

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

CLEBERSON RODRIGUES ALVES

AUTO-RECONSTRUÇÃO DE UM FEIXE BESSEL PARCIALMENTE COERENTE

Maceió

2014

CLEBERSON RODRIGUES ALVES

AUTO-RECONSTRUÇÃO DE UM FEIXE BESSEL PARCIALMENTE COERENTE

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Jorge da Silva Fonseca

Co-orientador: Prof. Dr. Alcenísio José de Jesus Silva

Maceió
2014



Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física

Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14, Campus A.C. Simões
Cidade Universitária
Tabuleiro dos Martins
57072-970 Maceió - AL - Brasil
FONE: (02) 3214-1423 FAX 3214-1645

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

*“Auto-Reconstrução de um Feixe Bessel Parcialmente
Coerente”.*

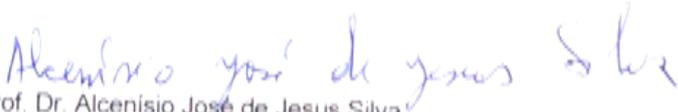
por

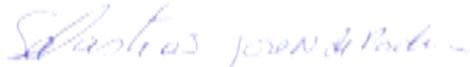
Cleberon Rodrigues Alves

A Banca Examinadora composta pelos professores Eduardo Jorge da Silva Fonseca (orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Alcénisio José de Jesus Silva, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas e Sebastião José Nascimento de Pádua, do Departamento de Física da Universidade Federal de Minas Gerais consideram o candidato aprovado com grau “A”.

Maceió, 23 de julho de 2014


Prof. Dr. Eduardo Jorge da Silva Fonseca


Prof. Dr. Alcénisio José de Jesus Silva


Prof. Dr. Sebastião José Nascimento de Pádua

*Aos meus pais.
(in memoriam)*

AGRADECIMENTOS

- A Deus, pelo dom da vida e presença constante.
- Aos meus pais (*in memoriam*), pelos ensinamentos, pelos exemplos de vida, pela formação dada, por tudo que sou. A vocês, minha dívida eterna e a certeza do reencontro. Amarei-os eternamente.
- Ao meu filho Luiz Carlos, por ter aprendido, com muita sabedoria, a lidar com a ausência do pai. Amo você.
- Ao meu irmão Carley e minha cunhada Márcia, pela presença e incentivos. Muito obrigado.
- A minha irmã Carianne, pelo apoio e por ter acreditado em mim.
- A toda minha família, que de alguma forma contribuiu para este momento.
- A minha querida Josi, por ter acreditado, pela paciência, pela presença diária, mesmo estando distante. A você, meu muito obrigado. Que esse agradecimento seja estendido a sua família.
- Ao amigo matemático Douglas, pela ajuda e empenho dispensados no início dessa jornada.
- Ao professor Ivanor Nunes, da UESB, pela motivação, incentivo e ensinamentos.
- Ao professor Eduardo Fonseca, pela orientação, conselhos e grandes ensinamentos. A você serei eternamente grato.
- Ao professor Alcenísio, pela co-orientação, ensinamentos e companheirismo. Muito obrigado.
- Aos amigos Wesley, Carlos Henrique, Antonio Carlos, Geovana, Samuel, Juarez, Israel, Elpídio, Amadeu, Geraldo e tantos outros, pelos momentos de conversas e companheirismo.
- Aos colegas de grupo, especialmente a Ana e a Patrícia pela disponibilidade.
- Aos professores e funcionários do Instituto.
- A todos que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho.
- A CNPQ e CAPES pelo apoio financeiro dispensado.

“Embora ninguém possa voltar atrás e fazer um novo começo, qualquer um pode começar agora e fazer um novo fim.”

Chico Xavier

RESUMO

Neste trabalho, geramos feixes Bessel de ordem zero e Gaussiano parcialmente coerentes. Estudamos o comportamento dos mesmos ao longo da propagação no espaço livre após terem parte do seu perfil transversal obstruído por um obstáculo opaco. Mostramos que é possível recuperar o perfil do feixe, a partir do padrão de speckle, utilizando a autocorrelação. Introduzimos um efeito que chamamos de auto-reconfiguração, que imita o efeito de auto-reconstrução, mas neste caso não se faz necessária a recuperação do padrão que existia antes da obstrução. Mostramos que a propriedade de auto-reconfiguração de um feixe parcialmente coerente é mais robusta que a propriedade de auto-reconstrução de um feixe coerente. Observamos que o efeito de auto-reconfiguração ocorre até mesmo para feixes que são coerentemente não-reconstrutivos, como é o caso do feixe Gaussiano. Verificamos que o obstáculo funciona como um filtro e que o efeito deste sobre a autocorrelação depende da área relativa entre os speckles bloqueados e não bloqueados. Apresentamos os resultados numéricos e experimentais, além de argumentos para explicar as observações. Os resultados encontrados podem ser úteis para microscopia óptica projetada para olhar mais profundamente em tecidos espalhadores e também para formação de imagens através de atmosfera turbulenta.

Palavras-Chave: Feixes Bessel. Auto-reconstrução. Difração. Coerência.

ABSTRACT

In this work, we generate partially coherent zero order Bessel and Gaussian beams. We study their behavior along the propagation in free space after part of its transverse profile be obstructed by an opaque obstacle. We show that it is possible to retrieve the profile of the beam from the speckle pattern, using the autocorrelation. We introduce an effect that we call self-reconfiguration, which mimics the effect of self-reconstruction, but this case is not necessary to recover the pattern that existed before the obstruction. We show that the property of self-reconfiguration of a partially coherent beam is more robust than the property of self-reconstruction of a coherent beam. We observed that the effect of self-reconfiguration occurs even for beams which are non-coherently reconstructive, as is the case of the Gaussian beam. We found that the obstacle acts as a filter and that this effect in the autocorrelation depends on the relative area between blocked and unblocked speckles. We present numerical and experimental results, and arguments to explain the observations. The results may be useful for optical microscopy designed to look more deeply into scattering tissues and also for imaging through turbulent atmosphere.

Keywords: Bessel beams. Self-reconstruction. Diffraction. Coherence.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	09
2	FEIXES BESSEL E SUA PROPRIEDADE ADIFRATIVA	12
2.1	Equação de Helmholtz e sua Solução em Bessel	12
2.2	Difração da Luz	15
2.2.1	Princípio de Huygens-Fresnel.....	16
2.2.2	Aproximação de Fresnel.....	17
2.2.3	Aproximação de Fraunhofer.....	19
2.2.3.1	Abertura retangular.....	20
2.2.3.2	Abertura circular.....	23
2.3	Propriedade Adifrativa dos Feixes Bessel	25
3	COERÊNCIA E SPECKLE	36
3.1	Coerência	36
3.1.1	Coerência temporal.....	37
3.1.1.1	Função de coerência temporal.....	39
3.1.1.2	Grau de coerência temporal.....	41
3.1.2	Coerência espacial.....	41
3.1.3	Função de coerência mútua.....	43
3.2	Speckle	43
4	AUTO-RECONSTRUÇÃO DE FEIXES PARCIALMENTE COERENTES	50
4.1	Montagem Experimental	50
4.2	Auto-reconstrução do Feixe Bessel Coerente e Parcialmente Coerente	52
4.3	Auto-reconfiguração do Feixe Gaussiano Parcialmente Coerente	53
4.4	Estudo dos Perfis das Medidas de Autocorrelação dos Speckles	56
5	CONCLUSÕES	62
	REFERÊNCIAS	63

1 INTRODUÇÃO

Vários fenômenos observáveis cotidianamente indicam que a luz propaga-se em linha reta. Contudo, alguns fenômenos ópticos como interferência e difração mostram que a ideia de propagação retilínea não se sustenta, podendo ser explicados apenas no pressuposto de que a luz é uma onda.

Há tempos, o fenômeno da difração tem sido associado à violação da propagação retilínea da luz. Sammerfeld definiu difração como sendo qualquer desvio da luz não causado por reflexão ou refração [1]. Em um entendimento óptico moderno, a difração é analisada como uma propriedade natural do campo de onda com distribuição de intensidade transversal não homogênea, não estando relacionada apenas à transmissão da luz através de aberturas e obstáculos, onde é observada com mais evidência.

Em óptica, a propagação, no espaço livre, de feixes livres de difração era inimaginável até o ano de 1987, quando o termo “feixes não difratantes”, compreendido como o campo óptico monocromático, cujo perfil de intensidade transversal permanece inalterado durante a propagação, surge. Nos trabalhos de Durnin [2, 3], os feixes foram obtidos como soluções exatas da equação homogênea de Helmholtz em coordenadas cilíndricas. O perfil transversal da amplitude de tais feixes pode ser descrito pela função de Bessel, sendo, por esse motivo, normalmente chamados de feixes Bessel. Posteriormente, tipos mais gerais de feixes não difratantes foram introduzidos e suas propriedades que os tornam diferentes dos feixes laser comuns foram investigadas [4, 5, 6].

Ultimamente, propriedades úteis para aplicações dos feixes não difratantes estão sendo muito exploradas. A atenção tem sido voltada para a robustez que se manifesta por sua resistência às distorções de amplitude e fase. Verificou-se que o feixe não difratante interceptado por um obstáculo opaco é capaz de regenerar seu perfil de intensidade para a sua forma original na propagação livre após a obstrução [7].

Os estudos relacionados à propagação de campos não difratantes que, inicialmente, foram desenvolvidos para luz totalmente coerente, começam, já na década de 1990, voltar a atenção também para o contexto de luz parcialmente coerente [8, 9], caracterizada por uma frente de onda fortemente distorcida,

geralmente provocada pela incidência da luz coerente em um meio espalhador, gerando o chamado padrão de “speckle”.

O espalhamento da luz, que em um passado recente era visto como um fenômeno limitador para muitas aplicações ópticas, nos últimos anos tornou-se um rico campo de pesquisa. A forte distorção gerada na frente de onda pela dispersão aleatório da luz tem sido aplicada para melhoramento de foco e resolução de imagens [10, 11, 12, 13, 14]. Também foi possível obter a imagem, de forma não-invasiva, de um objeto fluorescente escondido atrás de um meio biológico opaco [15], com potencial aplicação em imagens biomédicas [16], dentre outras.

Superar a dispersão e as distorções da frente de onda da luz tornou-se um passo importante para o desenvolvimento de novas técnicas de microscopia e de comunicação óptica através de meios turbulentos.

Associado a isso, a notável capacidade de auto-reconstrução do feixe Bessel pode oferecer novas possibilidades para, por exemplo, olhar mais profundamente em tecidos espalhadores. Essa propriedade tornou o referido feixe alvo de inúmeras pesquisas.

Diversas aplicações do feixe Bessel estão sendo exploradas atualmente, dentre elas, inclui-se a manipulação óptica [17, 18], biofotônica e tomografia de coerência óptica [19]. O melhorando da propriedade de auto-reconstrução desse tipo de feixe pode ser útil para o novo conceito de iluminação para microscopia óptica [20, 21].

Este trabalho faz um estudo da auto-reconstrução do feixe Bessel parcialmente coerente, analisando o efeito da obstrução parcial do padrão de “speckle” gerado. Também é feito o mesmo estudo com o feixe Gaussiano parcialmente coerente, com o objetivo de verificar o comportamento de um feixe coerentemente não-reconstrutivo, tendo assim um comparativo entre ambos.

O capítulo 2 faz uma introdução teórica à equação de Helmholtz, encontrando sua solução em Bessel. Logo após, explorando o princípio de Huygens-Fresnel, será apresentada a teoria da difração, dando ênfase às aproximações de Fresnel e Fraunhofer. Na seqüência, a propriedade não difratante do feixe Bessel a partir do trabalho de Durnin será abordado [2, 3].

O capítulo 3 traz a teoria da coerência óptica, enfatizando seu caráter temporal e espacial. Seqüencialmente, a definição e geração do padrão de “speckle” serão abordadas a partir o entendimento da luz parcialmente coerente.

No capítulo 4 são apresentados e discutidos os resultados numéricos e experimentais obtidos a partir do estudo da auto-reconstrução dos feixes Bessel e Gaussiano parcialmente coerentes, finalizando com as conclusões do trabalho no capítulo 5.

2 FEIXES BESSEL E SUA PROPRIEDADE ADIFRATIVA

Neste capítulo apresentaremos a equação de Helmholtz, obtendo uma de suas soluções que representa o feixe Bessel. Introduziremos a teoria da difração, enfatizando as aproximações de Fresnel e Fraunhofer, além de apresentarmos os padrões de difração por aberturas retangular e circular, para, na seqüência, discutirmos a propriedade adifrativa dos feixes Bessel.

2.1 Equação de Helmholtz e sua Solução em Bessel

A luz se propaga como onda e, no espaço livre, viaja com velocidade c_0 . Em outros meios, cujo índice de refração é $n > 1$, as ondas de luz possuem velocidade reduzida, dada por $c = \frac{c_0}{n}$ [22].

A descrição matemática de uma onda de luz é dada por uma função real de posição $\vec{r} = (x, y, z)$ e tempo t , conhecida como função de onda e denotada por $u(\vec{r}, t)$. Tal função satisfaz a uma equação diferencial, conhecida como equação de onda [22]:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1-2)$$

onde $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ é o operador Laplaciano [23] em coordenadas cartesianas. Salientamos aqui, que qualquer função que satisfaça a equação 2.1-2 representa uma possível onda de luz.

Como a equação de onda é linear, o Princípio da Superposição [24] pode ser aplicado. Se $u_1(\vec{r}, t)$ e $u_2(\vec{r}, t)$ representam possíveis ondas de luz, então $u(\vec{r}, t) = u_1(\vec{r}, t) + u_2(\vec{r}, t)$ também representará uma onda ótica.

O campo escalar de onda monocromática pode ser escrito como uma função de onda com dependência temporal harmônica [22, 25], dada por:

$$u(\vec{r}, t) = a(\vec{r}) \cos[2\pi\nu t + \varphi(\vec{r})], \quad (2.1-3)$$

onde $a(\vec{r})$ é a amplitude da onda, $\varphi(\vec{r})$ a fase e ν a frequência.

Geralmente, a amplitude e a fase são dependentes da posição, mas $u(\vec{r}, t)$ é uma função harmônica do tempo, com frequência ν em todas as posições.

Por conveniência, vamos escrever a função de onda $u(\vec{r}, t)$, 2.1-3, em termos da função complexa

$$U(\vec{r}, t) = a(\vec{r}) \exp[i\varphi(\vec{r})] \exp[i2\pi\nu t], \quad (2.1-4)$$

de modo que $u(\vec{r}, t) = \text{Re}[U(\vec{r}, t)]$, dada por [26]:

$$\text{Re}[U(\vec{r}, t)] = \frac{1}{2} [U(\vec{r}, t) + U^*(\vec{r}, t)], \quad (2.1-5)$$

onde o símbolo * representa o complexo conjugado.

A função de onda complexa $U(\vec{r}, t)$ descreve completamente a onda, enquanto $u(\vec{r}, t)$ apenas a parte real da mesma. Estas funções devem satisfazer a equação de onda

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \quad (2.1-6)$$

O fator independente do tempo, $a(\vec{r}) \exp[i\varphi(\vec{r})]$, em 2.1-4 é o que chamamos de amplitude complexa da onda. Assumindo este fator como $U(\vec{r})$, a equação 2.1-4 pode ser escrita como

$$U(\vec{r}, t) = U(\vec{r}) \exp[i2\pi\nu t]. \quad (2.1-7)$$

Agora, a função de onda $u(\vec{r}, t)$ relaciona-se com a amplitude complexa da onda da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u(\vec{r}, t) &= \text{Re}\{U(\vec{r}) \exp(i2\pi\nu t)\} \\ &= \frac{1}{2} [U(\vec{r}) \exp(i2\pi\nu t) + U^*(\vec{r}) \exp(-i2\pi\nu t)]. \end{aligned} \quad (2.1-8)$$

Substituindo a equação 2.1-7 em 2.1-6 temos:

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0, \quad (2.1-9)$$

onde k é o número de onda, dado por $k = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{\omega}{c}$, sendo ω a frequência angular. A expressão em 2.1-9 é a equação de Helmholtz [22].

Substituindo a equação 2.1-3 em 2.1-5, obtemos:

$$u^2(\vec{r}, t) = 2a^2(\vec{r}) \cos^2[2\pi\nu t + \varphi(\vec{r})] = |U(\vec{r})|^2 \{1 + \cos[2(2\pi\nu t + \varphi(\vec{r}))]\}. \quad (2.1-10)$$

Ao calcularmos a média em 2.1-10 durante um tempo bem maior que o período ótico, $1/\nu$, seu segundo termo desaparece, ficando:

$$I(\vec{r}) = |U(\vec{r})|^2, \quad (2.1-11)$$

que é a intensidade ótica de uma onda monocromática [22], correspondente ao quadrado da norma de sua amplitude complexa e não varia com o tempo.

Para construir feixes com frentes de onda planas, mas que possuam uma distribuição de intensidade não uniforme no plano transversal vamos considerar uma onda com amplitude complexa dada por:

$$U(\vec{r}) = A(x, y) \exp[ikz - i\beta z]. \quad (2.1-12)$$

Para que esta onda satisfaça a equação de Helmholtz, 2.1-9, a amplitude $A(x, y)$ tem que satisfazer

$$\nabla_T^2 A + k_T^2 A = 0, \quad (2.1-13)$$

onde $k_T^2 + \beta^2 = k^2$ e $\nabla_T^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ é o Laplaciano transversal. Temos então a equação de Helmholtz bidimensional, que pode ser resolvida através do método de separação de variáveis. Usando coordenadas polares ($x = \rho \cos\phi, y = \rho \sin\phi$), temos como resultado:

$$A(x, y) = A_m J_m(k_T \rho) \exp(im\phi), \quad (2.1-14)$$

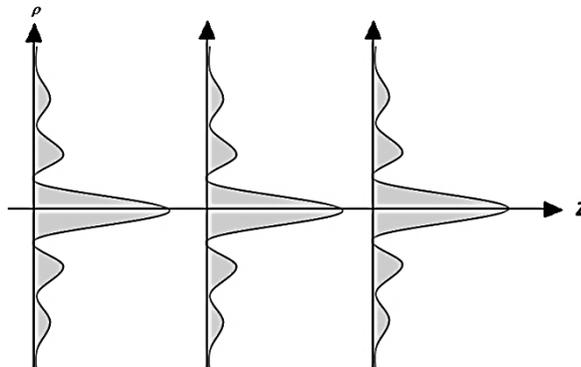
com $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, onde J_m é a função de Bessel de primeiro tipo e m-ésima ordem, e A_m é uma constante. É importante observar que as soluções com $\rho = 0$ não são admitidas.

Então, para $m = 0$, podemos escrever a amplitude complexa da onda como:

$$U(\vec{r}) = A_0 J_0(k_T \rho) \exp(-i\beta z), \quad (2.1-12)$$

possuindo, portanto, frentes de onda planas. A distribuição de intensidade $I(\rho, \phi, z) = |A_0|^2 J_0^2(k_T \rho)$ possui simetria circular variando com ρ e invariante em z , como ilustra a figura 2.1-1. Esta onda é chamada de feixe Bessel [22].

Figura 2.1-1 — Distribuição da intensidade do feixe Bessel em um plano transversal.



Fonte: (Autor, 2014)

2.2 Difração da Luz

A difração é responsável pela divergência do feixe na propagação livre e, também, pela penetração de luz para dentro de regiões de sombra geométrica. Em um entendimento moderno, efeitos de difração não estão relacionados apenas com

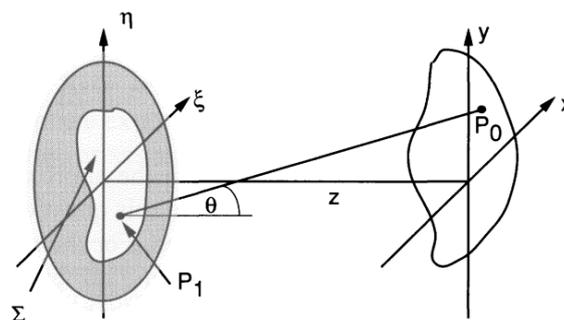
a transmissão óptica através de aberturas e obstáculos, mas são examinados como uma propriedade natural do campo de onda com distribuição de intensidade não homogênea.

2.2.1 Princípio de Huygens-Fresnel

Segundo Huygens [27], a propagação da luz ocorre como uma sucessão de ondas esféricas secundárias geradas em cada ponto da frente de onda primária. As amplitudes e fases dessas ondas secundárias precisam possuir determinadas propriedades matemáticas para descrever corretamente o fenômeno.

Para entendermos melhor o princípio, consideremos uma abertura localizada em um plano (ξ, η) iluminado por um feixe de luz monocromática na direção z positivo, conforme figura 2.1. Vamos determinar o campo de ondas ao longo do plano (x, y) , paralelo a (ξ, η) e a uma distância z dele. O eixo z corta os dois planos nas suas origens.

Figura 2.1 — Difração geométrica



Fonte: (Goodman [25], 2005)

O princípio de Huygens pode ser escrito como [25]:

$$U(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \cos\theta ds, \quad (2.2-1)$$

onde θ é o ângulo entre a normal \hat{n} para fora e o vetor r_{01} apontando de P_0 para P_1 . Da figura 2.1 temos que $\cos\theta = \frac{z}{r_{01}}$, portanto podemos reescrever a equação 2.2-1

como:

$$U(x, y) = \frac{z}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{\exp(ikr_{01})}{(r_{01})^2} d\xi d\eta, \quad (2.2-2)$$

onde a distância r_{01} é dada exatamente por:

$$r_{01} = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \quad (2.2-3)$$

Consideramos duas aproximações para chegar à equação 2.2-3. A primeira inerente à teoria escalar e a segunda é a suposição de que a distância de observação a partir da abertura é muito maior que o comprimento de onda, $r_{01} \gg \lambda$. A partir de agora analisaremos aproximações adicionais, em particular a de Fresnel e a de Fraunhofer.

2.2.2 Aproximação de Fresnel

Objetivando a redução do Princípio de Huygens-Fresnel a uma expressão mais simples e útil, faremos aproximações para a distância r_{01} entre P_1 e P_0 . Inicialmente, vamos realizar a expansão binomial da raiz quadrada da expressão 2.2-3. Vamos considerar a expressão $\sqrt{1+b}$, com b sendo um número menor que a unidade, $b < 1$. A expansão binomial da raiz quadrada é dada por [28]:

$$\sqrt{1+b} = 1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}b^2 + \dots \quad (2.2-4)$$

onde o número de termos necessários para uma determinada precisão dependerá da magnitude de b .

Para aplicarmos a expansão binominal, vamos reescrever a expressão 2.2-3 com o fator z fora da raiz quadrada. Assim, temos:

$$r_{01} = z \sqrt{1 + \left(\frac{x-\xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{y-\eta}{z}\right)^2}. \quad (2.2-5)$$

Mantendo apenas os dois primeiros termos da expansão 2.2-4, a equação 2.2-5 pode ser escrita como:

$$r_{01} \approx z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x-\xi}{z}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y-\eta}{z}\right)^2 \right], \quad (2.2-6)$$

que é conhecida como aproximação de Fresnel. Então, a expressão resultante para a distribuição de campo em (x,y) conseqüentemente torna:

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \exp\left\{i \frac{k}{2z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]\right\} d\xi d\eta, \quad (2.2-7)$$

onde se incorporaram os limites finitos da abertura definidos em $U(\xi, \eta)$ em acordo com as condições de contorno habituais.

Quando esta aproximação é válida, dizemos que estamos na região de difração de Fresnel ou, de forma equivalente, no campo próximo da abertura.

A equação 2.2-7 pode ser expressa como uma convolução [29], da seguinte forma:

$$U(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \quad (2.2-8)$$

onde a janela de convolução é

$$h(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp\left[i \frac{k}{2z} (x^2 + y^2)\right]. \quad (2.2-9)$$

Outro resultado de 2.2-7 pode ser encontrado deslocando o termo $\exp\left[i\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)\right]$ para fora da integral, ficando:

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[U(\xi, \eta) e^{i\frac{k}{2z}(\xi^2 + \eta^2)} \right] e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta. \quad (2.2-10)$$

Ao realizarmos a transformada de Fourier [30] da equação 2.2-9, obtemos a chamada função de transferência que descreve os efeitos da propagação da luz na região de difração de Fresnel. Tal função é dada por [25]:

$$H(f_x, f_y) = \exp[ikz] \exp[-i\pi\lambda z(f_x^2 + f_y^2)]. \quad (2.2-11)$$

A função $H(f_x, f_y)$ é complexa e circularmente simétrica, com frequências espaciais f_x e f_y . A primeira exponencial em 2.2-11 representa uma defasagem de fase global, enquanto a segunda, uma dispersão de fase com uma dependência quadrática na frequência.

2.2.3 Aproximação de Fraunhofer

A partir da equação 2.2-10, vimos que na região de difração de Fresnel, a intensidade do campo observado, $U(x, y)$, pode ser determinado a partir de uma transformada de Fourier do produto entre a distribuição de campo na abertura, $U(\xi, \eta)$, e uma função de fase quadrática $e^{i\frac{k}{2z}(\xi^2 + \eta^2)}$.

Vamos supor que:

$$z \gg \frac{k(\xi^2 + \eta^2)_{\text{máx}}}{2}. \quad (2.2-12)$$

Deste modo, o fator de fase quadrático sobre a abertura é aproximadamente igual à unidade e, na região de difração de Fraunhofer, podemos obter a distribuição de campo através da transformada de Fourier da abertura. Assim, temos:

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi + y\eta)} \xi d\eta. \quad (2.2-13)$$

Excetuando-se os termos fora da integral, esta expressão representa apenas a transformada de Fourier da distribuição da abertura, considerando as frequências

$$f_x = \frac{x}{\lambda z} \text{ e } f_y = \frac{y}{\lambda z}. \quad (2.2-14)$$

Podemos notar que não temos uma função de transferência associada com a aproximação de Fraunhofer. Entretanto, a função vista em 2.2-11 é válida nas duas aproximações, já que a difração de Fraunhofer é simplesmente um caso limite da difração de Fresnel.

Podemos aplicar os resultados obtidos para determinar a distribuição do campo complexo por meio do padrão de difração de Fraunhofer de qualquer abertura. Os padrões de difração que veremos a seguir representam a distribuição de intensidade.

2.2.3.1 Abertura retangular

Vamos considerar uma abertura retangular com amplitude de transmitância dada por:

$$t_A(\xi, \eta) = \text{rect}\left(\frac{\xi}{2w_x}\right) \text{rect}\left(\frac{\eta}{2w_y}\right). \quad (2.2-15)$$

As constantes w_x e w_y representam as larguras da abertura nas direções ξ e η . Se a abertura é iluminada por uma onda plana monocromática, de amplitude unitária e

com incidência normal, a distribuição do campo através da abertura é dada pela função de transmitância t_A . Usando a equação 2.2-13, o padrão de difração de Fraunhofer é definido da seguinte forma [25]:

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \mathcal{F}\{U(\xi, \eta)\} \Big|_{\substack{f_x = \frac{x}{\lambda z} \\ f_y = \frac{y}{\lambda z}}} \quad (2.2-16)$$

Notemos que a transformada de Fourier $\mathcal{F}\{U(\xi, \eta)\} = A \operatorname{sinc}\left(\frac{2w_x x}{\lambda z}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{2w_y y}{\lambda z}\right)$, onde A é a área da abertura ($A = 4w_x w_y$). Assim, temos:

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} A \operatorname{sinc}\left(\frac{2w_x x}{\lambda z}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{2w_y y}{\lambda z}\right) \quad (2.2-17)$$

e

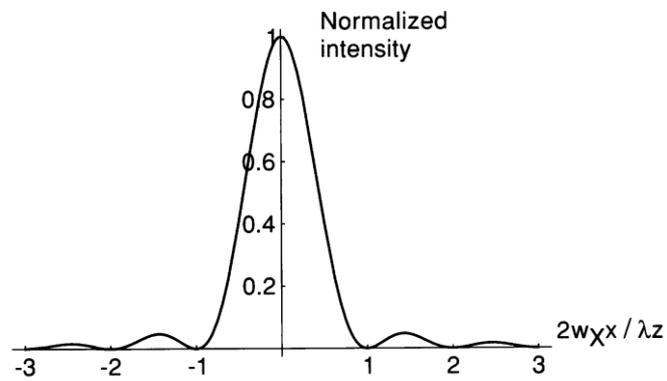
$$I(x, y) = \frac{A^2}{(\lambda z)^2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{2w_x x}{\lambda z}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{2w_y y}{\lambda z}\right). \quad (2.2-18)$$

A seção transversal do padrão de intensidade de Fraunhofer ao longo do eixo x é mostrada na figura 2.2. Podemos observar que a largura entre os lobos principais é

$$\Delta x = \frac{\lambda z}{w_x}. \quad (2.2-19)$$

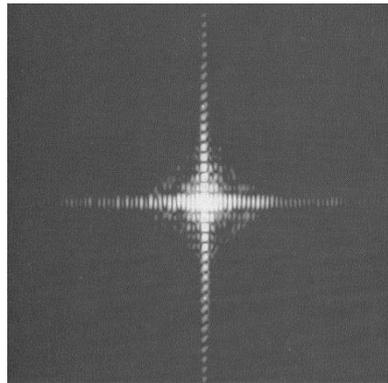
Já a figura 2.3 mostra uma fotografia do padrão de difração de Fraunhofer produzido por uma abertura retangular com uma relação de largura de $\frac{w_x}{w_y} = 2$.

Figura 2.2 — Seção transversal do padrão de difração de Fraunhofer através de uma abertura retangular.



Fonte: (Goodman [25], 2005)

Figura 2.3 — Padrão de difração de Fraunhofer através de uma abertura retangular.



Fonte: (Goodman [25], 2005)

2.2.3.2 Abertura circular

Vamos considerar agora, a ocorrência da difração por uma abertura circular de raio w . Admitindo q como a coordenada radial da abertura, escrevemos a amplitude de transmitância como:

$$t_A(\xi, \eta) = \text{circ}\left(\frac{q}{w}\right). \quad (2.2-20)$$

A simetria circular do problema sugere que a transformada de Fourier da equação 2.2-13 seja reescrita como uma transformada de Bessel-Fourier. Adotando r como a coordenada radial no plano de observação, temos:

$$U(r) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ikr^2}{2z}} B\{U(q)\}_{\rho=\frac{r}{\lambda z}}, \quad (2.2-21)$$

onde $q = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ representa o raio no plano de abertura e $\rho = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$ equivale ao raio no domínio da frequência espacial. Para uma incidência normal de uma onda plana com amplitude unitária, o campo transmitido pela abertura circular é igual á amplitude da transmitância [25]. Então:

$$B\left\{\text{circ}\left(\frac{q}{w}\right)\right\} = A \frac{J_1(2\pi w \rho)}{\pi w \rho}, \quad (2.2-22)$$

onde $A = \pi w^2$. A amplitude de distribuição do padrão de difração do Fraunhofer é vista como

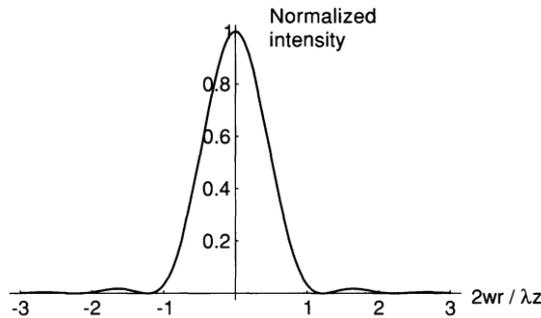
$$U(r) = e^{ikz} e^{\frac{ikr^2}{2z}} \frac{A}{i\lambda z} \left[2 \frac{J_1(kwr/z)}{kwr/z} \right] \quad (2.2-23)$$

e a distribuição de intensidade pode ser escrita por:

$$I(r) = \frac{A^2}{(\lambda z)^2} \left[2 \frac{J_1(kwr/z)}{kwr/z} \right]^2. \quad (2.2-24)$$

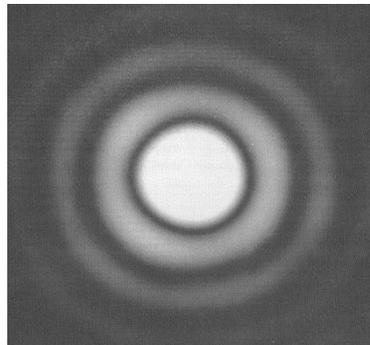
Esta distribuição de intensidade é conhecida como padrão de Airy [25]. A figura 2.4 mostra uma seção transversal do padrão de Airy e na figura 2.5 temos uma fotografia do padrão de difração de Fraunhofer produzido por uma abertura circular.

Figura 2.4 — Seção transversal do padrão de difração de Fraunhofer de uma abertura circular.



Fonte:(Goodman [25], 2005)

Figura 2.5 — Padrão de difração de Fraunhofer de uma abertura circular



Fonte:(Goodman [25], 2005)

2.3 Propriedade Adifrativa dos Feixes Bessel

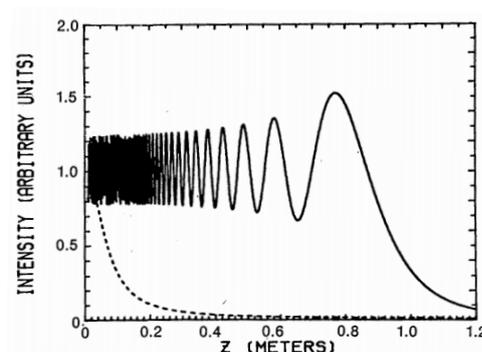
A equação de Helmholtz descreve a propagação da luz considerando a difração, fenômeno óptico visto no tópico anterior, que quase sempre limita o estudo de aplicações relacionadas com feixes de luz. No ano de 1987, J. Durnin publicou um trabalho mostrando a existência de uma solução exata da equação de Helmholtz homogênea que se propaga livre de difração, cujo perfil de intensidade transversal permanece inalterado ao longo da distância de propagação z , obtendo [3]:

$$E(\vec{r}, t) = \exp[i(\beta z - \omega t)]J_0(\alpha\rho), \quad (2.3-1)$$

onde ω é a frequência angular do feixe, J_0 é a função de Bessel de ordem zero e β e α são o vetor de onda na direção de propagação e transversal, respectivamente. Admitindo a intensidade de um campo escalar U como sendo U^*U , percebemos que $|E(z = 0, t)|^2 = |E(z, t)|^2$, de onde podemos confirmar que a solução encontrada é livre de difração.

Em seu trabalho, Durnin analisa, a partir do ponto central do feixe, várias distâncias de propagação, comparando-as com um feixe Gaussiano, como é mostrado na figura 2.3-1. É fácil notar que, apesar da oscilação causada pela extensão finita da janela computacional, o feixe mantém sua intensidade no centro diferente de zero por uma distância muito maior que o feixe Gaussiano, tendo a mesma distribuição de largura espacial.

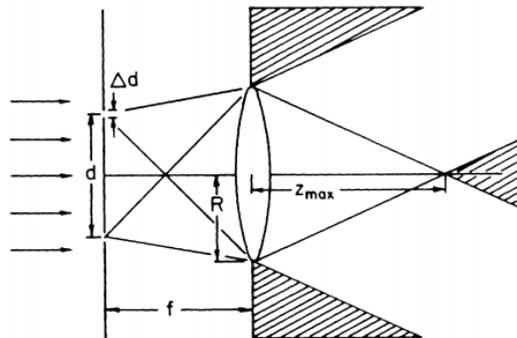
Figura 2.3-1 — Intensidade $I(\rho = 0, z)$ no centro do feixe em função da distância, ondeo feixe Gaussiano é representado pela linha pontilhada e o J_0 pela linha contínua.



Fonte: (Durnin, [3], 1987)

A sugestão de Durnin para a geração do feixe está ilustrada na figura 2.3-2. Uma lente de distância focal f é atravessada por uma onda plana que incide em uma abertura anelar com diâmetro d e espessura Δd . A partir de um detector é possível coletar o valor da intensidade no ponto central do feixe em função da propagação no eixo z . O resultado experimental é mostrado na figura 2.3-3, onde podemos perceber o decaimento da intensidade no ponto central em comparação com o feixe Gaussiano, confirmando as simulações numéricas.

Figura 2.3-2 — Aparato experimental usado por Durnin para gerar o feixe Bessel



Fonte: (Durnin, [3], 1987)

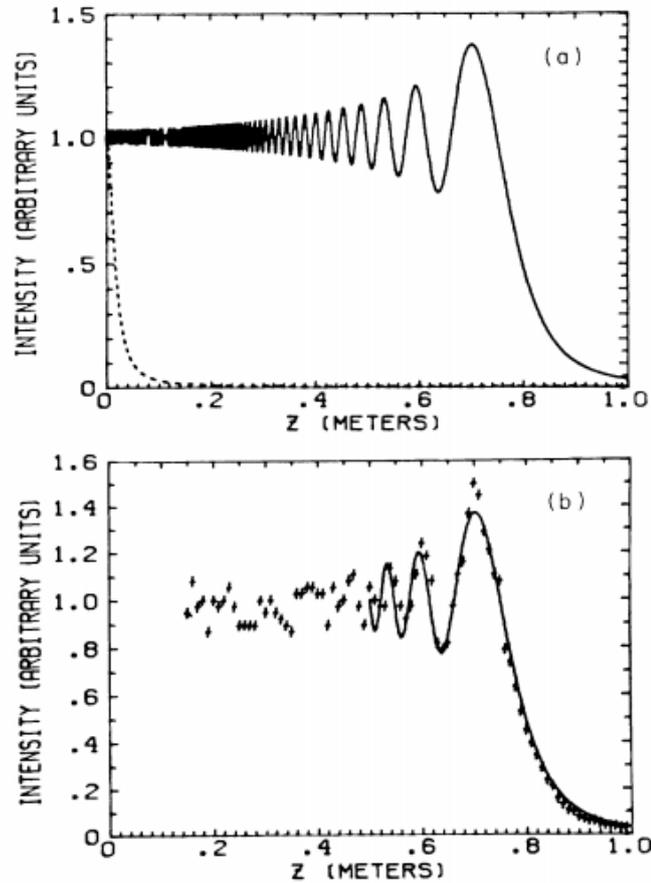
Para entendermos como Durnin chegou à equação 2.3-1, vamos considerar a equação de onda [22]

$$\nabla^2 U(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.3-2)$$

onde $U(\vec{r}, t)$ representa uma componente eletromagnética e c é a velocidade da luz no vácuo. Como estamos considerando feixes monocromáticos, escrevemos $E(\vec{r}, t) = E(\vec{r}) \exp(i\omega t)$ e obtemos:

$$\nabla^2 E(\vec{r}) + k^2 E(\vec{r}) = 0, \quad (2.3-3)$$

Figura 2.3-3 — Resultados da comparação da intensidade do ponto central dos feixes Bessel e Gaussiano em função da distância. (a) Teoria e (b) Experimento.



Fonte: (Durnin, [2], 1987)

onde $k = \frac{\omega}{c}$ é o vetor de onda do feixe. Esta é a equação de Helmholtz, que permite calcularmos o perfil do feixe em qualquer plano $d > z_0$, conhecendo a distribuição de campo em z_0 .

Vamos considerar que o feixe em estudo pode ser escrito como:

$$E(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(k_x, k_y) \exp[i(k_x x + k_y y + k_z z)] dk_x dk_y, \quad (2.3-4)$$

em que $A(k_x, k_y, z)$ é o espectro angular e (k_x, k_y, k_z) são as frequências espaciais do feixe.

Aplicando o operador Laplaciano ∇^2 na equação 2.3-4 obtemos:

$$\begin{aligned}\nabla^2 E(\vec{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(k_x, k_y) \nabla^2 \{ \exp[i(k_x x + k_y y + k_z z)] \} dk_x dk_y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(k_x, k_y) [-(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)] \exp[i(k_x x + k_y y + k_z z)] dk_x dk_y\end{aligned}\quad (2.3-5)$$

entretanto,

$$\nabla^2 E(\vec{r}) = -k^2 E(\vec{r}), \quad (2.3-6)$$

então,

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2. \quad (2.3-7)$$

Podemos perceber que as freqüências espaciais são dependentes entre si, satisfazendo a equação 2.3-7.

A equação 2.2-4 representa uma superposição de ondas planas propagando-se com a mesma freqüência angular temporal, porém em diferentes direções. Então, utilizando 2.3-7, podemos escrever para uma onda plana:

$$u_i = u_{i0} \exp \left\{ i \left[k_x x + k_y y \pm (k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{\frac{1}{2}} z \right] \right\}, \quad (2.3-8)$$

onde u_i representa a i -ésima onda plana e u_{i0} a amplitude da i -ésima onda plana. Logo, teremos que utilizar uma integral para descrevermos a distribuição contínua de vetores de ondas descrita por uma função $A(k_x, k_y)$, da forma:

$$\begin{aligned}U &= \iint A(k_x, k_y) u_i dk_x dk_y \\ U &= \iint A(k_x, k_y) u_{i0} \exp \left\{ i \left[k_x x + k_y y \pm (k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{\frac{1}{2}} z \right] \right\} dk_x dk_y.\end{aligned}\quad (2.3-9)$$

A partir de agora, podemos interpretar a equação 2.3-4 como uma superposição de ondas planas com distribuição de vetores de onda descrita pelo espectro angular $A(k_x, k_y)$, possuindo restrições quando se tratar de feixe não difratante. Trataremos adiante de tais restrições.

Utilizaremos, então, a equação de Helmholtz e do espectro angular para encontrarmos informações de fase e amplitude do referido feixe.

Vamos escrever o campo da seguinte forma:

$$E(\vec{r}) = \iint A(k_x, k_y, z) \exp[i(k_x x + k_y y)] dk_x dk_y, \quad (2.3-10)$$

que representa uma transformada de Fourier bidimensional, cuja respectiva inversa é:

$$A(k_x, k_y, z) = \iint E(\vec{r}) \exp[-i(k_x x + k_y y)] dx dy, \quad (2.3-11)$$

A relação entre os campos em dois planos diferentes pode ser obtida por:

$$E(x, y, z) = \iint A(k_x, k_y, z) \exp[i(k_x x + k_y y)] dk_x dk_y. \quad (2.3-12)$$

Substituindo 2.3-12 na equação de Helmholtz, temos:

$$\nabla^2 E(x, y, z) = \iint \left[\frac{\partial^2 A(k_x, k_y, z)}{\partial z^2} - (k_x^2 + k_y^2) \right] \exp[i(k_x x + k_y y)] dk_x dk_y. \quad (2.3-13)$$

Mas,

$$\nabla^2 E(x, y, z) = -k^2 E(x, y, z), \quad (2.3-14)$$

então,

$$\iint \left[\frac{\partial^2 A(k_x, k_y, z)}{\partial z^2} + (k^2 - (k_x^2 + k_y^2)) \right] \exp[i(k_x x + k_y y)] dk_x dk_y = 0, \quad (2.3-15)$$

ou ainda

$$\frac{\partial^2 A(k_x, k_y, z)}{\partial z^2} + k_z^2 A(k_x, k_y, z) = 0, \quad (2.3-16)$$

que tem solução :

$$A(k_x, k_y, z) = A(k_x, k_y) \exp(i k_z z), \quad (2.3-17)$$

onde $A(k_x, k_y)$ é o espectro angular do feixe em $z = 0$.

A equação 2.3-17 nos mostra que, para calcular o espectro angular do feixe em z basta multiplicar o espectro angular em $z = 0$ pelo fator $\exp(i k_z z)$, conhecido como propagador.

Ao substituirmos a equação 2.3-17 em 2.3-10, encontramos:

$$E(\vec{r}) = \iint A(k_x, k_y, z) \exp\left[i(k_x^2 + k_y^2)^{\frac{1}{2}} z\right] \exp[i(k_x x + k_y y)] dk_x dk_y, \quad (2.3-18)$$

que possui muitas propriedades relevantes, como a evidência de que, se $k^2 < k_x^2 + k_y^2$ a primeira exponencial passa a ser real pura, deixando de ser imaginária e caracterizando ondas não-homogêneas, cuja amplitude diminui com a distância z . Logo, como o objetivo é possuir ondas propagantes, devemos condicionar as frequências espaciais de tal maneira que $k^2 > k_x^2 + k_y^2$. Como nos preocuparemos apenas com campos distantes em que $\lambda \gg z$, isto pode ser ignorado. Outra interessante observação é que foi utilizado apenas aproximação escalar, implicando em uma equação exata dentro dos limites da mesma.

A partir de agora, vamos impor a restrição para um feixe não difratar e observar o que o espectro angular nos revela sobre da função $A(k_x, k_y)$.

A princípio, a condição essencial para que um feixe seja não difratante é que, durante a propagação, seu perfil transversal de intensidade permaneça constante, ou seja:

$$|E(x, y, z = 0)|^2 = |E(x, y, z)|^2, \quad (2.3-19)$$

ou

$$\begin{aligned} & \left| \iint A(k_x, k_y) \exp[i(k_x x + k_y y)] dk_x dk_y \right|^2 \\ &= \left| \iint A(k_x, k_y, z) \exp\left[i(k_x^2 + k_y^2)^{\frac{1}{2}} z\right] \exp[i(k_x x + k_y y)] dk_x dk_y \right|^2. \end{aligned} \quad (2.3-20)$$

Se fizermos

$$|k^2 - (k_x^2 + k_y^2)|^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi m}{z}, \quad (2.3-21)$$

com $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, obtemos uma solução para a equação 2.3-18. Observe que agora k_z só poderá assumir valores que obedeçam a restrição em 2.3-19. Se admitirmos $k_\rho = (k_x^2 + k_y^2)^{\frac{1}{2}}$ como sendo o vetor de onda transversal à direção de propagação e sabendo que $k^2 = k_\rho^2 + k_z^2$, percebemos que k_ρ também não poderá assumir qualquer valor contínuo pois violaria em algum momento a condição $k_{zm}^2 = k^2 - k_\rho^2$. Então, para feixes adifrativos temos:

$$k^2 = k_{\rho m}^2 - k_{zm}^2, \quad (2.3-22)$$

com $k_{\rho m}^2$ e k_{zm}^2 assumindo valores discretos.

O fato de k_ρ assumir apenas valores discretos significa que serão formados anéis de raios iguais a k_ρ . São os chamados anéis de Montgomery [31].

Como os feixes em estudo possuem simetria cilíndrica, é conveniente trabalhar com coordenadas polares no plano transversal. Portanto, no espaço real teremos $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$ e no espaço das frequências $k_x = k_\rho \cos \phi$, $k_y = k_\rho \sin \phi$ e $k_z = k_z$.

Fazendo as devidas substituições em 2.3-10, teremos:

$$E(r, \theta, z) = \iint A(k_\rho, \phi) \exp \left[i(k^2 - k_\rho^2)^{\frac{1}{2}} z \right] \exp[ik_\rho r \cos(\theta - \phi)] k_\rho dk_\rho d\phi. \quad (2.3-23)$$

Mas para que tenhamos intensidade constante durante a propagação, vimos que o vetor de onda transversal deve ficar restrito em um anel. Como a função $A(k_\rho, \phi)$ é contínua, é possível escrever

$$A(k_\rho, \phi) = \delta(k_\rho - k_{\rho 0}) \Lambda(\phi). \quad (2.3-24)$$

Desta forma, encontramos a restrição para o espectro angular de feixes não difratantes. Já que a função de modulação $\Lambda(\phi)$ é arbitrária, existe um infinidade de feixes com distribuição de fase e amplitude diferentes.

Substituindo 2.3-24 em 2.3-23 chegamos em:

$$E(r, \theta, z) = \exp \left[i(k^2 - k_{\rho 0}^2)^{\frac{1}{2}} z \right] k_{\rho 0} \int_0^{2\pi} \Lambda(\phi) \exp[ik_{\rho 0} r \cos(\theta - \phi)] d\phi. \quad (2.3-25)$$

Esta equação é o ponto de partida da ideia de Durnin sobre o feixe Bessel. Nela notamos que para qualquer $\Lambda(\phi)$, a relação $|E(x, y, z = 0)|^2 = |E(x, y, z)|^2$ é satisfeita.

Admitindo $\Lambda(\phi)$ independente de ϕ , a equação 2.3-25 torna:

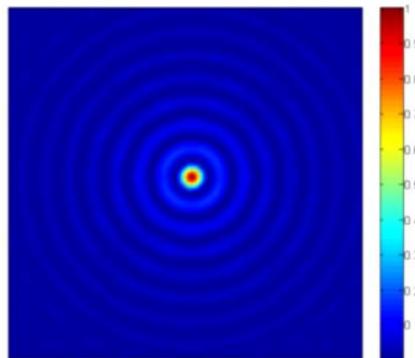
$$E(r, \theta, z) = \exp \left[i(k^2 - k_{\rho 0}^2)^{\frac{1}{2}} z \right] k_{\rho 0} \int_0^{2\pi} \exp[ik_{\rho 0} r \cos(\theta - \phi)] d\phi, \quad (2.3-26)$$

ou utilizando a identidade $J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[iu \cos(v)] dv$, chegamos em:

$$E(r, \theta, z) = E_0 J_0(k_\rho r) \exp(ik_{z0} z). \quad (2.3-27)$$

A equação 2.3-27 é a encontrada por Durnin, onde E_0 é uma constante. Podemos observar que o espectro angular permite obter uma infinidade de feixes não difratantes dependendo da forma de $\Lambda(\phi)$. Na figura 2.3-4, temos o perfil transversal de intensidade do feixe Bessel.

Figura 2.3-4 — Perfil transversal de intensidade do feixe Bessel.

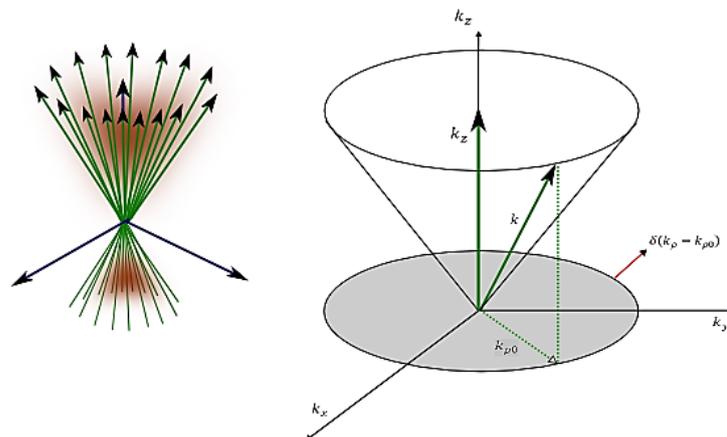


Fonte: (Autor, 2014)

A descrição dada pelo espectro angular é de fundamental importância para o entendimento do motivo pelo qual ocorre a auto-reconstrução do feixe ao atravessar um obstáculo.

Vimos que o confinamento da componente transversal do vetor de onda em um anel no espaço das frequências é condição única e necessária para que tenhamos feixes livres de difração. Para entendermos melhor esta descrição, observemos a figura 2.3-5. Notamos que a componente k_ρ é confinada em um anel, logo \vec{k} deverá estar confinado em um cone, ou seja, as ondas planas que compõem o espectro angular deverão possuir vetores de onda distribuídos numa superfície cônica.

Figura 2.3-5 — Distribuição dos vetores de onda de um feixe não difratante no espaço das frequências espaciais



Fonte: (Autor, 2014)

Ao analisarmos um feixe Bessel de ordem zero, o entendimento pode ser facilitado. Imaginemos uma superposição de várias ondas planas com seus vetores de onda na superfície de um cone orientado, como vemos na figura 2.3-5. Vamos adotar $\vec{k} = k(\text{sen}\theta_0 \cos\phi, \text{sen}\theta_0 \text{sen}\phi, \text{cos}\theta_0)$ como o vetor de onda escrito em coordenadas esféricas, θ_0 o ângulo de abertura do cone e ϕ o ângulo azimutal da onda. Consideremos várias ondas planas, todas com amplitude $A d\phi$ e vetores de propagação \vec{k} , com θ_0 sendo o mesmo para cada onda. Podemos escrever para cada uma:

$$A \exp[i(k_x x + k_y y + k_z z)] d\phi \quad (2.3-28)$$

ou

$$A \exp[ik(x \text{sen}\theta_0 \cos\phi + y \text{sen}\theta_0 \text{sen}\phi + z \text{cos}\theta_0)] d\phi \quad (2.3-29)$$

em coordenadas esféricas.

Usando $x = \rho \cos\phi$, $y = \rho \text{sen}\phi$, temos:

$$A \exp[ik(\rho \cos\phi \text{sen}\theta_0 \cos\phi + \rho \text{sen}\phi \text{sen}\theta_0 \text{sen}\phi + z \text{cos}\theta_0)] d\phi. \quad (2.3-30)$$

Se integramos em ϕ , obtemos:

$$A \exp(ikz \text{cos}\theta_0) \int_0^{2\pi} \exp[ik\rho \text{sen}\theta_0 \cos(\phi - \phi)] d\phi. \quad (2.3-31)$$

Usando a identidade $J_l(u) = \frac{i^{-l}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i l v) \exp[i u \cos(v)] dv$, chegamos em

$$A \exp(ikz \text{cos}\theta_0) J_0(k\rho \text{sen}\theta_0), \quad (2.3-32)$$

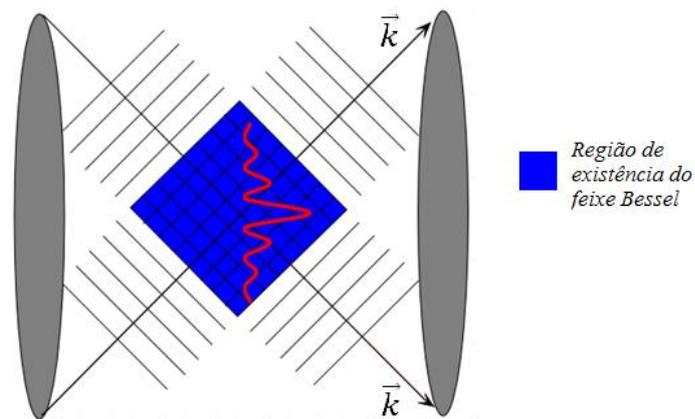
mas $k \text{cos}\theta = k_z$ e $k \text{sen}\theta = k_\rho$, então podemos escrever

$$A \exp(ik_z z) J_0(k_\rho \rho), \quad (2.3-33)$$

que é o feixe Bessel de ordem zero.

Então, entendemos por feixes não difratantes aqueles que possuem vetores de onda no espectro angular confinados na superfície de um cone no espaço de freqüências espaciais. Como os feixes Bessel possuem, teoricamente, energia infinita e na natureza não existe essa possibilidade, criamos apenas aproximações de feixes Bessel. As ondas planas do espaço de freqüência sempre sofrerão difração durante sua propagação, porém, se comparadas com feixes gaussianos, por exemplo, essa difração será pouca. O feixe Bessel será formado na região de intersecção das ondas planas, logo existe uma relação entre o comprimento máximo da região de existência do feixe e o raio do anel no espaço de freqüências espaciais, como ilustrado na figura 2.3-6.

Figura 2.3-6 — Região de existência do feixe Bessel.

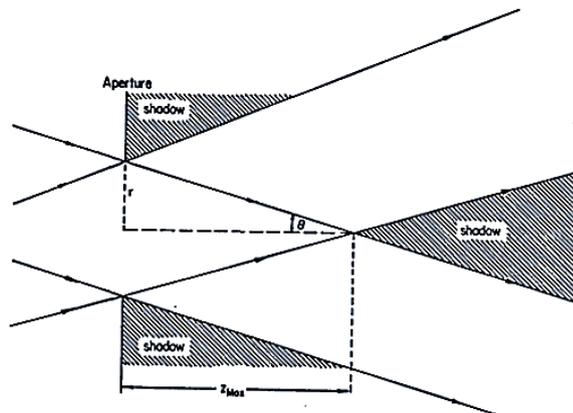


Fonte: (Autor, 2014)

Uma análise da figura 2.3-7, utilizando-se uma aproximação da óptica geométrica, nos fornece:

$$z_{m\acute{a}x} = \frac{r}{\tan\theta} = r \sqrt{\left(\frac{2\pi}{k_{\rho}\lambda}\right)^2 - 1}. \quad (2.3-34)$$

Figura 2.3-7 — Comprimento máximo de propagação do feixe Bessel.



Fonte: (Durnin, [3], 1987)

3 COERÊNCIA E SPECKLE

Neste capítulo apresentaremos a teoria da coerência óptica, enfatizando o seu caráter temporal e espacial. Também abordaremos o fenômeno de speckle associado à luz parcialmente coerente.

3.1 Coerência

A coerência é a propriedade mais importante da radiação laser. Ela se manifesta simultaneamente pela monocromaticidade, revelando a coerência temporal; e pela frente de onda unifásica, de onde decorre a coerência espacial.

O campo da coerência óptica, tradicionalmente, corresponde à representação estatística dos fenômenos de flutuação nos feixes de luz, assim como aos feitos destas flutuações sobre as correlações entre determinadas grandezas medidas em pontos distintos do feixe, tanto no domínio espacial como no temporal. Quando falamos em correlação, o parâmetro relevante é o seu grau.

Se a luz, durante a propagação, não apresentar variação de fase ao longo de sua frente de onda, dizemos que ela é espacialmente coerente. Identicamente, se a fase em um determinado instante, ao longo de uma frente de onda se deslocando, for idêntica à fase apresentada pela onda após percorrer certa distância, classificamos que a mesma é totalmente coerente sob o aspecto temporal. A partir deste entendimento, fica evidente que uma onda plana monocromática será, tanto no aspecto espacial como temporal totalmente coerente.

3.1.1 Coerência temporal

Consideremos um feixe de luz quase monocromática a partir de uma pequena fonte σ . Através de um interferômetro de Michelson, o feixe é dividido em dois outros feixes no ponto P_1 e reunidos depois que uma diferença de caminho $\Delta l = c\Delta t$ (c é a velocidade da luz no vácuo) é introduzida entre eles, como ilustrado na figura 3.1-1. Se Δl for suficientemente pequena, franjas de interferência serão formadas no plano de observação β . A formação destas franjas ocorre devido à existência de coerência temporal entre os feixes, uma vez que a capacidade de formar franjas é resultado da correlação existente a partir da condição de um atraso de tempo Δt introduzido entre eles [32].

Para que haja formação das franjas de interferência, o tempo de atraso Δt tem que obedecer a relação [33]:

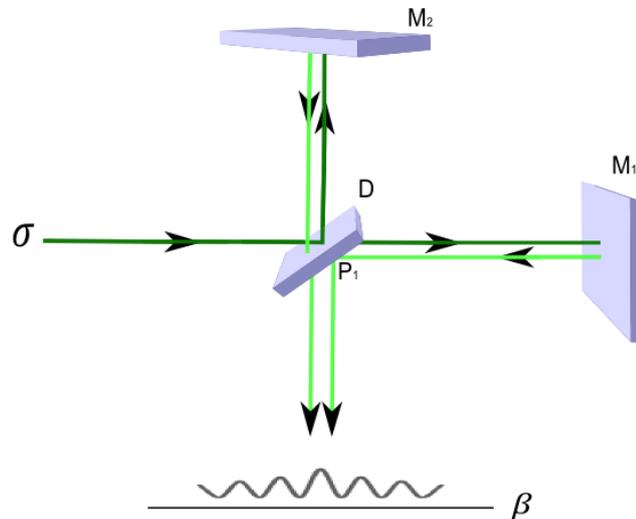
$$\Delta t \Delta \nu \leq 1, \quad (3.1-1)$$

onde $\Delta \nu$ é a largura de banda da luz. O retardo de tempo

$$\Delta t \sim \frac{1}{\Delta \nu} \quad (3.1-2)$$

é conhecido como o tempo de coerência da luz e a correspondente diferença de caminho $\Delta l = c\Delta t \sim \frac{c}{\Delta \nu}$, é o comprimento de coerência ou mais precisamente o comprimento longitudinal de coerência da luz.

Figura 3.1-1 — Coerência temporal ilustrada por meio de um interferômetro de Michelson. M_1 e M_2 são espelhos e D é um divisor de feixe.



Fonte: (Autor, 2014)

Uma vez que $\nu = \frac{c}{\lambda}$, onde λ é o comprimento de onda, $\Delta\nu \sim c \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$, a expressão para o comprimento de coerência pode também ser escrita da forma:

$$\Delta l \sim \left(\frac{\bar{\lambda}}{\Delta\lambda} \right) \bar{\lambda}, \quad (3.1-3)$$

onde $\bar{\lambda}$ é o comprimento de onda médio.

Vamos agora entender a ideia básica deste fenômeno. Podemos considerar que as franjas no plano de observação β surgem a partir da adição de distribuições espaciais periódicas, sendo cada uma delas formada por uma componente de frequência presente no espectro da luz. Agora as distribuições periódicas formadas pela luz de diferentes componentes de frequência terão diferentes periodicidades espaciais. Assim, com o aumento do intervalo de tempo entre os dois feixes, a sua adição irá levar a um padrão de franjas cada vez mais indefinido, porque os máximos das várias contribuições monocromáticas ficarão cada vez mais fora de sintonia. Para um atraso de tempo suficientemente longo, as distribuições periódicas de intensidade perderão totalmente a sintonia, não formando padrão de franjas. Percebemos que com o aumento do tempo de atraso, as franjas desaparecem

quando Δt atinge um valor que é da ordem de grandeza indicada pela equação 3.1-2.

Utilizando conceitos relacionados às correlações, podemos chegar a uma melhor compreensão desses efeitos. Por exemplo, uma função de onda de luz quase monocromática, considerada como um processo aleatório estacionário pode ser retratado como uma sucessão de ondas moduladas, em que a frequência média coincide com a frequência da luz e cuja duração é da ordem do tempo de coerência (Eq. 3.1-2).

Então, a formação ou ausência de franjas de interferência no plano de observação β é diretamente relacionada com a correlação ou falta de correlação, respectivamente, entre as flutuações dos dois feixes parciais atingindo β [33].

A medida habitual da nitidez de franjas de interferência é a chamada visibilidade. A visibilidade $V(\vec{r})$ num ponto $P(\vec{r})$ em um padrão de interferência é definida por [33]:

$$V(\vec{r}) = \frac{\langle I \rangle_{\text{máx}} - \langle I \rangle_{\text{mín}}}{\langle I \rangle_{\text{máx}} + \langle I \rangle_{\text{mín}}}, \quad (3.1-4)$$

onde $\langle I \rangle_{\text{máx}}$ e $\langle I \rangle_{\text{mín}}$ representam o máximo e o mínimo valor que a intensidade média assume na proximidade de P .

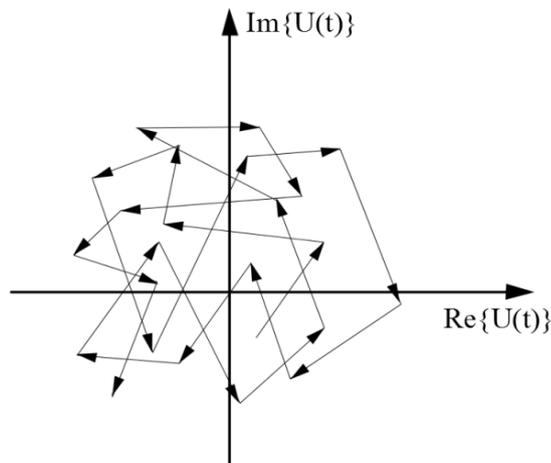
3.1.1.1 Função de coerência temporal

A função de auto correlação de uma função estacionária aleatória complexa $U(t)$ é dada pela média do produto de $U^*(t)$ e $U(t + \tau)$ como uma função do tempo de atraso τ [22].

$$G(\tau) = \langle U^*(t)U(t + \tau) \rangle. \quad (3.1-5)$$

Para entendermos o significado de 3.1-5, vamos considerar que o valor médio da função de onda complexa $\langle U(t) \rangle = 0$. Isto é aplicável quando a fase do fasor $U(t)$ pode assumir valores entre 0 e 2π com igual probabilidade, como ilustrado na figura 3.1-2. A fase de um produto $U^*(t)U(t + \tau)$ corresponde ao ângulo entre $U(t)$ e $U(t + \tau)$ [22]. Se $U(t)$ e $U(t + \tau)$ forem correlacionados, o ângulo entre eles varia aleatoriamente entre 0 e 2π . Então, $U^*(t)U(t + \tau)$ possui um ângulo totalmente incerto, de tal maneira que pode assumir qualquer direção, desaparecendo a função de auto correlação $G(\tau)$ ao fazer sua média. Entretanto, se para um dado τ , $U(t)$ e $U(t + \tau)$ são correlacionados, seus fasores manterão alguma relação. As flutuações são, portanto, interligadas de tal modo que $U^*(t)U(t + \tau)$ tem uma direção preferencial, fazendo com que $G(\tau)$ não desapareça.

Figura 3.1-2 – Variação do fasor $U(t)$ com o tempo quando seu argumento é distribuído uniformemente entre 0 e 2π .



Fonte: (Autor, 2014)

Na linguagem da teoria de coerência óptica, a função de autocorrelação $G(\tau)$ é chamada de função de coerência temporal. Esta função possui simetria Hermitiana [22], $G(-\tau) = G^*(\tau)$, e a intensidade I é igual a $G(\tau)$ quando $\tau = 0$,

$$I = G(0). \quad (3.1-6)$$

3.1.1.2 Grau de coerência temporal

Vimos que a função de coerência temporal $G(\tau)$ fornece informações sobre a intensidade e o grau de correlação de luz estacionária. Uma medida de coerência que é insensível à intensidade é dada pela função de autocorrelação normalizada,

$$g(\tau) = \frac{G(\tau)}{G(0)} = \frac{\langle U^*(t)U(t+\tau) \rangle}{\langle U^*(t)U(t) \rangle}, \quad (3.1-7)$$

que é chamada de grau complexo de coerência temporal, não podendo assumir valores absolutos que excedam a unidade, $0 \leq |g(\tau)| \leq 1$.

O valor de $g(\tau)$ representa a medida do grau de correlação entre $U(t)$ e $U(t+\tau)$. Se considerarmos luz monocromática e determinística, ou seja, $U(t) = Ae^{iw_0t}$, onde A é uma constante, a equação 3.1-7 fica:

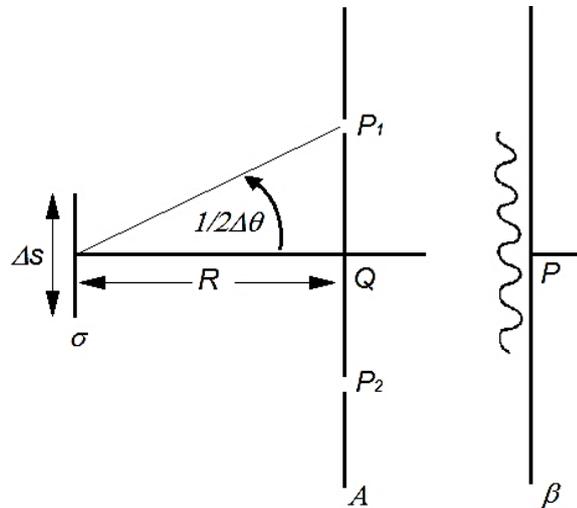
$$g(\tau) = e^{iw_0\tau}, \quad (3.1-8)$$

de tal forma que $|g(\tau)| = 1$ para qualquer valor de τ .

3.1.2 Coerência espacial

Agora, a partir do experimento de interferência de Young, consideraremos uma luz quase monocromática a partir de uma fonte térmica extensa σ , conforme figura 3.1-3. Adotaremos, para simplificar, uma disposição simétrica com uma fonte de forma quadrada de lados Δs . Se os furos P_1 e P_2 estiverem muito próximos do eixo de simetria, as franjas de interferência serão observadas na vizinhança do ponto P no plano de observação β .

Figura 3.1-3 — Coerência temporal ilustrada por meio do experimento de interferência de Young com luz a partir de uma fonte térmica σ .



Fonte: (Autor, 2014)

O surgimento das franjas é devido à coerência espacial entre os dois feixes de luz que atingem P a partir dos dois furos P_1 e P_2 . Isso é resultado da correlação que existe entre eles, sob condições em que a separação espacial P_1P_2 foi introduzida [33].

Através de um experimento deste tipo é possível notar que, se a separação entre a fonte σ e o plano A que contém os furos é suficientemente grande, as franjas de interferência serão formadas perto de P se

$$\Delta\theta\Delta s \leq \bar{\lambda}, \quad (3.1-9)$$

onde $\bar{\lambda} = c/\bar{\nu}$ é o comprimento de onda médio da luz. Se R é a distância entre o plano que contém a fonte e o plano onde se encontra os furos, o resultado anterior implica que, para observar os furos na vizinhança de P , os dois orifícios têm que estar situados dentro de uma região em torno do ponto axial Q no plano A , cuja área ΔA é dada pela relação:

$$\Delta A \sim (R\Delta\theta)^2 \sim \frac{R^2\bar{\lambda}^2}{S}, \quad (3.1-10)$$

onde $S = (\Delta s)^2$ é a área da fonte.

3.1.3 Função de coerência mútua

Um descritor importante das flutuações tanto no aspecto espacial quanto no temporal da função aleatória $U(\vec{r}, t)$, é a função de correlação cruzada de $U(\vec{r}_1, t)$ e $U(\vec{r}_2, t)$ em pares de posições \vec{r}_1 e \vec{r}_2 :

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \langle U^*(\vec{r}_1, t)U(\vec{r}_2, t + \tau) \rangle. \quad (3.1-11)$$

Esta função é chamada de função de coerência mútua [22]. Sua forma normalizada é

$$g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \frac{G(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)}{\sqrt{I(\vec{r}_1)I(\vec{r}_2)}}, \quad (3.1-12)$$

conhecida como grau complexo de coerência. Representa o coeficiente de correlação cruzada das variáveis aleatórias $U^*(\vec{r}_1, t)$ e $U(\vec{r}_2, t + \tau)$. Seu valor absoluto é limitado entre zero e a unidade, $0 \leq |g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)| \leq 1$.

As flutuações espaciais e temporais da luz estão intimamente relacionadas, já que a luz é uma onda e a função de onda complexa $U(\vec{r}, t)$ deve satisfazer a equação de onda.

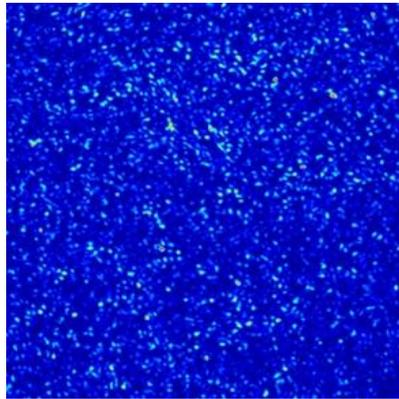
3.2 Speckle.

Quando a luz coerente é transmitida ou refletida por um meio com rugosidades da ordem de comprimento de onda incidente, ocorre espalhamento aleatório, distorcendo fortemente sua frente de onda, tornando-a parcialmente coerente e gerando uma estrutura granular conhecida como speckle. Trata-se de um fenômeno provocado pela interferência dos raios de luz espalhados, onde a forma de configuração dos speckles tende a variar, mesmo quando pequenas alterações surgem na direção do feixe incidente ou no ponto iluminado [34, 35, 36].

Ocorre devido ao fato de, na escala microscópica, a maioria das superfícies apresentarem-se altamente rugosas.

A figura 3.2-1 mostra um padrão de speckle adquirido pela luz coerente de um laser transmitida através de um disco de vidro jateado. Este padrão granular extremamente complexo, não tem qualquer relação óbvia com as propriedades macroscópicas do objeto iluminado. Diferentemente, parece caótico e desordenado, sendo melhor descrito quantitativamente por métodos de probabilidade e estatística.

Figura 3.2-1 — Padrão de speckle adquirido por transmissão da luz do laser através de um disco jateado.



Fonte: (Autor, 2014)

O interesse em pesquisar esse tipo de fenômeno não é recente. Em 1877, foi descrita a estrutura fibrosa de uma placa de vidro quando a mesma era atravessada por luz de uma lâmpada de mercúrio [37].

Nas primeiras décadas do século XX, muitos trabalhos teóricos foram produzidos abordando o assunto. Entretanto, somente com o surgimento do laser, nos anos de 1960, houve um impulso nas pesquisas, pois a alta coerência provocava o surgimento do speckle [38, 39].

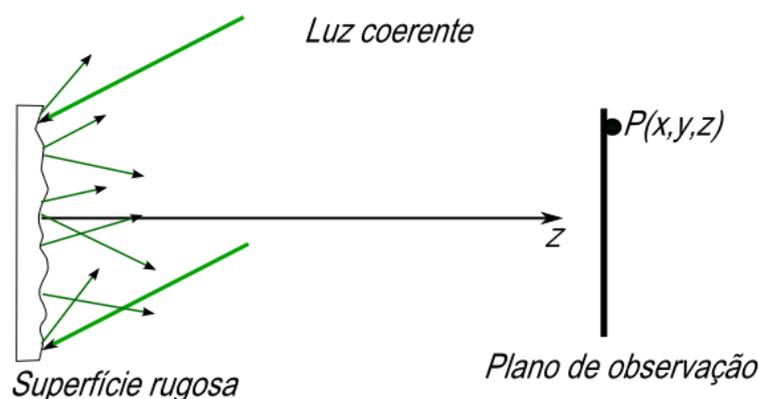
A grande maioria dos meios, sintético ou natural, é extremamente rugosa na escala do comprimento de onda óptico. Sob iluminação de luz coerente, a onda refletida ou transmitida de tal meio é constituída por contribuições de muitas áreas de dispersão independentes. A propagação da luz para um ponto de observação distante resulta na adição de vários componentes dispersos com atrasos relativos

que podem variar de alguns ou mesmo muitos comprimentos de onda, dependendo da superfície e da geometria microscópica.

A interferência dessas defasagens nas ondas permite resultados no padrão granular que conhecemos como speckle. Podemos notar que, se o ponto de observação é movido, o caminho percorrido pelos comprimentos de componentes dispersos muda e um valor novo e independente da intensidade pode resultar do processo de interferência. Desta forma, o padrão de speckle consiste em uma infinidade de pontos brilhantes onde a interferência tem sido muito construtiva e, pontos escuros onde a interferência tem sido altamente destrutiva. Assim, observamos um contínuo de valores de irradiância que tem a aparência de uma desordem caótica de "speckles". Essas características fazem com que a descrição do granulado óptico seja feita em termos estatísticos, seguindo tratamento semelhante ao dado para o passeio aleatório no plano complexo [40].

Vamos admitir um feixe de luz coerente e colimado de comprimento de onda λ incidindo sobre uma superfície rugosa. Como o relevo da superfície varia de forma aleatória, as pequenas ondas esféricas refletidas apresentarão distribuição de fase e amplitude aleatórias, figura 3.2-2.

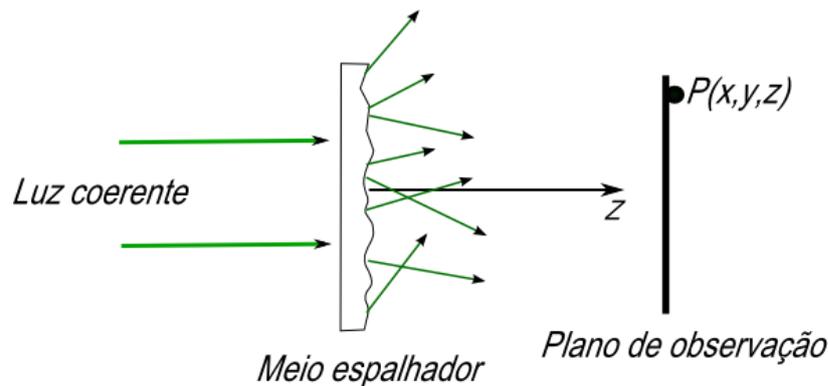
Figura 3.2-2 — Origem do speckle por reflexão difusa da luz coerente através de uma superfície rugosa.



Fonte: (Autor, 2014)

As ondas refletidas interferirão em um determinado ponto no espaço $P(x,y,z)$. Em outra situação, podemos considerar um meio espalhador iluminado por um feixe coerente e colimado, como na figura 3.2-3. Neste caso, as irregularidades na superfície de saída irão espalhar a luz em esféricas, podendo levar a formação de ondas secundárias dependendo da variação da espessura do meio.

Figura 3.2-3 — Origem do speckle por transmissão da luz coerente através de um meio espalhador.



Fonte: (Autor, 2014)

Podemos perceber, que a luz em um dado ponto $P(x,y,z)$ é composta pela soma dos N componentes que representam a contribuição de todos os pontos da superfície refletora ou transmissora, chamados fasores.

Considerando utilização de luz coerente e polarizada, as contribuições no ponto P formadas por elementos de superfície j , podem ser dadas por:

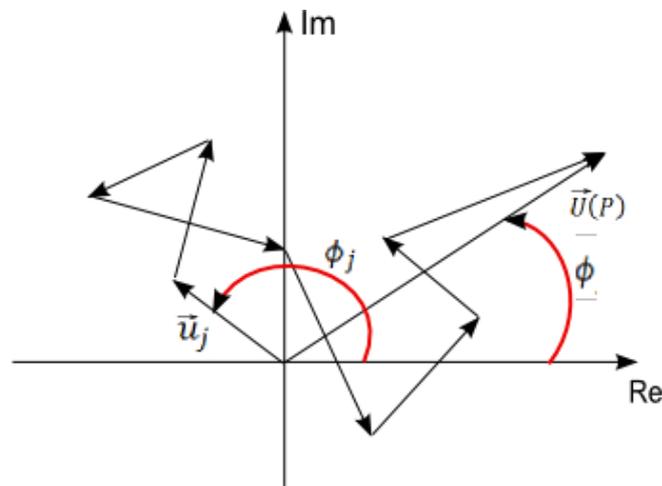
$$u_j(P) = |u_j| e^{i\phi_j} = |u_j| e^{ikr_j}, \quad (3.2-1)$$

onde r é a distância entre os pontos de espalhamento de superfície j , u_j são fasores aleatórios e as fases $\phi_j = kr_j$, que variam aleatoriamente no ponto P . Então, podemos descrever a amplitude no ponto P pela expressão [41]:

$$U(P) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N u_j e^{i\phi_j} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N u_j e^{ikr_j}. \quad (3.2-2)$$

A amplitude $U(P)$ corresponde ao fasor resultante. A somatória na equação 3.2-2 pode ser considerada um passeio aleatório no plano complexo [42], como pode ser ilustrado na figura 3.2-4.

Figura 3.2-4 — Passeio aleatório no plano complexo.



Fonte: (Autor, 2014)

A partir da figura 3.2-4, consideraremos que a amplitude u_j e a fase ϕ_j de cada componente sejam independentes entre si e que estas fases estejam distribuídas uniformemente em um intervalo de $-\pi$ a π . Assim, assumimos que a superfície é rugosa comparando-a com o comprimento de onda utilizado. Sabendo que as partes reais e imaginárias do campo são Gaussianas [41, 40], a função de densidade de probabilidade será dada por:

$$P_{r,i}(U^{(r)}, U^{(i)}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left[-\frac{(U^{(r)})^2 + (U^{(i)})^2}{2\sigma^2} \right], \quad (3.2-3)$$

onde $\sigma^2 = U(R^2) + U(I^2) = \sigma_R^2 + \sigma_I^2$.

Temos que

$$\begin{aligned} U^{(r)} &= \sqrt{I} \cos \phi \\ e \\ U^{(i)} &= \sqrt{I} \sin \phi. \end{aligned} \quad (3.2-4)$$

Então, as densidades de probabilidade $p(I)$ e fase $p(\phi)$ são dadas por:

$$p(I) = \frac{1}{\langle I \rangle} \exp\left[-\frac{I}{\langle I \rangle}\right], \text{ para } I \geq 0 \quad (3.2-5)$$

e

$$p(\phi) = \frac{1}{2\pi}, \text{ para } -\pi \leq \phi \leq \pi, \quad (3.2-6)$$

onde $\langle I \rangle$ representa a média dos valores de intensidade em um padrão de speckle. De acordo com as equações 3.2-5 e 3.2-6, a distribuição de intensidade obedece a lei da exponencial negativa, quando as fases são uniformemente distribuídas no intervalo $-\pi$ a π .

Integrando 3.2-5, obtemos o momento desta intensidade, que possui seu n -ésimo termo dado por:

$$\langle I^n \rangle = (2\sigma^2)^n n! = n! \langle I \rangle^n. \quad (3.2-7)$$

Observamos que $\langle I \rangle$ é igual $2\sigma^2$, quando $n = 1$. O momento de segunda ordem $\langle I^2 \rangle$ corresponde a $2\langle I^2 \rangle$, então podemos escrever a variância como:

$$\sigma_I = \langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2 = \langle I \rangle^2. \quad (3.2-8)$$

Esta equação mostra que o desvio padrão σ_I dos padrões de speckle polarizado é igual à média dos valores de intensidade. Para medir as flutuações de intensidade, usamos um método chamado de contraste, definido por:

$$C = \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle}. \quad (3.2-9)$$

A partir das equações 3.2-8 e 3.2-9, observamos que o contraste do padrão de speckle é sempre igual a um.

4 AUTO-RECONSTRUÇÃO DE FEIXES PARCIALMENTE COERENTES

Nos capítulos anteriores, mostramos que o feixe Bessel é solução exata da equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas e que o mesmo pertence a uma classe de feixes chamada não difratantes. Tais feixes têm sido foco de muitos estudos e várias aplicações com os mesmos têm sido realizadas, dentre elas incluem-se, por exemplo, a manipulação óptica [17, 18], biofotônica e tomografia de coerência óptica [19].

Atualmente, estudos mostram que o espalhamento da luz coerente pode ser útil para diversos fins como melhoramento de foco e resolução de imagens [10, 11, 12, 13, 14], dentre outros.

Além do caráter adifrativo, o feixe Bessel possui a capacidade de auto-reconstruir seu perfil transversal após ser interceptado por um objeto opaco durante a propagação no espaço livre. Porém, essa capacidade tem sido amplamente estudada no contexto de luz totalmente coerente.

O melhoramento das propriedades do feixe Bessel no âmbito da luz parcialmente coerente pode ser muito útil para o novo conceito de iluminação para microscopia óptica, proporcionando olhar mais profundamente em tecidos espalhadores.

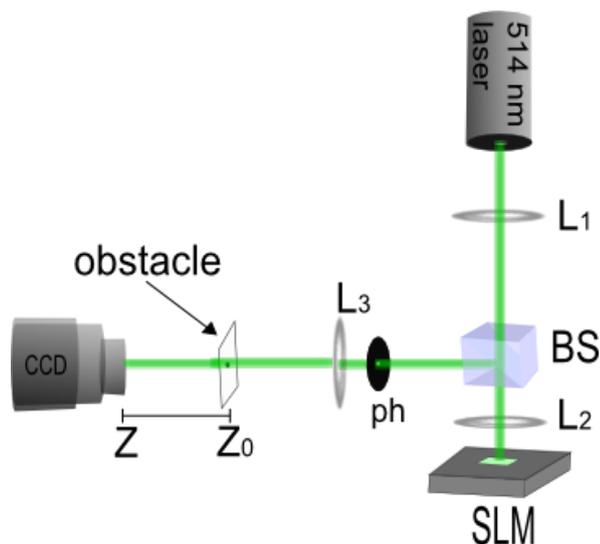
Neste capítulo, apresentaremos e discutiremos os resultados numéricos e experimentais obtidos a partir do estudo da auto-reconstrução do feixe Bessel parcialmente coerente. O mesmo estudo também foi realizado com o feixe Gaussiano parcialmente coerente, com o objetivo de analisar o comportamento de um feixe coerentemente não reconstrutivo.

4.1 Montagem Experimental.

A figura 4.1-1 mostra a montagem experimental utilizada para obtenção dos resultados. Um laser de Argônio operando em um comprimento de onda de 514 nm ilumina um holograma gerado por computador com pixels controláveis escritos em

um Modulador Espacial de Luz (SLM) da Hamamatsu, modelo X10468-01, produzindo modos de Bessel e Gauss. Para a geração de feixe Bessel coerente, utilizamos um holograma originalmente proposto por Kirk e Jones [43]. Já para produzirmos feixes Bessel parcialmente coerentes dispomos de um holograma Gerchberg e Saxton, codificado para formar um anel no plano de Fourier do holograma [44] e, para geração de feixes Gaussianos parcialmente coerentes, apenas introduzindo uma fase aleatória em um holograma.

Figura 4.1-1 – Montagem experimental.



Fonte: (Autor, 2014)

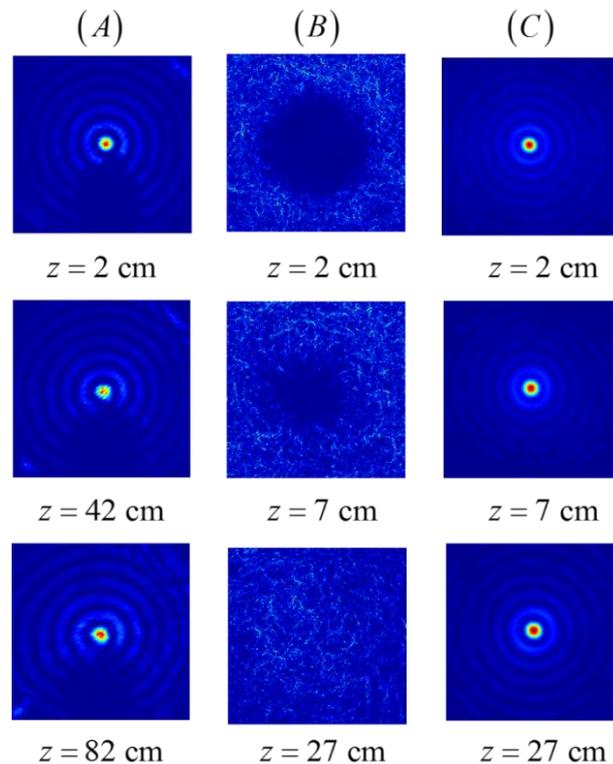
A lente L_1 foi utilizada para ampliar a seção transversal do feixe, favorecendo sua incidência em toda a área da janela do SLM. L_2 serviu para colimar o feixe incidente no SLM e realizar a transformada de Fourier da luz modulada. Para selecionar a porção de luz desejada, foi utilizado um pinhole (ph) e L_3 colimou o padrão de speckle na região a ser estudada. Este padrão foi detectado por uma câmera CCD em algumas distâncias, entre Z_0 e Z , após a obstrução.

4.2 Auto-reconstrução do Feixe Bessel Coerente e Parcialmente Coerente.

O espectro do feixe Bessel pode ser descrito como uma superposição de componentes de ondas planas cujos vetores de onda criam uma superfície cônica. A propriedade de auto-reconstrução de um feixe Bessel coerente pode ser observada através do bloqueio parcial do mesmo, no qual uma sombra é projetada. Contudo, as ondas planas no cone, que não são obstruídas, podem reconstruí-lo em um ponto um pouco além do obstáculo.

Os resultados a seguir mostram que é possível reconstruir um feixe parcialmente coerente após uma obstrução. Recuperamos um perfil do padrão de speckle do feixe, após ser parcialmente bloqueado, utilizando a autocorrelação.

Figura 4.2-1 – Resultados experimentais da auto-reconstrução e auto-reconfiguração do feixe.



Fonte: (Autor, 2014)

A figura 4.2-1 compara a propriedade de auto-reconstrução do feixe Bessel coerente com a propriedade de auto-reconfiguração do feixe Bessel parcialmente

coerente. Introduzimos aqui a propriedade de auto-reconfiguração, que imita o efeito de auto-reconstrução, mas não é o caso, uma vez que os “speckles” nunca retornam ao padrão que tinha antes do obstáculo.

Em 4.2-1 (A), podemos observar os resultados experimentais para o feixe Bessel coerente. Em (B), temos os resultados experimentais para o feixe Bessel parcialmente coerente e suas autocorrelações são mostradas em (C). Os padrões foram registrados por uma câmara CCD (dispositivo de carga acoplada) nas distâncias $z = 2, 42$ e 82 cm para o feixe Bessel coerente e $z = 2, 7$ e 27 cm para intensidades de “speckle”, a partir do obstáculo.

Um obstáculo circular opaco de diâmetro $d \approx 2\text{ mm}$ foi utilizado para bloquear parte do feixe coerente e speckles. Observamos que, mesmo para uma distância de propagação $z = 82\text{ cm}$, o feixe coerente ainda não recuperara seu perfil de intensidade, enquanto que o padrão de speckle reconfigura-se a uma distância em torno de $z = 27\text{ cm}$. Fica evidente a superioridade da reconstrução do campo de “speckles” sobre o feixe coerente. Podemos notar que os padrões do feixe de Bessel parcialmente coerente obtidos através da realização de autocorrelação das intensidades “speckles” são quase os mesmos, independentemente do tamanho do buraco.

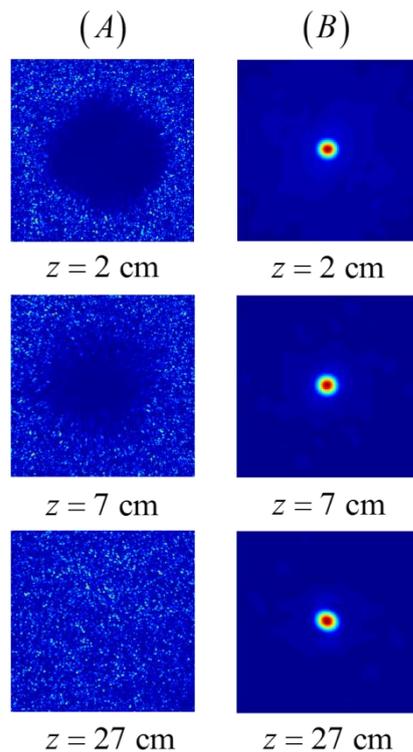
A autocorrelação do speckle mostra uma pequena variação na visibilidade das franjas [45]. Fica evidente a superioridade da capacidade de obter a informação do perfil de um feixe incoerente sobre um coerente. Além disso, uma pequena quantidade de speckles é suficiente para recuperar a informação.

4.3 Auto-reconfiguração do Feixe Gaussiano Parcialmente Coerente.

Com o objetivo de verificar o comportamento após uma obstrução do speckle gerado por um feixe que coerentemente não possui a propriedade de auto-reconstrução, estudamos o feixe Gaussiano parcialmente coerente. Percebemos que a frequência espacial de qualquer feixe parcialmente coerente depende da coerência espacial, tornando possível, também, aos speckles e autocorrelação relacionados ao feixe Gaussiano possuírem a propriedade de auto-reconfiguração como vimos figura 4.2-1 (B) e (C).

A figura 4.3-1 mostra os perfis transversais do feixe Gaussiano parcialmente coerente, medidos ao longo de diferentes distâncias de propagação: padrão de speckle (A) e sua autocorrelação (B).

Figura 4.3-1 – Resultados experimentais da auto-reconfiguração do feixe.



Fonte: (Autor, 2014)

Observamos que o padrão de “speckle” reconfigura-se da mesma forma que os o padrão “speckle” gerado a partir do feixe Bessel parcialmente coerente. O obstáculo foi o mesmo usado no caso do feixe Bessel parcialmente coerente. Em ambos os casos, os padrões de “speckles” foram formados por uma superposição de ondas planas com vetores de onda aleatórios.

O campo de saída no plano de saída do meio aleatório E_{out} pode ser modelado como uma soma de um grande número de ondas planas cujos vetores de onda possuem direções aleatórias e a amplitude de cada onda plana constante, mas

flutuando aleatoriamente de uma onda para outra. As componentes dos vetores de onda aleatórios sobre o plano $x - z$ originam a seguinte soma de ondas planas:

$$\begin{aligned} E_{out}(k_x, k_z) &= A_1 \exp[-i(xk_{1x} + zk_{1z})] + A_2 \exp[-i(xk_{2x} + zk_{2z})] + \dots \quad (4.1-1) \\ &= \psi_1 + \psi_2 + \dots \end{aligned}$$

A interferência dessas ondas planas corre em pares [46, 47], então, o padrão de intensidade de “speckles” pode ser escrito como:

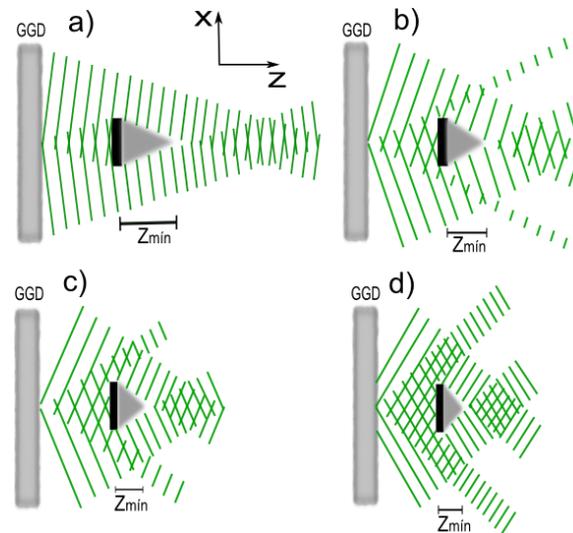
$$P_{out}(z = z_0) = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + I_{12} + I_{13} + I_{23} + \dots, \quad (4.1-2)$$

onde P_1, P_2, P_3, \dots são as intensidades individuais de cada onda plana e $I_{12}, I_{13}, I_{23}, \dots$ são os termos de interferência.

Esta decomposição possibilita a análise do processo complexo de interferência envolvido na formação do padrão de “speckle” como uma interferência de duas ondas por vez. Cada par de ondas planas irá interferir, formando o mesmo padrão de interferência antes e depois da sombra do obstáculo. O tamanho da sombra produzida pelo obstáculo não depende somente do tamanho do obstáculo, mas também da direção de propagação de cada onda plana. No final, todas as contribuições de interferência são somadas e os “speckles” recuperarão o padrão na autocorrelação após um comprimento mínimo de reconfiguração, $Z_{mín}$. O comprimento mínimo da reconfiguração é um comprimento médio de reconfiguração, uma vez que cada par de ondas planas produz diferentes comprimentos das sombras, como ilustrado na figura 4.3-2. Aqui, é importante salientar que a distribuição de “speckles”, antes e após o obstáculo, não é o mesmo.

Um aspecto importante do feixe Bessel coerente em relação a característica de auto-cura é que a reconstrução do feixe depende de como são truncados ou modulados por uma função gaussiana de largura finita, por exemplo. Além disso, a frequência espacial afeta a distância mínima de reconstrução [48]. Já para feixes parcialmente coerentes não é necessário qualquer tipo de modulação ou mesmo que pertençam à classe especial de feixes não difratantes, tal como o Bessel. A distância de reconstrução depende basicamente de quão espacialmente incoerente são os “speckles”.

Figura 4.3-2 – Diferentes comprimentos mínimos de reconfiguração para cada par de ondas planas.



Fonte: (Autor, 2014)

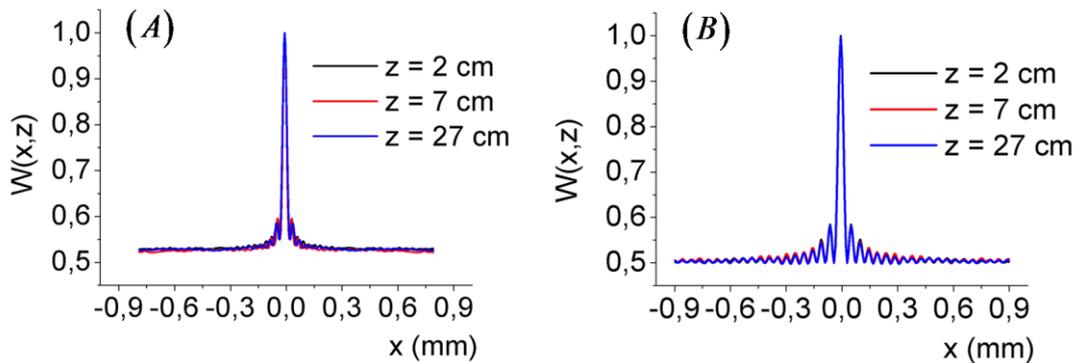
4.4 Estudo dos Perfis das Medidas de Autocorrelação dos Speckles.

Para entendermos melhor a influência do obstáculo no efeito de auto-reconfiguração, estudamos os perfis unidimensionais das autocorrelações dos padrões de “speckles” gerados pelos feixes Bessel e Gaussiano. Traçamos os perfis das referidas medidas com e sem obstáculo durante a propagação.

As figuras 4.4-1 (A) e 4.4-2 (A) mostram os resultados experimentais para o perfil de autocorrelação e as figuras 4.4-1 (B) e 4.4-2 (B) mostram os correspondentes resultados, obtidos através de uma simulação.

Na figura 4.4-1 (A) temos os resultados experimentais do perfil de autocorrelação de um feixe Bessel parcialmente coerente, na ausência de obstáculo. Podemos observar que os perfis não variam ao longo da distância de propagação considerada, embora os “speckles” estejam mudando.

Figura 4.4-1 – Perfis unidimensionais das medidas de autocorrelação ao longo de diferentes distâncias de propagação sem obstáculo para o feixe Bessel parcialmente coerente: experimento (A) e simulação (B).

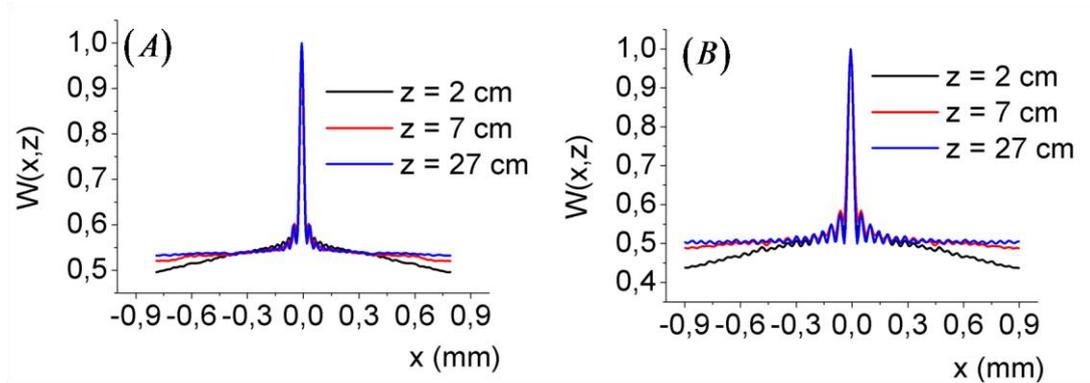


Fonte: (Autor, 2014)

A inserção de um obstáculo opaco circular de diâmetro $d \approx 2 \text{ mm}$ afeta a altura do background nas bordas dos perfis de autocorrelação, como pode ser observado na figura 4.4-2 (A). Entretanto, como ocorre a reconfiguração do padrão de speckle em $z = 27 \text{ cm}$, o background retorna para a configuração original sem obstáculo, como na figura 4.4-1 (A), mantendo o mesmo depois disso.

O obstáculo funciona como um filtro ou janela, reduzindo a altura do background nas extremidades do perfil de autocorrelação. O comprimento de coerência, da ordem de 10^{-2} mm , dado pela largura a meia altura da região central, tem alteração insignificante ao longo da distância de propagação das medidas. Isso acontece porque o comprimento de coerência é proporcional à dimensão média dos speckles, independentemente se alguns deles foram bloqueados. A resolução do padrão [45], ou seja, o número de franjas do padrão, também permanece constante enquanto o campo atravessa o obstáculo.

Figura 4.4-2 – Perfis das medidas de autocorrelação ao longo de diferentes distâncias de propagação com obstáculo para o feixe Bessel parcialmente coerente: experimento (A) e simulação (B).

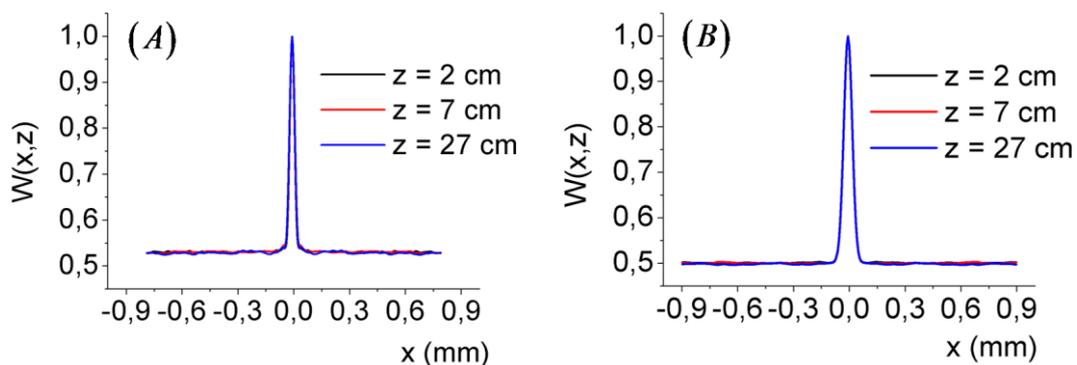


Fonte: (Autor, 2014)

É notável que o feixe Gaussiano parcialmente coerente apresente uma auto-reconfiguração semelhante ao feixe Bessel parcialmente coerente, na mesma distância de propagação. Observamos então, que os feixes parcialmente coerentes auto-reconfiguram seu padrão de speckle, mesmo que coerentemente não sejam auto-reconstrutivos.

As figuras 4.4-3 (A) e 4.4-4 (A) mostram os resultados experimentais para o perfil de autocorrelação e as figuras 4.4-3 (B) e 4.4-4 (B) os correspondentes resultados obtidos com uma simulação.

Figura 4.4-3 – Perfis das medidas de autocorrelação ao longo de diferentes distâncias de propagação sem obstáculo para o feixe Gaussiano parcialmente coerente: experimento (A) e simulação (B).

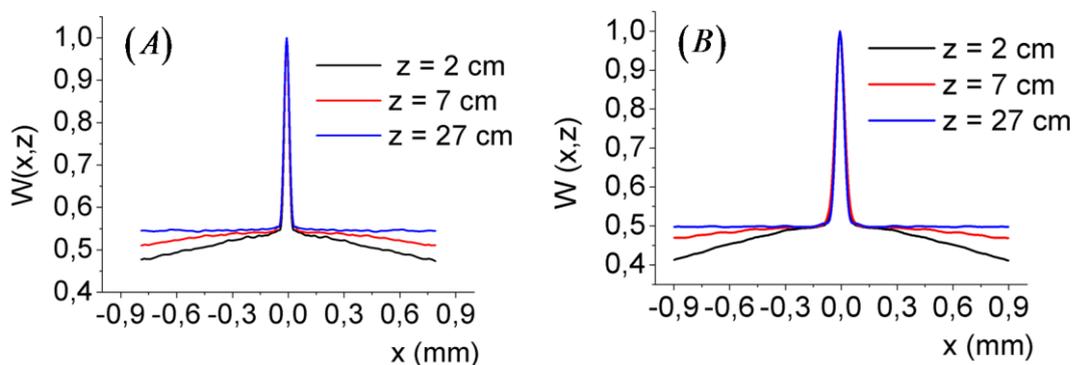


Fonte: (Autor, 2014)

Para ambas os feixes parcialmente coerentes, Gaussiano ou Bessel, Z_{\min} é em torno de 27 cm , caracterizando efeito da auto-reconfiguração. É importante observar que, embora as distribuições de “speckles” não sejam as mesmas antes e depois do obstáculo, os perfis de autocorrelação são exatamente os mesmos. Todas as autocorrelações foram calculadas utilizando uma média de um conjunto de 10 medidas.

A figura 4.4-3 (A) mostra que a configuração experimental produziu um campo de speckle Gaussiano colimado. Para este caso, a inserção de um obstáculo de diâmetro $d \approx 2\text{ mm}$ também afeta a altura do background nas extremidades da imagem de autocorrelação.

Figura 4.4-4 – Perfis das medidas de autocorrelação ao longo de diferentes distâncias de propagação com obstáculo para o feixe Gaussiano parcialmente coerente: experimento (A) e simulação (B).



Fonte: (Autor, 2014)

As simulações numéricas foram feitas utilizando uma matriz com 1024×1024 pixels. Formamos speckles seguindo a receita de Goodman J. W. [41]. Primeiramente geramos uma matriz de fasores aleatórios, um fasor para cada pixel, e então encontramos a transformada de Fourier da matriz, obtendo o campo de speckles no plano de observação. O comprimento de coerência dos “speckles” pode ser controlado simplesmente multiplicando toda a matriz de fase por um fator constante. As simulações numéricas da propagação dos campos de speckles estão em boa concordância com a experiência.

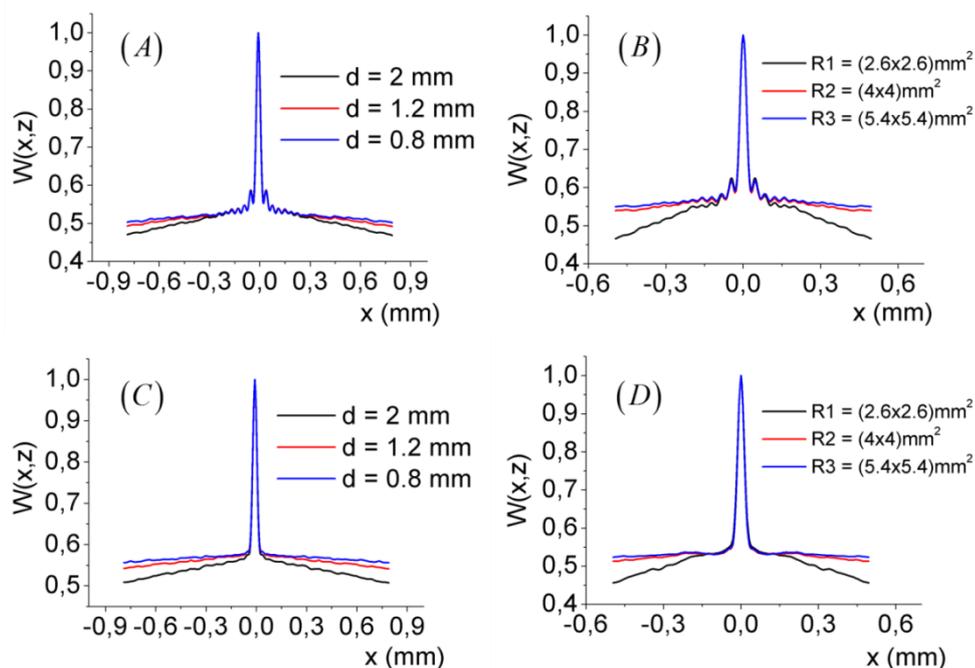
O obstáculo funciona como uma janela w aplicada à intensidade do speckle I antes da autocorrelação,

$$W = (I \cdot w) \otimes (I \cdot w), \quad (4.4-1)$$

onde W é o resultado da autocorrelação, \cdot é o produto usual e \otimes denota a operação de autocorrelação.

Os resultados apresentados na figura 4.4-5 destacam o real significado que as autocorrelações mostraram até aqui.

Figura 4.4-5 – Perfis das medidas experimentais de autocorrelação. Diferentes tamanhos de obstáculos: Bessel (A), Gaussiano (C). Diferentes regiões de interesse: Bessel (B), Gaussiano (D).



Fonte: (Autor, 2014)

Todos os resultados da figura 4.4-5 foram obtidos a uma distância $z = 2$ cm. As figuras 4.4-5 (A) e (C) mostram perfis de autocorrelações para diferentes diâmetros de obstrução d e com uma área de interesse fixa da câmera CCD ($3,5 \times 3,5$) mm^2 . À medida que o diâmetro da obstrução é diminuído, a altura do

background nas extremidades da figura de autocorrelação aumenta, em similaridade com o efeito observado na propagação. Por outro lado, mantendo-se o diâmetro do obstáculo igual em $d \approx 2 \text{ mm}$ e aumentando a área de interesse da CCD, observa-se que a altura do background varia da mesma forma que vimos na propagação.

O efeito de filtragem impresso pelo obstáculo sobre a autocorrelação depende da área relativa entre os speckles bloqueados e não bloqueados. O background é formado pelas medidas de intensidade de speckles que não estão correlacionados, não dando nenhuma contribuição para o perfil. O preço que deve ser pago para diminuir o background é uma redução da resolução das franjas da autocorrelação, para o caso do feixe de Bessel parcialmente coerente, mas a visibilidade é aumentada porque o pico central torna-se mais evidente em relação ao background [45]. Em geral, para a transmissão de imagens através das partículas de espalhamento, por exemplo, a resolução da imagem deve ser reduzida enquanto que a visibilidade é aumentada. Por outro lado, a resolução fica melhor com alto nível de background [49].

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho, realizamos o estudo da propriedade de auto-reconstrução de um feixe Bessel parcialmente coerente. Analisamos o comportamento do padrão de “speckle” gerado pelo referido feixe após ser interceptado por um objeto opaco durante a propagação no espaço livre. Também fizemos um estudo similar com o feixe Gaussiano, para verificarmos o efeito em um feixe coerentemente não-reconstrutivo.

Para realização do trabalho, utilizamos um laser de Argônio operando em um comprimento de onda de 532 nm iluminando hologramas gerados por computador em um modulador espacial de luz (SLM) da Hamamatsu, modelo X10468-01 e os padrões desejados foram capturados por uma câmera CCD.

Mostramos que é possível reconstruir o perfil de um feixe parcialmente coerente após uma obstrução, a partir do padrão de “speckle”, usando a autocorrelação.

Após a observação dos resultados obtidos, descrevemos um efeito que chamamos de auto-reconfiguração, característico de feixes parcialmente coerentes. Demonstramos que esse efeito dá aos feixes parcialmente coerentes uma inesperada robustez contra espalhamento por objetos, superando o feixe Bessel coerente. Observamos que esta robustez é consequência direta das propriedades dos “speckles”, independentemente do tipo de feixe revelado pela autocorrelação.

Este estudo pode ser útil para a armadilha óptica, micro-manipulação, microscopia em meios espalhadores e para geração de imagens através de atmosfera turbulenta.

REFERÊNCIAS

- 1 SOMMERFELD, A. **Mathematical theory of diffraction : based on Mathematische Theorie der Diffraction**. Boston: Birkhäuser, 2004. vii, 157 p. ISBN 0817636048 (alk. paper) 3764336048 (Basel alk. paper).
- 2 DURNIN, J.; MICELI, J. J.; EBERLY, J. H. Diffraction-Free Beams. **Physical Review Letters**, v. 58, n. 15, p. 1499-1501, Apr 13 1987. ISSN 0031-9007.
- 3 DURNIN, J. Exact-Solutions for Nondiffracting Beams .1. The Scalar Theory. **Journal of the Optical Society of America a-Optics Image Science and Vision**, v. 4, n. 4, p. 651-654, Apr 1987. ISSN 0740-3232.
- 4 BOUCHAL, Z. Dependence of Bessel Beam Characteristics on Angular Spectrum Phase Variations. **Journal of Modern Optics**, v. 40, n. 7, p. 1325-1329, Jul 1993. ISSN 0950-0340.
- 5 RUSCHIN, S. Modified Bessel Nondiffracting Beams. **Journal of the Optical Society of America a-Optics Image Science and Vision**, v. 11, n. 12, p. 3224-3228, Dec 1994. ISSN 0740-3232.
- 6 CHAVEZCERDA, S.; MCDONALD, G. S.; NEW, G. H. C. Nondiffracting beams: Travelling, standing, rotating and spiral waves. **Optics Communications**, v. 123, n. 1-3, p. 225-233, Jan 15 1996. ISSN 0030-4018.
- 7 MACDONALD, R. P. et al. Interboard optical data distribution by Bessel beam shadowing. **Optics Communications**, v. 122, n. 4-6, p. 169-177, Jan 1 1996. ISSN 0030-4018.
- 8 TURUNEN, J.; VASARA, A.; FRIBERG, A. T. Propagation Invariance and Self-Imaging in Variable-Coherence Optics. **Journal of the Optical Society of America a-Optics Image Science and Vision**, v. 8, n. 2, p. 282-289, Feb 1991. ISSN 0740-3232.
- 9 FRIBERG, A. T.; VASARA, A.; TURUNEN, J. Partially Coherent Propagation-Invariant Beams - Passage through Paraxial Optical-Systems. **Physical Review A**, v. 43, n. 12, p. 7079-7082, Jun 15 1991. ISSN 1050-2947.
- 10 VELLEKOOP, I. M.; LAGENDIJK, A.; MOSK, A. P. Exploiting disorder for perfect focusing. **Nature Photonics**, v. 4, n. 5, p. 320-322, May 2010. ISSN 1749-4885.

- 11 KATZ, O. et al. Focusing and compression of ultrashort pulses through scattering media. **Nature Photonics**, v. 5, n. 6, p. 372-377, Jun 2011. ISSN 1749-4885.
- 12 VELLEKOOP, I. M.; AEGERTER, C. M. Scattered light fluorescence microscopy: imaging through turbid layers. **Optics Letters**, v. 35, n. 8, p. 1245-1247, Apr 15 2010. ISSN 0146-9592.
- 13 VAN PUTTEN, E. G. et al. Scattering Lens Resolves Sub-100 nm Structures with Visible Light. **Physical Review Letters**, v. 106, n. 19, May 13 2011. ISSN 0031-9007.
- 14 CHOI, Y. et al. Overcoming the Diffraction Limit Using Multiple Light Scattering in a Highly Disordered Medium. **Physical Review Letters**, v. 107, n. 2, Jul 6 2011. ISSN 0031-9007.
- 15 BERTOLOTTI, J. et al. Non-invasive imaging through opaque scattering layers. **Nature**, v. 491, n. 7423, p. 232-234, Nov 8 2012. ISSN 0028-0836.
- 16 YANG, X.; PU, Y.; PSALTIS, D. Imaging blood cells through scattering biological tissue using speckle scanning microscopy. **Optics Express**, v. 22, n. 3, p. 3405-3413, Feb 10 2014. ISSN 1094-4087.
- 17 GARCES-CHAVEZ, V. et al. Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam. **Nature**, v. 419, n. 6903, p. 145-147, Sep 12 2002. ISSN 0028-0836.
- 18 TSAMPOULA, X. et al. Femtosecond cellular transfection using a nondiffracting light beam. **Applied Physics Letters**, v. 91, n. 5, Jul 30 2007. ISSN 0003-6951.
- 19 DING, Z. H. et al. High-resolution optical coherence tomography over a large depth range with an axicon lens. **Optics Letters**, v. 27, n. 4, p. 243-245, Feb 15 2002. ISSN 0146-9592.
- 20 FAHRBACH, F. O.; SIMON, P.; ROHRBACH, A. Microscopy with self-reconstructing beams. **Nature Photonics**, v. 4, n. 11, p. 780-785, Nov 2010. ISSN 1749-4885.
- 21 FAHRBACH, F. O.; ROHRBACH, A. Propagation stability of self-reconstructing Bessel beams enables contrast-enhanced imaging in thick media. **Nature Communications**, v. 3, Jan 2012. ISSN 2041-1723.

- 22 SALEH, B. E. A.; TEICH, M. C. **Fundamentals of photonics**. New York: Wiley, 1991. xviii, 966 p. ISBN 0471839655.
- 23 EVANS, L. C. **Partial differential equations**. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1998. xvii, 662 p. ISBN 0821807722 (alk. paper) 1065-7339 ;.
- 24 AKHMANOV, S. A.; NIKITIN, S. Y. **Physical optics**. Oxford New York: Clarendon Press ; Oxford University Press, 1997. xiii, 488 p. ISBN 0198517955 (hbk.).
- 25 GOODMAN, J. W. **Introduction to Fourier optics**. 3rd. Englewood, Colo.: Roberts & Co., 2005. xviii, 491 p. ISBN 0974707724 9780974707723.
- 26 BUDINICH, P.; TRAUTMAN, A. **The spinorial chessboard**. Berlin ; New York: Springer-Verlag, 1988. viii, 128 p. ISBN 0387190783 (U.S. pbk.).
- 27 HUYGENS, C. **Traité de la lumière**. Paris, : Gauthier-Villars et cie, 1920. x, 155 p.
- 28 GEL'FAND, I. M.; SHEN, A. **Algebra**. Boston: Birkhäuser, 1993. 153 p. ISBN 0817637370 (acid-free) 0817636773 (pbk. acid free) 3764337370 (acid-free) 3764336773 (pbk. acid-free).
- 29 BRACEWELL, R. N. **The Fourier transform and its applications**. 2nd. New York: McGraw-Hill, 1986. xx, 474 p. ISBN 0070070156 0070070164 (solutions manual).
- 30 _____. **The Fourier transform and its applications**. 3rd. Boston: McGraw Hill, 2000. xx, 616 p. ISBN 0073039381 (acid-free paper).
- 31 MONTGOME.WD. Self-Imaging Objects of Infinite Aperture. **Journal of the Optical Society of America**, v. 57, n. 6, p. 772-&, 1967. ISSN 0030-3941.
- 32 BORN, M.; WOLF, E. **Principles of optics : electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light**. 6th. Oxford ; New York: Pergamon Press, 1980. xxvii, 808 p. ISBN 0080264816 (pbk.) 0080264824.
- 33 MANDEL, L.; WOLF, E. **Optical coherence and quantum optics**. Cambridge ; New York: Cambridge University Press, 1995. xxvi, 1166 p. ISBN 0521417112 (hardback).
- 34 GOODMAN, J. W. Some Fundamental Properties of Speckle. **Journal of the Optical Society of America**, v. 66, n. 11, p. 1145-1150, 1976. ISSN 0030-3941.

- 35 CREATH, K. Phase-Shifting Speckle Interferometry. **Applied Optics**, v. 24, n. 18, p. 3053-3058, 1985. ISSN 0003-6935.
- 36 DAINTY, J. C. **Laser speckle and related phenomena**. 2nd enl. Berlin ; New York: Springer-Verlag, 1984. xv, 342 p. ISBN 0387131698 (U.S. pbk.).
- 37 EXNER, K. K., *S. Acad. Wiss.*, v. 76, 1877.
- 38 ALLEN, L.; JONES, D. G. C. An Analysis of the Granularity of Scattered Optical Maser Light. **Physics Letters**, v. 7, n. 5, p. 321-323, 1963.
- 39 OLIVER, B. M. Sparkling Spots and Random Diffraction. **Proceedings of the Ieee**, v. 51, n. 1, p. 220-&, 1963. ISSN 0018-9219.
- 40 GOODMAN, J. W. Statistical Properties of Laser Speckle Patterns. In: (Ed.). **Laser Speckle and Related Phenomena**, v.10.1007/BFb0111434, 1975. cap. 2, p.9-75.
- 41 GOODMAN, J. W. **Speckle phenomena in optics : theory and applications**. Englewood, Colo.: Roberts & Co., 2007. xvi, 387 p. ISBN 0974707791 9780974707792.
- 42 GASVIK, K. J. **Optical Metrology**. 3^a. 2002.
- 43 KIRK, J. P.; JONES, A. L. Phase-Only Complex-Valued Spatial Filter. **Journal of the Optical Society of America**, v. 61, n. 8, p. 1023-&, 1971. ISSN 0030-3941.
- 44 GERCHBER.RW; SAXTON, W. O. Practical Algorithm for Determination of Phase from Image and Diffraction Plane Pictures. **Optik**, v. 35, n. 2, p. 237-&, 1972. ISSN 0030-4026.
- 45 VIDAL, I. et al. Effects of pseudothermal light source's transverse size and coherence width in ghost-interference experiments. **Optics Letters**, v. 34, n. 9, p. 1450-1452, May 1 2009. ISSN 0146-9592.
- 46 SINHA, U. et al. Ruling Out Multi-Order Interference in Quantum Mechanics. **Science**, v. 329, n. 5990, p. 418-421, Jul 23 2010. ISSN 0036-8075.
- 47 HICKMANN, J. M.; FONSECA, E. J. S.; JESUS-SILVA, A. J. Born's rule and the interference of photons with orbital angular momentum by a triangular slit. **Epl**, v. 96, n. 6, Dec 2011. ISSN 0295-5075.

- 48 LITVIN, I. A.; MCLAREN, M. G.; FORBES, A. A conical wave approach to calculating Bessel-Gauss beam reconstruction after complex obstacles. **Optics Communications**, v. 282, n. 6, p. 1078-1082, Mar 15 2009. ISSN 0030-4018.
- 49 C. R. ALVES, A. J. J.-S., AND E. J. S. FONSECA. To be published elsewhere 2014.