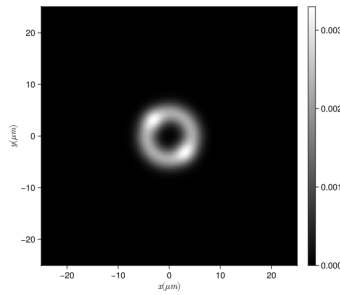
Figura 14: Visualização do modelo para um guia anular com perturbação do tipo Pauli-Y fabricado em vidro ($n_0 = 1.5078$), com um guia anular de raio de $4.4\mu m$ e uma largura de $2.0\mu m$ com um contraste de índice de 2.2×10^{-3} entre o núcleo e a casca e um par de alterações gaussianas diametralmente opostas, a $4.4\mu m$ da origem com um contraste de índice de 1.1×10^{-3} . Apresentam-se em (a) o perfil tridimensional, e em (b), (c) e (d) os perfis transversais nos planos transversais $z = 0.0\mu m$, $z = 1.0mm$ e $z = 5.0mm$, respectivamente.



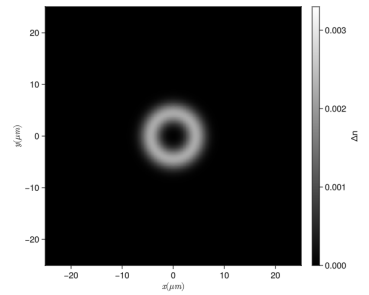
(a) Perfil tridimensional do guia anular com perturbação do tipo Pauli-Y.



(b) Perfil transversal em $0\mu m$.



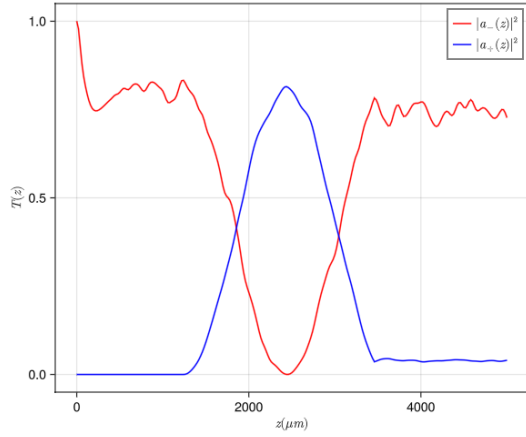
(c) Perfil transversal em $1000\mu m$.



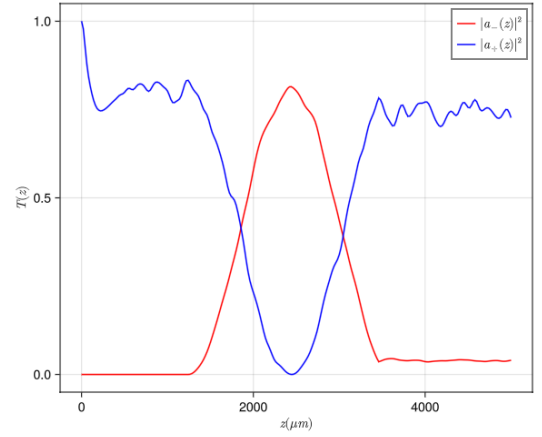
(d) Perfil transversal em $5000\mu m$.

Fonte: Autor, 2026.

Figura 15: Visualização da evolução de potência dos modos laguerre-gaussianos $m = \pm 1$ no guia anular com perturbação do tipo Pauli-X. Apresentam-se em (a) e (b) as evoluções de potência para perfis de entrada com cargas topológicas $m = -1$ e $m = +1$, respectivamente, até uma distância de $5mm$.



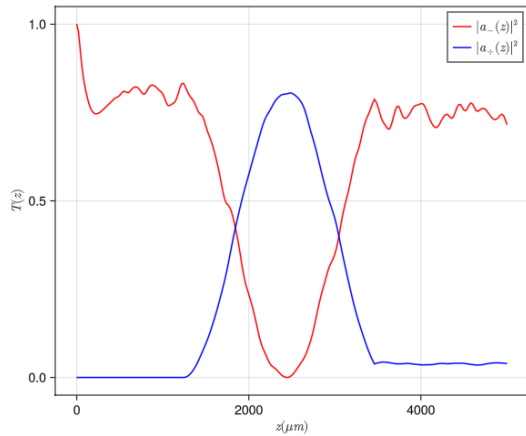
(a) Evolução do modo LG com carga topológica $m = -1$.



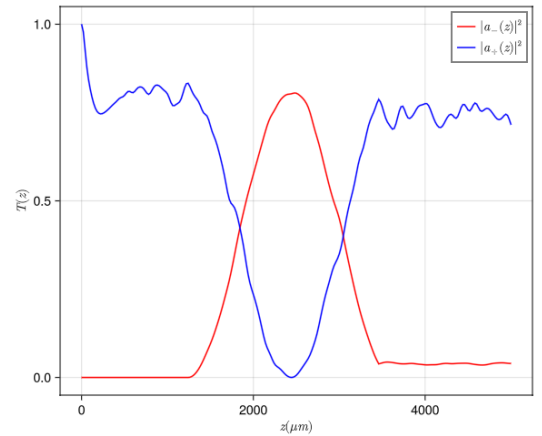
(b) Evolução do modo LG com carga topológica $m = +1$.

Fonte: Autor, 2026.

Figura 16: Visualização da evolução de potência dos modos laguerre-gaussianos $m = \pm 1$ no guia anular com perturbação do tipo Pauli-Y. Apresentam-se em (a) e (b) as evoluções de potência para perfis de entrada com cargas topológicas $m = -1$ e $m = +1$, respectivamente, até uma distância de $5mm$.



(a) Evolução do modo LG com carga topológica $m = -1$.



(b) Evolução do modo LG com carga topológica $m = +1$.

Fonte: Autor, 2026.

4.1.1 Implementações de portas lógicas quânticas

Com as oscilações dos modos LG de carga $m = \pm 1$ sobre a esfera de Poincaré de modos transversais, podemos agora implementar as QLGs mais

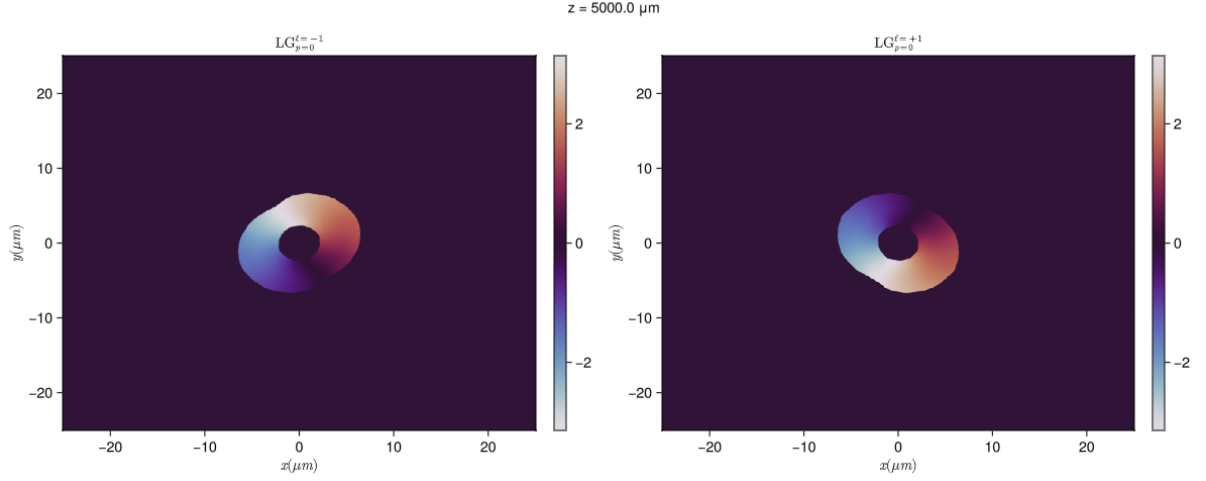
elementares, correspondentes às rotações de Pauli-X e Pauli-Y, que consistem nas operações de negação (bit-flip) e negação defasada (bit-phase-flip), parametrizadas pelas rotações

$$X \equiv \cos(\pi/2)I - \imath \sin(\pi/2)X = R_x(\pi), \quad (36)$$

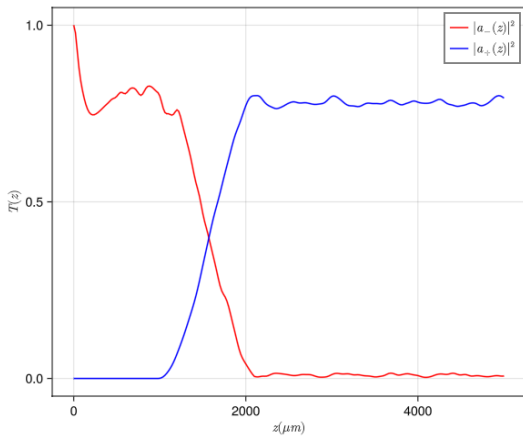
$$Y \equiv \cos(\pi/2)I - \imath \sin(\pi/2)Y = R_y(\pi), \quad (37)$$

de modo que podemos implementá-las pela ao fixar a distância de operação, distância na qual os fótons se propagam com quebra de simetria azimutal, como metade do período de oscilação completo $\tau_z/2$. Obtivemos aqui, para essas portas, fidelidades médias de respectivamente 0.9941 e 0.9936, como ilustrado nas Figuras 17 e 18, atestando a robustez de nosso modelo do processamento de um bit de informação quântica com fótons torcidos, além disso, computamos a tabela-verdade quântica das portas, ilustrada nas Figuras 19 e 20, que demonstra o *cross-talk* dos modos na saída.

Figura 17: Visualização do efeito da QLG Pauli-X, implementada com uma fidelidade média de 0.9941, sobre os modos LG. Apresentam-se em (a) a visualização dos perfis transversais de saída e em (b) e (c) as evoluções de potência para perfis de entrada com cargas topológicas $m = -1$ e $m = +1$, respectivamente, até uma distância de $5mm$.



(a) Perfis transversais na saída do chip fotônico da QLG Pauli-X.



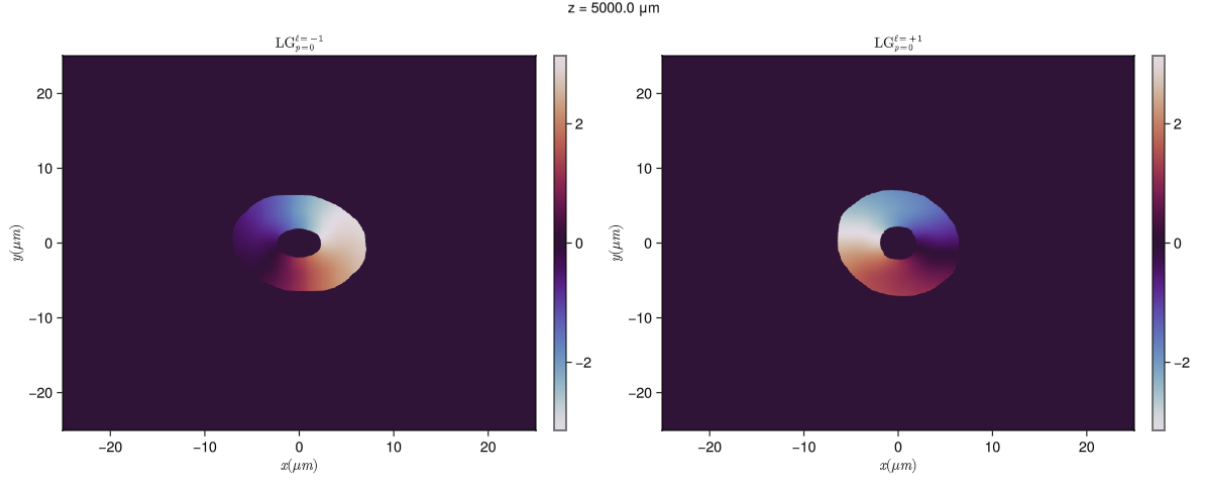
(b) Evolução do modo LG com carga topológica $m = -1$.



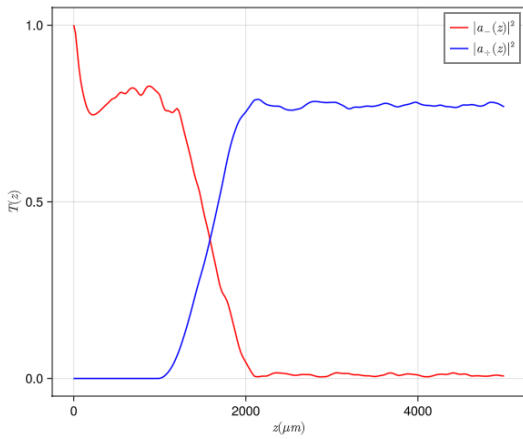
(c) Evolução do modo LG com carga topológica $m = +1$.

Fonte: Autor, 2026.

Figura 18: Visualização do efeito da QLG Pauli-Y, implementada com uma fidelidade média de 0.9936, sobre os modos LG. Apresentam-se em (a) a visualização dos perfis transversais de saída e em (b) e (c) as evoluções de potência para perfis de entrada com cargas topológicas $m = -1$ e $m = +1$, respectivamente, até uma distância de $5mm$.



(a) Perfis transversais na saída do chip fotônico da QLG Pauli-Y.



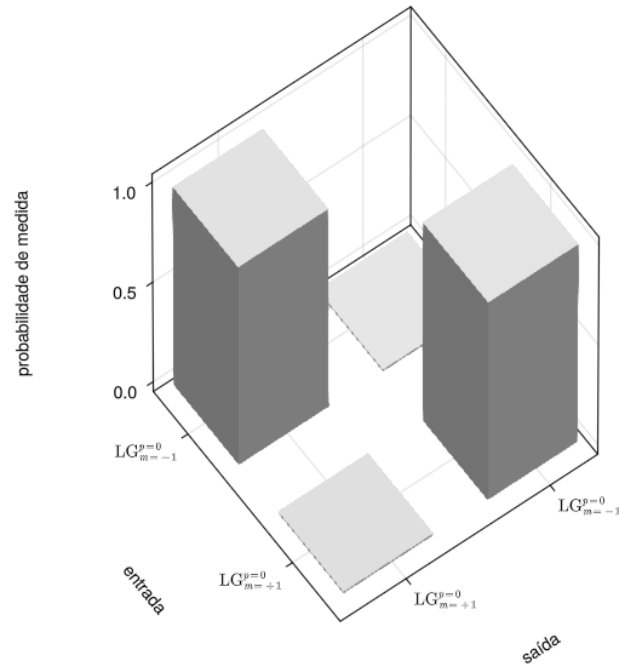
(b) Evolução do modo LG com carga topológica $m = -1$.



(c) Evolução do modo LG com carga topológica $m = +1$.

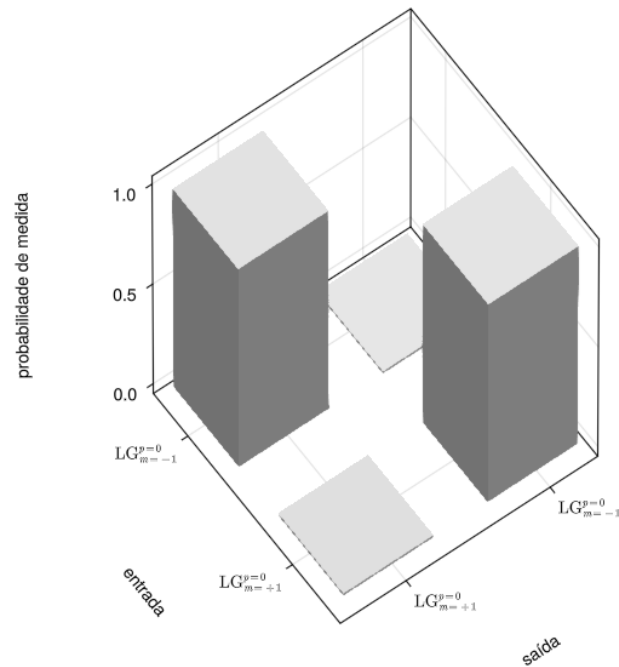
Fonte: Autor, 2026.

Figura 19: Visualização da tabela-verdade quântica da QLG Pauli-X.



Fonte: Autor, 2026.

Figura 20: Visualização da tabela-verdade quântica da QLG Pauli-Y.



Fonte: Autor, 2026.

Ademais, implementamos as QLGs Pauli-Z e Haddamard, correspondentes às operações de negação de fase (*phase-flip*) e transformada

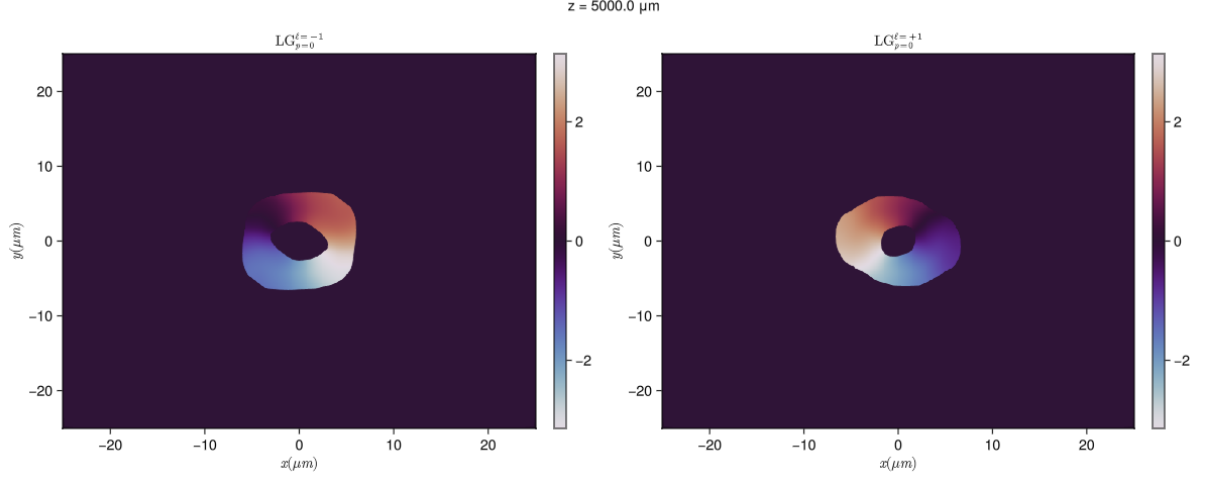
de Fourier quântica de um qubit, parametrizadas pelas composições de rotações

$$Z \equiv YX = R_y(\pi)R_x(\pi), \quad (38)$$

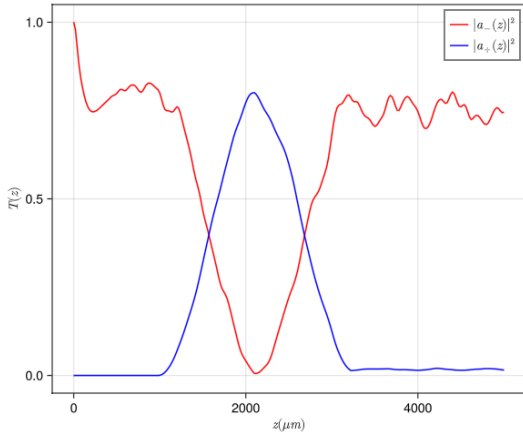
$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Z) = (\cos(-\pi/4)I - \imath \sin(-\pi/4)Y)X \equiv R_y(-\pi/2)R_x(\pi), \quad (39)$$

implementadas pela modelagem aqui apresentadas ao compor rotações de Pauli-X e Pauli-Y, tal qual citado anteriormente. Assim, a Porta Pauli-Z é implementada ao compor a estrutura das QLGs X e Y, enquanto a Porta Haddamard é implementada por meio da composição de QLG X seguida da rotação de Pauli-Y até $\tau_z/4$, resultando num estado su-

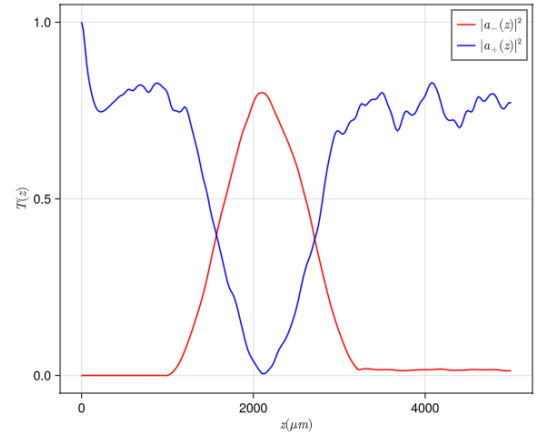
Figura 21: Visualização do efeito da QLG Pauli-Z, implementada com uma fidelidade média de 0.9866, sobre os modos LG. Apresentam-se em (a) a visualização dos perfis transversais de saída e em (b) e (c) as evoluções de potência para perfis de entrada com cargas topológicas $m = -1$ e $m = +1$, respectivamente, até uma distância de $5mm$.



(a) Perfis transversais na saída do chip fotônico da QLG Pauli-Z.



(b) Evolução do modo LG com carga topológica $m = -1$.

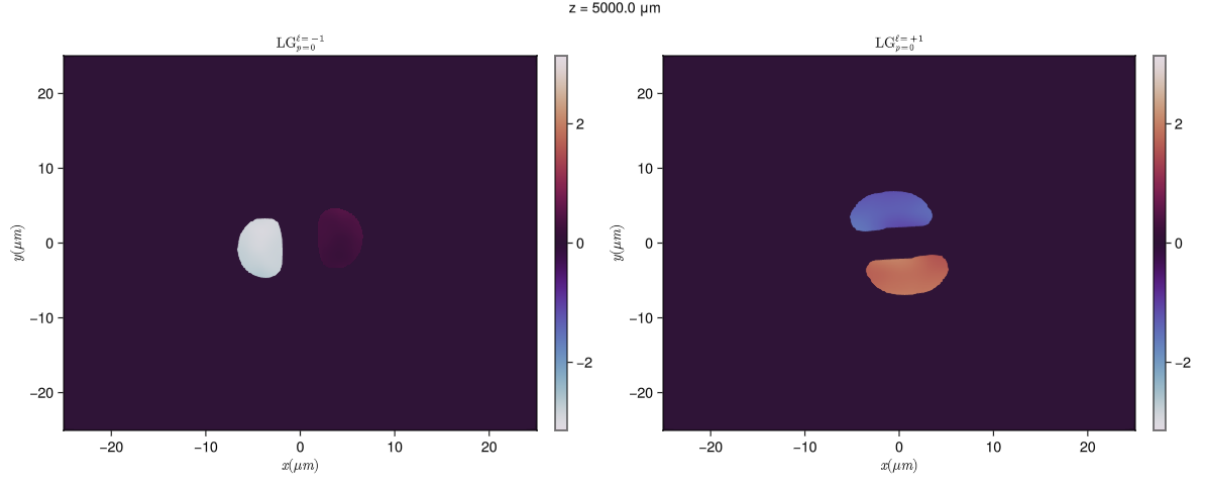


(c) Evolução do modo LG com carga topológica $m = +1$.

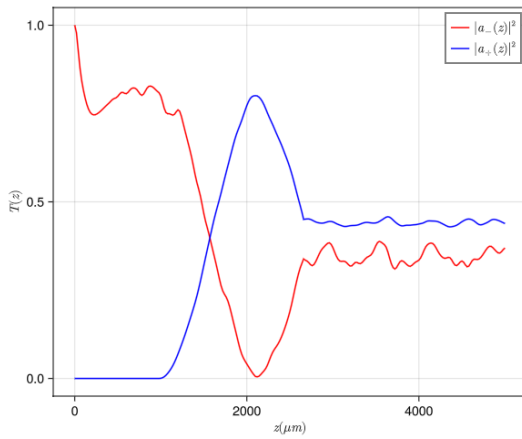
Fonte: Autor, 2026.

perposto com uma relação de fase precisa. Obtivemos aqui, para essas portas, fidelidades médias de respectivamente 0.9866 e 0.9889, como ilustrado nas Figuras 21 e 22, atestando novamente a robustez de nosso modelo, por fim, computamos também a tabela-verdade quântica das portas, ilustrada nas Figuras 23 e 24, que demonstra o *cross-talk* dos modos na saída.

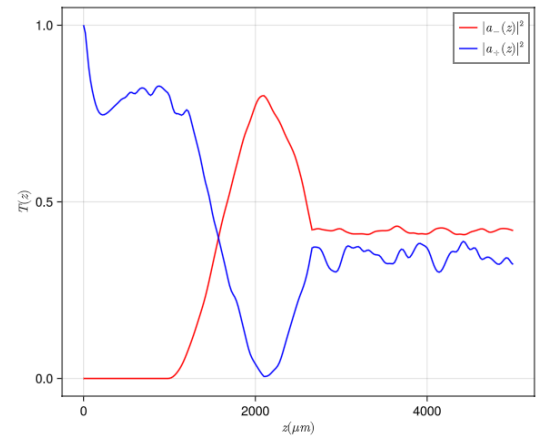
Figura 22: Visualização do efeito da QLG Haddamard, implementada com uma fidelidade média de 0.9889, sobre os modos LG. Apresentam-se em (a) a visualização dos perfis transversais de saída e em (b) e (c) as evoluções de potência para perfis de entrada com cargas topológicas $m = -1$ e $m = +1$, respectivamente, até uma distância de $5mm$.



(a) Perfis transversais na saída do chip fotônico da QLG Haddamard.



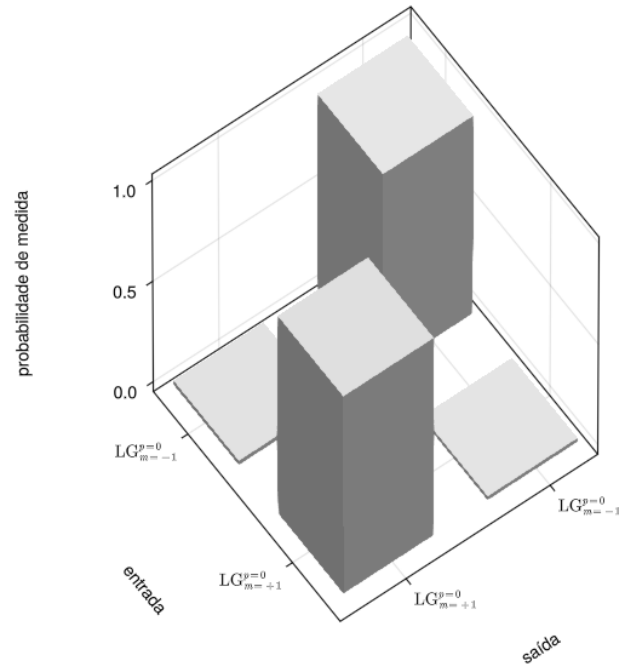
(b) Evolução do modo LG com carga topológica $m = -1$.



(c) Evolução do modo LG com carga topológica $m = +1$.

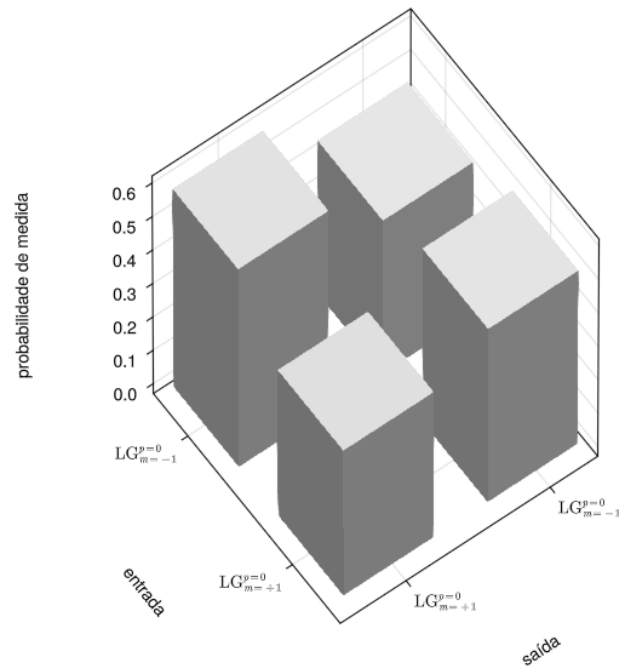
Fonte: Autor, 2026.

Figura 23: Visualização da tabela-verdade quântica da QLG Pauli-Z.



Fonte: Autor, 2026.

Figura 24: Visualização da tabela-verdade quântica da QLG Haddamard.



Fonte: Autor, 2026.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho, foi objetivado fundamentar o processamento em chip fotônico de um bit de informação quântica codificada em fótons torcidos, a partir de uma modelagem da luz baseada na Equação paraxial de Helmholtz, e do formalismo de operadores de criação e aniquilação, seguindo uma abordagem da teoria de modos acoplados. Ainda que o modelo aqui estabelecido se abstenha da principal vantagem dos fótons torcidos, a sua alta-dimensionalidade, o formalismo desenvolvido apresenta-se extremamente robusto, permitindo a demonstração de que a introdução de perturbações azimutais estruturadas por meio de alterações gaussianas podemos realizar operações sobre os fótons torcidos com alta fidelidade.

Efetuamos a validação numérica do formalismo desenvolvido, por meio do método de *split-step*, onde embarcamos as assimetrias do sistema por meio de um par de alterações gaussianas no índice de refração, e demonstramos que a evolução dos modos ópticos é consistente com as previsões do modelo. Utilizamos aqui a métrica de fidelidade média para quantificar a qualidade das implementações em chip das portas Pauli-X (0.9941), Y (0.9936) e Z (0.9866), ademais à porta de Haddamard (0.9889) construídas por meio de composições de rotações sobre a esfera de Poincaré de modos transversais, demonstrando que o confinamento dos modos ópticos em guias anulares acrescido das perturbações azimutais estruturadas apresentam alta qualidade e pureza para o processamento quântico de informação.

As implementações bem sucedidas aqui apresentadas, ainda que sejam de natureza teórica e restrita a provas de princípio, de portas lógicas quânticas consolida o chip fotônico como uma plataforma promissora para a computação sobre o grau de liberdade abordado. Demonstrando que a quebra de simetria azimutal controlada atua como um gerador físico de torque sobre os fótons torcidos, permitindo assim a sua manipulação e processamento.

Por fim, este trabalho estabelece uma rota realizável ao processamento quântico de informação codificada em fótons torcidos, utilizando como plataforma um chip fotônico, abrindo assim portas para futuras pesquisas quanto à sua extensão ao processamento em alta dimensão. Espera-se que os modelos aqui desenvolvidos sirvam de guia para a realização física de dispositivos integrados que explorem a riqueza do momento angular orbital da luz em futuras tecnologias de informação quântica.

REFERÊNCIAS

- ¹J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, en, 3^a ed. (John Wiley & Sons, 1998).
- ²L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw e J. P. Woerdman, “Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes”, [Physical Review A](#) **45**, 8185–8189 (1992).
- ³G. Gibson, J. Courtial, M. J. Padgett, M. Vasnetsov, V. Pas’ko, S. M. Barnett e S. Franke-Arnold, “Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum”, [Optics Express](#) **12**, 5448 (2004).
- ⁴M. Krenn, R. Fickler, M. Fink, J. Handsteiner, M. Malik, T. Scheidl, R. Ursin e A. Zeilinger, “Communication with spatially modulated light through turbulent air across Vienna”, [New Journal of Physics](#) **16**, 113028 (2014).
- ⁵M. Krenn, J. Handsteiner, M. Fink, R. Fickler, R. Ursin, M. Malik e A. Zeilinger, “Twisted light transmission over 143 km”, [Proceedings of the National Academy of Sciences](#) **113**, 13648–13653 (2016).
- ⁶M. Erhard, R. Fickler, M. Krenn e A. Zeilinger, “Twisted photons: new quantum perspectives in high dimensions”, [Light: Science & Applications](#) **7**, 17146–17146 (2017).
- ⁷A. Forbes, F. Nothlawala e A. Vallés, “Progress in quantum structured light”, [Nature Photonics](#) **19**, 1291–1300 (2025).
- ⁸H. Bechmann-Pasquinucci e W. Tittel, “Quantum cryptography using larger alphabets”, [Physical Review A](#) **61** (2000).
- ⁹S.-M. Zhao, L.-Y. Gong, Y.-Q. Li, H. Yang, Y.-B. Sheng e W.-W. Cheng, “A Large-alphabet Quantum Key Distribution Protocol Using Orbital Angular Momentum Entanglement”, [Chinese Physics Letters](#) **30**, 060305 (2013).
- ¹⁰A. Sit, F. Bouchard, R. Fickler, J. Gagnon-Bischoff, H. Larocque, K. Heshami, D. Elser, C. Peuntinger, K. Günthner, B. Heim, C. Marquardt, G. Leuchs, R. W. Boyd e E. Karimi, “High-dimensional intracity quantum cryptography with structured photons”, [Optica](#) **4**, 1006 (2017).
- ¹¹K. Wang, D. Lyu, C. Cai, T. Fu, J. Wang, Q. Wang, J. Liu e J. Wang, “Ultracompact 3D integrated photonic chip for high-fidelity high-dimensional quantum gates”, [Science Advances](#) **11**, 10.1126/sciadv.adv5718 (2025).
- ¹²Y. Chen, J. Gao, Z.-Q. Jiao, K. Sun, W.-G. Shen, L.-F. Qiao, H. Tang, X.-F. Lin e X.-M. Jin, “Mapping Twisted Light into and out of a Photonic Chip”, [Physical Review Letters](#) **121** (2018).
- ¹³K. G. Cognée, H. M. Doeleman, P. Lalanne e A. F. Koenderink, “Generation of Pure OAM Beams with a Single State of Polarization by Antenna-Decorated Microdisk Resonators”, [ACS Photonics](#) **7**, 3049–3060 (2020).
- ¹⁴J. M. de Oliveira, L. M. S. Santos, A. J. Jesus-Silva e E. J. S. Fonseca, “Tunable generation and propagation of vortex beams in a photonic chip”, [Physical Review A](#) **104** (2021).
- ¹⁵J. de Oliveira, J. Rocha, L. Santos, J. Moura, A. Jesus-Silva e E. Fonseca, “Dynamics of the Generation of Independent Orbital-Angular-Momentum Modes in a Photonic Chip”, [Physical Review Applied](#) **20** (2023).
-

-
- ¹⁶J. V. S. Moura, L. M. S. Santos, J. M. de Oliveira, J. C. A. Rocha, A. J. Jesus-Silva, A. Z. Khoury e E. J. S. Fonseca, “Mode-dependent phase in waveguides supporting orbital angular momentum”, *APL Photonics* **11**, 10.1063/5.0292980 (2026).
- ¹⁷L. Chen, W. Zhang, Q. Lu e X. Lin, “Making and identifying optical superpositions of high orbital angular momenta”, *Physical Review A* **88** (2013).
- ¹⁸F. Brandt, M. Hiekkamäki, F. Bouchard, M. Huber e R. Fickler, “High-dimensional quantum gates using full-field spatial modes of photons”, *Optica* **7**, 98 (2020).
- ¹⁹M. Nielsen e I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge Series on Information and the Natural Sciences (Cambridge University Press, 2000).
- ²⁰A. M. Turing et al., “On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem”, *J. of Math* **58**, 5 (1936).
- ²¹M. Planck, “Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum”, *Annalen der Physik* **309**, 553–563 (1901).
- ²²W. Heisenberg, “Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen.”, *Zeitschrift für Physik* **33**, 879–893 (1925).
- ²³E. Schrödinger, “Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik”, *Die Naturwissenschaften* **23**, 807–812 (1935).
- ²⁴G. Boole, *The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning* (Macmillan, Barclay, e Macmillan, Cambridge, 1847).
- ²⁵J. Von Neumann, *First Draft of a Report on the EDVAC*, rel. técn. (1945).
- ²⁶C. E. Shannon, “A Mathematical Theory of Communication”, *Bell System Technical Journal* **27**, 379–423 (1948).
- ²⁷J. E. Hopcroft, R. Motwani e J. D. Ullman, *Introduction to automata theory, languages, and computation*, en, 3^a ed. (Pearson, Upper Saddle River, NJ, 2006).
- ²⁸R. Solovay e V. Strassen, “A Fast Monte-Carlo Test for Primality”, *SIAM Journal on Computing* **6**, 84–85 (1977).
- ²⁹L. Monier, “Evaluation and comparison of two efficient probabilistic primality testing algorithms”, *Theoretical Computer Science* **12**, 97–108 (1980).
- ³⁰D. Deutsch, “Quantum theory, the Church–Turing principle and the universal quantum computer”, *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* **400**, 97–117 (1985).
- ³¹C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloë, *Quantum Mechanics, Volume 1: Basic Concepts, Tools, and Applications* (Wiley, 2019).
- ³²D. Bouwmeester, A. K. Ekert e A. Zeilinger, ed., *The physics of quantum information* (Springer, Berlin, Germany, 2000).
- ³³P. Lambropoulos e D. Petrosyan, *Fundamentals of quantum optics and quantum information*, en, 2007^a ed. (Springer, Berlin, Germany, out. de 2006).
- ³⁴J. R. Silva e C. A. B. S. Santos, “Non-Markovian reservoir profile effects on dynamics of light within a single waveguide”, *Journal of Optics* **28**, 035201 (2026).
- ³⁵D. Deutsch e R. Jozsa, “Rapid solution of problems by quantum computation”, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences* **439**, 553–558 (1992).
-

-
- ³⁶D. Simon, “On the power of quantum computation”, em [Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science](#), SFCS-94 (1994), 116–123.
- ³⁷P. Shor, “Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring”, em [Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science](#) (1994), pp. 124–134.
- ³⁸A. Y. Kitaev, *Quantum measurements and the Abelian Stabilizer Problem*, 1995.
- ³⁹L. K. Grover, “Quantum Mechanics Helps in Searching for a Needle in a Haystack”, [Physical Review Letters](#) **79**, 325–328 (1997).
- ⁴⁰E. Farhi, J. Goldstone e S. Gutmann, *A Quantum Approximate Optimization Algorithm*, 2014.
- ⁴¹A. Peruzzo, J. McClean, P. Shadbolt, M.-H. Yung, X.-Q. Zhou, P. J. Love, A. Aspuru-Guzik e J. L. O’Brien, “A variational eigenvalue solver on a photonic quantum processor”, [Nature Communications](#) **5** (2014).
- ⁴²J. Aasi, J. Abadie, B. Abbott et al., “Enhanced sensitivity of the LIGO gravitational wave detector by using squeezed states of light”, [Nature Photonics](#) **7**, 613–619 (2013).
- ⁴³G. Brassard e C. H. Bennett, “Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing”, em International conference on computers, systems and signal processing (1984), pp. 175–179.
- ⁴⁴B. E. A. Saleh e M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, 2^a ed. (Wiley-Blackwell, 2007).
- ⁴⁵G. L. Pedrola, *Beam Propagation Method for Design of Optical Waveguide Devices* (Wiley, 2015).
- ⁴⁶M. J. Padgett e J. Courtial, “Poincaré-sphere equivalent for light beams containing orbital angular momentum”, [Optics Letters](#) **24**, 430 (1999).
- ⁴⁷W.-P. Huang, “Coupled-mode theory for optical waveguides: an overview”, [Journal of the Optical Society of America A](#) **11**, 963 (1994).
- ⁴⁸G. L. Pedrola, *Integrated Photonics: Fundamentals* (Wiley, 2003).
- ⁴⁹S. Longhi, “Coherent destruction of tunneling in waveguide directional couplers”, [Physical Review A](#) **71**, 10.1103/physreva.71.065801 (2005).
- ⁵⁰S. Longhi, “Adiabatic passage of light in coupled optical waveguides”, [Physical Review E](#) **73**, 10.1103/physreve.73.026607 (2006).
- ⁵¹T. Lunghi, F. Doutre, A. P. Rambú, M. Bellec, M. P. De Micheli, A. M. Apetrei, O. Alibart, N. Belabas, S. Tascu e S. Tanzilli, “Broadband integrated beam splitter using spatial adiabatic passage”, [Optics Express](#) **26**, 27058 (2018).
- ⁵²Y. Yang, R. J. Chapman, B. Haylock, F. Lenzini, Y. N. Joglekar, M. Lobino e A. Peruzzo, “Programmable high-dimensional Hamiltonian in a photonic waveguide array”, [Nature Communications](#) **15**, 10.1038/s41467-023-44185-z (2024).
- ⁵³P. Hildén e A. Shevchenko, “Matrix analysis of high-density arrayed waveguides: Crosstalk suppression by bending”, [Physical Review Applied](#) **22**, 10.1103/physrevapplied.22.024077 (2024).
- ⁵⁴G. B. Arfken, H. J. Weber e F. E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists (Seventh Edition)*, 7th Edition (Academic Press, Boston, 2013).
-

-
- ⁵⁵T. Poon e T. Kim, *Engineering Optics With Matlab®* (World Scientific Publishing Company, 2006).
- ⁵⁶M. A. Nielsen, “A simple formula for the average gate fidelity of quantum dynamical operation”, [Physics Letters A](#) **303**, 249–252 (2002).
- ⁵⁷E. Butkov, *Mathematical Physics*, A-W series in advanced physics (Addison-Wesley Publishing Company, 1968).
- ⁵⁸G. Sansone, *Orthogonal functions*, Dover Books on Mathematics (Dover, 1959).
- ⁵⁹L. Debnath e D. Bhatta, *Integral Transforms and Their Applications* (CRC Press, 2014).
- ⁶⁰*The Julia Programming Language, Version 1.12.5*, dez. de 2025.

APÊNDICES

A FUNÇÕES ESPECIAIS

Na modelagem do comportamento de fenômenos apresentados pela natureza, comumente equações diferenciais são empregadas. Algumas destas, permitem manipulações algébricas de maneira que, quando empregadas, reduzem-nas a problemas conhecidos como do tipo Sturm-Liouville^[54, 57].

Definição 7 (Operador diferencial hermitiano). Seja $\hat{\mathcal{L}}$ um operador diferencial que tem a forma

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \right] - q(x), \quad (40)$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ são funções reais, este é dito Hermitiano^a.

Definição 8 (Problema do tipo Sturm-Liouville). Seja $\hat{\mathcal{L}}$ um operador diferencial hermitiano, à equação de funções características generalizada

$$\hat{\mathcal{L}}\psi(x) = \lambda w(x)\psi(x), \quad (41)$$

dá-se o nome de problema de Sturm-Liouville.

^aEm certos casos não somente a Equação 40 é suficiente para garantir a hermiticidade do operador diferencial, havendo em adição a necessidade da imposição de certas condições de contorno^[54].

Em decorrência da hermiticidade do operador diferencial que define um problema do tipo Sturm-Liouville, segue de imediato que suas funções características são ortogonais para um dado produto interno do espaço de funções, como descrito no Teorema 5^[54, 57].

Definição 9 (Produto interno do espaço das funções). Dado uma função $w(x)$, denomina-se a integral

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int w(x) dx \overline{\phi(x)} \psi(x), \quad (42)$$

como um produto interno do espaço de funções.

Definição 10 (Família ortogonal de funções). uma família de funções $\{\psi_m\}_{m \in M \subseteq \mathbb{Z}}$ tal que

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = a_n \delta_{m,n}, \quad (43)$$

onde $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$, para um dado produto interno é dita uma família ortogonal de funções.

Teorema 5. Dado um *problema de Sturm-Liouville*, suas funções características com distintos valores característicos compõem uma família ortogonal de funções para o produto interno

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_{x \in \mathbb{I}} w(x) dx \overline{\phi(x)} \psi(x), \quad (44)$$

para algum intervalo $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$, onde $w(x)$ é o peso do problema de Sturm-Liouville.

Neste apêndice iremos nos aprofundar em algumas destas famílias ortogonais de funções, bem como algumas de suas propriedades utilizadas ao longo do desenvolvimento teórico do presente trabalho, que solucionam distintos *problemas do tipo Sturm-Liouville*.

A.1 Ondas planas e expansão em série de Fourier

A família mais elementar de funções ortogonais é a família das ondas planas. Esta tem por fundamento o *problema de Sturm-Liouville* para a equação diferencial do oscilador harmônico simples clássico no qual o espectro de frequências satisfaz condições de contorno periódicas^[54].

Propriedade 3 (ortogonalidade das ondas planas).

$$\int_a^b dx e^{-i \frac{2\pi}{b-a} mx} e^{+i \frac{2\pi}{b-a} nx} = (b-a) \delta_{m,n}. \quad (45)$$

Em decorrência de sua *relação de ortogonalidade*, tal família é comumente utilizada para expandir o espaço das funções contínuas num dado intervalo fechado $[a, b]$ em série, método conhecido como *expansão em série de Fourier*^[54, 57, 58].

Definição 11 (Expansão em série de Fourier). Dada uma função $f(x)$ definida no intervalo $[a, b]$, à expansão em série

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n e^{-i \frac{2\pi}{b-a} nx}, \quad (46)$$

definida neste mesmo intervalo, dá-se o nome de série de Fourier.

Teorema 6. *Os coeficientes z_n de uma série de Fourier para um dado intervalo na reta real, se existirem, são únicos e da forma*

$$z_m = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b dx e^{-i\frac{2\pi}{b-a}mx} f(x). \quad (47)$$

A.2 Polinômios de Hermite e polinômios associados de Laguerre

Outras duas importantes famílias de funções ortogonais, em especial ao presente trabalho em decorrência de suas aplicações diretas à definição de feixes de luz torcida em óptica de feixes, são as famílias de polinômios de Hermite, representados graficamente na [Figura 25](#), e dos polinômios associados de Laguerre, representados graficamente na [Figura 26](#).

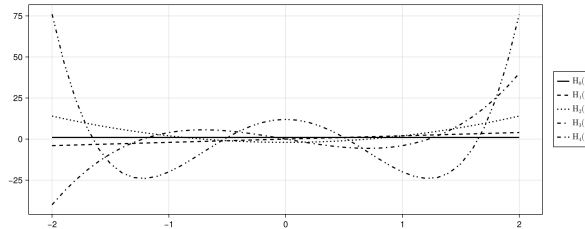
Propriedade 4 (ortogonalidade dos polinômios de Hermite).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx H_m(x) H_n(x) = 2^n \sqrt{\pi} n! \delta_{m,n}. \quad (48)$$

Propriedade 5 (ortogonalidade dos polinômios associados de Laguerre).

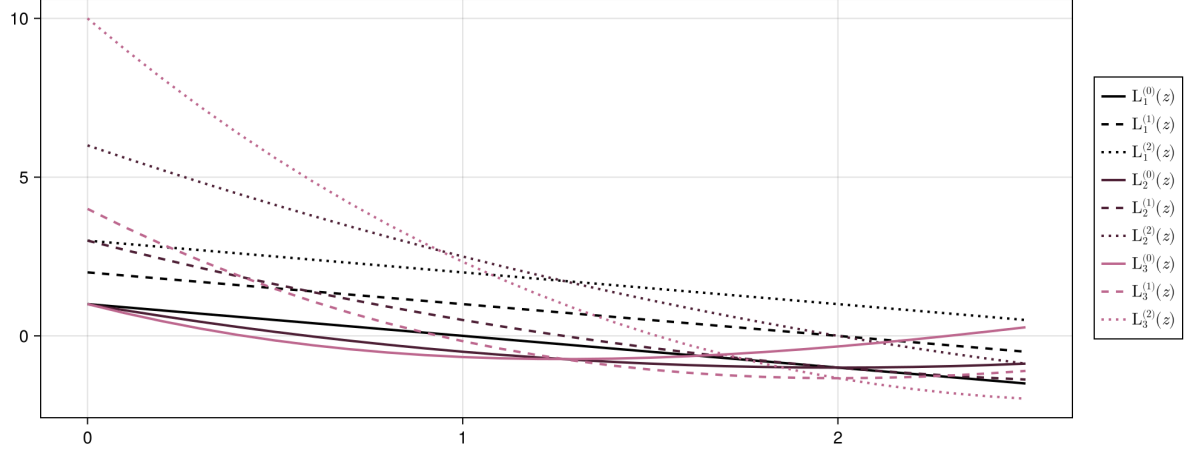
$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \delta_{m,n}. \quad (49)$$

Figura 25: Representação gráfica dos polinômios de Hermite $H_0(z) = 1$, $H_1(z) = 2z$, $H_2(z) = 4z^2 - 2$, $H_3(z) = 8z^3 - 12z$, $H_4(z) = 16z^4 - 48z^2 + 12$, definidos segundo a convenção física.



Fonte: Autor, 2026.

Figura 26: Representação gráfica dos polinômios associados de Laguerre, $L_1^{(\alpha)}(z) = -z + \alpha + 1$,
 $L_2^{(\alpha)}(z) = \frac{1}{2}(z^2 - 2(\alpha + 2)z + (\alpha + 1)(\alpha + 2))$ e
 $L_3^{(\alpha)}(z) = \frac{1}{6}(-z^3 - 3(\alpha + 3)z^2 - 3(\alpha + 2)(\alpha + 3)z + (\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3))$, para $\alpha = 0, 1, 2$.

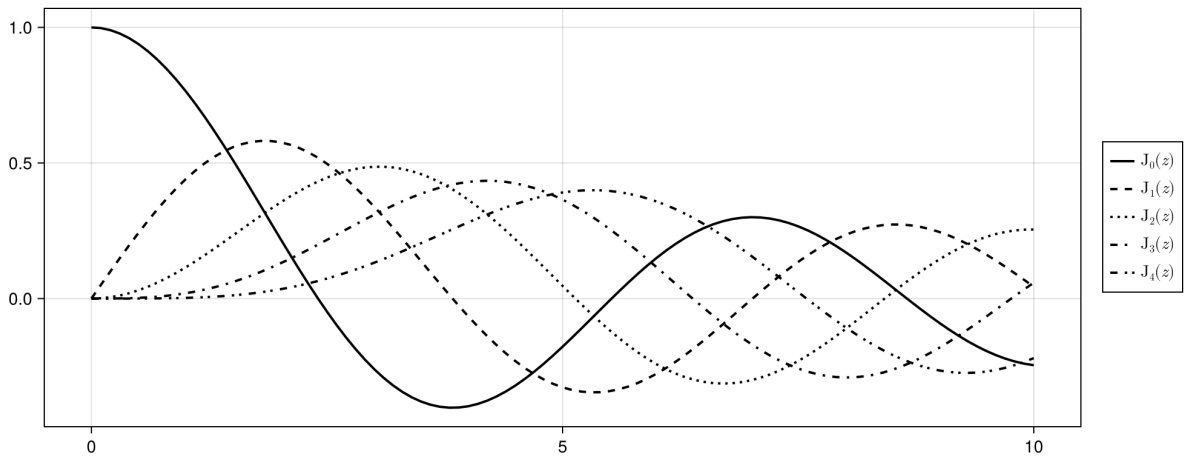


Fonte: Autor, 2026.

A.3 Funções de Bessel do primeiro tipo e sua versão modificada

Outra importante família de funções especiais ao presente trabalho são as funções de Bessel do primeiro tipo, definida com base nos problemas de Sturm-Liouville da equação diferencial de Bessel do primeiro tipo, representada graficamente na Figura 27, ademais à sua versão modificada, representada graficamente na Figura 28,^[54, 57, 59]. Ao presente trabalho,

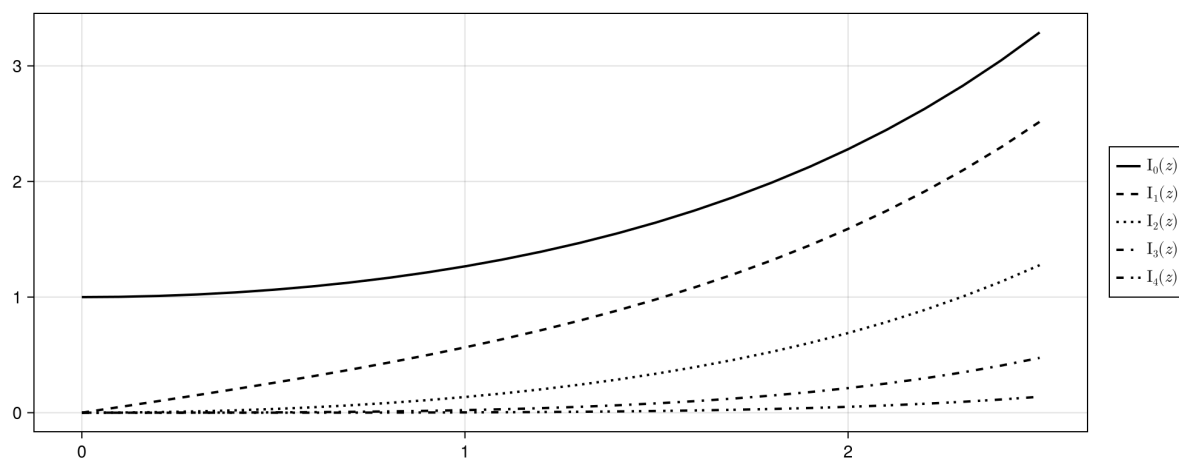
Figura 27: Representação gráfica, para $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$, das funções de Bessel do primeiro tipo $J_\nu(z)$.



Fonte: Autor, 2026.

um dos principais resultados decorrentes da definição de funções de Bessel de primeiro tipo e sua versão modificada, consiste na [expansão em série para a composição de cosseno hiperbólico com cosseno](#)^[54].

Figura 28: Representação gráfica, para $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$, das funções de Bessel modificadas do primeiro tipo $I_\nu(z) = i^{-\nu} J_\nu(iz)$.



Fonte: Autor, 2026.

Teorema 7.

$$\cosh(z \cos \theta) = I_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_{2n}(z) \cos(2n\theta). \quad (50)$$

ANEXOS

A CÓDIGO DESENVOLVIDO

O código-fonte abaixo consiste no utilizado na simulação do processamento de informação codificada em modos de luz torcida, conforme dissertado no presente trabalho. Este foi escrito na linguagem de programação *Julia*^[60] dado à sua velocidade e sintaxe próxima a da linguagem matemática tradicional⁶.

```
"""
    Processamento em chip fotônico de um bit de informação quântica codificada em
    fótons torcidos
    Autor: C. Antunis B. da S. Santos
    Contato: carlos.bonfim@fis.ufal.br
    Última modificação: 13 de abril de 2026.
"""

# Incluir bibliotecas auxiliares
using FFTW: fft, ifft, fftfreq;           # Transformada de Fourier rápida
using ClassicalOrthogonalPolynomials: laguerrel; # Polinômios associados de Laguerre
using LinearAlgebra: tr;                  # Traço de matrizes
using GLMakie;                           # Visualização de dados

# Incluir os caminhos de assets
const assets = joinpath(@__DIR__, "..");
const figures = joinpath(assets, "figures");
const videos = joinpath(assets, "videos");

# Tipagem de dados numéricos
number_t = Union{Float64, Int64};

# Configurar unidades de medida
const μm = 1;                             # micrômetro (unidade padrão para
chips fotônicos)                          # nanômetro
const nm = 1e-3μm;                       # milímetro
const mm = 1e3μm;

# Grandezas físicas experimentais
const λ = 780.0nm;                        # comprimento de onda da luz
const w₀ = 4.4μm;                        # cintura do feixe
laguerre-gaussiano

λ_not = λ / (2π);                         # comprimento de onda reduzido
λ_not² = λ_not²;

# Parâmetros de escrita dos guias de onda
const n₀ = 1.5078;                        # índice de refração do material do
chip                                       # constraste de índice de refração
const Δn₀ = +2.2e-3;                    # constraste de índice de refração
para guia anular                         # constraste de índice de refração
const δn₀ = .5Δn₀;                      # constraste de índice de refração
para spots

const s₀ = w₀;                           # raio do guia anular
const W = 2.0μm;                         # raio do spot de escrita
```

⁶O código está também disponibilizado em um [repositório público no GitHub](#).

```

const Δz0 = 2.220mm;                                     # período (obtido empiricamente)

# Tipagem de coordenadas espaciais
coordinate_t = AbstractArray{<:number_t, 1};
point2d_t = Tuple{<:number_t, <:number_t};

# Grid espacial de simulação
const x, y = -25μm:0.1μm:+25μm, -25μm:0.1μm:+25μm;
const z = 0.0μm:20μm:5.0mm;

dS = step(x) * step(y);                                   # elemento de área para integração

# Tipagem de modos ópticos
mode_t = Matrix{<:Union{ComplexF64, Float64}};

# Modos laguerre-gaussianos
function laguerreGauss(w0::number_t, l::Int64, X::coordinate_t, Y::coordinate_t,
p::Int64=0)
    _l, _s = abs(l), sign(l)
    _sqrt2 = sqrt(2)

    _x, _y = [x / w0 for x in X, _ in Y], [y / w0 for _ in X, y in Y]

    _z = @. _sqrt2 * (_x + 1im * _s * _y)
    r2 = @. .5abs2(_z)

    A = sqrt(2 * factorial(p) / (π * w02 * factorial(p + _l)))

    return @. A * _z_l * laguerrel(p, _l, 2r2) * exp(-r2)
end

# Tipagem de guias de onda
function_t = Union{<:Function};
waveguide_t = Union{<:Function};

# Funções para construção de guias de onda reto
function straight(
    Δn::number_t, κ::function_t,
    zi::number_t, Δz::number_t,
    r_i::point2d_t=(0., 0.),
    r_f::point2d_t=(0., 0.)
)
    v_x, v_y = (r_f .- r_i) ./ Δz
    halfΔz = 0.5Δz
    zm = zi + halfΔz
    return (x::coordinate_t, y::coordinate_t, z::number_t) -> begin
        X = [x - r_i[1] - v_x * (z - zi) for x in x, _ in y]
        Y = [y - r_i[2] - v_y * (z - zi) for _ in x, y in y]
        return (abs(z - zm) ≤ halfΔz) ?
            Δn * κ.(X, Y, z) :
            zeros(Float64, length(x), length(y))
    end
end

# Funções dos perfis transversais dos guias de onda
function gaussian(W::number_t)
    return (x::number_t, y::number_t, z::number_t) -> begin
        return exp(-(x2 + y2) / W2)
    end
end

```

```

    end
end
function annular(a::number_t, W::number_t)
    return (x::number_t, y::number_t, z::number_t) -> begin
        r = sqrt(x^2 + y^2)
        return exp(-((r - a)^2) / W^2)
    end
end

# Rotina de visualização 3D de guias de onda
function visualize!(
    ax::GLMakie.Axis3,
    Δn::AbstractArray{<:waveguide_t,1},
    X::coordinate_t, Y::coordinate_t,
    zi::number_t, zf::number_t;
    planes::Int64=20,
    cmap::Union{Symbol,Reverse{Symbol}}=Reverse(:bone)
)
    G(z) = sum([δn(X, Y, z) for δn in Δn])
    Nx, Ny = length(X), length(Y)
    ΔnVol = permutedims(
        reshape(
            hcat([G(z) for z in LinRange(zi, zf, planes)]...),
            Nx, Ny, planes
        ),
        (1, 3, 2)
    )
    v = volume!(
        ax,
        (X[1], X[end]), (zi, zf), (Y[1], Y[end]),
        ΔnVol;
        colormap=cmap,
        algorithm=:mip,
        transparency=true
    )
    return v
end

# Funções para construção do método split-step
function splitStep(
    X::coordinate_t, Y::coordinate_t,
    n0::number_t,
    Δn::AbstractArray{<:waveguide_t,1}=[(x, y, z) -> 0.0]
)
    u_x = 2π * fftfreq(length(X), 1. / step(X));
    u_y = 2π * fftfreq(length(Y), 1. / step(Y));

    ∇² = [-(ξ_x^2 + ξ_y^2) for ξ_x in u_x, ξ_y in u_y];

    G(z) = sum([δn(X, Y, z) for δn in Δn])
    return (Ψ::mode_t, λ::number_t, z::number_t, Δz::number_t) -> begin
        κ0 = 2π / λ
        κ = κ0 * n0
        return exp(-1im * κ0 * G(z) * Δz) .*
            ifft(exp(-1im * ∇² / 2κ * Δz) .* fft(Ψ))
    end
end
end

```

```

# Produto interno entre funções de quadrado integrável
⊙(φ::mode_t, ψ::mode_t) = begin
    return round.(sum(conj.(φ) .* ψ), digits=8)
end

# Tipagem de processos quânticos unitários
operator_t = Union{<:AbstractMatrix{<:Union{ComplexF64,Float64}}};

# Fidelidade média entre processos quânticos unitários
function fidelity(U::operator_t, T::operator_t)
    Pauli_x = [0 1; 1 0]
    Pauli_y = [0 -1im; 1im 0]
    Pauli_z = [1 0; 0 -1]

    traces = [
        tr(T * Pauli * T' * U * Pauli * U') for Pauli in [Pauli_x, Pauli_y, Pauli_z]
    ]
    return 0.5 + (1 / 12) * sum(traces)
end

"""
    Rotina principal de execução do código-fonte
"""

# Computar a base computacional de modos laguerre-gaussianos no chip fotônico
Ψ-1 = laguerreGauss(w0, -1, x, y);
Ψ+1 = laguerreGauss(w0, +1, x, y);

# Computar nomes e perfis de chips fotônicos
names = ["I", "X", "Y"];

Δnanular = [straight(Δn0, annular(s0, W), z[1], z[end])];

function Δn_G(ζ0, Δζ, γ0)
    x0, y0 = s0 * cos(γ0 - π/2), s0 * sin(γ0 - π/2);
    return [
        straight(δn0, gaussian(W), ζ0, Δζ, (+x0, +y0), (+x0, +y0)),
        straight(δn0, gaussian(W), ζ0, Δζ, (-x0, -y0), (-x0, -y0))
    ];
end

z0 = 1.250mm; # posição inicial dos guias de onda.
chips = [
    Δnanular,
    vcat(Δnanular, Δn_G(z0, Δz0, π/2)),
    vcat(Δnanular, Δn_G(z0, Δz0, π/4))
];

# Método para computar laplaciano do modo transversal
function ∇2(ψ::mode_t)
    Fψ = fft(ψ);

    ux = 2π * fftfreq(length(x), 1. / step(x));
    uy = 2π * fftfreq(length(y), 1. / step(y));

    ∇2 = [-(ξx2 + ξy2) for ξx in ux, ξy in uy];

```

```

    return ifft( $\nabla^2$  .* F $\psi$ );
end

H0 = [
     $\Psi_{-1} \odot (-\lambda_{\text{not}}^2 * \nabla^2(\Psi_{-1}) / 2n_0)$   $\Psi_{-1} \odot (-\lambda_{\text{not}}^2 * \nabla^2(\Psi_{+1}) / 2n_0)$ ;
     $\Psi_{+1} \odot (-\lambda_{\text{not}}^2 * \nabla^2(\Psi_{-1}) / 2n_0)$   $\Psi_{+1} \odot (-\lambda_{\text{not}}^2 * \nabla^2(\Psi_{+1}) / 2n_0)$ ;
];

# Função para computar perfil transversal do modo
function profile( $\psi$ )
    I = abs2( $\psi$ )
    I_max = maximum(I)
     $\Phi$  = angle( $\psi$ )
    return (I .> 0.3I_max) .*  $\Phi$ 
end

for (name,  $\Delta n$ ) in zip(names, chips)
    println("Iniciando a simulação com gerador Pauli- $\$name$ ");

    # Obter a representação matricial do gerador
    V = sum([ $\delta n(x, y, z_0)$  for  $\delta n$  in  $\Delta n$ ]);
    U = [
         $\Psi_{-1} \odot (V .* \Psi_{-1})$   $\Psi_{-1} \odot (V .* \Psi_{+1})$ ;
         $\Psi_{+1} \odot (V .* \Psi_{-1})$   $\Psi_{+1} \odot (V .* \Psi_{+1})$ ;
    ];

    H = (H0 + U) .* dS /  $\lambda_{\text{not}}$ ;

     $\zeta_0$  = abs(2 $\pi$  / H[1,2]);

    println("Gerador Pauli- $\$name$ :");
    display(H);
    println("Período de oscilação:  $\$ \zeta_0 \mu\text{m}$ ");

    # Visualizar o perfil de índice de refração do chip fotônico
    print("Renderizando chip-waveguides- $\$name$ .png em ../figures/ ");
    fig3dChip = GLMakie.Figure(size=(1000, 600));

    ax3dChip = GLMakie.Axis3(
        fig3dChip[1,1],
        xlabel=L"x ( $\mu\text{m}$ )",
        ylabel=L"z ( $\mu\text{m}$ )",
        zlabel=L"y ( $\mu\text{m}$ )",
        aspect=(2,3,2)
    );
    v = visualize!(
        ax3dChip,
         $\Delta n$ , x, y, z[1], z[end];
        planes=50,
    );
    Colorbar(fig3dChip[1,2], v, label=" $\Delta n$ ");
    save(joinpath(figures, "chip-waveguides- $\$name$ .png"), fig3dChip);
    println(" [COMPLETO] ");

    # Visualizar o perfil transversal de índice de refração do chip fotônico
    println("Renderizando perfis transversais dos guias");
    for z in [z[1], z0, z[end]]

```

```

        print("\tRenderizando chip-waveguides-$name-z$(round(z/mm)).png em
../figures/ ");
        fig2dChip = GLMakie.Figure(size=(600, 500))
        ax2dChip = GLMakie.Axis(
            fig2dChip[1,1],
            xlabel=L"x (\mu{m})",
            ylabel=L"y (\mu{m})"
        );
        V = sum([\delta n(x, y, z) for \delta n in \Delta n]);
        h = heatmap!(ax2dChip, x, y, V; colormap=:bone);
        Colorbar(fig2dChip[1,2], h, label="\Delta n");
        save(joinpath(figures, "chip-waveguides-$name-z$(round(z/mm)).png"),
fig2dChip);
        println("[COMPLETO]");
        end

        # Computar o operador de propagação do guia de onda anular
        P = splitStep(x, y, n0, \Delta n)

        # Computar a evolução dos modos laguerre-gaussianos ao longo do chip
        fotônico
        print("Renderizando evolucao-modos-$name.mp4 em ../videos/ ")
        \Phi_{-0}, \Phi_{+0} = \Psi_{-1}, \Psi_{+1};
        fig\Psi = Figure(size=(1200, 500));
        ax\Psi = [
            Axis(
                fig\Psi[1, 1],
                title=L"LG$\ell = -1\}_{p = 0}$",
                xlabel=L"x (\mu m)", ylabel=L"y (\mu m)"
            ),
            Axis(
                fig\Psi[1, 3],
                title=L"LG$\ell = +1\}_{p = 0}$",
                xlabel=L"x (\mu m)", ylabel=L"y (\mu m)"
            )
        ];
        h\Psi = [
            heatmap!(ax\Psi[1], x, y, profile(\Phi_{-0}); colormap=:twilight, colorrange=(-\pi, \pi)),
            heatmap!(ax\Psi[2], x, y, profile(\Phi_{+0}); colormap=:twilight, colorrange=(-\pi, \pi))
        ];

        Colorbar(fig\Psi[1, 2], h\Psi[1]);
        Colorbar(fig\Psi[1, 4], h\Psi[2]);

        suptitle = Label(fig\Psi[0, :], "z = 0 \mu m");

        a, b = [
            [1. + 0. * im],
            [0. + 0. * im]
        ], [
            [0. + 0. * im],
            [1. + 0. * im]
        ];

        record(
            fig\Psi,
            joinpath(videos, "evolucao-modos-$name.mp4"), z[2:end]; framerate=30
        ) do Z

```

```

 $\Phi_{-0}, \Phi_{+0} = P(\Phi_{-0}, \lambda, Z, 20\mu\text{m}), P(\Phi_{+0}, \lambda, Z, 20\mu\text{m});$ 

h $\Psi$ [1][3][] = profile( $\Phi_{-0}$ );
h $\Psi$ [2][3][] = profile( $\Phi_{+0}$ );

suptitle.text = "z = $(round(Z/ $\mu\text{m}$ ))  $\mu\text{m}$ ";

push!(a[1], ( $\Psi_{-1} \odot \Phi_{-0}$ ) * dS);
push!(a[2], ( $\Psi_{+1} \odot \Phi_{-0}$ ) * dS);

push!(b[1], ( $\Psi_{-1} \odot \Phi_{+0}$ ) * dS);
push!(b[2], ( $\Psi_{+1} \odot \Phi_{+0}$ ) * dS);
end
println("[COMPLETO]");

# Visualizar as oscilações do tipo Rabi de modos
println("Renderizando curvas de potência dos modos");
for (c, m) in zip([a, b], ["neg", "pos"])
    print("\tRenderizando oscilacoes-rabi- $\$name-\$m.png$  em ../figures/ ");
    figRabi = GLMakie.Figure(size=(600, 500))
    axRabi = GLMakie.Axis(
        figRabi[1,1],
        xlabel=L"z ( $\mu\{m\}$ )",
        ylabel=L"T(z)",
    );
    lines!(axRabi, z, abs2.(c[1])); label=L" $|a_{-}(z)|^2$ ", color=:red;
    lines!(axRabi, z, abs2.(c[2])); label=L" $|a_{+}(z)|^2$ ", color=:blue;
    axislegend(axRabi);
    save(joinpath(figures, "oscilacoes-rabi- $\$name-\$m.png$ "), figRabi);
    println("[COMPLETO]");
end
println("");
end

# Nomear as portas lógicas quânticas a serem simuladas
names = ["X", "Y", "Z", "H"];
QLGs = [
    [0.0 1.0; 1.0 0.0],
    [0.0 -1.0im; +1.0im 0.0],
    [+1.0 0.0; 0.0 -1.0],
    (1.0/sqrt(2.0)) * [1.0 1.0; 1.0 -1.0]
];

# Computar perfis de índice de refração dos chips fotônicos para portas lógicas
z0 = 1.0mm; # posição inicial dos guias de onda.
chips = [
    vcat(
         $\Delta n_{\text{anular}}$ ,
         $\Delta n_G(z_0, .5\Delta z_0, \pi/2)$ 
    ),
    vcat(
         $\Delta n_{\text{anular}}$ ,
         $\Delta n_G(z_0, .5\Delta z_0, \pi/4)$ 
    ),
    vcat(
         $\Delta n_{\text{anular}}$ ,
         $\Delta n_G(z_0, .5\Delta z_0, \pi/2)$ ,

```

```

         $\Delta n_G(z_0 + .5\Delta z_0, .5\Delta z_0, \pi/4)$ 
    ),

    vcat(
         $\Delta n_{\text{anular}}$ ,
         $\Delta n_G(z_0, .5\Delta z_0, \pi/2)$ ,
         $\Delta n_G(z_0 + .5\Delta z_0, .25\Delta z_0, -\pi/4)$ 
    ),
];

for (name, Target,  $\Delta n$ ) in zip(names, QLGs, chips)
    println("Iniciando a simulação da porta lógica $name");

    # Visualizar o perfil de índice de refração do chip fotônico
    print("Renderizando chip-waveguides-QLG-$name.png em ../figures/ ");
    fig3dChip = GLMakie.Figure(size=(1000, 600));
    ax3dChip = GLMakie.Axis3(
        fig3dChip[1,1],
        xlabel=L"x ( $\mu m$ )",
        ylabel=L"z ( $\mu m$ )",
        zlabel=L"y ( $\mu m$ )",
        aspect=(2,3,2)
    );
    v = visualize!(
        ax3dChip,
         $\Delta n$ , x, y, z[1], z[end];
        planes=50,
    );
    Colorbar(fig3dChip[1,2], v, label=" $\Delta n$ ");
    save(joinpath(figures, "chip-waveguides-QLG-$name.png"), fig3dChip);
    println("[COMPLETO]");

    # Computar o operador de propagação do guia de onda anular
    P = splitStep(x, y,  $n_0$ ,  $\Delta n$ )

    # Computar a evolução dos modos laguerre-gaussianos ao longo do chip
    fotônico
    print("Renderizando evolucao-modos-QLG-$name.mp4 em ../videos/ ")
     $\Phi_{-0}, \Phi_{+0} = \Psi_{-1}, \Psi_{+1}$ ;
    fig $\Psi$  = Figure(size=(1200, 500));
    ax $\Psi$  = [
        Axis(
            fig $\Psi$ [1, 1],
            title=L"LG $^{\ell = -1}_{p = 0}$ ",
            xlabel=L"x ( $\mu m$ )", ylabel=L"y ( $\mu m$ )"
        ),
        Axis(
            fig $\Psi$ [1, 3],
            title=L"LG $^{\ell = +1}_{p = 0}$ ",
            xlabel=L"x ( $\mu m$ )", ylabel=L"y ( $\mu m$ )"
        )
    ]
];

h $\Psi$  = [
    heatmap!(ax $\Psi$ [1], x, y, profile( $\Phi_{-0}$ ); colormap=:twilight, colorrange=(- $\pi$ ,  $\pi$ )),
    heatmap!(ax $\Psi$ [2], x, y, profile( $\Phi_{+0}$ ); colormap=:twilight, colorrange=(- $\pi$ ,  $\pi$ ))
];

```

```

];

Colorbar(figΨ[1, 2], hΨ[1]);
Colorbar(figΨ[1, 4], hΨ[2]);

suptitle = Label(figΨ[0, :], "z = 0 μm");

a, b = [
    [1. + 0. * im],
    [0. + 0. * im]
], [
    [0. + 0. * im],
    [1. + 0. * im]
];

record(
    figΨ,
    joinpath(videos, "evolucao-modos-QLG-$name.mp4"), z[2:end]; framerate=30
) do Z
    Φ-0, Φ+0 = P(Φ-0, λ, Z, 20μm), P(Φ+0, λ, Z, 20μm);

    hΨ[1][3] [] = profile(Φ-0);
    hΨ[2][3] [] = profile(Φ+0);

    suptitle.text = "z = $(round(Z/μm)) μm";

    push!(a[1], (Ψ-1 ⊙ Φ-0) * dS);
    push!(a[2], (Ψ+1 ⊙ Φ-0) * dS);

    push!(b[1], (Ψ-1 ⊙ Φ+0) * dS);
    push!(b[2], (Ψ+1 ⊙ Φ+0) * dS);
end
println(" [COMPLETO] ");

# Visualizar as oscilações do tipo Rabi de modos
println("Renderizando curvas de potência dos modos");
for (c, m) in zip([a, b], ["neg", "pos"])
    print("\tRenderizando oscilacoes-rabi-QLG-$name-$m.png em ../figures/ ");
    figRabi = GLMakie.Figure(size=(600, 500))
    axRabi = GLMakie.Axis(
        figRabi[1,1],
        xlabel=L"z (μm)",
        ylabel=L"T(z)",
    );
    lines!(axRabi, z, abs2.(c[1])); label=L"|a-(z)|2", color=:red);
    lines!(axRabi, z, abs2.(c[2])); label=L"|a+(z)|2", color=:blue);
    axislegend(axRabi);
    save(joinpath(figures, "oscilacoes-rabi-QLG-$name-$m.png"), figRabi);
    println(" [COMPLETO] ");
end

# Computar a representação matricial do operador de propagação do chip
fotônico
println("Computando porta lógica implementada pelo chip fotônico");

U() = begin
    A = [a[1][end], a[2][end]];
    B = [b[1][end], b[2][end]];

```

```

    N = [
        sqrt(abs2(A[1]) + abs2(A[2])),
        sqrt(abs2(B[1]) + abs2(B[2]))
    ];

    A ./= N;
    B ./= N;

    return [A[1] B[1]; A[2] B[2]];
end

Gate = U()
println("\tPorta lógica $name:");
display(Gate);

F = fidelity(Gate, Target);
println("\tFidelidade média da porta lógica $name: $F");

# Visualizar a tabela-verdade da porta lógica implementada pelo chip fotônico
print("\tRenderizando tabela-verdade-QLG-$name.png em ../figures/ ")
dominio = [(i,j) for i in 1:2 for j in 1:2];
τ = [abs2(Gate[i,j]) for (i,j) in dominio];
figTabelaVerdade = Figure(size=(800, 600));
axTabelaVerdade = Axis3(
    figTabelaVerdade[1,1],
    xlabel="", ylabel="", zlabel="probabilidade de ocupação",
    aspect=(2, 2, 3),
    elevation=0.35π, azimuth=0.3π
);
axTabelaVerdade.yticks = (1.25:2.25, [
    L"\mathrm{LG}^{\{p = 0\}_{m = -1}}",
    L"\mathrm{LG}^{\{p = 0\}_{m = +1}}",
]);
axTabelaVerdade.xticks = (1.25:2.25, [
    L"\mathrm{LG}^{\{p = 0\}_{m = -1}}",
    L"\mathrm{LG}^{\{p = 0\}_{m = +1}}",
]);
meshscatter!(axTabelaVerdade, dominio;
    markersize=[Vec3f(1.25, 1.25, τ) for τ in τ],
    marker=Rect3f((0., 0., 0.), (0.5, 0.5, 1)),
    color=to_colormap(Reverse(:bone)),
);
save(joinpath(figures, "tabela-verdade-QLG-$name.png"), figTabelaVerdade);
println(" [COMPLETO] ");

println("");
end

```

B DEMONSTRAÇÕES DE TEOREMAS

Teorema 1

Seja $\psi = \alpha \text{LG}_{-1}^{p=0} + \beta \text{LG}_{+1}^{p=0}$, segue de imediato que, para quaisquer campos Ψ sua componente na direção de ψ será dada por

$$\begin{aligned} a_\psi = \langle \psi, \Psi \rangle &= \bar{\alpha} \langle \text{LG}_{-1}^{p=0}, \Psi \rangle + \bar{\beta} \langle \text{LG}_{+1}^{p=0}, \Psi \rangle \\ &= \bar{\alpha} a_- + \bar{\beta} a_+, \end{aligned} \quad (51)$$

onde $a_\pm$ é a componente do campo na direção dos modos LG de carga $m = \pm 1$, assim, promovendo a operadores de aniquilação

$$\hat{\mathbf{a}}_\psi = \bar{\alpha} \hat{\mathbf{a}}_- + \bar{\beta} \hat{\mathbf{a}}_+, \quad (52)$$

de maneira que, tomando o adjunto hermitiano, segue que

$$\hat{\mathbf{a}}_\psi^\dagger = \alpha \hat{\mathbf{a}}_-^\dagger + \beta \hat{\mathbf{a}}_+^\dagger, \quad (53)$$

por fim, notando que $\alpha = \langle \text{LG}_{-1}^{p=0}, \psi \rangle$ e $\beta = \langle \text{LG}_{+1}^{p=0}, \psi \rangle$, segue que

$$\hat{\mathbf{a}}_\psi^\dagger = \langle \text{LG}_{-1}^{p=0}, \psi \rangle \hat{\mathbf{a}}_-^\dagger + \langle \text{LG}_{+1}^{p=0}, \psi \rangle \hat{\mathbf{a}}_+^\dagger. \quad (54)$$

Teorema 2

Seja $\tau(\mathbf{r}_\perp, z) = \bar{\psi} \hat{\mathcal{L}}_z \psi$ onde $\hat{\mathcal{L}}_z = \imath \frac{\partial}{\partial \theta}$

$$\begin{aligned} \imath \lambda \dot{\tau} &= \imath \lambda \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\psi} \hat{\mathcal{L}}_z \psi) \\ &= \bar{\psi} \left(\imath \lambda \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathcal{L}}_z \psi \right) + \left(\imath \lambda \frac{\partial}{\partial z} \bar{\psi} \right) \hat{\mathcal{L}}_z \psi \\ &= \bar{\psi} \hat{\mathcal{L}}_z \left(\imath \lambda \frac{\partial}{\partial z} \psi \right) + \left(\imath \lambda \frac{\partial}{\partial z} \bar{\psi} \right) \hat{\mathcal{L}}_z \psi, \end{aligned} \quad (55)$$

então utilizando a [aproximação paraxial da equação de Helmholtz](#), segue que

$$\begin{aligned} \imath \lambda \dot{\tau} &= \bar{\psi} \hat{\mathcal{L}}_z \left(\left(\frac{-\lambda^2 \nabla_\perp^2}{2n_0} + \Delta n \right) \psi \right) - \left(\left(\frac{-\lambda^2 \nabla_\perp^2}{2n_0} + \Delta n \right) \bar{\psi} \right) \hat{\mathcal{L}}_z \psi \\ &= \bar{\psi} \left(\hat{\mathcal{L}}_z \frac{-\lambda^2 \nabla_\perp^2}{2n_0} \psi \right) - \left(\frac{-\lambda^2 \nabla_\perp^2}{2n_0} \bar{\psi} \right) \hat{\mathcal{L}}_z \psi + \bar{\psi} [\hat{\mathcal{L}}_z, \Delta n] \psi. \end{aligned} \quad (56)$$

Assim, dado que

$$[\hat{\mathcal{L}}_z, \Delta n] \psi = \imath \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta n \psi) - \Delta n \frac{\partial}{\partial \theta} \psi \right) = \imath \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \Delta n \right) \psi, \quad (57)$$

bem como, por $f\nabla_{\perp}^2 g - g\nabla_{\perp}^2 f = \text{div}_{\perp} (f\nabla_{\perp} g - g\nabla_{\perp} f)$,

$$\bar{\psi} \left(\hat{\mathcal{L}}_z \nabla_{\perp}^2 \psi \right) - (\nabla_{\perp}^2 \bar{\psi}) \hat{\mathcal{L}}_z \psi = \text{div}_{\perp} \left(\bar{\psi} \nabla_{\perp} \hat{\mathcal{L}}_z \psi - \hat{\mathcal{L}}_z \psi \nabla_{\perp} \bar{\psi} \right), \quad (58)$$

de modo que

$$\imath \lambda \dot{\tau} = -\imath \frac{\lambda^2}{2n_0} \text{div}_{\perp} \left(\bar{\psi} \nabla_{\perp} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi - \frac{\partial}{\partial \theta} \psi \nabla_{\perp} \bar{\psi} \right) + \imath \bar{\psi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \Delta n \right) \psi, \quad (59)$$

definindo $\mathbf{J}_{\tau}(\mathbf{r}_{\perp}, z) = \frac{\lambda}{2n_0} (\bar{\psi} \nabla_{\perp} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi - \frac{\partial}{\partial \theta} \psi \nabla_{\perp} \bar{\psi})$, $\mathbf{T}(\mathbf{r}_{\perp}, z) = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta n$ e $\rho(\mathbf{r}_{\perp}, z) = \bar{\psi} \psi$ e, ao final, dividindo a equação por $\imath \lambda$, discorre que

$$\dot{\tau}(\mathbf{r}_{\perp}, z) + \text{div}_{\perp} \mathbf{J}_{\tau}(\mathbf{r}_{\perp}, z) = \mathbf{T}(\mathbf{r}_{\perp}, z) \rho(\mathbf{r}_{\perp}, z). \quad (60)$$

Teorema 3

Temos que, em decorrência da [definição dos modos laguerre-gaussianos](#),

$$\bar{\psi}_m^{p=0} \Delta n \psi_{m'}^{p=0} = \frac{2}{\pi w_0} \sqrt{\frac{1}{|m'|!|m|!}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0} \right)^{|m|+|m'|} e^{-\frac{2r^2}{w_0^2}} e^{\imath(m'-m)\theta} \Delta n, \quad (61)$$

impondo a expansão em série de Fourier na coordenada azimutal da alteração do índice de refração Δn , segue que

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_m^{p=0} \Delta n \psi_{m'}^{p=0} &= \frac{2}{\pi w_0} \sqrt{\frac{1}{|m'|!|m|!}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0} \right)^{|m|+|m'|} e^{-\frac{2r^2}{w_0^2}} \sum_{k=0}^{\infty} e^{\imath(m'-m)\theta} a_k(r) \cos(k\theta) \\ &+ \frac{2}{\pi w_0} \sqrt{\frac{1}{|m'|!|m|!}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0} \right)^{|m|+|m'|} e^{-\frac{2r^2}{w_0^2}} \sum_{k=0}^{\infty} e^{\imath(m'-m)\theta} b_k(r) \sin(k\theta), \end{aligned} \quad (62)$$

assim, dado que $\cos \theta = \frac{\exp(+\imath\theta) + \exp(-\imath\theta)}{2}$ e $\sin \theta = \frac{\exp(+\imath\theta) - \exp(-\imath\theta)}{2\imath}$, temos que

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_m^{p=0} \Delta n \psi_{m'}^{p=0} &= \frac{1}{\pi w_0} \sqrt{\frac{1}{|m'|!|m|!}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0} \right)^{|m|+|m'|} e^{-\frac{2r^2}{w_0^2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(r) e^{\imath(m'-m+k)\theta} \\ &+ \frac{1}{\pi w_0} \sqrt{\frac{1}{|m'|!|m|!}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0} \right)^{|m|+|m'|} e^{-\frac{2r^2}{w_0^2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(r) e^{\imath(m'-m-k)\theta} \\ &- \frac{1}{\pi w_0} \sqrt{\frac{1}{|m'|!|m|!}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0} \right)^{|m|+|m'|} e^{-\frac{2r^2}{w_0^2}} \sum_{k=0}^{\infty} b_k(r) e^{\imath(m'-m+k)\theta} \imath \\ &+ \frac{1}{\pi w_0} \sqrt{\frac{1}{|m'|!|m|!}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0} \right)^{|m|+|m'|} e^{-\frac{2r^2}{w_0^2}} \sum_{k=0}^{\infty} b_k(r) e^{\imath(m'-m-k)\theta} \imath, \end{aligned} \quad (63)$$

utilizando a ortogonalidade das ondas planas na coordenada angular entre $-\pi$ a $+\pi$, tal qual descrito na [Propriedade 3](#),

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{+\pi} \overline{\psi_m^{p=0}} \Delta n \psi_{m'}^{p=0} d\theta &= \frac{2}{w_0} \sqrt{\frac{1}{|m'|!|m|!}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0} \right)^{|m|+|m'|} e^{-\frac{2r^2}{w_0^2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(r) \delta_{m'-m+k,0} \\
&+ \frac{2}{w_0} \sqrt{\frac{1}{|m'|!|m|!}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0} \right)^{|m|+|m'|} e^{-\frac{2r^2}{w_0^2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(r) \delta_{m'-m-k,0} \\
&- \frac{2}{w_0} \sqrt{\frac{1}{|m'|!|m|!}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0} \right)^{|m|+|m'|} e^{-\frac{2r^2}{w_0^2}} \sum_{k=0}^{\infty} b_k(r) \delta_{m'-m+k,0} \\
&+ \frac{2}{w_0} \sqrt{\frac{1}{|m'|!|m|!}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0} \right)^{|m|+|m'|} e^{-\frac{2r^2}{w_0^2}} \sum_{k=0}^{\infty} b_k(r) \delta_{m'-m-k,0},
\end{aligned} \tag{64}$$

de modo que, integrando em rdr entre 0 e ∞ , reconhecendo a integral como o produto interno e definindo a transformada integral

$$\mathcal{I}\{f\} = \frac{2}{w_0} \sqrt{\frac{1}{|m'|!|m|!}} \int_0^{\infty} r dr \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0} \right)^{|m|+|m'|} e^{-\frac{2r^2}{w_0^2}} f(r), \tag{65}$$

segue que

$$\langle \psi_m^{p=0}, \Delta n \psi_{m'}^{p=0} \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{I}\{a_k(r) - \imath b_k(r)\} \delta_{m',m-k} + \mathcal{I}\{a_k(r) + \imath b_k(r)\} \delta_{m',m+k}, \tag{66}$$

por fim, ao definir

$$\begin{aligned}
\gamma_k^{(m,m')} &= \mathcal{I}\{a_k(r) + \imath b_k(r)\} \\
&= \frac{2}{w_0} \sqrt{\frac{1}{|m'|!|m|!}} \int_0^{\infty} r dr \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0} \right)^{|m|+|m'|} e^{-\frac{2r^2}{w_0^2}} (a_k(r) + \imath b_k(r)),
\end{aligned} \tag{67}$$

tem-se que

$$\langle \psi_m^{p=0}, \Delta n \psi_{m'}^{p=0} \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\gamma_k^{(m,m')}} \delta_{m',m-k} + \gamma_k^{(m,m')} \delta_{m',m+k}. \tag{68}$$

Teorema 4

Seja $\hat{S}(z)\Psi_0(\mathbf{r}_\perp) = \exp\left[-i\hat{\mathcal{H}}\Psi_0(\mathbf{r}_\perp)(z)/\lambda\right]$ um operador de evolução espacial, então

$$\begin{aligned}
i\lambda\partial_z\hat{S}(z)\Psi_0(\mathbf{r}_\perp) &= i\lambda\left(\partial_z\hat{S}(z)\right)\Psi_0(\mathbf{r}_\perp) \\
&= i\lambda\left(\partial_z\exp\left[-i\hat{\mathcal{H}}(z)/\lambda\right]\right)\Psi_0(\mathbf{r}_\perp) \\
&= i\lambda\left[-\frac{i}{\lambda}\left(\partial_z\hat{\mathcal{H}}(z)\right)\exp\left[-i\hat{\mathcal{H}}(z)/\lambda\right]\right]\Psi_0(\mathbf{r}_\perp) \quad (69) \\
&= \left[\left(\partial_z\hat{\mathcal{H}}(z)\right)\hat{S}(z)\right]\Psi_0(\mathbf{r}_\perp) \\
&= \left(\partial_z\hat{\mathcal{H}}(z)\right)\hat{S}(z)\Psi_0(\mathbf{r}_\perp),
\end{aligned}$$

por fim, definindo $\Psi(\mathbf{r}_\perp, z) = \hat{S}(z)\Psi_0(\mathbf{r}_\perp)$ e $\hat{H}(z) = \partial_z\hat{\mathcal{H}}(z)$, segue de imediato que,

$$i\lambda\partial_z\Psi(\mathbf{r}_\perp, z) = \hat{H}(z)\Psi(\mathbf{r}_\perp, z). \quad (70)$$

Teorema 5

Dado que por ser um [problema do tipo Sturm-Liouville](#), as funções características são tais que,

$$\hat{\mathcal{L}}\Psi_m = \left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) - q(x)\right]\Psi_m(x) = \lambda_m w(x)\Psi_m(x), \quad (71)$$

além disso, por $p(x)$, $q(x)$ e $w(x)$ serem reais, e por $\hat{\mathcal{L}}$ ser hermitiano,

$$\hat{\mathcal{L}}\overline{\Psi_m} = \left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) - q(x)\right]\overline{\Psi_m(x)} = \lambda_m w(x)\overline{\Psi_m(x)}. \quad (72)$$

Dessa forma, segue de imediato que,

$$\begin{aligned}
(\lambda_m - \lambda_n) \int_{x \in \mathbb{I}} w(x) dx \overline{\Psi_m(x)} \Psi_n(x) &= \int_{x \in \mathbb{I}} dx \left[\Psi_n(\lambda_m w) \overline{\Psi_m} - \overline{\Psi_m}(\lambda_n w) \Psi_n \right] \\
&= \int_{x \in \mathbb{I}} dx \left[\Psi_n(\hat{\mathcal{L}}\overline{\Psi_m}) - \overline{\Psi_m}(\hat{\mathcal{L}}\Psi_n) \right], \quad (73)
\end{aligned}$$

ademais, notando que

$$\Psi_n(\hat{\mathcal{L}}\overline{\Psi_m}) - \overline{\Psi_m}(\hat{\mathcal{L}}\Psi_n) = \Psi_n \left[\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) \right] \overline{\Psi_m} - \overline{\Psi_m} \left[\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) \right] \Psi_n, \quad (74)$$

aplicando integração por partes discorre que,

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_{x \in \mathbb{I}} w(x) dx \overline{\Psi_m(x)} \Psi_n(x) = \left[p(x) \left(\Psi_n \frac{d}{dx} \overline{\Psi_m} - \overline{\Psi_m} \frac{d}{dx} \Psi_n \right) \right]_{\partial \mathbb{I}}, \quad (75)$$

dado que não foi imposto a priori o intervalo $\mathbb{I}$, este pode ser qualquer, assumindo então que ele é tomado tal que, em decorrência das condições de contorno, $[p(x) (\Psi_n \frac{d}{dx} \overline{\Psi_m} - \overline{\Psi_m} \frac{d}{dx} \Psi_n)]_{\partial \mathbb{I}}$ se anula, para $\lambda_m \neq \lambda_n$, verifica-se que, para o produto interno definido como

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_{x \in \mathbb{I}} w(x) dx \overline{\phi(x)} \psi(x), \quad (76)$$

$\langle \Psi_m, \Psi_n \rangle = 0$, ou seja, a família de funções $\{\Psi_m\}$ é ortogonal.

Teorema 6

Dada uma função $f(x)$, cuja expansão em série de Fourier em $[a, b]$ é dada por

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n e^{-i \frac{2\pi}{b-a} nx}. \quad (77)$$

utilizando a [Propriedade 3](#), segue de imediato que

$$\begin{aligned} \int_a^b dx e^{-i \frac{2\pi}{b-a} mx} f(x) &= \int_a^b dx e^{-i \frac{2\pi}{b-a} mx} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n e^{-i \frac{2\pi}{b-a} nx} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n \int_a^b dx e^{-i \frac{2\pi}{b-a} nx} e^{-i \frac{2\pi}{b-a} mx} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (b-a) z_n \delta_{m,n} = (b-a) z_m. \end{aligned} \quad (78)$$

de modo que

$$z_m = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b dx e^{-i \frac{2\pi}{b-a} mx} f(x). \quad (79)$$

Teorema 7

Para a demonstração do [Teorema 7](#) apresentaremos a seguir algumas propriedades adicionais das funções de Bessel do primeiro tipo, as quais não demonstraremos apenas por não compor o escopo do presente trabalho, ademais à identidade de Jacobi-Anger.

Propriedade 6 (forma integral das funções de Bessel de primeiro tipo).

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dt \cos(x \sin(t) - nt). \quad (80)$$

Propriedade 7 (paridade das funções de Bessel do primeiro tipo).

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x). \quad (81)$$

Propriedade 8 (paridade no índice de funções de Bessel do primeiro tipo).

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \quad (82)$$

Propriedade 9 (identidade de Jacobi-Anger).

$$e^{iz \cos \theta} = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(z) \cos(n\theta). \quad (83)$$

A fim de demonstrar primeiramente a identidade de Jacobi-Anger, tomemos a expansão de $e^{iz \sin \theta}$ em Série de Fourier, recorrendo do [Teorema 6](#) que

$$e^{iz \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n(z) e^{in\theta}, \text{ com, } z_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta e^{-in\theta} e^{iz \sin \theta}, \quad (84)$$

note que, como $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, pela paridade das funções seno e cosseno e utilizando a [forma integral da função de Bessel](#), os coeficientes podem ser descritos como

$$z_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\theta \cos(z \sin \theta - n\theta) = J_n(z), \quad (85)$$

logo $\exp(iz \sin \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) e^{in\theta}$, assim, como $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos \theta$, utilizando as Propriedades de paridade [no argumento da função de Bessel](#) e [no seu índice](#), segue que,

$$\begin{aligned} e^{iz \cos \theta} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) e^{in(\theta + \frac{\pi}{2})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(z) e^{in\theta} \\ &= J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n (-1)^n J_n(z) e^{-in\theta} + i^{+n} J_{+n}(z) e^{+in\theta} \\ &= J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(z) (e^{-in\theta} + e^{+in\theta}) = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(z) \cos(n\theta). \end{aligned} \quad (86)$$

Assim, utilizando a definição de função de Bessel modificada do primeiro tipo $I_\nu(z) = i^{-\nu} J_\nu(iz)$ e novamente a Propriedade de paridade [no argumento da função de Bessel](#) na identidade de Jacobi-Anger, obtém-se que

$$e^{z \cos \theta} = I_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(z) \cos(n\theta), \quad (87)$$

por fim, utilizando novamente a Propriedade de paridade [no argumento da função de Bessel](#),

$$\begin{aligned}
\cosh(z \cos \theta) &= \frac{1}{2} (e^{+z \cos \theta} + e^{-z \cos \theta}) \\
&= \frac{1}{2} \left(I_0(+z) + I_0(-z) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (I_n(+z) + I_n(-z)) \cos(n\theta) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(2I_0(z) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n) I_n(z) \cos(n\theta) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(2I_0(z) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} 2\delta_{n \bmod 2, 0} I_n(z) \cos(n\theta) \right) \\
&= I_0(z) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} I_{2m}(z) \cos(2m\theta).
\end{aligned}
\tag{88}$$