

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA DA MATÉRIA  
CONDENSADA

EDSON VINÍCIUS DE PAULA NOIA

# **Modelos Não-Lineares para Crescimento de Capital**

Maceió - AL

Fevereiro - 2019

Edson Vinícius de Paula Noia

## **Modelos Não-Lineares para Crescimento de Capital**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Física da Matéria Condensada do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física da Matéria Condensada.

Universidade Federal de Alagoas – UFAL

Instituto de Física - IF-UFAL

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Prof. Dr. Iram Marcelo Gléria

Maceió - AL

21 de fevereiro de 2019

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

N782m Noia, Edson Vinícius de Paula.

Modelos não-lineares para crescimento de capital / Edson Vinícius de Paula  
Noia. – 2020.  
55 f. : il. color.

Orientador: Iram Marcelo Gléria.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Programa de Pós-Graduação em Física da Matéria Condensada. Maceió, 2019.

Bibliografia: f. 53-55.

1. Equações diferenciais - Equações com retardamento. 2. Desenvolvimento econômico. 3. Modelo predador-presa. I. Título.

CDU:514.745.8

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

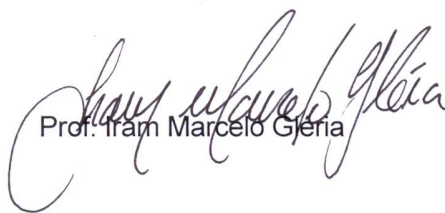
***“Modelos não-lineares para crescimento de capital”***

por

**Edson Vinicius de Paula Noia**

A Banca Examinadora composta pelos professores Iram Marcelo Gléria (orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Alexandre Manoel de Moraes Carvalho, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas e Adhemar Ranciaro Neto, Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade Federal de Alagoas consideram o candidato aprovado com grau “A”.

Maceió, 21 de fevereiro de 2019



Prof. Iram Marcelo Gléria



Prof. Alexandre Manoel de Moraes Carvalho



Prof. Adhemar Ranciaro Neto

# Agradecimentos

Mais uma etapa da minha vida acadêmica vai chegando ao fim e no meio deste processo várias coisas aconteceram comigo e muitas pessoas foram importantes para que eu conseguisse finalizar este trabalho, de alguma forma eu acabarei sendo ingrato e esquecendo de mencionar alguém. Assim, obrigado a todos que me acompanharam até aqui. Porém, algumas pessoas são marcantes e base para minha sanidade.

Primeiramente gostaria de agradecer aos meus pais Edson e Flávia pelo apoio na decisão de mudar de estado e me aventurar numa nova cidade. Sempre foram meus maiores apoiadores e se eu conseguir êxito em algo na vida é por causa deles. À minha namorada Marina por suportar os sumiços e a distância, pela paciência com meus lamentos sobre Maceió e pelo apoio em seguir nesse caminho.

Para sobreviver à essa cidade eu precisei da ajuda de várias pessoas. Obrigado Carol por ter me ajudado na adaptação durante os primeiros meses de curso, aos amigos que fiz aqui e as boas conversas resultantes da espera interminável na fila do RU. Alysson, Demitry, Everton, Ícaro e Julio, obrigado por me fazerem parte do grupo.

A todo o corpo docente do IF-UFAL, sempre prestativos e preocupados com a formação dos seus estudantes de pós-graduação. Especialmente ao professor Iram, que aceitou me orientar e teve uma paciência e prestatividade que poderiam ser mencionadas em livros religiosos. Perdão pelos vacilos e obrigado.

À CAPES pelo fomento, o que possibilitou este resultado de dois anos de trabalho.

Enfim, foi um caminho curto mas intenso. Desejo o melhor a todos.

Muito Obrigado!

# Resumo

Neste trabalho propomos e analisamos modelos matemáticos não-lineares para o crescimento de capital. Abordamos este tema a partir de duas situações: na primeira, o capital e a força de trabalho possuem uma dinâmica cooperativa; na segunda, assumimos que a relação capital-trabalho é dada por uma dinâmica do tipo predador-presa em que o capital se alimenta da força de trabalho. Para isto fizemos uso de equações diferenciais com retardo para a modelagem e, através de análises numéricas adaptadas para este tipo de equação, tivemos como foco o estudo dos pontos de equilíbrio, bifurcações e regime caótico. Tomando o delay como parâmetro de controle, um sistema apresentou transição para o caos via duplicação de período.

**Palavras Chave:** Equações Diferenciais com Atraso, Crescimento Econômico, Modelo Predador-Presa

# Abstract

In this work, we propose and analyse nonlinear mathematical models for capital growth. We approach this subject from two situations: first, the capital and the labor force have a cooperative dynamic; secondly, we assume that the relation capital-labor force is given by a predator-prey type dynamic which the capital feeds on labor force. For this, we make use of delay differential equations for modeling and through adapted numerical analysis for this kind of equations, we were focused on study the fixed points, bifurcations and chaotic regime. Assuming the delay as control parameter, a sistem presented chaos transitions by period doubling.

**Keywords:** Delay Differential Equations, Economic Growth, Predador-Prey Model

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Associação entre PIB <i>per capita</i> e expectativa de vida no ano de 2016.	10
Figura 2 – Associação entre PIB <i>per capita</i> e expectativa de vida na África do Sul, Argentina, Brasil, China, Coréia do Sul e Estados Unidos, 2016. . . . .	11
Figura 3 – Evolução do PIB <i>per capita</i> na África do Sul, Argentina, Brasil, China, Coréia do Sul e Estados Unidos, 1990-2016. . . . .	11
Figura 4 – Os efeitos de um crescimento da taxa de poupança $s$ sobre o investimento.	14
Figura 5 – Espaço de fase do modelo predador-presa. . . . .	16
Figura 6 – Série temporal do modelo predador-presa . . . . .	16
Figura 7 – Curva de Phillips linearizada. . . . .	18
Figura 8 – Pêndulo simples. . . . .	21
Figura 9 – Sistema massa-mola. . . . .	22
Figura 10 – Espaço de fase do sistema massa-mola 2.9. . . . .	22
Figura 11 – Diagrama de bifurcação sela-nó. . . . .	29
Figura 12 – Diagrama de bifurcação transcritical. . . . .	30
Figura 13 – Diagramas de bifurcação de forquilha. . . . .	31
Figura 14 – Diagramas de bifurcação de Hopf. . . . .	32
Figura 15 – Diagrama de bifurcação do mapa gaussiano com $b = 7.5$ e $x_0 = 0$ . . . .	34
Figura 16 – Série temporal da força de trabalho $L$ . . . . .	50
Figura 17 – Retratos de fase para os sistema 4.12. Parâmetros utilizados: $b = 3.5, c = 2.5, h = 0.3, r = 1.75, s = 1.5, d = 1.0, a = 1.0, e = 2.0, f = 1.0, g = 2.0$ e $\tau_1 = 3.0, 5.0, 10.0, 20.0, \tau_2 = 0.0$ . . . . .	51
Figura 18 – Diagrama de bifurcação do capital. . . . .	52



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>10</b>
<b>1.1</b>	<b>Modelo de Solow</b>	<b>12</b>
<b>1.2</b>	<b>Modelo de Goodwin</b>	<b>15</b>
1.2.1	As Equações de Lotka-Volterra	15
1.2.2	Modelo de Goodwin	16
<b>1.3</b>	<b>Motivação</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>SISTEMAS DINÂMICOS</b>	<b>20</b>
<b>2.1</b>	<b>O Espaço de Fases</b>	<b>21</b>
<b>2.2</b>	<b>Pontos fixos e Estabilidade</b>	<b>23</b>
2.2.1	Estabilidade Linear	24
2.2.2	Classificação dos pontos fixos	25
2.2.3	Linearização e Estabilidade Não-Linear	26
2.2.4	Ciclos Limite	27
<b>2.3</b>	<b>Bifurcações</b>	<b>28</b>
2.3.1	Bifurcação Sela-nó	29
2.3.2	Bifurcação Transcrítica	30
2.3.3	Bifurcação de Forquilha	30
2.3.4	Bifurcação de Hopf	31
<b>2.4</b>	<b>Caos</b>	<b>33</b>
<b>3</b>	<b>EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM RETARDO</b>	<b>35</b>
<b>3.1</b>	<b>Estabilidade e Linearização de EDRs</b>	<b>36</b>
<b>3.2</b>	<b>Método Runge-Kutta para EDRs</b>	<b>41</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	<b>43</b>
<b>4.1</b>	<b>Modelos</b>	<b>43</b>
4.1.1	Modelo CLR	43
4.1.2	Modelo predador-presa	45
<b>4.2</b>	<b>Alguns resultados analíticos</b>	<b>46</b>
4.2.1	Modelo CLR - Caso 1	46
4.2.2	Modelo CLR - Caso 2	47
4.2.3	Modelo predador-presa	48
<b>4.3</b>	<b>Alguns Resultados Numéricos</b>	<b>49</b>
<b>4.4</b>	<b>Apontamentos</b>	<b>52</b>

<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>54</b>
--------------------------	-----------

# 1 Introdução

Crescimento econômico, inflação, recessão, e políticas econômicas são termos que costumam frequentar os noticiários e o cotidiano das sociedades modernas. O campo de estudo que possui o objetivo entender esses fenômenos econômicos é chamado de macroeconomia. Por que alguns países possuem uma alta taxa de inflação enquanto outros mantêm preços estáveis? Por que determinados países apresentaram um grande crescimento econômico nos últimos anos? Quais as políticas públicas necessárias para que o país acelere sua economia e saia da crise financeira? A macroeconomia se ocupa de responder perguntas deste tipo.

O padrão de vida de uma sociedade é um reflexo do seu nível econômico e pode ser avaliados através dos seguintes indicadores: expectativa de vida, mortalidade infantil, níveis educacionais, níveis de criminalidade e outras medidas diretas de bem-estar, diretamente ligadas à quantidade de riqueza que um país possui. Para exemplificar esta afirmação apresentamos as Figuras 1 e 2. Na primeira apresentamos um gráfico da expectativa de vida versus o Produto Interno Bruto *per capita* (PIB *per capita*) dos países listados no World Bank [1]. Na segunda destacamos os pontos referentes à África do Sul, Argentina, Brasil, China, Coréia do Sul e Estados Unidos. Os dados apresentados nas Figuras indicam que países ricos geralmente possuem uma expectativa de vida maior do que aqueles com PIB *per capita* menores. O consumo das famílias também é um forte indicador da qualidade de vida de uma sociedade e os dados do World Bank também mostram que quanto maior o PIB *per capita*, maior o consumo.

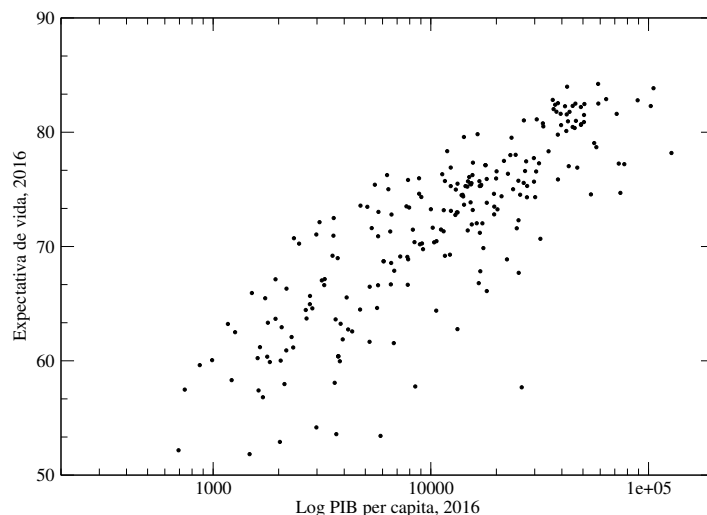


Figura 1 – Associação entre PIB *per capita* e expectativa de vida no ano de 2016.

Fonte: Autor

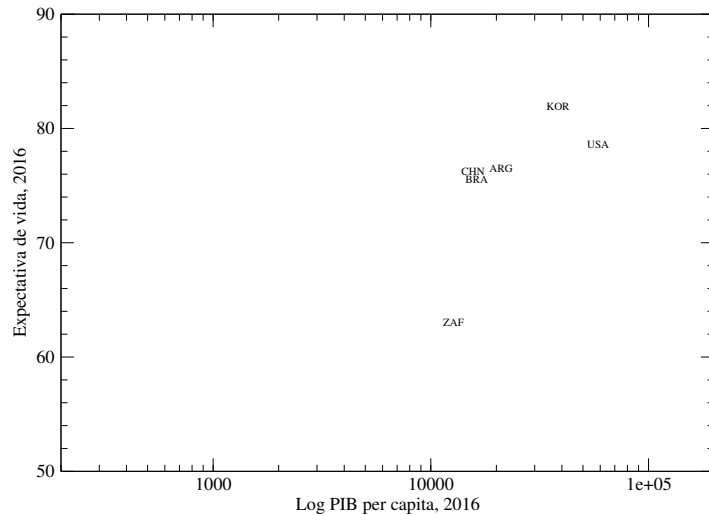


Figura 2 – Associação entre PIB *per capita* e expectativa de vida na África do Sul, Argentina, Brasil, China, Coréia do Sul e Estados Unidos, 2016.

Fonte: Autor

Manter um crescimento econômico estável por um longo período de tempo é um dos fatores primordiais para que um país apresente melhoras no padrão de vida de sua população. A Figura 3 apresenta a evolução temporal do PIB per capita dos países destacados anteriormente entre os anos de 1990 e 2016 e serve de ilustração sobre o sucesso das economias desses países.

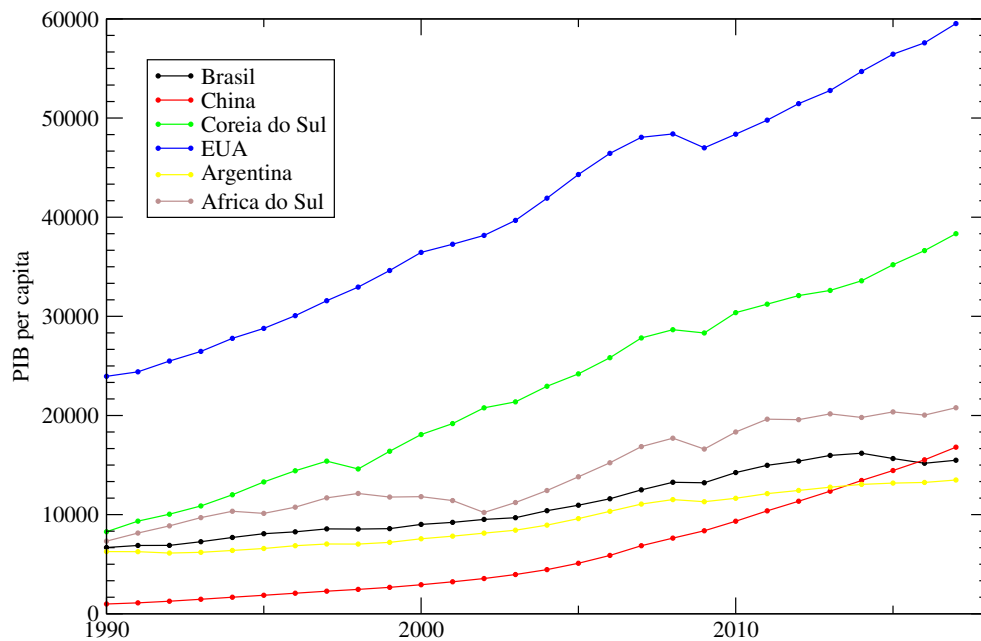


Figura 3 – Evolução do PIB *per capita* na África do Sul, Argentina, Brasil, China, Coréia do Sul e Estados Unidos, 1990-2016.

Fonte: Autor

Em 1990 o Brasil e a Argentina possuíam economias mais prósperas do que a China e estavam no mesmo patamar que a Coreia do Sul. Em 2016, os dois países da América do Sul foram ultrapassados pela China, enquanto a Coreia do Sul apresenta um desempenho pelo menos duas vezes maior do que os latino-americanos.

Os fenômenos e questões que apresentamos até aqui são centrais não só para a teoria do crescimento econômico, mas para a macroeconomia em si. O ponto de partida para a análise destes problemas é o modelo de Solow-Swan, ou, simplesmente, o modelo de Solow. O modelo introduzido Robert Solow e Trevor Swan em 1956 [2, 3] é reconhecidamente um dos mais importantes na teoria do crescimento econômico e contribuiu para que Solow fosse laureado com prêmio Nobel de economia em 1987. Mesmo modelos que discordam do modelo de Solow são melhores entendidos quando comparados com ele. Portanto, compreender o modelo de Solow é essencial para entender teorias de crescimento [4].

## 1.1 Modelo de Solow

O modelo de Solow foi proposto com o intuito de demonstrar como o crescimento do estoque de capital ( $C$ ), o crescimento da força de trabalho ( $L$ ) e os avanços tecnológicos ( $A$ ) interagem e afetam uma economia. Neste modelo, a oferta de bens é representada por uma função produção da forma

$$Y(t) = F(C(t), L(t)A(t)), \quad (1.1)$$

onde  $t$  denota o tempo.

É importante notar que a função produção não depende diretamente do tempo e só apresenta evolução temporal se alguma das variáveis  $C(t)$ ,  $L(t)$ , ou  $A(t)$  apresentar variação temporal. O produto  $L(t)A(t)$  pode ser entendido como a força de trabalho efetiva, ou trabalhador efetivo, onde o avanço tecnológico atua como um aperfeiçoador do trabalho.

O modelo assume que a função produção  $Y(t)$  possui retornos constantes de escala. Isto é, se multiplicarmos o estoque de capital e a força de trabalho efetiva por  $z$ , também multiplicamos o montante de produção por  $z$

$$zY(t) = F(zC(t), zL(t)A(t)); \quad z \geq 0. \quad (1.2)$$

Esta propriedade da função produção nos permite analisar todas as quantidades de uma economia de acordo com o tamanho da força de trabalho. Tomando  $z = 1/LA$  na Equação 1.1, temos

$$\frac{Y(t)}{L(t)A(t)} = F\left(\frac{C(t)}{L(t)A(t)}, 1\right), \quad (1.3)$$

que nos leva a

$$y = f(c), \quad (1.4)$$

onde  $y = Y/LA$  é a produção por força de trabalho efetiva, e  $c = C/LA$  é o estoque de capital por unidade de força de trabalho efetiva. Deste modo, o tamanho da economia não afeta a relação entre produção por trabalhador efetivo e capital por trabalhador efetivo.

Outras condições que devem ser satisfeitas pela forma intensiva da função produção  $f(c)$ , são:  $f(0) = 0$ ,  $f'(c) > 0$ ,  $f''(c) < 0$ . Realizando a derivada  $\partial F(C/LA)/\partial C = f'(c)$ , obtemos a produtividade marginal do capital. Além destas condições,  $f(c)$  deve satisfazer as condições de Inada:  $\lim_{c \rightarrow 0} f'(c) = \infty$ ,  $\lim_{c \rightarrow \infty} f'(c) = 0$  [4].

O crescimento da força de trabalho e da tecnologia é realizado a taxas constantes e é descrito pelas seguintes equações

$$\frac{dL}{dt} \equiv \dot{L} = nL(t), \quad (1.5)$$

$$\frac{dA}{dt} \equiv \dot{A} = gA(t), \quad (1.6)$$

onde  $n$  e  $g$  são parâmetros exógenos - produzidos por fatores externos. Tomando  $L_0$  como o valor inicial da força de trabalho e  $A_0$  o valor inicial da tecnologia, as soluções das Equações 1.5 e 1.6 são respectivamente  $L(t) = L_0 e^{nt}$  e  $A(t) = A_0 e^{gt}$ .

A produção é dividida entre consumo e investimento. A parte designada a investimentos é denotada pela constante exógena  $s$ . De modo que uma unidade de produção empregada em investimento produz uma unidade nova de capital, que a deprecia em uma taxa  $d$ . Deste modo, a equação de evolução do capital é dada por

$$\dot{C}(t) = sY(t) - dC(t). \quad (1.7)$$

Derivando  $c = C/LA$  no tempo, temos

$$\dot{c}(t) = \frac{\dot{C}(t)}{L(t)A(t)} - \frac{C(t)}{L(t)A(t)} \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} - \frac{C(t)}{L(t)A(t)} \frac{\dot{A}(t)}{A(t)}. \quad (1.8)$$

Das Equações 1.5 e 1.6, temos que  $\dot{L}/L$  e  $\dot{A}/A$  são  $n$  e  $g$ , respectivamente.  $\dot{C}$  é dado pela Equação 1.7 e  $C/LA$  é simplesmente  $c$ . Substituindo estes termos na Equação 1.8, temos

$$\dot{c}(t) = sy(t) - (n + g + d)c(t). \quad (1.9)$$

Por conseguinte, a evolução temporal do estoque de capital por unidade de trabalho efetivo é dada por uma diferença entre dois termos. O primeiro termo do lado direito da equação,  $sy(t)$ , é uma multiplicação entre a produção por trabalho efetivo e a fração desta produção que é investida: é o investimento de fato. O segundo termo,  $(n + g + d)c(t)$ , nos informa quanto investimento deve ser feito para que o capital continue existindo, chamamos de investimento de equilíbrio. Como o capital existente deprecia com o tempo,  $dc(t)$ , é necessário um investimento para que este capital seja substituído e impeça a diminuição no

estoque. A força de trabalho efetivo cresce a taxa constante  $(n + g)$ , então um investimento que mantém o estoque de capital  $C(t)$  constante não é suficiente para manter o estoque de capital por trabalho efetivo  $c(t)$  constante. O termo  $(n + g)c$  informa quanto deve ser investido para que  $c(t)$  se mantenha constante enquanto a força de trabalho efetivo aumenta.

Quando o investimento por trabalhador efetivo é maior do que o investimento de equilíbrio,  $c$  cresce. Caso o investimento de equilíbrio seja maior,  $c$  diminui. Se possuírem valores iguais,  $c$  é constante.

Uma vez que  $y(t) = f(c(t))$  e  $f(0) = 0$ , para  $c = 0$ , o investimento de fato e o investimento de equilíbrio são iguais. De acordo com a condição de Inada,  $f'(c)$  deve ser grande a medida que  $c$  tende a zero. Portanto a curva que representa  $sf(c)$  está acima da curva que representa  $(n + g + d)c$  para pequenos valores de capital, significando que o investimento é maior do que o investimento de equilíbrio neste regime. Também da condição de Inada, temos que  $f(c)$  tende a zero quando  $c$  tende a infinito, de modo que estas curvas eventualmente devem se cruzar. A condição  $f''(c) < 0$  garante que esta intersecção ocorra apenas uma vez para  $c > 0$ . O ponto  $c$  em que estas curvas se cruzam é chamado de ponto crítico e é denotado por  $c^*$ .

Estar no ponto de equilíbrio  $c^*$  significa que todo o investimento é igual ao investimento de equilíbrio, com o capital está estagnado. A estratégia mais comum para que ocorra um crescimento balanceado do estoque de capital por força de trabalho efetiva é o ajuste da taxa de poupança  $s$ , ilustrado na Figura 4

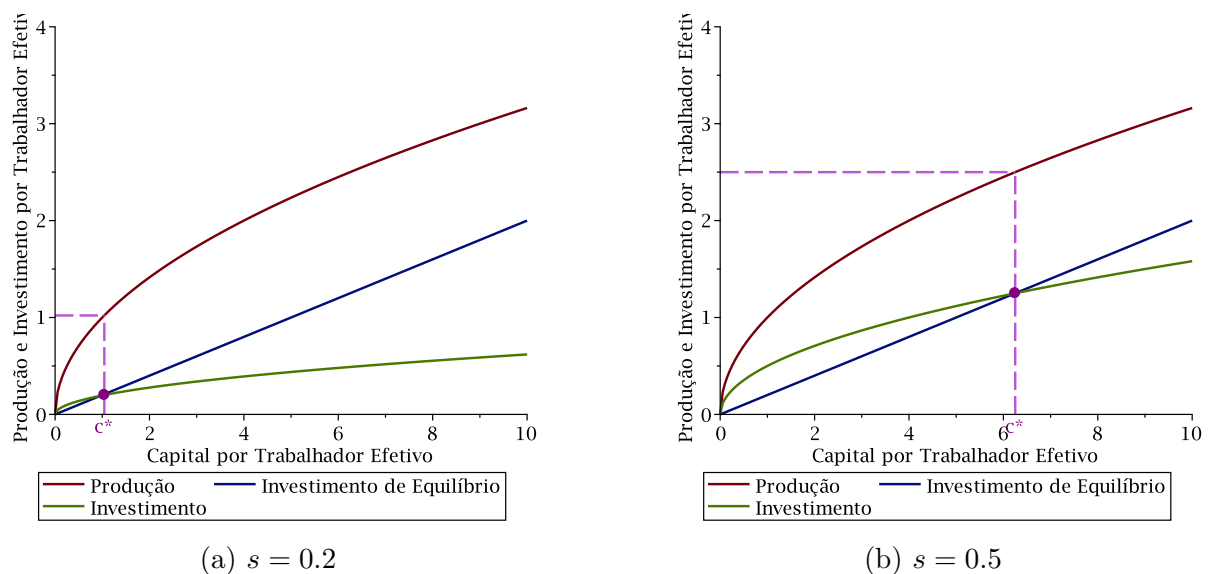


Figura 4 – Os efeitos de um crescimento da taxa de poupança  $s$  sobre o investimento.

Fonte: Autor

Na Figura 4a,  $s = 0.2$  e o ponto de equilíbrio é  $c^* = 1.0$  enquanto que na Figura 4b a taxa de poupança  $s = 0.50$  e o ponto de equilíbrio é  $c^* = 6.25$ . Mover o ponto de equilíbrio para a direita do gráfico significa adiar o ponto de estagnação da economia, fazendo com que o estoque de capital por trabalhador efetivo esteja sempre crescendo de maneira balanceada. Na próxima seção apresentamos um outro modelo sobre crescimento de capital mas que parte de premissas diferentes das que Solow partiu e analisa outras facetas da economia.

## 1.2 Modelo de Goodwin

Em 1967, Richard Goodwin propôs uma nova abordagem para a origem dos ciclos de crescimento. As equações apresentadas por Goodwin tratavam da relação entre a taxa de emprego e a participação dos trabalhadores na renda nacional, ou seja, da relação conflituosa entre os trabalhadores e os donos do capital. A importância do modelo de Goodwin se encontra na aparição de uma dinâmica do tipo predador-presa Lotka-Volterra, onde de acordo com o autor [5] “o problema da simbiose de duas populações - parcialmente complementares, parcialmente hostis - é útil no entendimento das contradições dinâmicas do capitalismo, especialmente quando postas numa forma mais ou menos marxista.”

### 1.2.1 As Equações de Lotka-Volterra

No meio da década de 1920, logo após a Primeira Guerra Mundial, observou-se que a concentração de uma certa espécie de peixe presente no Mar Adriático era maior do que nos anos anteriores à guerra. A hostilidade entre Áustria e Itália fez com que a atividade pesqueira fosse praticamente interrompida durante os anos de conflito. Assim chamou atenção o fato de que uma espécie de peixe foi beneficiada pela ausência de pesca enquanto que presa, de outra espécie, foi prejudicada.

Volterra debruçou-se sobre este problema e assumiu que a taxa de crescimento da população de presas  $x$ , na ausência de predadores, é dada por uma constante positiva  $a$ . A presença da população de predadores  $y$  provoca um decréscimo linear de acordo com uma taxa  $b$ . Estas afirmações nos levam a

$$\dot{x} = (a - by)x; \quad a, b \geq 0. \quad (1.10)$$

Por outro lado, a ausência de presas faz com que a população de predadores seja nula. Isto leva a uma constante de decaimento  $c$  e a interação entre as populações neste caso é dada de acordo com uma taxa  $d$ . Temos então

$$\dot{y} = (-c + dx)y; \quad c, d \geq 0. \quad (1.11)$$



Unindo as Equações 1.10 e 1.11, temos o sistema de equações diferenciais ordinárias que representam o clássico modelo de Lotka-Volterra

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (a - by)x \\ \dot{y} &= (-c + dx)y\end{aligned}\quad (1.12)$$

Dados os valores iniciais,  $x(t = 0) = x_0$  e  $y(t = 0) = y_0$ , podemos desenhar as Figuras 5 e 6, que são o espaço de fase e a série temporal do modelo predador-presa, respectivamente. Nelas podemos observar a presença de oscilações, que ocorrem devido à dependência da população e do seu crescimento líquido.

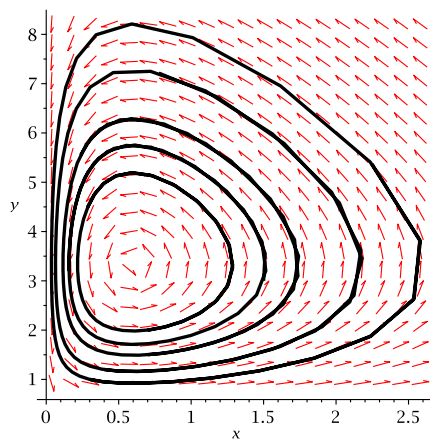


Figura 5 – Espaço de fase do modelo predador-presa.

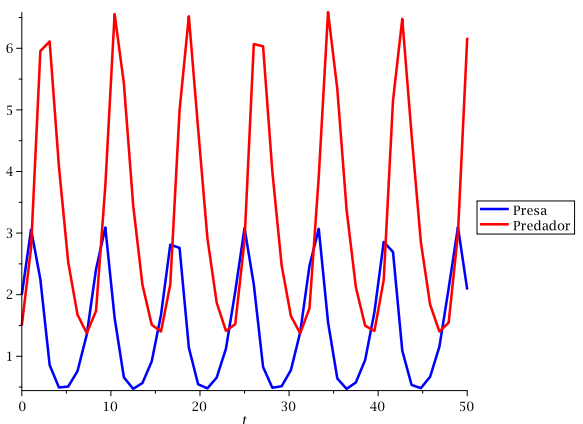


Figura 6 – Série temporal do modelo predador-presa

Fonte: Autor

### 1.2.2 Modelo de Goodwin

De acordo com Goodwin [5] as cinco suposições descritas a seguir foram adotadas por conveniência

- (a) crescimento estável do nível tecnológico;
- (b) crescimento estável da força de trabalho;
- (c) apenas dois fatores de produção, capital e força de trabalho;
- (d) todas as quantidades são reais e líquidas;
- (e) todos os salários são consumidos e todo o lucro é investido.

Estas duas são de um tipo mais empírico, e discutível

- (f) uma razão capital-produção é constante;

(g) uma taxa de salários real que cresce nas vizinhanças do pleno emprego.

A partir destas afirmações podemos construir as equações que compõem o modelo. As variáveis utilizadas são

- $q$  é a produção;
- $k$  é o capital;
- $w$  é a taxa salarial;
- $a = a_0 \exp^{\alpha t}$  é a produtividade,  $\alpha$  é constante;
- $n = n_0 \exp^{\beta t}$  é a força de trabalho,  $\beta$  é constante;
- $\sigma$  é a razão capital-produção;
- $w/a$  é a participação dos trabalhadores na produção e o lucro dos capitalistas é  $p = 1 - w/a$ ;
- Lucro = poupança = investimento =  $\dot{k} = (1 - w/a)q$ ;
- Taxa de lucro =  $\dot{k}/k = \dot{q}/q = (1 - w/a)/\sigma$ ;
- $l = q/a$  é a empregabilidade.

Realizando uma derivada logarítmica em relação ao tempo da razão  $q/l$ , temos

$$\frac{d}{dt} \left( \ln \frac{q}{l} \right) = \frac{\dot{q}}{q} - \frac{\dot{l}}{l} = \frac{\dot{a}}{a} = \alpha.$$

Portanto,

$$\frac{\dot{l}}{l} = \frac{\dot{q}}{q} - \alpha = \frac{1 - w/a}{\sigma} - \alpha. \quad (1.13)$$

Chamaremos a participação dos trabalhadores na produção de  $u = w/a$  e a taxa de empregabilidade de  $v = l/n$ . Substituindo estas variáveis na Equação 1.13, obtemos

$$\dot{v} = v \left[ \left( \frac{1}{\sigma} - (\alpha + \beta) \right) - \frac{u}{\sigma} \right]. \quad (1.14)$$

Para obter a segunda equação que compõe o modelo partimos da suposição (g), que pode ser escrita como

$$\dot{w}/w = f(v)$$

Goodwin utiliza uma aproximação linear da curva de Phillips para representar esta função  $f(v)$ , que podemos observar o seu comportamento na Figura 7. Portanto, a taxa salarial  $f(v)$  cresce indefinidamente à medida que o sistema se aproxima do estado de pleno emprego,  $v$  se aproxima de 1.

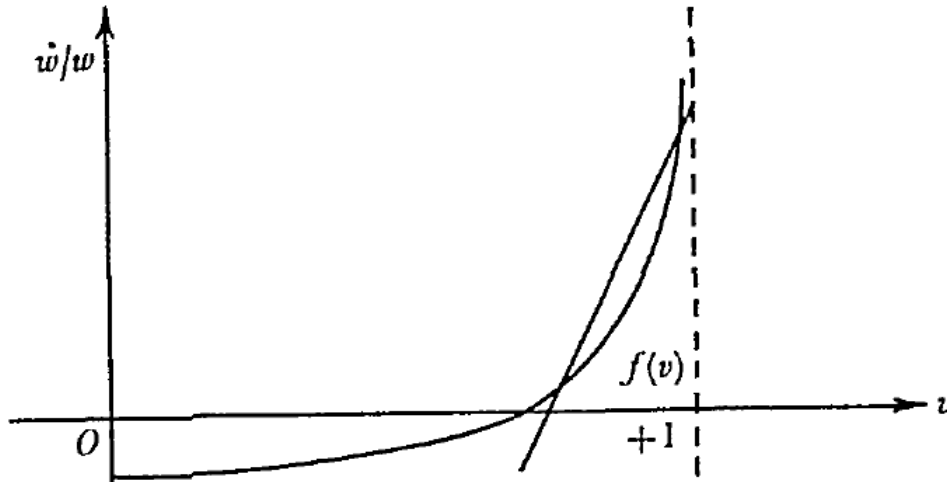


Figura 7 – Curva de Phillips linearizada.

Fonte: [5]

Com isso, podemos escrever

$$\frac{\dot{w}}{w} = -\gamma + \rho v, \quad (1.15)$$

onde  $\gamma$  é a intersecção das curvas e  $\rho$  representa a sua inclinação. Substituindo  $w = ua$ , obtemos

$$\dot{u} = u [ -(\gamma + \alpha) + \rho v ], \quad (1.16)$$

que é a segunda equação do modelo.

Unindo as Equações 1.14 e 1.16 chegamos ao modelo de Goodwin

$$\begin{aligned} \dot{v} &= v \left[ \left( \frac{1}{\sigma} - (\alpha + \beta) \right) - \frac{u}{\sigma} \right] \\ \dot{u} &= u [ -(\gamma + \alpha) + \rho v ]. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Ao compararmos este sistema com o modelo Lotka-Volterra podemos observar que o caso analisado por Goodwin trata a participação dos trabalhadores na produção como o predador e a taxa de empregos como a presa. Em outras palavras, os trabalhadores são os predadores e os capitalistas são as presas. Traduzindo para uma situação econômica, um lucro grande torna o investimento grande e isto faz com que novos empregos sejam criados. Por outro lado, à medida que o sistema se aproxima de uma situação de pleno emprego, os trabalhadores ganham poder de barganha e podem exigir melhores salários.

Esta dinâmica faz com que a taxa de crescimento decaia, levando a uma diminuição no número de empregos, ocasionando no crescimento dos lucros e o início de um novo ciclo.

### 1.3 Motivação

Inspirados pelos modelos apresentados neste capítulo temos como objetivo propor e analisar dois modelos de crescimento. Tradicionalmente, a modelagem de sistemas dinâmicos é feita utilizando Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), de modo que as grandezas pertencentes ao sistema são sempre avaliadas no mesmo instante de tempo. Buscando uma maior aproximação das situações encontradas na natureza, cientistas começaram a realizar as modelagens a partir de Equações Diferenciais com Retardo (EDRs), onde as funções pertencentes a sistemas com este tipo de equação podem ser avaliadas em instantes de tempo distintos. Geralmente, considera-se que pelo menos uma grandeza do sistema reaja à dinâmica num momento futuro, o que chamamos de função com retardo ou função com delay. Este tipo de abordagem é utilizada em diversos ramos do conhecimento, tais como a virologia [6, 7], a química [8] e o controle de transporte [9]. No âmbito da dinâmica econômica, temos a sua aplicação em modelos IS-LM [10, 11, 12], no clássico trabalho do Kalecki [13] e as investigações de Guerrini e colaboradores sobre modelos do tipo Solow [14, 15, 16].

A dissertação está dividida da seguinte forma: O capítulo 2 apresenta os principais conceitos e ferramentas utilizadas para o estudo de sistemas dinâmicos. O capítulo 3 trata, detalhadamente, as EDRs e as ferramentas necessárias para seu estudo. Finalizando o trabalho, o Capítulo 4 apresenta e discute os modelos e os resultados obtidos.

## 2 Sistemas Dinâmicos

Sistemas dinâmicos podem ser definidos como uma prescrição matemática determinística para a evolução temporal do estado de um sistema [17]. Deste modo, os sistemas dinâmicos podem ser divididos em duas categorias: equações diferenciais, cuja variável tempo é contínua; e mapas iterados, que assumem o tempo como uma variável discreta. Exemplificando um sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias, temos

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &\equiv \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &\equiv \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &\equiv \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde  $x_i = x_i(t) \in \mathbb{R}^n$  é uma função da variável independente  $t$ , usualmente o tempo. A função  $f_i$  é contínua e possui derivadas contínuas. O sistema 2.1 pode ser escrito numa forma vetorial e simplificada

$$\frac{d\vec{x}}{dt} \equiv \dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, t), \quad (2.2)$$

na qual  $\vec{x}$  é um vetor  $n$ -dimensional e  $\vec{f}$  é uma matriz quadrada.

O sistema apresentado acima é conhecido como não-autônomo, pois suas funções  $f_i$  dependem explicitamente do tempo. Caso contrário, o sistema é autônomo. Uma EDO não-autônoma pode ser convertida em um sistema autônomo mediante a introdução de uma dimensão no sistema. Tomemos como exemplo a equação do oscilador harmônico amortecido e forçado

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F \cos(t), \quad (2.3)$$

que podemos escrever como

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \cos(t), \quad (2.4)$$

em que  $\gamma$  representa o parâmetro de amortecimento e  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  é a frequência angular característica na ausência de amortecimento. Considerando  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$  e  $x_3 = t$ , temos o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 x_1 - \gamma x_2 + (F/m) \cos(x_3) , \\ \dot{x}_3 &= 1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

composto por três EDOs de primeira ordem acopladas e autônomas. Esse artifício sempre pode ser utilizado para remover a dependência temporal de sistemas de equações diferenciais.

Portanto, uma equação de  $n$ -ordem é um caso especial de um sistema  $(n + 1)$ -dimensional [18].

A notação vetorial 2.2 pode ser generalizada para  $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$ , onde  $\vec{F}$  representa um conjunto de funções não-lineares.

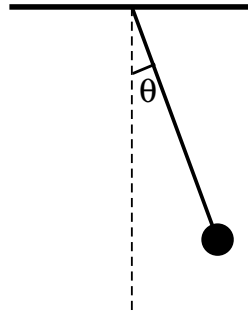


Figura 8 – Pêndulo simples.

Fonte: Autor

A equação de movimento do pêndulo simples (Figura 8) é dada por

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \text{sen}(\theta) = 0, \quad (2.6)$$

sendo  $\theta$  o ângulo do pêndulo com o eixo vertical,  $g$  a aceleração da gravidade e  $l$  o comprimento do fio. Solucionar esta equação analiticamente demanda habilidade, de modo que a maneira usual de evitar a não-linearidade envolve a utilização da aproximação para ângulos pequenos,  $\text{sen}(\theta) \approx \theta$  para  $\theta \ll 1$ . Essa aproximação transforma a Equação 2.6 em

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0, \quad (2.7)$$

que é uma equação diferencial linear e de fácil resolução. O princípio da superposição não é aplicável a sistemas não-lineares, fato que se configura como impedimento à utilização de técnicas como as transformações de Laplace ou a análise de Fourier. Em contrapartida, ao considerarmos apenas ângulos pequenos descartamos boa parte da física envolvida no sistema.

Com a dificuldade em encontrar soluções analíticas para sistemas não-lineares, o estudo qualitativo das equações preocupa-se em identificar características importantes de suas soluções sem resolvê-las.

## 2.1 O Espaço de Fases

A ferramenta mais comum para a observação da evolução temporal dos estados de um sistema dinâmico é o espaço de fases ou de espaço de configurações, um espaço

geométrico abstrato cujos eixos são as variáveis necessárias para a descrição da dinâmica. Consideremos o movimento de um bloco de massa  $m$  preso a uma mola de constante elástica  $k$  como o da Figura 9.

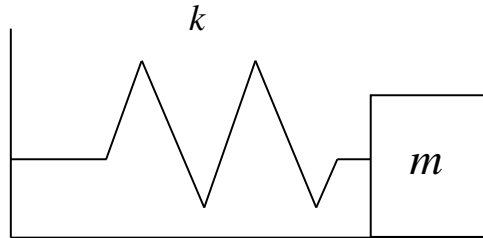


Figura 9 – Sistema massa-mola.

Fonte: Autor

Segundo as leis de Newton, esta dinâmica é dada pela relação

$$m \frac{d^2}{dt^2} x = -kx, \quad (2.8)$$

cujas soluções da equação de movimento é

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t). \quad (2.9)$$

Dadas as condições iniciais  $x(t=0) = x_0$ ,  $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$ , com a frequência angular  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , derivamos a equação 2.9 em função do tempo e obtemos a velocidade

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t) + \dot{x}_0 \cos(\omega_0 t) \quad (2.10)$$

As Equações 2.9 e 2.10 descrevem completamente o movimento do sistema massa-mola. Utilizamos o espaço de fases (Figura 10) para uma melhor visualização e entendimento desse comportamento.

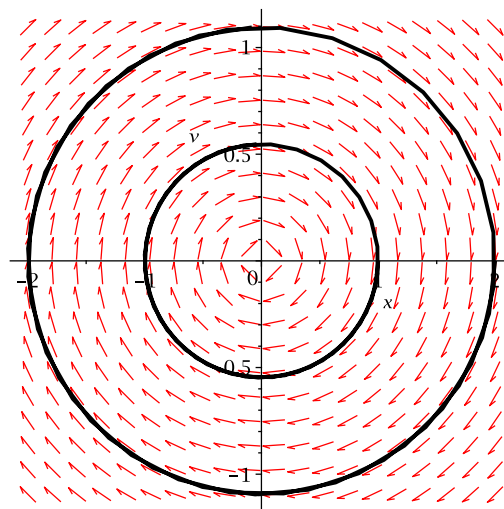


Figura 10 – Espaço de fase do sistema massa-mola 2.9.

Fonte: Autor

As curvas apresentadas na figura são chamadas de trajetórias ou órbitas, cujos pontos  $(\theta, \dot{\theta})$  são os estados do sistema.

## 2.2 Pontos fixos e Estabilidade

Retornando ao problema do pêndulo simples, Figura 8, se as coordenadas estiverem localizadas  $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$  o pêndulo permanecerá estacionado na origem. Este ponto do espaço de fases é classificado como ponto fixo, ponto estacionário ou ponto de equilíbrio. De maneira formal, se  $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  for um ponto fixo do sistema  $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ , então  $\vec{x}^*$  é um ponto tal que  $\vec{f}(\vec{x}^*, t) = 0$ .

Pontos fixos são classificados a partir da sua estabilidade, conceito geralmente atribuído a Lyapunov. As categorias de estabilidade mais usuais são: estabilidade de uma solução estacionária e estabilidade estrutural de um sistema. No estudo da estabilidade de uma solução estacionária a investigação ocorre a partir de perturbações nas condições iniciais e na caracterização dos pontos fixos  $P^* = (x^*, y^*)$ , classificados em:

- Assintoticamente estável: se a resposta do sistema a uma pequena perturbação aproxima-se de  $(x^*, y^*)$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Neste caso, o ponto fixo é um atrator;
- Estável: quando a resposta do sistema a uma leve perturbação permanece pequena quando  $t \rightarrow \infty$ ;
- Instável: a perturbação cresce quando  $t \rightarrow \infty$ . Neste caso, o ponto fixo é um repulsor ou uma fonte.

Um ponto fixo assintoticamente estável é estável, entretanto o contrário não é garantido. Considere o sistema

$$\dot{x} = \lambda x, \quad (2.11)$$

que possui ponto fixo  $x^* = 0$  e solução  $x(t) = e^{\lambda t}$ . O ponto  $x^*$  é assintoticamente estável se  $\lambda < 0$ , estável se  $\lambda \leq 0$  e instável se  $\lambda > 0$ .

O estudo da estabilidade estrutural ocorre a partir de perturbações no campo vetorial completo, que é feito através de perturbações nas equações diferenciais. O objetivo desta análise é testar a propriedade que o sistema apresenta de reter as características qualitativas da sua dinâmica sob pequenas perturbações nas funções envolvidas. Esta propriedade é denominada por robustez [19].



### 2.2.1 Estabilidade Linear

Considere o sistema linear

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by = f(x, y) \\ \dot{y} &= cx + dy = g(x, y) \end{aligned} \quad (2.12)$$

cuja forma vetorial e matriz Jacobiana  $\mathbf{J}$  estão representadas na equação abaixo

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Um ponto fixo do sistema 2.12 é o vetor  $\vec{x}_0 = (0, 0)$ . Admitindo a solução geral

$$\dot{\vec{x}} = e^{\lambda t} \vec{x}_0 \quad (2.14)$$

e substituindo em 2.13, tem-se  $(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I})\vec{x}_0 = 0$ . Onde  $\lambda$  e  $\vec{x}_0$  são os autovalores e autovetores da matriz Jacobiana enquanto que  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade. Os autovalores de uma matriz são determinados a partir da solução da equação característica

$$\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (2.15)$$

Esta metodologia é generalizada para sistemas  $n$ -dimensionais. Retomando o caso 2.12 temos:

$$\lambda^2 - \lambda(a + d) + ad - bc = 0. \quad (2.16)$$

Esta equação possui duas raízes:  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , que determinarão a estabilidade do ponto fixo  $\vec{x}_0$ .

No caso  $n$ -dimensional as soluções da equação característica podem ser reais ou complexas. Seja  $\lambda = \text{Re}(\lambda) + i \text{Im}(\lambda)$ , a solução 2.14 pode ser escrita como

$$\vec{x}(t) = e^{\text{Re}(\lambda)t} e^{i \text{Im}(\lambda)t} \vec{x}_0. \quad (2.17)$$

O termo  $e^{i \text{Im}(\lambda)t}$  atua como uma função limitada, oscilando continuamente em torno de um valor fixo. Logo, a análise da estabilidade do sistema depende essencialmente do termo  $e^{\text{Re}(\lambda)t}$ . Se  $\text{Re}(\lambda) > 0$ , então  $e^{\text{Re}(\lambda)t}$  tenderá ao infinito conforme  $t \rightarrow \infty$ . Ou seja, as órbitas de  $x(t)$  deixarão a vizinhança do ponto fixo à medida que  $t$  tende ao infinito, neste caso dizemos que o ponto de equilíbrio é instável. De modo contrário, se  $\text{Re}(\lambda) < 0$  então  $x(t) \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ . Esta condição faz com que as trajetórias de  $x(t)$  se aproximem cada vez mais do ponto fixo, que é estável.

As diferentes combinações dos autovalores determinam não apenas a estabilidade do ponto fixo analisado mas também a forma das órbitas em sua vizinhança, classificando os pontos de equilíbrio. Se  $\text{Re}(\lambda_i) \neq 0 \forall i$  o equilíbrio recebe o nome de hiperbólico ou não-degenerado e podemos utilizar de fato os autovalores da matriz Jacobiana:

- (i)  $\text{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i$  implica em estabilidade assintótica;

- (ii)  $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$  para um ou mais valores de  $i$  implica em instabilidade.

Esta classificação de estabilidade é nomeada como estabilidade condicional ou estabilidade linear [19].

Caso  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ , o equilíbrio é classificado como não-hiperbólico, elíptico ou degenerado. Se o sistema de equações é linear,  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$  significa que as trajetórias de  $\vec{x}(t)$  para  $t \rightarrow \infty$  não se afastam e não tendem a  $(x^*, y^*)$ , permanecendo em sua vizinhança. O ponto então é dito estável (embora não assintoticamente estável) e é chamado centro.

## 2.2.2 Classificação dos pontos fixos

Os autovalores da matriz Jacobiana podem ser reais, imaginários, imaginários puros, todos com parte real positiva etc. Cada combinação diferente produz um tipo de ponto de equilíbrio não-degenerado, de modo que o número de casos possíveis cresce rapidamente de acordo com a dimensão do sistema. Por exemplo, um sistema tridimensional possui 10 tipos diferentes de pontos de equilíbrio não-degenerados.

Apresentamos a seguir os tipos de pontos fixos para o caso bidimensional, usualmente o único estudado em detalhes.

1.  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são reais e distintos,  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$  e  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$

Neste caso  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  possuem o mesmo sinal e o ponto fixo  $P^*$  é denominado nó ou ponto nodal, cuja estabilidade é determinada pelos sinais dos autovetores. Se  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ,  $P^*$  é instável. Caso  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ ,  $P^*$  é estável.

2.  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  reais, iguais e não-nulos

Neste caso particular, o ponto fixo é denominado nó impróprio. Nesta situação só existe uma direção de aproximação onde as trajetórias são tangentes e paralelas a esta única direção.

3.  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  reais,  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$

Quando  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  possuem sinais distintos o ponto estacionário é denominado ponto de sela hiperbólico. As trajetórias aproximam-se do ponto seguindo uma das direções e afastam-se pela outra; por conta disso, o ponto de sela é sempre instável.

4.  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são complexos conjugados,  $\operatorname{Re}(\lambda_i) \neq 0$

Considera-se aqui o caso em que

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \quad \beta \neq 0.$$

Para  $\alpha \neq 0$ , as órbitas descrevem uma espiral convergindo para o ponto fixo, classificado como foco. Caso  $\alpha > 0$ , as trajetórias afastam-se do ponto fixo e o foco é instável. Caso contrário,  $\alpha < 0$ , as trajetórias aproximam-se do foco, considerado

estável. Quando  $\alpha = 0$ , os autovalores são imaginários puros ou complexos conjugados. Nesta situação as trajetórias são periódicas e o ponto fixo é chamado de centro - um ponto de equilíbrio estável, mas não assintoticamente estável.

### 2.2.3 Linearização e Estabilidade Não-Linear

Dado o sistema não-linear

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned} \quad (2.18)$$

possuindo um ponto fixo  $P^* = (x^*, y^*)$ , podemos expandi-lo em série de Taylor e obter

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) + O(2) \\ \dot{y} &= g(x, y) = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) + O(2) . \end{aligned} \quad (2.19)$$

Definindo novas variáveis  $\tilde{x} = x - x^*$  e  $\tilde{y} = y - y^*$ , observando que  $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$  e desprezando os termos de ordem superior, obtemos o sistema linear

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \partial f / \partial x|_* \tilde{x} + \partial f / \partial y|_* \tilde{y} = a\tilde{x} + b\tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} &= \partial g / \partial x|_* \tilde{x} + \partial g / \partial y|_* \tilde{y} = c\tilde{x} + d\tilde{y} \end{aligned} \quad (2.20)$$

A matriz dos coeficientes

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f / \partial x|_* & \partial f / \partial y|_* \\ \partial g / \partial x|_* & \partial g / \partial y|_* \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

é a matriz Jacobiana  $\partial(f, g) / \partial(x, y)$  calculada no ponto fixo  $P^*$ . As funções  $\tilde{x}(t)$  e  $\tilde{y}(t)$  resultantes do Sistema 2.20 são a aproximação de primeira ordem para as distâncias entre os pontos  $(x(t), y(t))$  da trajetória e o ponto fixo a cada instante  $t$

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= x(t) - x^* \\ \tilde{y}(t) &= y(t) - y^* \end{aligned} \quad (2.22)$$

A aproximação de primeira ordem é válida para pontos próximos ao ponto fixo e descrevem o comportamento local das soluções, nos mostra como o sistema evolui nos casos em que as condições iniciais desviam-se ligeiramente do ponto fixo. O processo descrito acima é chamado de linearização, uma das técnicas mais relevantes no estudo de sistemas não-lineares.

A análise de estabilidade realizada através do processo de linearização possui um caráter local: são soluções aproximadas e válidas para pequenas distâncias em torno do

ponto de equilíbrio. O Teorema 2.2.1 nos assegura que a estabilidade de um ponto de equilíbrio hiperbólico não é afetada pela linearização.

*Seja a equação diferencial*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.23)$$

*com condição inicial  $x(0) = x_0$  e ponto fixo  $x^*$ , temos que  $f(x^*) = 0$ . Linearizando a equação em torno de  $x^*$ , temos*

$$\dot{\xi} = Df(x^*)\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (2.24)$$

*com  $Df = \partial f_i / \partial x_j$  sendo a matriz Jacobiana e  $x = x^* + \xi$ ,  $|\xi| \ll 1$ .*

**Teorema 2.2.1** (Hartman-Grobman). *Se  $Df(x^*)$  não tem autovalores nulos ou puramente imaginários, então existe um homeomorfismo  $h$  definido em alguma vizinhança  $U$  de  $x^*$  em  $\mathbb{R}^n$  que localmente toma órbitas do fluxo não linear  $\phi_t$  de 2.23 e as leva ao fluxo linear  $\exp(tDf(x^*))$  de 2.24. O homeomorfismo preserva o sentido das órbitas e pode ser escolhido para preservar a parametrização no tempo [19].*

Para os casos envolvendo pontos não-hiperbólicos ( $\text{Re}(\lambda) = 0$ ) a análise linear não nos permite tomar conclusões sobre a estabilidade do ponto fixo. Nesta situação, recomenda-se o uso do Teorema de Variedade Central, com o foco em estudar os termos de ordem superior da Equação 2.19.

Usualmente o diagrama de fases completo de um sistema dinâmico não-linear é formado por vários pontos fixos com linhas de fluxo conectando os vários diagramas locais. Introduce-se assim o conceito de bacia de atração: conjunto de condições iniciais que originam as trajetórias as quais se aproximam de um determinado atrator. A partir da variação dos parâmetros é possível uma mudança de uma bacia de atração para outra. Deste modo, a teoria da estabilidade linear juntamente aos diagramas de fases locais correspondentes permitem extrair informações sobre as fronteiras das bacias de atração.

## 2.2.4 Ciclos Limite

Consideramos até aqui atratores e repulsores pontuais. Todavia existem os atratores e repulsores unidimensionais e as curvas fechadas, que são capazes de atrair ou repelir soluções próximas. Estas curvas, denominadas ciclos limite, são soluções periódicas típicas a osciladores forçados não-lineares, como: impulsos nervosos, batimentos cardíacos, reações químicas que oscilam espontaneamente etc.

O ciclo limite é um fenômeno inerentemente não-linear e presente apenas em sistemas dissipativos. Em sistemas conservativos temos a presença de centros e pontos de sela hiperbólicos; para quaisquer outros o teorema de Liouville seria violado.

Se todas as trajetórias da vizinhança se aproximarem do ciclo limite, este é classificado como estável. Caso contrário, é dito instável. E em casos excepcionais, meio estável. Para se obter um ciclo limite estável é necessário que a origem seja instável. Consequentemente, órbitas de pequena amplitude tendem a mover-se para fora à medida que o tempo passa, enquanto órbitas de grande amplitude tendem a mover-se para dentro.

Para o caso plano, foram criados critérios para a existência de ciclos limite. Dois deles são:

**Teorema 2.2.2** (Poincaré-Bendixson). *Seja  $D$  um domínio finito que não contém pontos estacionários e do qual as trajetórias não partem,  $D$  contém um ciclo limite.*

**Teorema 2.2.3** (Critério de Bendixson). *Dado o sistema de equações diferenciais ordinárias  $\dot{x} = f(x, y)$ ,  $\dot{y} = g(x, y)$ , se a expressão  $\partial f/\partial x + \partial g/\partial y$  não é identicamente nula e não muda de sinal em um domínio  $D$ , a equação diferencial não apresenta órbitas fechadas em  $D$ .*

## 2.3 Bifurcações

Como já discutido, estudamos a estabilidade dos pontos estacionários através de perturbações nos pontos fixos e a estabilidade do sistema através de perturbações nas equações que o compõe. Podemos perturbar o sistema analisado variando os parâmetros de controle - o parâmetro de amortecimento  $\gamma$  e a frequência angular  $\omega_0$  na equação do oscilador harmônico amortecido 2.4. Assim, podemos pensar o parâmetro de controle como uma variável do sistema dinâmico.

Seja o sistema dinâmico bidimensional

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, \mu) = f_\mu(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y, \mu) = g_\mu(x, y) \end{aligned}, \quad (2.25)$$

onde  $\mu \in \mathbb{R}$  é o parâmetro de controle, as matrizes Jacobianas, autovalores e autovetores agora são dependentes do tempo  $t$  e de  $\mu$ . Variações em  $\mu$  podem acarretar na criação, destruição ou na mudança de estabilidade dos pontos fixos ou dos ciclos limite de um sistema. A este fenômeno atribuímos o termo bifurcação. As bifurcações podem ser locais, afetando apenas as órbitas da vizinhança dos pontos fixos e dos ciclos limite, e podem ser globais, lidando com eventos que envolvem comportamentos de larga escala no espaço de fases, como mudanças nas bacias de atração, órbitas homocíclicas ou heterocíclicas ou outras estruturas que se estendem ao longo do espaço de fases [20].

Nas seções seguintes restringimos nossa atenção às bifurcações locais, tipos mais simples e que estão escritos na sua forma normal. Escrever as equações na forma padrão é um procedimento tradicional no estudo de bifurcações, reescrevemos as equações de modo

que a bifurcação ocorra quando o parâmetro  $\mu$  for nulo e o ponto fixo, agora localizado em  $x = 0$ , tenha o expoente característico com parte real nula. Situações mais gerais podem ser reduzidas à sua forma normal por meio de transformações de coordenadas e de parâmetros sem perda de generalidade [21].

### 2.3.1 Bifurcação Sela-nó

Seja a equação diferencial

$$\dot{x} = \mu - x^2 = f_\mu(x), \quad (2.26)$$

tomando  $\mu$  como o parâmetro de controle. O estudo da estabilidade deste sistema é dado pela análise do sinal de  $df/dx$  calculado no ponto de equilíbrio,  $\pm\sqrt{\mu}$ .

A condição de estabilidade é dada por

$$[df_\mu/dx]_{\text{equilíbrio}} < 0.$$

Avaliando a derivada  $[df_\mu/dx]_{+\sqrt{\mu}} = -2\sqrt{\mu} < 0$ , temos o ponto fixo  $+\sqrt{\mu}$  estável, um nó. De maneira inversa,  $-\sqrt{\mu}$  é instável, um ponto de sela hiperbólico. A Figura 11 ilustra o diagrama de fases, onde as linhas contínuas representam o equilíbrio estável enquanto as linhas pontilhadas descrevem o equilíbrio instável.

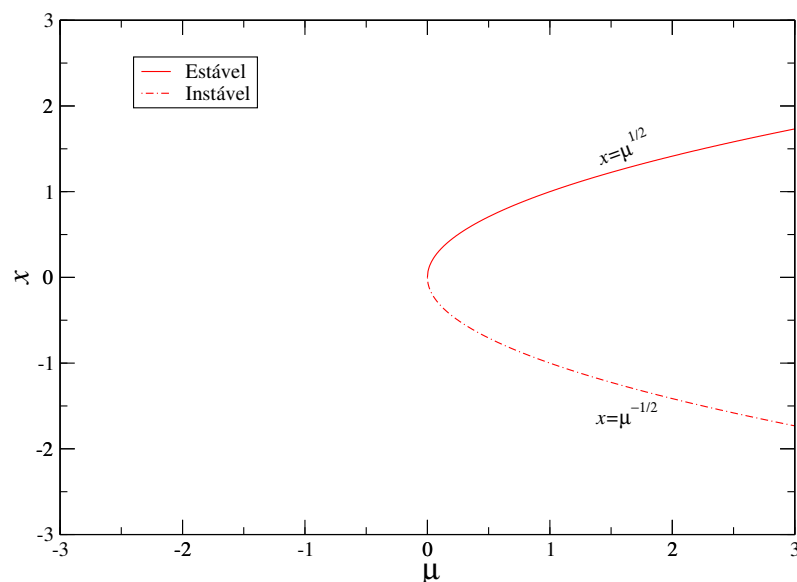


Figura 11 – Diagrama de bifurcação sela-nó.

Fonte: [22]

A importância da bifurcação sela-nó reside no fato de que todas as bifurcações de famílias uniparamétricas com autovalor zero podem ser perturbadas por meio de uma bifurcação desse tipo [20].

### 2.3.2 Bifurcação Transcrítica

Considere a equação

$$\dot{x} = \mu x - x^2 = f_\mu(x), \quad (2.27)$$

com pontos fixos  $x = 0$  e  $x = \mu$ , temos que  $df_\mu/dx = \mu - 2x$ . Ao avaliarmos  $[df_\mu/dx]_{x=0} = \mu$ , o ponto  $x = 0$  é estável quando  $\mu < 0$  e instável quando  $\mu > 0$ . Por outro lado, ao avaliar  $[df_\mu/dx]_{x=\mu} = -\mu$ , vemos que o equilíbrio  $x = \mu$  é estável quando  $\mu > 0$  e instável quando  $\mu < 0$ . Há troca de estabilidade quando o parâmetro de controle passa por  $\mu = 0$ . Esse tipo de bifurcação é chamado bifurcação transcritical, ilustrado na Figura 12.

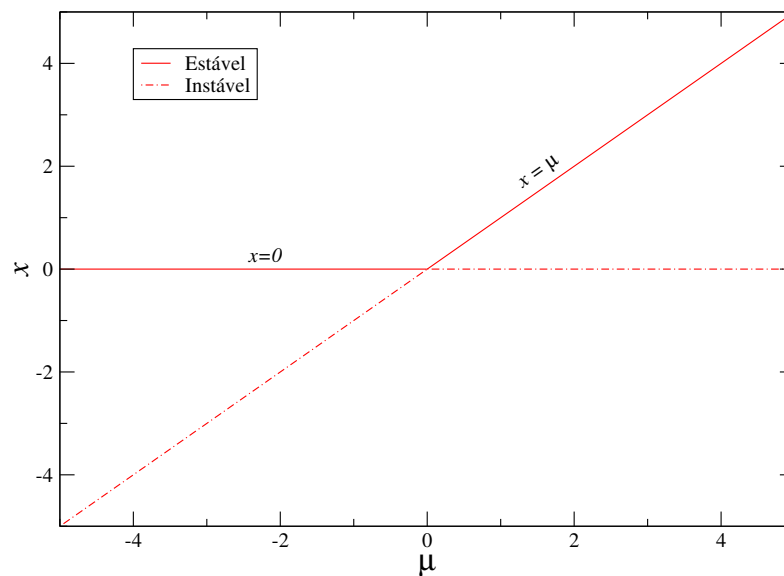


Figura 12 – Diagrama de bifurcação transcritical.

Fonte: [22]

### 2.3.3 Bifurcação de Forquilha

**Bifurcação de Forquilha Supercrítica:** Considere a equação

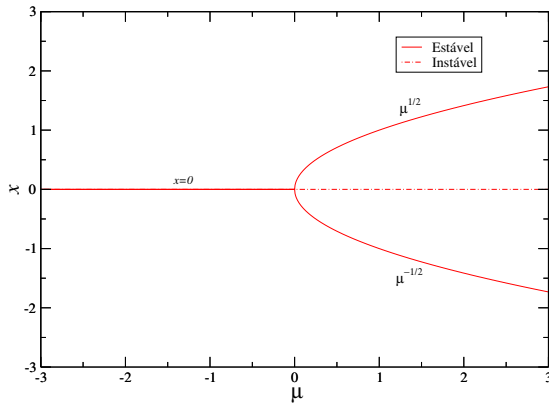
$$\dot{x} = \mu x - x^3 = f_\mu(x), \quad (2.28)$$

com os pontos de equilíbrio  $x = 0$  e  $x = \pm\sqrt{\mu}$  (para  $\mu > 0$ ). A condição de estabilidade é  $df_\mu/dx = \mu - 3x^2$  e avaliando a derivada no primeiro ponto fixo temos  $[df_\mu/dx]_{x=0} = \mu$ . O ponto  $x = 0$  é estável quando  $\mu < 0$  e instável quando  $\mu > 0$ . Ao avaliar  $[df_\mu/dx]_{x=\pm\sqrt{\mu}} = -2\mu$ , vemos que os dois pontos de equilíbrio são estáveis para  $\mu > 0$ . Este tipo de bifurcação é denominado bifurcação de forquilha supercrítica devido ao formato dos seus ramos, ilustrado na Figura 13a.

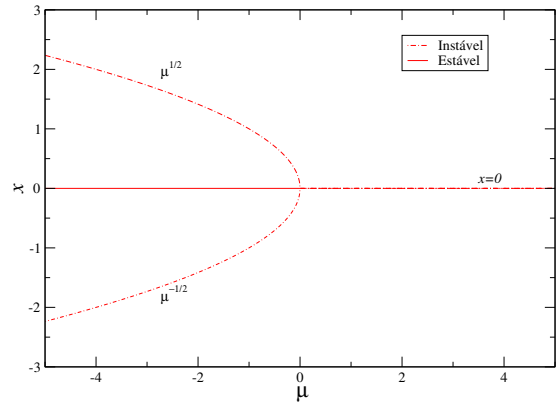
**Bifurcação de Forquilha Subcrítica:** Considere agora a equação

$$\dot{x} = \mu x + x^3 = f_\mu(x). \quad (2.29)$$

Os pontos de equilíbrio são  $x = 0$  e  $x = \pm\sqrt{-\mu}$  (para  $\mu < 0$ ), com condição de estabilidade  $df_\mu/dx = \mu + 3x^2$ . Avaliando a derivada  $[df_\mu/dx]_{x=0} = \mu$  determinamos que o ponto  $x = 0$  é estável quando  $\mu < 0$  e instável quando  $\mu > 0$ . Porém, ao avaliar  $[df_\mu/dx]_{x=\pm\sqrt{-\mu}} = -2\mu$ , vemos que os dois pontos de equilíbrio são instáveis para  $\mu < 0$ . Este evento é denominado bifurcação de forquilha subcrítica e está representado na Figura 13b.



(a) Bifurcação de Forquilha Supercrítica



(b) Bifurcação de Forquilha Subcrítica

Figura 13 – Diagramas de bifurcação de forquilha.

Fonte: [22]

### 2.3.4 Bifurcação de Hopf

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) = f_\mu(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2) = g_\mu(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.30)$$

O único ponto fixo para todo  $\mu$  é  $x_1 = x_2 = 0$ . A matriz Jacobiana calculada no ponto de equilíbrio é

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial f/\partial x_1 & \partial f/\partial x_2 \\ \partial g/\partial x_1 & \partial g/\partial x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

cujos autovalores são  $\mu \pm i$ . Deste modo, o equilíbrio é estável para  $\mu < 0$  e instável para  $\mu > 0$ . Conseqüentemente, constata-se que existe perda de estabilidade em  $\mu = 0$ , não havendo troca de estabilidade nesse ponto.

Se considerarmos  $\mu > 0$  averiguamos a existência de um ciclo limite no sistema 2.30. Como discutido anteriormente, podemos utilizar uma transformação de coordenadas para reduzirmos as equações para sua forma normal. Neste caso, empregamos o uso das coordenadas polares  $(r, \theta)$ , definidas por  $x_1 = r \cos(\theta)$ ,  $x_2 = r \sin(\theta)$ , e reescrevemos 2.30



como

$$\begin{aligned} \dot{r} \cos(\theta) - r\dot{\theta} \sin(\theta) &= -r \sin(\theta) + r \cos(\theta)(\mu - r^2) \\ \dot{r} \sin(\theta) + r\dot{\theta} \cos(\theta) &= r \cos(\theta) + r \sin(\theta)(\mu - r^2) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Multiplicando a primeira equação por  $\cos(\theta)$ , a segunda por  $\sin(\theta)$  e somando-as, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Podemos concluir que existe uma órbita periódica para  $\mu > 0$ . Ademais, como  $\dot{r} < 0$  para  $r > \sqrt{\mu}$  e  $\dot{r} > 0$  para  $r < \sqrt{\mu}$ , a órbita é estável.

Ocorre uma troca de estabilidade quando  $\mu = 0$ . O ponto fixo estável passa a ser um ciclo limite estável, onde o ciclo limite envolve um equilíbrio instável em  $\mu > 0$ . A bifurcação de um equilíbrio para uma oscilação periódica é conhecida como bifurcação de Hopf. Uma característica típica deste tipo de bifurcação é a seguinte: a matriz Jacobiana calculada no ponto de bifurcação tem um par de autovalores puramente imaginários.

É importante frisar que diferentemente dos tipos de bifurcação discutidos nas seções anteriores, na bifurcação de Hopf o sistema antes representado por um equilíbrio passa a ser descrito por um ciclo limite cujas oscilações são regulares. É uma bifurcação que liga equilíbrio ao movimento periódico. Mas assim como a bifurcação de forquilha, a bifurcação de Hopf apresenta-se na forma supercrítica (Figura 14a) e subcrítica (Figura 14b).

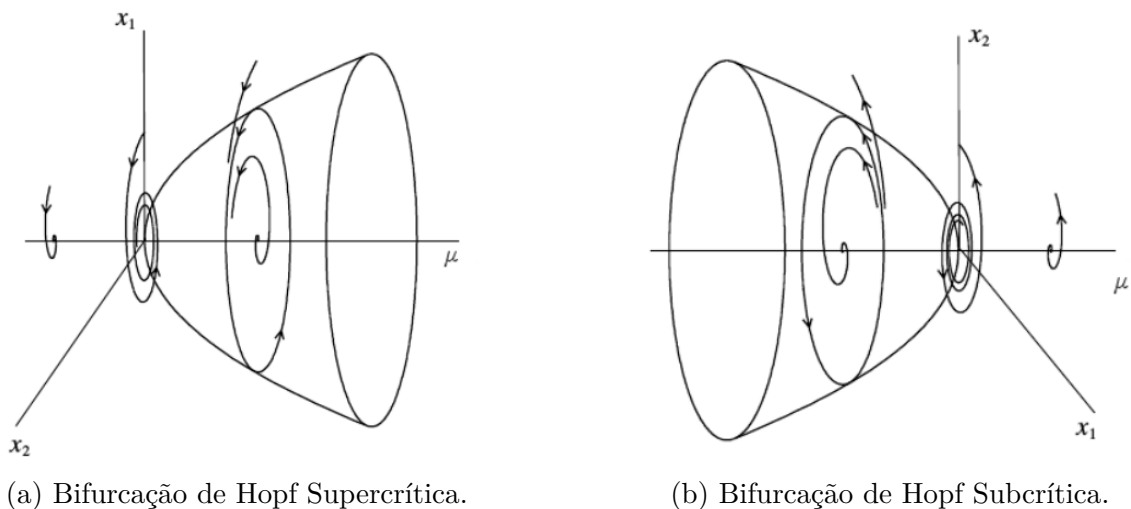


Figura 14 – Diagramas de bifurcação de Hopf.

Fonte: [23]

## 2.4 Caos

Um sistema dinâmico é dito determinístico quando o conhecimento das equações de evolução temporal, das condições iniciais e dos valores dos parâmetros do sistema nos permite descrever completamente o seu comportamento. Caso a evolução temporal se torne irregular e imprevisível, dizemos que o sistema encontra-se em um regime caótico. Este tipo de comportamento não é raro na natureza e pode ocorrer em fenômenos como: cavidades laser, reações químicas e fluidos em rotação [24].

Deste modo, suponha que realizamos o cálculo da trajetória de um sistema deste tipo duas vezes, mas com condições iniciais ligeiramente diferentes. Esta pequena incerteza conduz a um erro na descrição da trajetória que cresce linearmente com o tempo. Ao considerarmos um sistema caótico o erro cresce exponencialmente no tempo, de maneira que o estado do sistema é essencialmente desconhecido após um curto espaço de tempo. Fenômeno denominado dependência sensível às condições iniciais, uma das principais características de um sistema caótico.

Embora a ocorrência do caos seja possível em diferentes tipos de sistemas dinâmicos, os caminhos que levam a esse tipo de comportamento podem ser divididos em quatro categorias chamadas rotas para o caos [21]

- Duplicação de Período;
- Quasi-Periodicidade;
- Intermitências e Crises;
- Transientes Caóticos e Órbitas Homocíclicas.

De maneira geral podemos afirmar que a transição de um comportamento regular (estacionário ou periódico) para um comportamento caótico se deve às bifurcações causadas a partir da variação dos parâmetros de controle.

No caso da duplicação de período, por exemplo, sua origem está relacionada à presença de ciclo limite na dinâmica do sistema. À medida que o parâmetro de controle varia, o ciclo limite pode tornar-se instável de tal maneira que podemos observar a criação de um novo ciclo limite com o dobro do período do ciclo original. Esse tipo de bifurcação é chamada de flip ou duplicação de período e esta rota para o caos apresenta uma cascata de bifurcações de flip, como mostra a Figura 15.

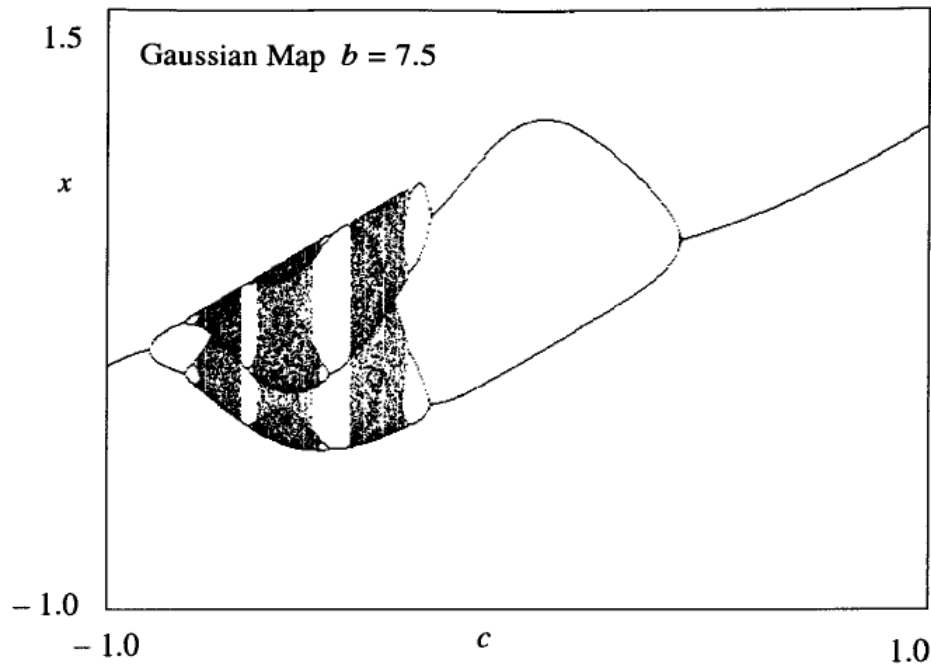


Figura 15 – Diagrama de bifurcação do mapa gaussiano com  $b = 7.5$  e  $x_0 = 0$ .

Fonte: [21]

Este é o diagrama de bifurcação do mapa gaussiano  $x_{n+1} = e^{-bx_n^2} + c$ . Os cálculos foram realizados para  $b = 7.5$  enquanto que o parâmetro de controle  $c$  variou entre  $-1$  e  $1$ . Nesta imagem podemos observar, dobras de período, regime caótico e janelas de período. Observe que em  $c > 0$  o regime caótico deixa de existir.

### 3 Equações Diferenciais com Retardo

No Capítulo 2 apresentamos o conceito de sistema dinâmico, os exemplos e técnicas apresentadas envolviam Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Entretanto existe um tipo mais geral de equações diferenciais chamadas Equações Diferenciais Funcionais (EDFs) ou Equações Diferenciais com Argumento Divergente, cujas funções envolvidas ocorrem em diferentes argumentos [25]. As equações abaixo são exemplos de EDFs:

$$\dot{x}(t) = 3x(t - 2), \quad (3.1)$$

$$\ddot{x}(t) = -\dot{x}(t) - \dot{x}(t - 1) + 2 \operatorname{sen}[x(t)] - \cos(t), \quad (3.2)$$

$$\dot{x}(t) = x(t)x(t - 2) + t^2x(t + 1), \quad (3.3)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(t - 1) - x(t/2). \quad (3.4)$$

As Equações 3.1 e 3.2 representam o tipo mais simples e talvez o mais natural das EDFs, conhecidas como Equações Diferenciais com Retardo (EDRs). A Equação 3.3 apresenta um argumento adiantado enquanto que a 3.4 possui a derivada de maior ordem em dois instantes diferentes, de forma que não se caracterizam como EDRs.

O objetivo deste estudo envolve o uso de EDRs e concentraremos a nossa atenção nessa classe de EDFs. Tomemos como exemplo a equação logística que descreve o crescimento de uma população

$$N'(t) = N(t)[b - aN(t)], \quad (3.5)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes positivas. Esse modelo considera que a densidade populacional afeta negativamente a taxa de crescimento *per capita* devido à degradação do meio ambiente. Por outro lado, Hutchinson [26] demonstrou que os efeitos negativos causados pela alta densidade populacional ocorrem apenas em taxas de nascimento para tempos futuros, pois os efeitos causam atrasos no desenvolvimento e na maturação. Com base nisto, o seguinte modelo foi proposto

$$N'(t) = N(t)[b - aN(t - r)], \quad (3.6)$$

no qual,  $r > 0$  é conhecido como retardo ou delay. Diversos outros modelos de crescimento populacional, retardados ou não, foram propostos [27, 28]. Arino e colaboradores [29] consideraram que a dependência da densidade populacional estaria distribuída sobre um intervalo de tempo no passado e não em um único instante. Levando-nos à equação

$$N'(t) = N(t)[b - a \int_0^\infty N(t - s)k(s)ds] \quad (3.7)$$

onde a função  $k(s)$ , conhecida como kernel, é normalizada por  $\int_0^\infty k(s)ds = 1$ .

De maneira formal, os tempos de retardo distribuídos satisfazem a equação

$$\int_{t-r}^t k(t-s)x(s)ds = \int_0^r k(z)x(t-z)dz, \quad 0 < r < \infty, \quad (3.8)$$

indicando uma média ponderada dos valores no intervalo. Embora esta abordagem nos ofereça uma maior aproximação dos fenômenos estudados, sua implementação é mais difícil de ser realizada em virtude da dificuldade em extrair o comportamento da função kernel dos valores dados no intervalo. Portanto, concentraremos nossa atenção em EDRs cujos delays são discretos.

Na próxima seção analisaremos a estabilidade das EDRs e apresentaremos uma técnica utilizada para linearização, pois os métodos utilizados para EDOs não são válidos para esta classe de equações.

### 3.1 Estabilidade e Linearização de EDRs

Considere um sistema linear, homogêneo e autônomo composto por  $n$  EDRs. Sua forma mais geral possível é

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^m \mathbf{A}_j y(t - \tau_j) = \mathbf{A}_1 y(t - \tau_1) + \cdots + \mathbf{A}_m y(t - \tau_m) \quad (3.9)$$

onde  $i = 1, \dots, n$  e cada  $\mathbf{A}_j$  é uma matriz quadrada  $n$ -dimensional. De maneira similar ao estudo das EDOs, propomos uma solução do tipo exponencial

$$y(t) = \xi e^{\lambda t} \quad (3.10)$$

na qual,  $\xi$  é um vetor constante. Substituindo esta solução na Equação 3.9, temos

$$\begin{aligned} \xi \lambda e^{\lambda t} &= \xi e^{\lambda t} \sum_{j=1}^m \mathbf{A}_j e^{-\lambda \tau_j}, \\ \left( \lambda \mathbf{I} - \sum_{j=1}^m \mathbf{A}_j e^{-\lambda \tau_j} \right) \xi &= 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde  $\mathbf{I}$  representa a matriz identidade  $n \times n$ . Caso  $\xi = 0$ , a Equação 3.11 é válida para qualquer valor de  $\lambda$ . Caso contrário, a solução só é válida se  $\lambda$  satisfizer a equação característica

$$\left( \lambda \mathbf{I} - \sum_{j=1}^m \mathbf{A}_j e^{-\lambda \tau_j} \right) = 0. \quad (3.12)$$

Comparando com a solução obtida para EDOs no capítulo anterior (Equação 2.15), podemos notar que a Equação 3.12 possui delays  $\tau_j$  nos argumentos das funções, tornando a equação característica uma equação transcendental com infinitas soluções

independentemente da dimensão do sistema. Resultado divergente do obtido para equações sem retardo, onde um sistema  $n$ -dimensional possui exatamente  $n$  soluções linearmente independentes.

Assim como nas EDOs, as soluções da Equação 3.12 determinam a estabilidade do ponto. Se todo  $\lambda$  tem parte real negativa, então a solução é assintoticamente estável. Caso contrário, o ponto é instável. Apesar da infinidade de soluções, a estabilidade é sempre determinada por um número finito de raízes, de acordo com o seguinte teorema:

**Teorema 3.1.1.** *Dado um número real  $\sigma$ , a equação característica 3.12 tem um número finito de raízes  $\lambda$  tais que  $\text{Re}(\lambda) > \sigma$  [30].*

Podemos estudar também a estabilidade linear dos casos em que as funções que compõem o sistema são não-lineares. Considere o caso particular de um sistema  $n$ -dimensional que possui  $m$  delays da forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \sum_{j=1}^m f_j^1(x_1(t - \tau_j), x_2(t - \tau_j), \dots, x_m(t - \tau_j)) \\ \frac{dx_2}{dt} &= \sum_{j=1}^m f_j^2(x_1(t - \tau_j), x_2(t - \tau_j), \dots, x_m(t - \tau_j)) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= \sum_{j=1}^m f_j^n(x_1(t - \tau_j), x_2(t - \tau_j), \dots, x_m(t - \tau_j))\end{aligned}\tag{3.13}$$

Seja  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  um ponto de equilíbrio deste sistema, podemos estudar a sua estabilidade através da linearização do sistema 3.1 em  $x^*$ . Portanto

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \sum_{j=1}^m f_j^1(x_1(t - \tau_j), x_2(t - \tau_j), \dots, x_n(t - \tau_j))|_{x^*} + \\ &+ \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial f_j^1}{\partial x_1} \Big|_{x^*} (x_1(t - \tau_j) - x_1^*) + \frac{\partial f_j^1}{\partial x_2} \Big|_{x^*} (x_2(t - \tau_j) - x_2^*) + \dots + \frac{\partial f_j^1}{\partial x_n} \Big|_{x^*} (x_n(t - \tau_j) - x_n^*) \right) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= \sum_{j=1}^m f_j^n(x_1(t - \tau_j), x_2(t - \tau_j), \dots, x_n(t - \tau_j))|_{x^*} + \\ &+ \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial f_j^n}{\partial x_1} \Big|_{x^*} (x_1(t - \tau_j) - x_1^*) + \frac{\partial f_j^n}{\partial x_2} \Big|_{x^*} (x_2(t - \tau_j) - x_2^*) + \dots + \frac{\partial f_j^n}{\partial x_n} \Big|_{x^*} (x_n(t - \tau_j) - x_n^*) \right)\end{aligned}\tag{3.14}$$

Definindo o vetor  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  e realizando a substituição de variáveis  $y_i(t) = x_i(t) - x_i^*$ , é possível ver que

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{dy_i}{dt}.$$

Assim, podemos reescrever o Sistema 3.14 em uma forma simplificada

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f_j^1}{\partial x_i} \right|_{x^*} y_i(t - \tau_j) \\ \frac{dy_2}{dt} &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f_j^2}{\partial x_i} \right|_{x^*} y_i(t - \tau_j) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_n}{dt} &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f_j^n}{\partial x_i} \right|_{x^*} y_i(t - \tau_j) \\ &, \end{aligned} \tag{3.16}$$

que é um sistema linear semelhante ao Sistema 3.9 com  $m$  matrizes  $\mathbf{A}_j$  do tipo

$$\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} \partial f_j^1 / \partial x_1 & \partial f_j^1 / \partial x_2 & \cdots & \partial f_j^1 / \partial x_n \\ \partial f_j^2 / \partial x_1 & \partial f_j^2 / \partial x_2 & \cdots & \partial f_j^2 / \partial x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_j^n / \partial x_1 & \partial f_j^n / \partial x_2 & \cdots & \partial f_j^n / \partial x_n \end{bmatrix}. \tag{3.17}$$

Tomemos o seguinte sistema como exemplo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax(t) + by(t) \\ \dot{y} &= cx(t - \tau) + dy(t), \end{aligned} \tag{3.18}$$

onde  $a, b, c$  e  $d$  são reais e positivos.

O único ponto fixo deste sistema é  $(0, 0)$ , que também apresenta um termo sem retardo ( $\tau_1 = 0$ ) e outro com retardo ( $\tau_2 = \tau$ ). Teremos assim duas matrizes para o cálculo dos

autovalores, com os termos  $f_j^i, i, j = 1, 2$  dados por

$$\begin{aligned} f_1^1 &= ax - by; \\ f_2^1 &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1^2 &= dy; \\ f_2^2 &= cx; \end{aligned} \tag{3.19}$$

A matriz Jacobiana deste sistema é representada na forma

$$\mathbf{J} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 e^{-\lambda\tau} = \begin{bmatrix} a & -b \\ 0 & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} e^{-\lambda\tau} = \begin{bmatrix} a & -b \\ ce^{-\lambda\tau} & d \end{bmatrix}, \tag{3.20}$$

cuja equação característica

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad + bce^{-\lambda\tau}, \quad (3.21)$$

é uma equação transcendental. Cooke e van der Driessche [31] obtiveram o seguinte Teorema:

**Teorema 3.1.2.** *Considere a equação*

$$P(\lambda) + Q(\lambda)e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (3.22)$$

onde  $P$  e  $Q$  são funções analíticas na metade direita do plano,  $\operatorname{Re}(\lambda) > -\delta$ ,  $\delta > 0$ , que satisfazem as seguintes condições:

- i)  $P(\lambda)$  e  $Q(\lambda)$  não têm zeros imaginários em comum;
- ii)  $\overline{P(-iy)} = P(iy)$ ,  $\overline{Q(-iy)} = Q(iy)$ , para  $y \in \mathbb{R}$  (em que  $\bar{P}$  denota o complexo conjugado de  $P$ );
- iii)  $P(0) + Q(0) \neq 0$ ;
- iv) Há, no máximo, um número finito de raízes na metade direita do plano, quando  $\tau = 0$ ;
- v)  $F(y) = \|P(iy)\|^2 - \|Q(iy)\|^2$  para  $y \in \mathbb{R}$  possui no máximo um número finito de zeros reais;

Sob essas condições, os seguintes casos são verdadeiros:

- a) Suponha que a equação  $F(y) = 0$  não tem raízes positivas. Então, se a Equação 3.22 é estável em  $\tau = 0$ , a mesma permanece estável para todo  $\tau \geq 0$ ; por outro lado, se a equação é instável em  $\tau = 0$ , permanece instável para todo  $\tau \geq 0$ .
- b) Suponha que a equação  $F(y) = 0$  tenha pelo menos uma raiz positiva e que cada uma seja simples. Enquanto as raízes aumentam, trocas de estabilidade podem ocorrer. Existe um número positivo  $\tau^*$ , tal que, a Equação 3.22 é instável para todo  $\tau > \tau^*$ . Enquanto  $\tau$  varia de 0 a  $\tau^*$ , no máximo um número finito de trocas de estabilidade pode ocorrer.

Comparando as Equações 3.21 e 3.22 podemos afirmar que

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad \\ Q(\lambda) &= bc \end{aligned}, \quad (3.23)$$

nos permitindo utilizar o Teorema 3.1.2 em nossa análise. Descrita a seguir



(i) As raízes de  $P$  são

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm (a-d)}{2} \Rightarrow \lambda_1 = a; \lambda_2 = d.$$

E  $Q$  não possui raízes, pois  $b, c > 0$ . Satisfazendo a primeira condição do teorema.

(ii) Testando a condição (ii), temos

$$\begin{aligned} P(-iy) &= -y^2 + (a+d)iy + ad; & \overline{P(-iy)} &= -y^2 + (a+d)iy + ad; \\ Q(-iy) &= bc; & \overline{Q(-iy)} &= bc; \end{aligned}$$

Condição garantida.

(iii)  $P(0) + Q(0) = ad + bc \neq 0$ . Que satisfaz a condição (iii).

(iv) Resolvendo 3.21 para  $\tau = 0$ , temos

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2 - 4bc}}{2}.$$

Por conseguinte, um número finito de raízes. O que assegura a condição (iv).

(v) Ao testar a condição (v), temos:

$$\begin{aligned} F(y) &= \|P(iy)\|^2 - \|Q(iy)\|^2 = \|-y^2 + ad - (a+d)iy\|^2 - \|bc\|^2 = (y^2 - ad)^2 + \\ &\quad + (a+d)^2 y^2 - b^2 c^2 = y^4 + (a^2 + d^2)y^2 + a^2 d^2 - b^2 c^2. \end{aligned}$$

Deste modo,  $F(y) = 0$  é verdadeiro se

$$y = \pm \sqrt{\frac{-(a^2 + d^2) \pm \sqrt{(a^2 - d^2)^2 + 4b^2 c^2}}{2}},$$

que possui um número finito de zeros reais. Garantindo a condição.

Para que saibamos qual das situações dadas pelo Teorema 3.1.2 corresponde à Equação 3.21, precisamos conhecer os valores nominais das constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ . Porém, a solução mais geral para a equação característica é

$$\lambda = p + iq. \tag{3.24}$$

Substituindo, temos:

$$(p + iq)^2 - (a + d)(p + iq) + ad + bc \exp[-(p + iq)\tau].$$

Utilizando a fórmula de Euler ( $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ ) e separando a parte real da imaginária, obtemos

$$\begin{aligned} p^2 - q^2 - (a + d)p + ad + bce^{-p\tau} \cos(q\tau) &= 0 \\ pq + (a + d)q - bce^{-p\tau} \operatorname{sen}(q\tau) &= 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

De acordo com o Teorema 3.1.2 e a solução geral 3.24, a estabilidade do ponto fixo vai depender apenas do sinal de  $p$ . De maneira que o ponto de bifurcação do sistema ocorre em  $p = 0$ . Ao substituir este valor em 3.25, atingimos

$$-q^2 + ad + bc \cos(q\tau) = 0 \quad (a + d)q - bc \operatorname{sen}(q\tau) = 0. \quad (3.26)$$

Isolando o seno e o cosseno e utilizando a identidade trigonométrica fundamental  $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ , atingimos uma expressão que nos permite calcular  $q$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2(q\tau) + \cos^2(q\tau) &= \left[ \frac{q^2 - ad}{bc} \right]^2 + \left[ \frac{q(a + d)}{bc} \right]^2 = 1 \\ \Rightarrow q^4 + (a^2 + d^2)q^2 + a^2d^2 - b^2c^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$q = \pm \sqrt{\frac{-(a^2 + d^2) \pm \sqrt{(a^2 - d^2)^2 + 4b^2c^2}}{2}}. \quad (3.27)$$

Finalmente, chamamos de retardo crítico,  $\tau^*$ , o valor de  $\tau$  que provoca uma bifurcação no sistema. Parâmetro encontrado através do cálculo da  $\operatorname{tg}(q\tau)$

$$\frac{\operatorname{sen}(q\tau^*)}{\cos(q\tau^*)} = \operatorname{tg}(q\tau^*) = \frac{q(a + d)}{q^2 - ad} \Rightarrow \tau^* = \frac{1}{q} \operatorname{tg}^{-1} \frac{q(a + d)}{q^2 - ad}. \quad (3.28)$$

Para obter o valor numérico, substituímos o resultado de 3.27 na equação acima. Ressaltando que esta situação de perda de estabilidade ocorre apenas no caso (b) do Teorema 3.1.2.

## 3.2 Método Runge-Kutta para EDRs

Assim como nas EDOs, encontrar soluções exatas para as EDRs pode ser uma tarefa demasiadamente difícil. De modo que a comunidade científica desempenhou esforços para desenvolver métodos numéricos capazes de desenvolver soluções aproximadas para Problemas de Valor Inicial em EDRs. Mostraremos a seguir como adaptar o método de Runge-Kutta de ordem 2 para EDRs.

Assim como utilizamos a discretização do tempo no caso das EDOs, este recurso se faz presente ao tratarmos as EDRs. Portanto, seja  $N$  um inteiro positivo,  $\tau \in \mathbb{R}_+^N$  um vetor unidimensional que contém os delays e  $u_{\tau_i} = u(t - \tau_i)$  a função a ser estudada. Denote  $f_0$

como uma função do tempo  $t$  e dos retardos  $\tau_i$ , onde  $i = 1, 2, \dots, N$ . Podemos definir o Problema de Valor Inicial (PVI) na forma [32]

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u, U_{\tau_1}, \dots, u_{\tau_N}), & t \in [t_0, T] \\ u(t) = u_0(t, \tau), & t \leq t_0. \end{cases} \quad (3.29)$$

Expandindo  $u$  em série de Taylor, temos

$$u_{n+1} = u_n + hu'_n + \frac{h^2}{2!}u''_n + \mathcal{O}(h^3). \quad (3.30)$$

Denotando  $F_u$  como a matriz das derivadas de  $f$  em relação a  $u$ , podemos escrever  $u''$  em termos de  $F$

$$u'' = F' + F_u F + \sum_{i=1}^N F_{u_{\tau_i}} u'_{\tau_i}. \quad (3.31)$$

Isto posto, precisamos de  $u'_{\tau_i}$  para a determinação dos coeficientes do Runge-Kutta. A fim de solucionar este problema, reescrevemos o Sistema 3.29

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u, U_{\tau_1}, \dots, u_{\tau_N}), & t \in [t_0, T] \\ u'_{\tau_i}(t) = f((t - \tau), u_{\tau_i}, u_{\tau_1+\tau_i}, \dots, u_{\tau_N+\tau_i}), & t \in [t_0, T] \\ u(t) = u_0(t, \tau), & t \leq t_0. \end{cases} \quad (3.32)$$

Definindo  $Z := \{u, u_{\tau_1}, \dots, u_{\tau_N}\}$  com condição inicial  $Z_0 = u_0(t, \tau)$  para  $t \leq t_0$  e

$$G(t, Z) := \begin{cases} G(t, u, u_{\tau_1}, \dots, u_{\tau_N}) \\ G(t - \tau_1, u_{\tau_1}, u_{\tau_1+\tau_1}, \dots, u_{\tau_N+\tau_1}) \\ G(t - \tau_2, u_{\tau_2}, u_{\tau_1+\tau_2}, \dots, u_{\tau_N+\tau_2}) \\ \vdots \\ G(t - \tau_N, u_{\tau_N}, u_{\tau_1+\tau_N}, \dots, u_{\tau_N+\tau_N}) \end{cases}.$$

Podemos reescrever o PVI 3.29 como

$$\begin{aligned} Z'(t) &= f(t, Z), & t \in [t_0, T] \\ Z(t) &= Z_0(t) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Portanto, podemos utilizar o método de Runge-Kutta adaptado

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= Z_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i \\ k_1 &= f(t_n, Z_n) \\ k_i &= f(t + c_i h, Z_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j), \quad i = 2, \dots, s \end{aligned} \quad (3.34)$$

## 4 Resultados e Discussão

Os modelos de Solow e Goodwin apresentados no Capítulo 1 consideram que a força de trabalho  $L$  possui um crescimento constante dado por uma taxa exógena. Diferentemente, propomos que o crescimento da força de trabalho ocorra de maneira endógena, de forma que sua equação de evolução temporal seja acoplada à equação de evolução do capital  $C$ . Assim, obtemos sistemas compostos por equações diferenciais acopladas.

### 4.1 Modelos

#### 4.1.1 Modelo CLR

Baseados no modelo de Solow 1.7 consideramos que a força de trabalho  $L$  é igual a toda a população. Porém, propomos que o crescimento populacional seja descrito por uma versão modificada do modelo de Velhust. A modificação que implementamos no modelo de Velhust faz com que o crescimento seja limitado por uma capacidade de carga  $S^*$ , que representa a população máxima que o sistema pode sustentar. E introduzimos uma função capacidade de carga  $S(C, L)$  cujo crescimento é modelado em termos de uma função forrageamento  $F(C, L)$ , representando a capacidade dos indivíduos em encontrar recursos na natureza. Portanto, do modelo de Solow temos que a evolução do estoque de capital é dada por

$$\frac{dC}{dt} = sY(C, L) - dC, \quad (4.1)$$

onde  $s$  e  $d$  são constantes positivas. O modelo modificado de Velhust é descrito da forma

$$\frac{dL}{dt} = bL \left( 1 - \frac{S(C, L)}{S^*} \right); \quad b, S^* > 0, \quad (4.2)$$

com a taxa de crescimento  $b$  garantindo que  $S \ll S^*$ . A Equação 4.2 difere do modelo de Velhust usual no sentido de que a capacidade de carga é considerada como uma função dependente do tamanho da população e do capital disponível. Caso a capacidade de carga  $S(C, L)$  seja igual à força de trabalho  $L$ , obtemos o modelo clássico de Velhust [33].

Para a dinâmica do limitador  $S^*$ , consideramos

$$\frac{dS^*}{dt} = -eS(C, L) + gF(C, L) \left( 1 - \frac{S^*}{S_T^*} \right); \quad e, S_T^* > 0; g \geq 0, \quad (4.3)$$

onde  $e$  caracteriza a diminuição da capacidade de carga, que ocorre quando o gasto dos recursos disponíveis é maior do que o encontrado e  $S_T^*$  é o limite superior da capacidade

de carga  $S^*$ , evitando crescimento ilimitado. Para  $S^* \ll S_T^*$  o parâmetro  $g$  representa uma taxa de criação sobre  $S$  relativa ao forrageamento, uma melhor exploração dos recursos disponíveis.

Considerando uma relação linear entre a capacidade de carga e os recursos disponíveis

$$R = rS^*; \quad r > 0, \quad (4.4)$$

podemos afirmar que se tivermos duas populações do mesmo tamanho, a capacidade de carga é maior para aquela com mais recursos disponíveis. Então substituindo a Equação 4.4 na dinâmica populacional 4.2 e na dinâmica da capacidade de carga 4.3, obtemos as outras duas equações que compõe o nosso modelo CLR

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = sY(C, L) - dC \\ \frac{dL}{dt} = bL \left(1 - r \frac{S(C, L)}{R}\right) \\ \frac{dR}{dt} = -eS(C, L) + gF(C, L) \left(1 - \frac{R}{R_T}\right) \end{cases} \quad (4.5)$$

Note que utilizamos apenas duas hipóteses para conectar as três equações do modelo. Ao considerarmos a força de trabalho igual a população inteira,  $L = N$ , acoplamos as Equações 4.1 e 4.2 enquanto a relação linear  $R = rS^*$  associa os recursos disponíveis com a capacidade de carga como uma função do capital  $C$  e da população  $L$ , resultando na terceira equação.

O modelo será analisado a partir de sua versão modificada

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= sC^\alpha L^{1-\alpha} - dC \\ \frac{dL}{dt} &= b \left( H(S, L, R) - \frac{S(C(t-\tau), L(t-\tau), R(t-\tau))}{S_{sup}} \right), \\ \frac{dR}{dt} &= -eG(C, L, R) + gF(C, L, R) \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde a função produção  $Y(C, L)$  é dada pela fórmula de Cobb-Douglas  $Y = C^\alpha L^{1-\alpha}$  [34],  $S_{sup} = \text{constante}$  e o retardo  $\tau$  presente na função  $S(C, L, R)$  descreve o tempo necessário para que os agentes que compõem o sistema sejam acionados, suposição inspirada no trabalho de ElFadily e colaboradores [35].

**Caso 1:** As funções que descrevem a evolução temporal do sistema serão consideradas como

$$\begin{aligned} S(C, L, R) &= L(t-\tau)R(t) \\ H(S, L, R) &= F(C, L, R) = R(t), \\ G(C, L, R) &= \frac{R^2}{R_{sup}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde a presença do retardo  $\tau$  apenas em  $L$  representa o tempo necessário para que a força de trabalho seja recrutada.  $H(S, L, R) = F(C, L, R) = R(t)$  indica que a capacidade de encontrar recursos depende apenas da disponibilidade do mesmo e  $G(C, L, R) = R^2/R_{sup}$  determina que os recursos sejam limitados. Portanto, o primeiro caso analisado será o sistema

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt} &= sC^\alpha L^{1-\alpha} - dC \\ \frac{dL}{dt} &= bR \left(1 - \frac{L(t-\tau)}{S_{sup}}\right). \\ \frac{dR}{dt} &= -e \frac{R^2}{R_{sup}} + gR\end{aligned}\quad (4.8)$$

**Caso 2:** Neste segundo caso aumentamos a complexidade com que a força de trabalho evolui no tempo e obtivemos

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt} &= sC^\alpha L^{1-\alpha} - dC \\ \frac{dL}{dt} &= bL \left(1 - \frac{R(t)L(t-\tau)}{S_{sup}}\right). \\ \frac{dR}{dt} &= -e \frac{R^2}{R_{sup}} + gR\end{aligned}\quad (4.9)$$

#### 4.1.2 Modelo predador-presa

O segundo modelo que apresentamos possui influência direta do modelo de Goodwin no sentido de tratar a relação entre capital e força de trabalho como um modelo predador-presa. No nosso caso o capital  $C$  é visto como o predador, que necessita de alguma fonte para se nutrir, usualmente a força de trabalho  $L$ . Como descrito na Seção 1.2.1, um sistema Lotka-Volterra que trata o capital  $C$  como o predador e a força de trabalho  $L$  como a presa poderia ser descrito como

$$\begin{aligned}\dot{L} &= (b - cC) L \\ \dot{C} &= (-d + sL) C\end{aligned}\quad (4.10)$$

Sistemas do tipo predador-presa também são utilizados na virologia. Adotaremos uma versão modificada de um modelo apresentado neste campo de estudo. O modelo de Mayer [36] modela a interação entre um sistema imune e uma população de agentes infecciosos e é composto por duas equações diferenciais não-lineares

$$\begin{aligned}\dot{T} &= (r - kE) T \\ \dot{E} &= p \frac{T^u}{1 + T^u} + s \frac{E^n}{1 + E^n} - E\end{aligned}\quad (4.11)$$

onde  $r, k, p$ , e  $s$  são constantes positivas. A variável  $T$  representa a população alvo, os agentes infecciosos, e sua evolução temporal é dada por uma equação que representa a presa em um sistema Lotka-Volterra usual. A segunda equação corresponde à evolução temporal dos efetores  $E$ , células imunes como linfócitos e anticorpos, e é descrita por três termos.

O primeiro termo,  $p[T^u/(1 + T^u)]$ , está relacionado a estimulação do sistema imune pela presença dos alvos. O segundo termo,  $s[E^n/(1 + E^n)]$ , indica que as células defensoras são capazes de se estimular e o último termo,  $-E$ , determina o tempo de vida das células.

Inspirados por esta dinâmica, propomos o seguinte modelo:

$$\begin{aligned} \dot{L} &= (b - cC) L - hL^2 \\ \dot{C} &= r \frac{L(t - \tau_1)^a}{1 + L(t - \tau_1)^e} + s \frac{C(t - \tau_2)^f}{1 + C(t - \tau_2)^g} - dC \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde o estoque de capital  $C$  atua como um predador que precisa da força de trabalho  $L$  para sobreviver. Adicionamos mais um termo limitador,  $hL^2$ , na equação da presa e fizemos as funções estimuladoras,  $r \frac{L(t - \tau_1)^a}{1 + L(t - \tau_1)^e}$  e  $s \frac{C(t - \tau_2)^f}{1 + C(t - \tau_2)^g}$ , dependentes de um tempo de retardo  $\tau$ . Esta modificação simula o atraso que o capital leva para responder às demandas da força de trabalho. Os potenciais  $a, e, f, g$  são constantes reais.

## 4.2 Alguns resultados analíticos

Uma das vantagens de desenvolver modelos simples como os apresentados acima é a possibilidade de obter resultados analíticos, que serão apresentados nesta seção. Estivemos interessados em encontrar os pontos fixos de cada modelo proposto e analisar como o tempo de retardo quebraria a sua estabilidade.

### 4.2.1 Modelo CLR - Caso 1

Assumindo  $\tau = 0$ , o Sistema 4.8 apresenta os seguintes pontos fixos

$$\begin{aligned} (C_1^*, L_1^*, R_1^*) &= (C^*, e^{-\frac{\ln(dC/s - \alpha \ln C)}{\alpha - 1}}, 0) \\ (C_2^*, L_2^*, R_2^*) &= (0, L^*, 0) \\ (C_3^*, L_3^*, R_3^*) &= ((d/s)^{1/(\alpha - 1)} S_{sup}, S_{sup}, 0) \\ (C_4^*, L_4^*, R_4^*) &= ((d/s)^{1/(\alpha - 1)} S_{sup}, S_{sup}, R_{sup}g/e) \\ (C_5^*, L_5^*, R_5^*) &= (0, S_{sup}, R_{sup}g/e) \end{aligned}$$

Dos cinco pontos apresentados pelo sistema, quatro são pontos faciais - possuem pelo menos uma componente nula - e um ponto interior,  $(C_4^*, L_4^*, R_4^*) = ((d/s)^{1/(\alpha - 1)} S_{sup}, S_{sup}, R_{sup}g/e)$ .

Apesar de não corresponderem a situações factíveis, analisamos a estabilidade dos pontos fixos faciais:

- $(C_1^*, L_1^*, R_1^*) = (C^*, e^{-\frac{\ln(dC/s - \alpha \ln C)}{\alpha - 1}}, 0)$  possui, em sua Jacobiana, um autovalor igual a  $g$ , que é positivo. Portanto, este é um ponto instável.
- $(C_2^*, L_2^*, R_2^*) = (0, L^*, 0)$  possui autovalores  $(-d, 0, g)$  e portanto é instável.
- $(C_3^*, L_3^*, R_3^*) = ((d/s)^{1/(\alpha-1)} S_{sup}, S_{sup}, 0)$  possui, em sua Jacobiana, um autovalor igual a  $g$ , que é positivo. Portanto, este é um ponto instável.
- $(C_5^*, L_5^*, R_5^*) = (0, S_{sup}, R_{sup}g/e)$  é estável, pois possui autovalores  $(-d, -b, -bR_{sup}g/eS_{sup})$ . Esse seria o caso em que todo o capital foi consumido, ocasionando o valor máximo da força de trabalho e dos recursos disponíveis.

Para realizar o estudo da estabilidade do ponto interior, contruímos sua matriz Jacobiana

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} d(\alpha - 1) & s(1 - \alpha)(d/s)^{\alpha/\alpha-1} & 0 \\ 0 & -\frac{bgR_{sup}}{eS_{sup}} & 0 \\ 0 & 0 & -g \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

e calculamos seus autovalores

$$d(\alpha - 1), -\frac{bgR_{sup}}{eS_{sup}}, -g.$$

Para que a função produção,  $Y = C^\alpha L^{1-\alpha}$ , satisfaça a lei dos rendimentos decrescentes  $\alpha$  deve ser menor que 1, para tanto o ponto fixo é estável e podemos verificar como a presença do retardo quebra a estabilidade.

#### 4.2.2 Modelo CLR - Caso 2

Utizando as mesmas técnicas da sessão anterior, o Modelo 4.9 com  $\tau = 0$ , apresenta os seguintes pontos fixos

$$\begin{aligned} (C_1^*, L_1^*, R_1^*) &= (0, 0, 0) \\ (C_2^*, L_2^*, R_2^*) &= (0, 0, gR_{sup}/e) \\ (C_3^*, L_3^*, R_3^*) &= (K, eS_{sup}/gR_{sup}, gR_{sup}/e) \\ (C_4^*, L_4^*, R_4^*) &= (0, eS_{sup}/gR_{sup}, R_{sup}g/e) \end{aligned}$$

onde  $K = \exp \left[ \left( \ln \left( \frac{dgR_{sup}}{eS_{sup}} \right) + \alpha \ln \left( \frac{eS_{sup}}{gR_{sup}} \right) \right) \alpha - 1 \right]$ .

A análise da estabilidade dos pontos faciais nos fornece

- $(C_1^*, L_1^*, R_1^*) = (0, 0, 0)$ , que representa um estado virgem. Possui os autovalores  $-d, b, g$ , onde  $b, g > 0$ , classificando o ponto como instável;



- $(C_2^*, L_2^*, R_2^*) = (0, 0, gR_{sup}/e)$  apresenta autovalores iguais a  $-d, b, -g$ , concluindo que o ponto é instável.
- $(C_4^*, L_4^*, R_4^*) = (0, eS_{sup}/gR_{sup}, R_{sup}g/e)$ , que representa um estado em que todo o capital foi consumido, apresenta autovalores  $-d, -b, -g$ . Podemos concluir que o ponto é estável, resultado semelhante ao obtido para o ponto interior do Caso 1.

A matriz Jacobiana do ponto fixo interior,  $(C_3^*, L_3^*, R_3^*) = (e^K, eS_{sup}/gR_{sup}, gR_{sup}/e)$ , é dada por

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -d + sK^{\alpha-1}\alpha \left(\frac{eS_{sup}}{gR_{sup}}\right)^{1-\alpha} & sK^\alpha \left(\frac{eS_{sup}}{gR_{sup}}\right)^{-\alpha} (1-\alpha) & 0 \\ 0 & -b & \frac{be^2S_{sup}}{g^2R_{sup}^2} \\ 0 & 0 & -g \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

com os autovalores

$$-d + sK^{\alpha-1}\alpha \left(\frac{eS_{sup}}{gR_{sup}}\right)^{1-\alpha}, -b, -g.$$

A condição de estabilidade para este ponto é  $d > sK^{\alpha-1}\alpha \left(\frac{eS_{sup}}{gR_{sup}}\right)^{1-\alpha}$ . E podemos estudar a quebra de estabilidade causada pelo tempo de retardo.

### 4.2.3 Modelo predador-presa

Assumindo que  $h = 0$ ,  $d = 1$  e que os potenciais  $a = e = f = g = 1$ , conseguimos obter alguns resultados analíticos sobre o Modelo 4.12. Neste caso, os pontos fixos do sistema para o caso em que os retardos são nulos devem ser:

1.  $(L_1^*, C_1^*) = (0, 0)$
2.  $(L_2^*, C_2^*) = (0, s - 1)$
3.  $(L_3^*, C_3^*) = \left(\frac{bc(s-1-b/c)}{-bc(s-1-b/c)-rc^2(1+b/c)}, b/c\right)$

Como o nosso interesse se dá nos pontos interiores, focamos a nossa atenção no ponto  $(L_3^*, C_3^*)$ , cuja condição de estabilidade é  $s > \frac{b}{b+c} \left(\frac{b}{c} - (s-1)\right)$ .

A partir da definição de Jacobiana para EDRs apresentada no Capítulo 3, podemos escrever a matriz  $\mathbf{J}$  geral para o Sistema 4.12

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \sum_{j=1}^m \mathbf{A}_j e^{-\lambda\tau_j} = \mathbf{A}_1 e^{-\lambda\tau_1} + \mathbf{A}_2 e^{-\lambda\tau_2} \\
&= \begin{bmatrix} \partial f_1^1 / \partial L & \partial f_1^1 / \partial C \\ \partial f_1^2 / \partial L & \partial f_1^2 / \partial C \end{bmatrix} e^{-\lambda\tau_1} + \begin{bmatrix} \partial f_2^2 / \partial L & \partial f_2^2 / \partial C \\ \partial f_2^2 / \partial L & \partial f_2^2 / \partial C \end{bmatrix} e^{-\lambda\tau_2} \\
\mathbf{J} &= \begin{bmatrix} b - cC^* & -cL^* \\ \frac{r}{(1+L^*)^2} e^{-\lambda\tau_1} & \frac{s}{(1+C^*)^2} e^{-\lambda\tau_2} - 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Deste resultado, podemos afirmar que:

- i A solução nula  $(L_1^*, C_1^*) = (0, 0)$ , é instável para  $\forall \tau_1, \tau_2$ ;
- ii O segundo ponto fixo  $(L_2^*, C_2^*) = (0, s - 1)$  é instável se  $b/c > s - 1 > 0$  para o caso de delays nulos.
- iii O ponto fixo interior  $(L_3^*, C_3^*) = (\frac{bc(s-1-b/c)}{-bc(s-1-b/c)-rc^2(1+b/c)}, b/c)$  corresponde a um estado em que tanto  $C$  quanto  $L$  existem num estado de tolerância. Se os delays são nulos, esta é uma solução estacionária. Para o caso em que  $\tau_1, \tau_2 \neq 0$ , utilizamos o Teorema 3.1.2 e podemos encontrar analiticamente o delay crítico que quebra a estabilidade do sistema.

Utilizamos um algoritmo Runge-Kutta adaptado, como proposto na Seção 3.2, para analisar a influência do delay  $\tau$  na estabilidade dos pontos interiores correspondentes aos Casos 1 e 2. Contudo, o programa apresentou uma incapacidade de realizar os cálculos para o modelo CLR, resultando em uma série de dados NaN (Not a Number).

Nossa hipótese é que este sistema apresenta oscilações muito abruptas e o programa não é robusto o suficiente para avaliar estas variações. O mesmo programa foi utilizado para a análise do modelo predador-presa, que apresentou um melhor comportamento, e tivemos sucesso. Os resultados serão apresentados na seção seguinte.

### 4.3 Alguns Resultados Numéricos

Nesta seção demonstramos a influência do tempo de retardo  $\tau$  na estabilidade dos pontos fixos do Sistema 4.12, produzindo bifurcações de Hopf e apresentando regime caótico à medida que variamos o parâmetro de controle  $\tau$ .

Por conveniência numérica, os valores adotados para os coeficientes foram  $b = 3.5, c = 2.5, h = 0.3, r = 1.75, s = 1.5, d = 1.0$  enquanto os potenciais correspondem a  $a = 1.0, e = 2.0, f = 1.0, g = 2.0$ . Todos os cálculos foram realizados com  $\tau_2 = 0$ .

Apresentamos a seguir a evolução temporal da força de trabalho  $L$ . Assumindo valores distintos para o tempo de retardo,  $\tau_1 = 1.0$  e  $\tau_1 = 5.0$ , apresentamos a Figura 16

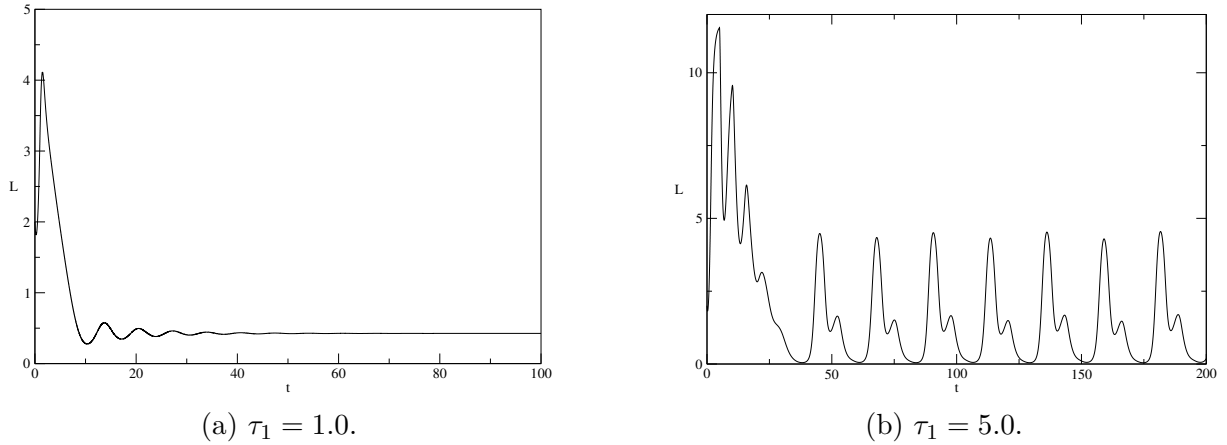


Figura 16 – Série temporal da força de trabalho  $L$ .

Fonte: Autor

Observamos que a Figura 16a apresenta uma leve oscilação na curva e rapidamente retorna para um ponto estacionário  $L^* \approx 0.5$ . No caso  $\tau = 5.0$ , representado pela Figura 16b, a série oscila indefinidamente, apresentando um ciclo limite. Como apresentado anteriormente, a bifurcação de um equilíbrio para uma oscilação periódica é conhecida como bifurcação de Hopf, e o parâmetro de controle em nosso caso é o delay  $\tau$ .

Para uma melhor visualização dos ciclos limite apresentamos a Figura 17, que ilustra o retrato de fase do sistema para 4 delays distintos,  $\tau_1 = 3.0, 5.0, 10.0, 20.0$  e  $\tau_2 = 0.0$ .

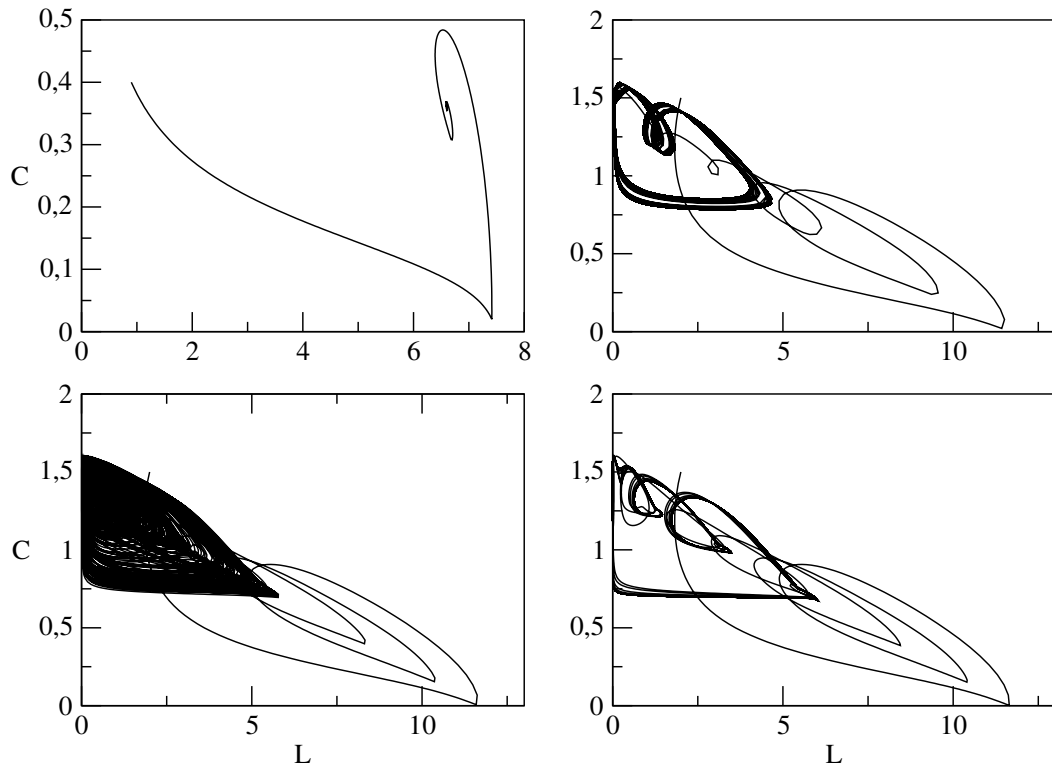


Figura 17 – Retratos de fase para os sistema 4.12. Parâmetros utilizados:  $b = 3.5, c = 2.5, h = 0.3, r = 1.75, s = 1.5, d = 1.0, a = 1.0, e = 2.0, f = 1.0, g = 2.0$  e  $\tau_1 = 3.0, 5.0, 10.0, 20.0, \tau_2 = 0.0$

Fonte: Autor

O sistema apresenta uma solução estacionária em  $\tau = 3.0$  e um ciclo limite em  $\tau = 5.0$ , esta diferença implica na existência de uma bifurcação de Hopf. No terceiro quadro,  $\tau = 10.0$ , observamos duplicações de período, que é uma das rotas para o caos, regime em que o sistema se encontra para estes parâmetros e permanece em  $\tau = 20.0$ .

Para nos auxiliar na visualização das duplicações de período, apresentamos a seguir o diagrama de bifurcação do capital  $C$  em função do parâmetro de controle  $\tau_1$ , Figura 18. Os pontos apresentados representam o valor máximo de  $C$  em cada oscilação.

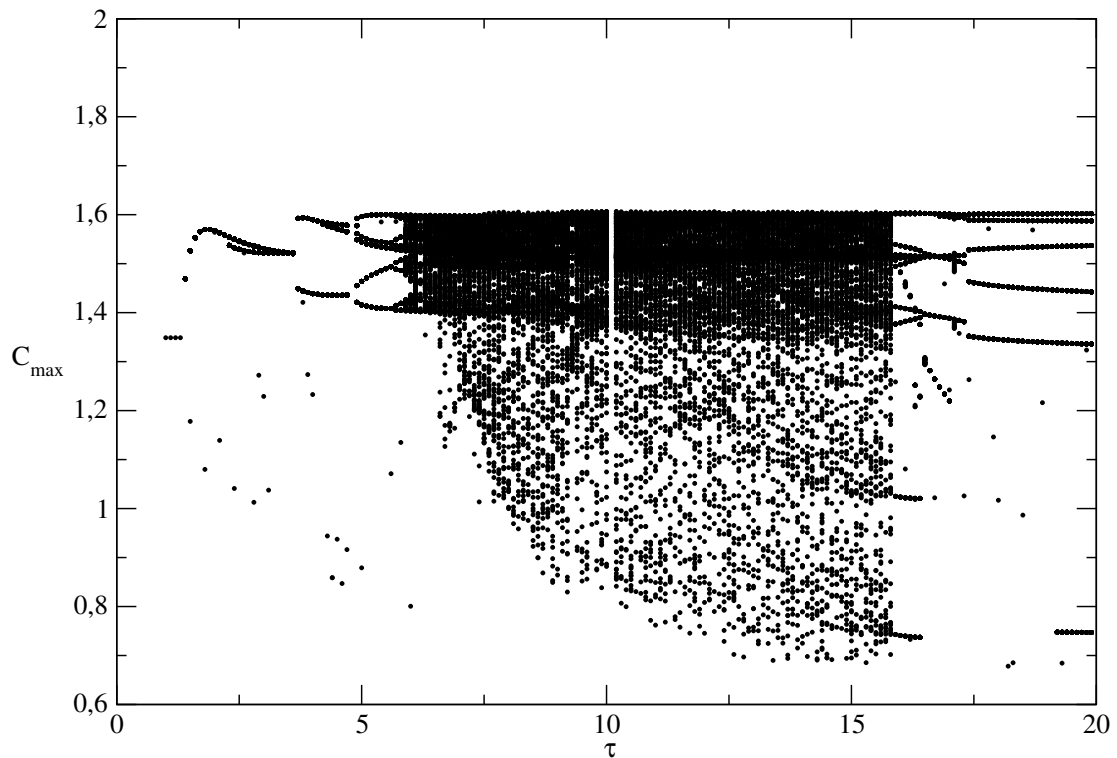


Figura 18 – Diagrama de bifurcação do capital.

Fonte: Autor

Comparando o diagrama de bifurcação (Figura 18) com os retratos de fase da Figura 17 podemos constatar a presença de uma bifurcação entre  $\tau = 3,0$  e  $\tau = 5,0$ , causando a dobra de período. À medida que o parâmetro de controle cresce as duplicações continuam a ocorrer e o sistema atinge o regime caótico.

#### 4.4 Apontamentos

Nesta dissertação propomos o modelo CLR e um modelo predador-presa para simular a dinâmica entre o capital e a força de trabalho. Apresentamos resultados analíticos e numéricos obtidos a partir de técnicas de linearização de equações diferenciais e de um algoritmo Runge-Kutta adaptado.

A estabilidade dos pontos fixos apresentados pelos sistemas foi analisada. Ao tratar o tempo de retardo como um parâmetro de controle no modelo predador-presa, observamos uma quebra de estabilidade e conseqüentemente uma transição para o caos. Não conseguimos realizar este mesmo tratamento para o modelo CLR pois o programa utilizado não se mostrou robusto o suficiente para esta tarefa.

A fim de extrair melhores resultados do modelo CLR, propõe-se realizar um estudo mais profundo sobre o desenvolvimento de técnicas computacionais e a utilização de outros algoritmos para melhor entendimento da dinâmica. Buscando avaliar a qualidade desses

modelos, recomendamos comparar seus resultados com a dos dados presentes na literatura econômica, como Solow fez com o modelo de Goodwin [37]. Realizando estudos conjuntos com economistas e afins.

# Referências

- 1 WORLD Development Indicators. <<https://databank.worldbank.org/data/reports.aspx?source=world-development-indicators>>. Acesso em: 09 de fevereiro de 2019.
- 2 SOLOW, R. M. A contribution to the theory of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics*, v. 70, p. 65, 1956.
- 3 SWAN, T. W. Economic growth and capital accumulation. *The Economic Record*, v. 32(2), p. 334–361, 1956.
- 4 ROMER, D. *Advanced Macroeconomics*. New York: McGraw-Hill, 1996.
- 5 GOODWIN, R. M. A growth cycle. In: \_\_\_\_\_. *Socialism, Capitalism and Economic Growth*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1969.
- 6 SOUZA, E.; GLERIA, I.; LYRA, M. Nonlinear models for the delayed immune response to a viral infection. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 42, p. 2494, 2009.
- 7 MESSIAS, D. et al. A nonlinear delayed model for the immune response in the presence of viral mutation. *Physica A*, v. 492, p. 215–221, 2018.
- 8 EPSTEIN, I. R. Differential delay equations in chemical kinetics: Some simple linear model systems. *J. Chem. Phys.*, v. 92, p. 1702–1712, 1990.
- 9 HENNIG, D.; SCHIMANSKY-GEIER, L.; HÄNGGI, P. Directed transport of an inertial particle in a washboard potential induced by delayed feedback. *Phys. Rev. E*, v. 79, p. 041117, 2009.
- 10 SPORTELLI, M.; CESARE, L. D.; BINETTI, M. T. A dynamic is–lm model with two time delays in the public sector. *Applied Mathematics and Computation*, v. 243, p. 728–739, 2014.
- 11 NEAMȚU, M.; OPRIȘ, D.; CHILĂRESCU, C. Hopf bifurcation in a dynamic is–lm model with time delay. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 34, p. 519 – 530, 2007.
- 12 FANTI, L.; MANFREDI, P. Chaotic business cycles and fiscal policy: An is–lm model with distributed tax collection lags. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 32, p. 736–744, 2007.
- 13 KALECKI, M. A macrodynamic theory of business cycles. *Econometrica*, v. 3, n. 3, p. 327–344, 1935.
- 14 GUERRINI, L.; MATSUMOTO, A.; SZIDAROVSKY, F. Neoclassical growth model with multiple distributed delays. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 70, p. 234 – 247, 2019.
- 15 GORI, L.; GUERRINI, L.; SODINI, M. A model of economic growth with physical and human capital: The role of time delays. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 26, n. 9, p. 093118, 2016.

- 16 FERRARA, M.; GUERRINI, L.; SODINI, M. Nonlinear dynamics in a solow model with delay and non-convex technology. *Applied Mathematics and Computation*, v. 228, p. 1 – 12, 2014.
- 17 OTT, E. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- 18 STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Massachusetts: Perseus Books Publishing, 1994.
- 19 FIEDLER-FERRARA, N.; PRADO, C. P. C. do. *Caos: uma introdução*. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1994.
- 20 GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear Oscillation, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*. New York: Springer-Verlag, 1983.
- 21 HILBORN, R. C. *Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers*. New York: Oxford University Press, 2000.
- 22 SANTOS, D. M. *Modelo não linear para resposta imunológica*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Alagoas, 2017.
- 23 KARAASLANSLI, C. Ç. Bifurcation analysis and its application. In: \_\_\_\_\_. *Numerical Simulation*. [S.l.]: IntechOpen, 2012.
- 24 BAKER, G. L.; GOLLUB, J. P. *Chaotic dynamics: an introduction*. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- 25 HALE, S. M. V. L. J. K. *Introduction to Functional Differential Equations*. New York: Springer-Verlag New York, 1993.
- 26 HUTCHINSON, G. E. Circular casual systems in ecology. *Annals of the New York Academy of Sciences*, v. 50, p. 221–246, 1948.
- 27 MAY, R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, v. 261, p. 459, 1976.
- 28 RUAN, S. Delay differential equations in single species dynamics. In: \_\_\_\_\_. *Delay Differential Equations with Applications*. [S.l.]: Springer, 2006.
- 29 ARINO, J.; WANG, L.; WOLKOWICZ, G. An alternative formulation for a delayed logistic equation. *Journal of Theoretical Biology*, v. 241, p. 109–119, 2006.
- 30 SMITH, H. L. *An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences*. New York: Springer Science+ Business Media, LLC, 2011.
- 31 COOKE, K. L.; DRIESSCHE, P. V. D. On zeroes of some transcendental equations. *Funkcialaj Ekvacioj*, v. 29, p. 77–90, 1986.
- 32 KUATE, R. et al. *A delay differential equation solver for MONOLIX & MLXPLORE*. [S.l.], 2014. 19 p. Disponível em: <<https://hal.inria.fr/hal-00952874>>.
- 33 VELHUST, P.-F. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres, et des Beaux-Arts de Belgique*, v. 18, p. 1–38, 1845.



- 
- 34 COBB, C.; DOUGLAS, P. A theory of production. *The American Economic Review*, v. 18, p. 139–165, 1928.
- 35 ELFADILY, S.; KADDAR, A.; NAJIB, K. Dynamics of a delayed solow model with effective labor demand. *Journal of Advances in Applied Mathematics*, v. 18, p. 175–182, 2016.
- 36 MAYER K. S. ZAENKER, U. a. d. H. H. A basic mathematical model of the immune response. *Chaos*, v. 5, n. 1, p. 155–161, 1995.
- 37 SOLOW, R. Goodwin growth cycle: Reminiscence and rumination. In: \_\_\_\_\_. *Nonlinear and Multisectoral Macrodynamics: Essays in Honour of Richard Goodwin*. [S.l.]: The MacMillan Press Ltd, 1990.