

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

MARCEL AUGUSTO PINTO

**Efeito Wolf no espalhamento de luz por materiais não
hermitianos**

Maceió

2021

MARCEL AUGUSTO PINTO

**Efeito Wolf no espalhamento de luz por materiais não
hermitianos**

Dissertação apresentada ao Instituto de Física
da Universidade Federal de Alagoas como parte
dos requisitos para obtenção do título de Mestre
em Ciências.

Orientador: Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho

Maceió

2021

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

P659e Pinto, Marcel Augusto.
Efeito Wolf no espelhamento de luz por materiais não hermitianos / Marcel Augusto Pinto. – 2021.
73 f. : il. color.

Orientador: Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho.
Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2020.

Bibliografia: f. 57-59.
Apêndices: f. 61-73.

1. Materiais não hermitianos. 2. Efeito Wolf. 3. Espalhamento (Física). 4. Separação espectral. I. Título.

CDU: 535.3

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

“Efeito Wolf no espalhamento de luz por materiais não-Hermitianos”

por

Marcel Augusto Pinto

A Banca Examinadora composta pelos professores Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho (orientador e presidente da banca), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas; Guilherme Martins Alves de Almeida, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas e Danilo Gomes Pires, da *Duke University, Department of Electrical and Computer Engineering*, consideram o candidato aprovado com grau “B”.

Maceió, 30 de julho de 2021.



Prof. Dr. Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho



Prof. Dr. Guilherme Martins Alves de Almeida



Prof. Dr. Danilo Gomes Pires

*“The task is not to see what has never seen before,
but to think what has never been thought before
about what you see everyday.”
(Erwin Schrödinger)*

RESUMO

Um campo policromático parcialmente coerente foi espalhado por um material com simetria \mathcal{PT} . O corpo espalhador foi descrito como uma esfera gaussiana e observamos o comportamento do campo espalhado em um ponto distante. A análise foi feita considerando o formalismo da coerência clássica e assumindo a validade da aproximação de Born. Os resultados mostraram que mudanças espectrais induzidas pelas correlações são fortemente dependentes das propriedades de ganho e perda do material. Por exemplo, a frequência central da densidade espectral do campo espalhado apresentou um comportamento descontínuo em função do parâmetro não hermitiano que caracteriza as propriedades de ganho e perda do material. A razão desta descontinuidade foi o fato de que a introdução da não hermiticidade no sistema gera uma raiz dentro do espectro de frequências hermitiano, ocorrendo desta forma uma separação do espectro em duas partes assimétricas. Outro ponto observado foi que as propriedades de ganho e perda do material introduzem novas direções de espalhamento que não eram possíveis no caso hermitiano.

Palavras-chave: Materiais não hermitianos. Efeito Wolf. Espalhador determinístico. Separação espectral.

ABSTRACT

A partially coherent polychromatic field was scattered by a \mathcal{PT} -symmetric material. We described the scatterer by a gaussian sphere and, we observed the scattered radiation at the far-field. We analyzed this process under the formalism of classical coherence theory, assuming the validity of Born's approximation. Our results show that correlation-induced spectral changes are strongly dependent on the gain and loss properties of the material. For example, the center frequency of the spectral density of the scattered field shows a discontinuous behavior as a function of the non-hermitian parameter characterizing the properties of gain and loss of the material. This discontinuity is due to the introduction of the non-hermiticity to the system generates a root inside of the hermitian spectrum, creating an asymmetrical split in the spectrum. We also observed new scattering directions induced by gain and loss properties of the material who are forbidden in the Hermitian case.

Keywords: Non-Hermitian material. Wolf effect. Deterministic scatterer. Spectral split.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	15
2.1	Introdução à teoria clássica de coerência óptica	15
2.1.1	Processos estacionários e hipótese ergódica	15
2.1.2	Fenômenos de coerência no domínio espaço temporal	16
2.1.3	Fenômenos de coerência no domínio das frequências	21
2.2	Espalhamento de um campo escalar por um material não homogêneo . .	25
2.3	Introdução a sistemas com simetria \mathcal{PT}	35
2.3.1	Definindo a simetria de um sistema	35
2.3.2	Operações de paridade e inversão temporal	36
2.3.3	Simetria \mathcal{PT} , sistemas abertos e fechados	37
2.3.4	Simetria \mathcal{PT} no contexto da óptica	41
3	RESULTADOS E DISCUSSÕES	45
3.1	Espalhamento por uma esfera Gaussiana	45
3.1.1	Modelagem e descrição do potencial espalhador	45
3.1.2	Propriedades de coerência do campo incidente	46
3.1.3	Densidade espectral do campo espalhado	48
3.1.4	Mudanças no espectro de frequências induzidas pela não Hermiticidade . . .	50
3.1.4.1	Análise das frequências	50
3.1.4.2	Análise espacial	55
4	CONCLUSÕES	57
	REFERÊNCIAS	59
	APÊNDICE A – PROPRIEDADE VETORIAL	63
	APÊNDICE B – TRANSFORMADA DE FOURIER DO POTENCIAL ESPALHADOR	65
	APÊNDICE C – ANÁLISE DOS PONTOS CRÍTICOS DA DENSIDADE ESPECTRAL PARA UMA FREQUÊNCIA FIXA . .	71

1 INTRODUÇÃO

No estudo da mecânica quântica é postulado que o hamiltoniano que descreve um sistema é hermitiano. Esta hipótese é assumida de forma a garantir que os autovalores de energia sejam reais e tenhamos uma evolução temporal unitária (1, 2). No entanto, Bender e Boettcher(3) nos mostra que sistemas com ganho e perda no qual os hamiltonianos que o descrevem não são hermitianos, podem possuir o espectro de autovalores reais. Estes hamiltonianos são invariantes às transformações de paridade e reversão temporal aplicadas de forma conjunta, denominados assim \mathcal{PT} simétricos. No entanto, é importante nos atentarmos que a condição de simetria \mathcal{PT} não é necessária nem suficiente para garantir um espectro de autovalores reais (4, 5, 6).

Embora a óptica clássica e a mecânica quântica sejam formalismos que descrevem processos em escalas diferentes, quando efetuamos a aproximação paraxial em um campo óptico para um meio não homogêneo obtemos uma equação que se assemelha muito à equação de Schrödinger dependente do tempo (7). Dessa forma, é possível mapear o potencial $V(\mathbf{r})$ da teoria quântica no índice de refração $n(\mathbf{r})$ de um material não homogêneo (8).

Devido a esta analogia, campos da óptica e da fotônica receberam grandes contribuições relacionadas à simetria \mathcal{PT} (9, 10). É possível citar uma variedade de aplicações, por exemplo, invisibilidade unidirecional (11, 12, 13), isolantes topológicos (14), absorvedores perfeitamente coerentes (15, 16, 17) e geração de lasers com momento angular orbital (18).

A propagação de um campo está sujeita a desvios induzidos por propriedades de correlação em seu espectro de frequências (19, 20, 21, 22). Um fenômeno semelhante pode ser observado no contexto do espalhamento, onde desvios espectrais podem ser encontrados na radiação espalhada em um ponto distante, tanto para espalhadores determinísticos quanto estocásticos (23, 24, 25, 26). Este deslocamento espectral recebe o nome de efeito Wolf em homenagem a Emil Wolf que descreveu este fenômeno pela primeira vez.

Para o caso do espalhamento, geralmente, é assumido que o meio espalhador é hermitiano, linear e isotrópico. O estudo deste fenômeno em materiais não hermitianos, isto é, espalhadores com ganho e perda, começou a ser explorado recentemente (27, 28, 29, 30, 31, 32). Este trabalho tem como objetivo descrever o espalhamento de uma onda policromática por um material contínuo com dimensões finitas que possui simetria \mathcal{PT} . O interesse principal é compreender o papel da não hermiticidade do espalhador no espectro do campo espalhado e em suas direções de espalhamento se comparado com o caso hermitiano. No capítulo 2 faremos uma revisão de conceitos importantes ao nosso estudo. Começaremos demonstrando as principais quantidades utilizadas na teoria de coerência tanto no domínio temporal quanto no domínio das frequências. Partiremos logo após para a teoria de espalhamento de um campo escalar por um corpo não homogêneo. Por fim, faremos uma introdução a simetria \mathcal{PT} dando ênfase em como aplicamos

os conceitos em um sistema óptico. No capítulo 3 apresentaremos nossos principais resultados e finalizaremos com o capítulo 4 onde descreveremos nossas principais conclusões.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 INTRODUÇÃO À TEORIA CLÁSSICA DE COERÊNCIA ÓPTICA

2.1.1 PROCESSOS ESTACIONÁRIOS E HIPÓTESE ERGÓDICA

Um processo determinístico se comporta da mesma maneira sempre que as condições iniciais e parâmetros forem os mesmos. Naturalmente, este tipo de processo é apenas uma aproximação, uma vez que em processos reais sempre haverá flutuações que não garantirão que as sob mesmas condições iniciais obteremos os mesmos resultados. A este último processo damos o nome de estocástico ou aleatório.

Nosso principal objetivo aqui será desenvolver ferramentas que nos ajude a descrever tais processos. Seja $U(t)$ um processo estocástico que dependa do tempo t , suponha que $U(t)$ seja obtido em um laboratório efetuando uma medida em experimento um intervalo de tempo $-T \leq t \leq T$. Para ter uma ideia rudimentar do valor de U dentro do intervalo, podemos calcular a sua média temporal (33, p. 47),

$$\langle U(t) \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T U(t) dt . \quad (2.1)$$

Podemos efetuar medidas diferentes $U_1(t), U_2(t), \dots$ do processo estocástico. Estas realizações formam um conjunto denominado *ensemble*, podendo ser expresso da seguinte maneira:

$$\{U(t)\} = \{U_1(t), U_2(t), \dots\} . \quad (2.2)$$

Naturalmente, poderemos calcular uma média entre as realizações deste *ensemble* da seguinte forma

$$\langle U(t) \rangle_e = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_i(t) . \quad (2.3)$$

Este cálculo não é trivial. Porém, associada a cada realização $U_i(t) \in \{U(t)\}$ existe uma função de densidade de probabilidade de primeira ordem $p(U_i, t)$. Desta forma, também podemos calcular a média de *ensemble* como:

$$\langle U(t) \rangle_e = \int_{-\infty}^{\infty} U p(U, t) dU . \quad (2.4)$$

Lembre-se que a quantidade $p(U; t)dU$ é a probabilidade de $U(t)$ assumir um valor entre U e $U + dU$ no tempo t . Podemos calcular também as probabilidades conjuntas das

realizações. Para isso precisaremos da função de densidade de probabilidade de ordens maiores. A quantidade $p(U_1, t_1; U_2, t_2) dU_1 dU_2$ representa a probabilidade de encontrarmos o processo U_1 entre os valores U_1 e $U_1 + dU_1$ no tempo t_1 e o processo U_2 entre os valores U_2 e $U_2 + dU_2$ no tempo t_2 . Se a função de densidade de probabilidade de k -ésima ordem de $U(t)$ satisfizer a propriedade, (34, p. 63),

$$p(U_1, U_2, \dots, U_k; t_1, t_2, \dots, t_k) = p(U_1, U_2, \dots, U_k; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_k + \tau). \quad (2.5)$$

Para todo $\tau \in \mathbb{R}$ e todo $k \in \mathbb{N}$, dizemos que $U(t)$ é um **processo estacionário no sentido estrito**. Portanto, a função de densidade de primeira ordem será independente do tempo e logo poderemos escrevê-la como $p(U)$. Já a função de densidade de probabilidade de segunda ordem, $p(U_1, U_2; t_1, t_2)$ dependerá somente da diferença de tempo $\tau = t_2 - t_1$. Podendo portanto, ser reescrita como $p(U_1, U_2, \tau)$ (34, p. 63).

Por outro lado, se temos um processo estocástico $U(t)$ em que sua média de *ensemble* $\langle U(t) \rangle_e$ não depende do tempo t e a média de *ensemble* do produto $\langle U(t_1)U(t_2) \rangle_e$ depende somente da diferença de tempo $\tau = t_2 - t_1$, dizemos que este é um **processo estacionário no sentido amplo** (34, p. 63). Perceba que um processo estacionário no sentido estrito sempre será estacionário no sentido amplo, no entanto, o inverso nem sempre é verdade.

Um processo estritamente estacionário é ergódico se, dada uma função determinística $F(U)$ qualquer, a média temporal de $F(U_k)$ calculada no intervalo $-\infty < t < \infty$ é igual a média de *ensemble* $\langle F(U) \rangle_e$ (35, p. 17). Em outras palavras, a seguinte relação deve ser satisfeita:

$$\langle F[U_k(t)] \rangle_t = \langle F[U(t)] \rangle_e, \forall U_k \in \{U(t)\}. \quad (2.6)$$

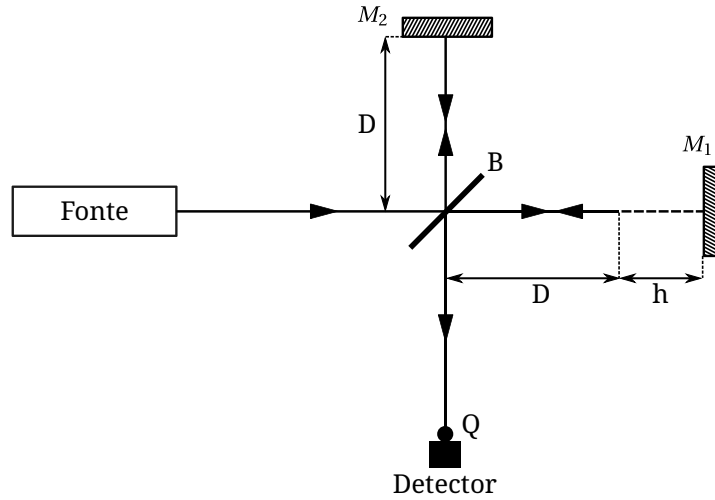
Embora estejamos discernindo a média temporal da média de *ensemble* por meio dos índices na notação, usaremos a partir de agora a notação sem índice $\langle \dots \rangle$ para representar uma média de *ensemble*. Por fim, consideraremos que os sistemas utilizados serão estacionários pelo menos no sentido amplo.

2.1.2 FENÔMENOS DE COERÊNCIA NO DOMÍNIO ESPAÇO TEMPORAL

Nesta seção vamos estudar a semelhança estatística entre campos estocásticos. A quantidade que usaremos para medir o quão semelhante dois campos são será a correlação entre eles em um determinado ponto no espaço e no tempo. Para tornar mais simples a visualização, analisaremos alguns experimentos, começando pelo experimento do interferômetro de Michelson.

Suponha que um feixe $U(t)$ parta da sua fonte e incida em um divisor de feixes B (Figura 1). Este divisor separará o feixe em duas partes, onde uma delas incidirá no espelho M_1 e a outra parte incidirá no espelho M_2 . Considere também que a distância entre o divisor

Figura 1 – Esquema ilustrando o interferômetro de Michelson



Fonte: Adaptado de Lauterborn e Kurz(36)

de feixes e os espelhos M_1 e M_2 são respectivamente $D + h$ e D . Após a reflexão, os feixes são recombinados no divisor B e este feixe resultante incide no detector Q .

Seja $U_1(t)$ o processo estocástico que descreve o feixe que segue na direção do espelho M_1 , e $U_2(t)$ o feixe em direção ao espelho M_2 . O campo total U_t em Q será:

$$U_t(Q, t) = U_1(Q, t) + U_2(Q, t). \quad (2.7)$$

Observe que o feixe U_1 percorre uma distância adicional $2h$, (sendo h na ida e h na volta). Desta forma, o tempo que ele demora para percorrer esta distância será $2h/c$, onde c é a velocidade da luz. Sendo assim, podemos escrever a expressão para cada campo no ponto Q como:

$$U_1(Q, t) = U(Q, t + 2h/c), \quad (2.8)$$

$$U_2(Q, t) = U(Q, t). \quad (2.9)$$

A intensidade do campo total em Q é dada por: (36, p. 36),

$$I(Q, t) = \langle |U_t(Q, t)|^2 \rangle. \quad (2.10)$$

Logo,

$$\begin{aligned} I(Q, t) &= \langle U_t^*(Q, t) U_t(Q, t) \rangle \\ &= \langle [U_1^*(Q, t) + U_2^*(Q, t)] [U_1(Q, t) + U_2(Q, t)] \rangle \\ &= \langle |U_1(Q, t)|^2 \rangle + \langle |U_2(Q, t)|^2 \rangle + \langle U_1^*(Q, t) U_2(Q, t) \rangle + \langle U_1(Q, t) U_2^*(Q, t) \rangle \end{aligned}$$

Lembrando que dado $z \in \mathbb{C}$, temos $z + z^* = 2 \operatorname{Re}\{z\}$. Assim:

$$I(Q, t) = \langle |U_1(Q, t)|^2 \rangle + \langle |U_2(Q, t)|^2 \rangle + 2 \operatorname{Re}\{ \langle U_1(Q, t) U_2^*(Q, t) \rangle \}. \quad (2.11)$$

Desta forma, identificando os dois primeiros termos como a intensidade de U_1 e U_2 respectivamente,

$$I(Q, t) = I_1 + I_2 + 2\text{Re}\{\langle U_1(Q, t)U_2^*(Q, t) \rangle\}. \quad (2.12)$$

Perceba que a intensidade no ponto Q depende da soma das intensidades de cada campo U_1 e U_2 , mas também da média do produto dos campos. Este terceiro termo é chamado de termo de interferência e corresponde à correlação entre os dois campos. Reescrevendo os campos em termos de $U(t)$:

$$I(Q, t) = I_1 + I_2 + 2\text{Re}\{\langle U^*(Q, t)U(Q, t + \tau) \rangle\}, \quad (2.13)$$

onde $\tau = 2h/c$.

Assumindo que o campo no ponto Q é um processo estacionário, pelo menos no sentido amplo, a intensidade possui a característica $\langle |U(Q, t)|^2 \rangle = \langle |U(Q, t + \tau)|^2 \rangle$. Desta maneira $I_1 = I_2 = I_0$. Portanto,

$$I(Q, t) = 2I_0 + 2\text{Re}\{\langle U^*(Q, t)U(Q, t + \tau) \rangle\}, \quad (2.14)$$

Definindo a função de autocorrelação: (36, p. 38),

$$\Gamma(Q, \tau) = \langle U^*(Q, t)U(Q, t + \tau) \rangle. \quad (2.15)$$

Observe que $\Gamma(Q, \tau)$ depende da posição Q e da diferença de tempo τ , pois estamos assumindo que o processo é estacionário.

A função Γ descreve o quão semelhante o nosso campo $U(Q, t)$ é com uma versão dele mesmo $U(Q, t + \tau)$ deslocada temporalmente. No entanto, note que não é trivial inferirmos o quão semelhantes são olhando apenas para o valor de $\Gamma(Q, \tau)$, uma vez que Γ não é limitada superiormente. Desta maneira, é interessante determinarmos uma outra função, chamada de **grau complexo de coerência** (36, p. 38),

$$\gamma(Q, \tau) = \frac{\Gamma(Q, \tau)}{\Gamma(Q, 0)}, \quad (2.16)$$

onde $0 \leq |\gamma(Q, \tau)| \leq 1$. Quando $|\gamma(Q, \tau)| = 0$, os campos não são estatisticamente semelhantes, ou seja, não são correlacionados. Dizemos que este tipo de campo é completamente incoerente. Por outro lado, para $|\gamma(Q, \tau)| = 1$, os campos serão estatisticamente semelhantes e portanto, serão correlacionados. Este tipo de campo é chamado de completamente coerente. Por fim para campos que possuírem o grau complexo de coerência na região $0 < |\gamma(Q, \tau)| < 1$ são parcialmente coerentes.

Para observar o efeito da correlação na intensidade do campo, retomemos o exemplo do interferômetro, reescrevendo a equação (2.14) utilizando a equação (2.16):

$$I(Q, t) = 2I_0 + 2\Gamma(Q, 0) \text{Re}\{\gamma(Q, \tau)\}.$$

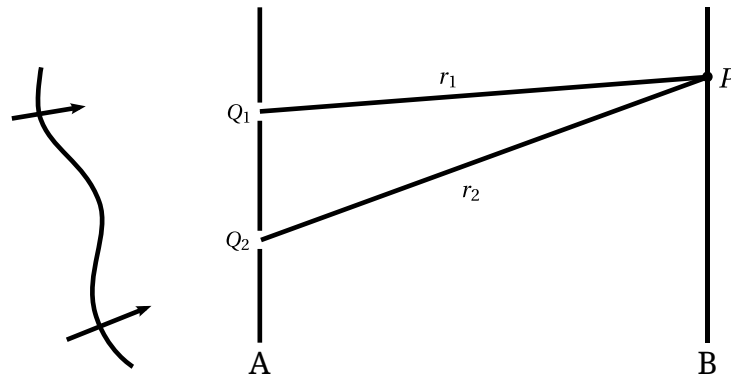
Observe que $\Gamma(Q, 0) = \langle U^*(Q, t)U(Q, t) \rangle = I_0$. Desta forma, a equação anterior se resume a

$$I(Q, t) = 2I_0(1 + \text{Re}\{\gamma(Q, \tau)\}). \quad (2.17)$$

Obtemos portanto que a intensidade no ponto Q depende da autocorrelação do campo $U(t)$ no detector.

No experimento da dupla fenda de Young (Figura 2), consideraremos que um campo $U(t)$, estacionário - no sentido amplo-, incide uma barreira A que possui duas fendas na posição Q_1 e Q_2 (35). Desta maneira $U(Q_1, t)$ e $U(Q_2, t)$ representam o campo em cada fenda no tempo t . Queremos saber como os valores destes campos influenciam no campo medido em um ponto P no anteparo B .

Figura 2 – Esquema ilustrando o experimento da dupla fenda de Young.



Fonte: Adaptado de Wolf(35)

Uma vez que as distâncias das fendas Q_1 e Q_2 são r_1 e r_2 , respectivamente, dividindo essa distância pela velocidade da luz obtemos os tempos que cada campo leva para chegar ao ponto P . Logo $t_1 = r_1/c$ e $t_2 = r_2/c$. Desta maneira, o campo no ponto P será dado por,

$$U(P, t) = K_1 U(Q_1, t - t_1) + K_2 U(Q_2, t - t_2), \quad (2.18)$$

e os fatores K_1 e K_2 são números imaginários que levam em consideração efeitos de difração em cada fenda (35). De forma semelhante ao que fizemos para o experimento de Michelson, vamos observar como a intensidade I do campo depende dos campos em Q_1 e Q_2 . Desta forma, a expressão da intensidade em P será:

$$I(P) = \langle U^*(P, t) U(P, t) \rangle \quad (2.19)$$

$$= \langle [K_1^* U^*(Q_1, t - t_1) + K_2^* U^*(Q_2, t - t_2)] [K_1 U(Q_1, t - t_1) + K_2 U(Q_2, t - t_2)] \rangle \quad (2.20)$$

Observe que na equação anterior a intensidade I é descrita sem a dependência temporal por se tratar de um processo estacionário. Calculando os produtos, simplificamos a expressão anterior para:

$$I(P) = |K_1|^2 \langle |U(Q_1, t - t_1)|^2 \rangle + |K_2|^2 \langle |U(Q_2, t - t_2)|^2 \rangle + 2 \operatorname{Re} \{ K_1^* K_2 \langle U^*(Q_1, t - t_1) U(Q_2, t - t_2) \rangle \} \quad (2.21)$$

Uma vez que o campo considerado é estacionário, as propriedades estatísticas de interesse não dependem da origem temporal e podemos deslocar a origem em t_1 unidades. Definindo

$t' = t - t_1 \implies t = t' + t_1$, portanto,

$$I(P) = |K_1|^2 \langle |U(Q_1, t')|^2 \rangle + |K_2|^2 \langle |U(Q_2, t' + \tau)|^2 \rangle + 2 \operatorname{Re} \{ K_1^* K_2 \langle U^*(Q_1, t') U(Q_2, t' + \tau) \rangle \}, \quad (2.22)$$

tal que $\tau = t_1 - t_2 = (r_1 - r_2)/c$. Definimos então a função de coerência mútua:

$$\Gamma(Q_1, Q_2, \tau) = \langle U^*(Q_1, t') U(Q_2, t' + \tau) \rangle. \quad (2.23)$$

Esta função é a correlação cruzada entre os campos nas fendas Q_1 e Q_2 com uma diferença de tempo τ entre os campos. Se compararmos com a equação (2.15), veremos que trata-se de um caso particular da equação (2.23) onde $Q_1 = Q_2 = Q$.

Vamos fazer algumas considerações para simplificar a equação de $I(P)$. A intensidade do campo em cada fenda será dada por $I(Q_i) = \langle |U(Q_i, t')|^2 \rangle$ onde $i = 1, 2$. Podemos escrever desta forma generalizada pois o campo é estacionário, logo o deslocamento temporal na fenda 2 não faz diferença para o cálculo da intensidade. Considerando agora que a fenda 2 seja bloqueada, obteríamos em P a seguinte intensidade,

$$I_1(P) = |K_1|^2 I(Q_1). \quad (2.24)$$

Analogamente, se bloqueássemos a fenda 1, a intensidade em P seria,

$$I_2(P) = |K_2|^2 I(Q_2). \quad (2.25)$$

Portanto, podemos utilizar as expressões anteriores para reescrever $I(P)$

$$I(P) = I_1(P) + I_2(P) + 2 \operatorname{Re} \{ K_1^* K_2 \Gamma(Q_1, Q_2, \tau) \}.$$

Reescrevendo K_j em termos de $I_j(P)$ ($j = 1, 2$). Lembre-se que consideramos K_j como números puramente imaginários. Assim, posso escrevê-los na forma $K_j = i|K_j|$. Portanto, obtemos que $K_1^* K_2 = |K_1||K_2|$. Por outro lado, note que escrevemos $I_j(P) = |K_j|^2 I(Q_j)$. Desta forma,

$$|K_j| = \sqrt{\frac{I_j(P)}{I(Q_j)}} = \sqrt{\frac{I_j(P)}{\Gamma(Q_j, Q_j, 0)}}. \quad (2.26)$$

A expressão de $I(P)$ será,

$$I(P) = I_1(P) + I_2(P) + 2\sqrt{I_1(P)I_2(P)} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\Gamma(Q_1, Q_2, \tau)}{\sqrt{\Gamma(Q_1, Q_1, 0)\Gamma(Q_2, Q_2, 0)}} \right\}. \quad (2.27)$$

Se definirmos o grau complexo de coerência como,

$$\gamma(Q_1, Q_2, \tau) = \frac{\Gamma(Q_1, Q_2, \tau)}{\sqrt{\Gamma(Q_1, Q_1, 0)\Gamma(Q_2, Q_2, 0)}}, \quad (2.28)$$

finalmente poderemos escrever a equação (2.27),

$$I(P) = I_1(P) + I_2(P) + 2\sqrt{I_1(P)I_2(P)} \operatorname{Re} \{ \gamma(Q_1, Q_2, \tau) \}. \quad (2.29)$$

Perceba que a equação (2.16) é um caso particular da equação (2.28), assim como no caso da função de coerência mútua. Naturalmente, de forma análoga ao experimento de Michelson, o grau complexo de coerência assumirá valores no intervalo $0 \leq |\gamma(Q_1, Q_2, \tau)| \leq 1$. O valor nulo denota completa ausência de correlação entre os campos e o valor unitário denota correlação máxima entre os campos nos pontos Q_1 e Q_2 . Note que a intensidade em um ponto arbitrário do anteparo dependerá das intensidades dos campos em cada fenda e de como eles são correlacionados.

Conseguimos portanto, com a ajuda dos experimentos anteriores, definir uma métrica da coerência entre campos para dois pontos distintos no espaço (Equação (2.23)). Este tipo de métrica é fundamental para o estudo de problemas de teoria de coerência de segunda ordem. No entanto, nem sempre é conveniente para nós trabalharmos com o problema no domínio temporal. Desta maneira, na seção seguinte vamos estender a teoria desenvolvida até o momento para o espaço das frequências.

2.1.3 FENÔMENOS DE COERÊNCIA NO DOMÍNIO DAS FREQUÊNCIAS

Na seção anterior obtemos a função de coerência mútua, a quantidade mais importante para o estudo de fenômenos de coerência. Nesta seção, vamos desenvolver um formalismo que nos permitirá expandir nossa análise para o domínio das frequências. Desta forma, definimos a função densidade espectral cruzada da seguinte forma (35, p. 60),

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (2.30)$$

É preciso se atentar ao fato de que não necessariamente a transformada de Fourier de uma função de correlação implica em outra função de correlação. Lembre-se que definimos a função de correlação como um valor que nos fornece uma maneira de quantificar a semelhança estatística entre dois processos estocásticos.

Diante disso, para que $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ seja uma função de correlação, precisamos escrevê-la como a média de um produto de duas quantidades estatísticas. No entanto, como demonstrado por Wolf(37), sob circunstâncias gerais é possível mostrar que a função de densidade espectral cruzada é uma função de correlação. Para reproduzirmos esta demonstração, considere um campo em um domínio fechado D no espaço livre. Assumiremos que W seja hermitiano, não negativo e quadrado integrável em D (35, p. 61). Representaremos W como a seguinte série,

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \sum_n \lambda_n(\omega) \phi_n^*(\mathbf{r}_1, \omega) \phi_n(\mathbf{r}_2, \omega). \quad (2.31)$$

As funções $\phi_n(\mathbf{r}, \omega)$ e $\lambda_n(\omega)$ obedecem a equação de autovalor,

$$\hat{K} \phi_n(\mathbf{r}_1, \omega) = \lambda_n(\omega) \phi_n(\mathbf{r}_2, \omega), \quad (2.32)$$

de forma que o operador \hat{K} é dado pela integral de Fredholm,

$$\hat{K}\phi_n(\mathbf{r}_1, \omega) = \int_D W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \phi_n(\mathbf{r}_2, \omega) d^3 r_2 . \quad (2.33)$$

Assumiremos também que as autofunções $\phi_n(\mathbf{r}, \omega)$ são ortonormais em D . Ou seja,

$$\int_D \phi_n^*(\mathbf{r}, \omega) \phi_m(\mathbf{r}, \omega) d^3 r = \delta_{nm} , \quad (2.34)$$

tal que δ_{nm} é uma delta de Kronecker que se comporta da seguinte forma,

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = m, \\ 0 & \text{se } n \neq m. \end{cases}$$

Os autovalores $\lambda_n(\omega)$, por sua vez, são reais e positivos para todo $n \geq 0$ (35, p. 61). É importante ressaltar que a função de densidade espectral cruzada satisfaz as equações de Helmholtz,

$$\nabla_1^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) + k^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = 0 , \quad (2.35)$$

$$\nabla_2^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) + k^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = 0 . \quad (2.36)$$

Os operadores ∇_1^2 e ∇_2^2 são laplacianos aplicados em relação a \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 . Substituindo eqrefeq: W expansion em (2.36), obtemos,

$$\sum_n \lambda_n(\omega) \phi_n^*(\mathbf{r}_1, \omega) \nabla_2^2 \phi_n(\mathbf{r}_2, \omega) + k^2 \sum_n \lambda_n(\omega) \phi_n^*(\mathbf{r}_1, \omega) \phi_n(\mathbf{r}_2, \omega) = 0$$

Multiplicando $\phi_m(\mathbf{r}_1, \omega)$ em ambos os lados,

$$\sum_n \lambda_n(\omega) \phi_n^*(\mathbf{r}_1, \omega) \phi_m(\mathbf{r}_1, \omega) \nabla_2^2 \phi_n(\mathbf{r}_2, \omega) + k^2 \sum_n \lambda_n(\omega) \phi_n^*(\mathbf{r}_1, \omega) \phi_m(\mathbf{r}_1, \omega) \phi_n(\mathbf{r}_2, \omega) = 0$$

Integrando em relação a \mathbf{r}_1 no volume D ,

$$\begin{aligned} \sum_n \lambda_n(\omega) \nabla_2^2 \phi_n(\mathbf{r}_2, \omega) \int_D d^3 r_1 \phi_n^*(\mathbf{r}_1, \omega) \phi_m(\mathbf{r}_1, \omega) + k^2 \sum_n \lambda_n(\omega) \phi_n(\mathbf{r}_2, \omega) \times \\ \times \int_D d^3 r_1 \phi_n^*(\mathbf{r}_1, \omega) \phi_m(\mathbf{r}_1, \omega) = 0 \end{aligned}$$

Aplicando a condição de ortonormalidade (2.34),

$$\sum_n \lambda_n(\omega) \nabla_2^2 \phi_n(\mathbf{r}_2, \omega) \delta_{nm} + k^2 \sum_n \lambda_n(\omega) \phi_n(\mathbf{r}_2, \omega) \delta_{nm} = 0$$

Portanto,

$$\lambda_m(\omega) \nabla_2^2 \phi_m(\mathbf{r}_2, \omega) + k^2 \lambda_m(\omega) \phi_m(\mathbf{r}_2, \omega) = 0$$

Considerando $\lambda_m(\omega) \neq 0$, posso dividir ambos os lados da equação por $\lambda_m(\omega)$. Uma vez que a dependência se dá com apenas uma posição, vou reescrever em termos mais gerais utilizando \mathbf{r} ,

$$\nabla^2 \phi_m(\mathbf{r}, \omega) + k^2 \phi_m(\mathbf{r}, \omega) = 0 . \quad (2.37)$$

Portanto, no espaço livre, $\phi_m(\mathbf{r}, \omega)$ satisfaz a equação de Helmholtz.

Consideremos agora um *ensemble* de realizações $\{U(\mathbf{r}, \omega)\}$ onde cada membro $U_i(\mathbf{r}, \omega)$ possui a forma,

$$U_i(\mathbf{r}, \omega) = \sum_n^i a_n(\omega) \phi_n(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.38)$$

onde os coeficientes $a_n(\omega)$ são variáveis estocásticas que satisfazem a expressão (35, p. 62),

$$\langle a_n(\omega) a_m(\omega) \rangle = \lambda_n(\omega) \delta_{nm}, \quad (2.39)$$

tal que $\lambda_n(\omega)$ é o autovalor que já estudamos anteriormente. É importante ressaltar que neste caso a média de *ensemble* está sendo feita para uma frequência fixa ω . Consideremos então a função de correlação calculada em uma realização $U_i(\mathbf{r}, \omega) \in \{U(\mathbf{r}, \omega)\}$,

$$\langle U_i^*(\mathbf{r}_1, \omega) U_i(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle = \sum_n \sum_m \langle a_n^*(\omega) a_m(\omega) \rangle \phi_n^*(\mathbf{r}_1, \omega) \phi_m(\mathbf{r}_2, \omega). \quad (2.40)$$

Note que do lado direito a média age somente nos coeficientes, pois eles são os únicos valores estocásticos nesta expressão. Utilizando a equação (2.39) podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle U_i^*(\mathbf{r}_1, \omega) U_i(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle &= \sum_n \sum_m \lambda_n(\omega) \delta_{nm} \phi_n^*(\mathbf{r}_1, \omega) \phi_m(\mathbf{r}_2, \omega), \\ &= \sum_n \lambda_n(\omega) \phi_n^*(\mathbf{r}_1, \omega) \phi_n(\mathbf{r}_2, \omega). \end{aligned}$$

Comparando o resultado do lado direito com a equação (2.31), podemos identificar que

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \langle U(\mathbf{r}_1, \omega) U(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle. \quad (2.41)$$

Portanto, demonstramos que $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ é uma função de correlação de um *ensemble* de realizações $\{U(\mathbf{r}, \omega)\}$. Dado uma realização U_i deste *ensemble*, como representamos U_i por uma combinação linear das autofunções $\phi_n(\mathbf{r}, \omega)$ e como estas autofunções satisfazem a equação de Helmholtz, U_i também irá satisfazer esta equação. Desta maneira, podemos atribuir cada realização do nosso *ensemble* à parte espacial de um campo monocromático $V(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t}$ (35, p. 63).

Definiremos a densidade espectral $S(\mathbf{r}, \omega)$ do ponto \mathbf{r} como a função de densidade espectral cruzada calculada em $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$,

$$S(\mathbf{r}, \omega) = W(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) = \langle U^*(\mathbf{r}, \omega) U(\mathbf{r}, \omega) \rangle. \quad (2.42)$$

Similarmente ao que fizemos na seção anterior, podemos definir uma quantidade normalizada para medir o grau de coerência de um processo estocástico. Portanto, seja $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ o grau espectral de coerência, pode ser representado pela expressão

$$\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \frac{W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)}{\sqrt{W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \omega) W(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \omega)}} = \frac{W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)}{\sqrt{S(\mathbf{r}_1, \omega) S(\mathbf{r}_2, \omega)}}. \quad (2.43)$$

Também de maneira análoga à função γ , μ satisfaz a relação $0 \leq |\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)| \leq 1$. Assim, $|\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)| = 0$ significa completa incoerência e $|\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)| = 1$ significa máxima coerência entre os campos nos pontos $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ para uma determinada frequência ω . Com esta introdução, desenvolvemos as ferramentas da teoria de coerência que necessitamos para continuar com o nosso estudo no próximo capítulo.

2.2 ESPALHAMENTO DE UM CAMPO ESCALAR POR UM MATERIAL NÃO HOMOGÊNIO

Nesta seção descreveremos o comportamento de um campo ao incidir em um meio espalhador não homogêneo, ou seja que não possui um índice de refração constante. Estaremos particularmente interessados em conhecer o comportamento da parte espalhada do campo a uma grande distância do espalhador.

Para tanto, partiremos das equações de Maxwell na matéria que possuem a forma¹

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (2.44)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.45)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{D}} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad (2.46)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}} = 0. \quad (2.47)$$

Onde \mathbf{E} é o campo elétrico, \mathbf{B} é vetor de indução magnética, \mathbf{D} é o deslocamento elétrico, \mathbf{H} é o campo magnético e \mathbf{j} é a densidade de corrente elétrica. É importante ressaltar que o conjunto de equações anteriores são válidas para um meio no qual dado um ponto, as propriedades físicas em sua vizinhança sejam contínuas (38, p. 1).

Consideraremos que o campo utilizado é harmônico, que o material espalhador é isotrópico², está em repouso e possui um volume V . Desta forma, podemos escrever as seguintes relações,

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad (2.48)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \quad (2.49)$$

Onde ε é a permissividade dielétrica e μ é a permeabilidade magnética do material. Assumindo que o meio não possui correntes e nem cargas, ou seja $\mathbf{j} = 0$ e $\rho = 0$. O conjunto das equações de Maxwell anteriormente apresentado se resumem a:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (2.50)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.51)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{D}} = 0, \quad (2.52)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}} = 0. \quad (2.53)$$

Substituindo (2.49) em (2.53) e dividindo ambos os lados por μ , obtemos

$$\frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{H}} = 0. \quad (2.54)$$

¹ Neste trabalho consideraremos o sistema de unidades gaussianas.

² Isto implica que as propriedades físicas do material não dependem da direção.

Aplicando agora o rotacional na equação anterior

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \frac{1}{c} \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = 0. \quad (2.55)$$

Derivando (2.52) em relação ao tempo e utilizando (2.48) obtemos,

$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}} - \frac{\varepsilon}{c} \ddot{\mathbf{E}} = 0. \quad (2.56)$$

Substituindo a expressão anterior em (2.55) teremos

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \frac{\varepsilon}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} = 0. \quad (2.57)$$

Podemos reescrever o primeiro termo desta equação se utilizarmos a propriedade $\nabla \times (u\mathbf{v}) = u\nabla \times \mathbf{v} + (\nabla u) \times \mathbf{v}$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) = \frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{1}{\mu} \nabla \ln \mu \times \mathbf{E}, \quad (2.58)$$

onde o segundo termo do lado direito foi reescrito como $\nabla(1/\mu) = -\nabla\mu/\mu^2 = -\nabla \ln \mu/\mu$. Podemos reescrever as duas aplicações consecutivas do rotacional através da seguinte propriedade $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$. Portanto,

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) = \frac{1}{\mu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{\mu} \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{\mu} \nabla \ln \mu \times \mathbf{E}. \quad (2.59)$$

O divergente de \mathbf{E} pode ser reescrito utilizando a equação (2.48) e considerando a propriedade $\nabla \cdot (u\mathbf{v}) = u\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla u$. Desta maneira, obtemos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{D} \right) = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\varepsilon} \right). \quad (2.60)$$

Da equação (2.50) tenho que $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$. Portanto,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\mathbf{E} \cdot \nabla \ln \varepsilon. \quad (2.61)$$

Onde reescrevemos \mathbf{D} em termos de \mathbf{E} pela equação (2.48) e $\nabla(1/\varepsilon) = -\nabla \ln \varepsilon/\varepsilon$. Desta forma, a equação (2.59) ficará

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) = -\frac{1}{\mu} \nabla(\mathbf{E} \cdot \nabla \ln \varepsilon) - \frac{1}{\mu} \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{\mu} \nabla \ln \mu \times \mathbf{E}. \quad (2.62)$$

Substituindo o resultado anterior em (2.57) e multiplicando ambos os lados por $-\mu$, obteremos

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} + \nabla \ln \mu \times \mathbf{E} + \nabla(\mathbf{E} \cdot \nabla \ln \varepsilon) = 0. \quad (2.63)$$

A fim de simplificarmos a equação que obtemos, faremos algumas considerações. Assumiremos que o meio é não magnético, logo $\mu = 1$ e portanto $\ln \mu = 0$. Consideraremos também que o campo elétrico possa ser expresso da seguinte forma $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t}$. Desta

forma, podemos calcular a derivada temporal de segunda ordem: $\ddot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega, t) = -\omega^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t}$. Substituindo este resultado na equação anterior e removendo a exponencial comum a todos os termos da equação teremos (38, p. 695)

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + k^2 \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \nabla[\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla \ln \varepsilon(\mathbf{r}, \omega)] = 0. \quad (2.64)$$

Onde $k = \omega/c$. Expandindo a expressão para o último termo da equação (2.64),

$$\nabla \ln \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)} \nabla \varepsilon(\mathbf{r}, \omega). \quad (2.65)$$

Portanto

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla \ln \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \frac{E_x}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{E_y}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \frac{E_z}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}, \quad (2.66)$$

as dependências da posição \mathbf{r} e frequência ω do lado direito da equação foram omitidas para manter a notação mais limpa. Por fim,

$$\begin{aligned} \nabla[\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla \ln \varepsilon(\mathbf{r}, \omega)] = & \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{E_x}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{E_y}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \frac{E_z}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{E_x}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{E_y}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \right. \\ & \left. + \frac{E_z}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{E_x}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{E_y}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \frac{E_z}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Desta forma, se reescrevo a componente x da equação (2.64), obtenho

$$\nabla^2 E_x + k^2 \varepsilon E_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{E_x}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{E_y}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \frac{E_z}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right] = 0. \quad (2.68)$$

Observe que as componentes desta equação não são independentes entre si e o acoplamento ocorre devido ao último termo que depende das outras coordenadas. Nossa primeira aproximação será feita para torná-las independentes.

Consideremos que a variação de $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)$ com a posição é desprezível para distâncias da ordem do comprimento de onda λ (38, p. 696). Assim, teremos que $\nabla \ln \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \approx 0$. Reescrevendo a equação (2.64),

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + k^2 n^2(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (2.69)$$

onde $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)$ foi reescrito em termos do índice de refração, $n(\mathbf{r}, \omega)$, por meio da equação (39, p. 383)

$$n^2(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon(\mathbf{r}, \omega). \quad (2.70)$$

Obtemos pela equação (2.69) que as componentes do campo elétrico estão desacopladas. Logo, podemos continuar nossa análise para uma componente arbitrária $U(\mathbf{r}, \omega)$, reescrevendo a equação (2.69) como

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}, \omega) + k^2 n^2(\mathbf{r}, \omega) U(\mathbf{r}, \omega) = 0. \quad (2.71)$$

Somando e subtraindo o termo $k^2 U(\mathbf{r}, \omega)$ na equação anterior,

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}, \omega) + k^2 U(\mathbf{r}, \omega) = -4\pi \frac{k^2}{4\pi} [n^2(\mathbf{r}, \omega) - 1] U(\mathbf{r}, \omega). \quad (2.72)$$

O fator que multiplica $U(\mathbf{r}, \omega)$ do lado direito da equação (2.72) pode ser definido como (38, p. 696)

$$F(\mathbf{r}, \omega) = \frac{k^2}{4\pi} [n^2(\mathbf{r}, \omega) - 1]. \quad (2.73)$$

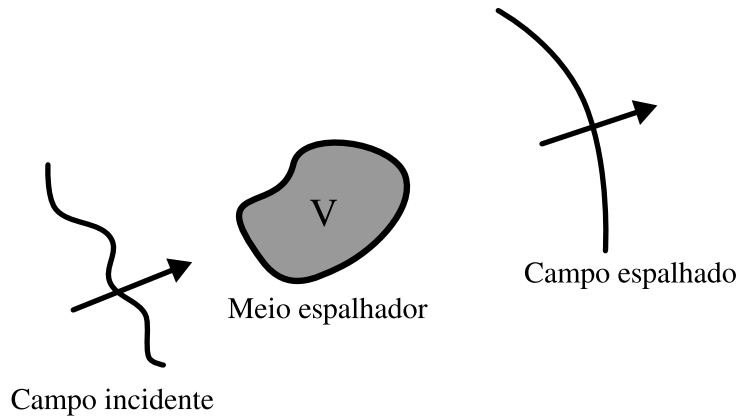
Esse fator possui o nome de **potencial espalhador do meio** e terá uma importância crucial nos estudos a seguir. Assim, posso reescrever a equação (2.72) como

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}, \omega) + k^2 U(\mathbf{r}, \omega) = -4\pi F(\mathbf{r}, \omega) U(\mathbf{r}, \omega). \quad (2.74)$$

Relembrando o problema abordado: um campo $U^{(i)}(\mathbf{r}, \omega)$ incide sobre um material espalhador que possui um volume V (Figura 3). Devido a esta interação, é gerado um campo espalhado $U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega)$. Podemos representar o campo total neste sistema como a soma do campo incidente com o campo espalhado, que pode ser escrito como

$$U(\mathbf{r}, \omega) = U^{(i)}(\mathbf{r}, \omega) + U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega). \quad (2.75)$$

Figura 3 – Esquema ilustrando um campo incidindo em um material espalhador de volume V . Após a interação do campo incidente $U^{(i)}(\mathbf{r}, \omega)$ com o material obtemos o campo espalhado por ele $U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega)$.



Fonte: Adaptado de Born e Wolf(38)

Vamos impor que o campo incidente seja uma onda plana. Logo, este campo precisa satisfazer a equação de Helmholtz,

$$(\nabla^2 + k^2)U^{(i)}(\mathbf{r}, \omega) = 0. \quad (2.76)$$

Substituindo a equação (2.75) em (2.74), obtemos

$$(\nabla^2 + k^2) [U^{(i)}(\mathbf{r}, \omega) + U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega)] = -4\pi F(\mathbf{r}, \omega) U(\mathbf{r}, \omega). \quad (2.77)$$

Distribuindo os termos do lado esquerdo

$$(\nabla^2 + k^2)U^{(i)}(\mathbf{r}, \omega) + (\nabla^2 + k^2)U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega) = -4\pi F(\mathbf{r}, \omega)U(\mathbf{r}, \omega). \quad (2.78)$$

Pela equação (2.76), o primeiro termo do lado esquerdo é anulado. Assim,

$$(\nabla^2 + k^2)U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega) = -4\pi F(\mathbf{r}, \omega)U(\mathbf{r}, \omega). \quad (2.79)$$

Nosso objetivo agora é converter a equação diferencial anterior em uma equação integral. Para isso considere $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, uma função de Green do operador de Helmholtz. Então, esta função precisa satisfazer a seguinte equação

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.80)$$

tal que $\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ é uma delta de Dirac. Usando a equação (2.79) e a equação (2.80), posso montar um sistema de equações da seguinte forma

$$\begin{cases} (\nabla^2 + k^2)U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega) = -4\pi F(\mathbf{r}, \omega)U(\mathbf{r}, \omega), \\ (\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ e a segunda equação por $U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega)$,

$$\begin{cases} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')(\nabla^2 + k^2)U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega) = -4\pi F(\mathbf{r}, \omega)U(\mathbf{r}, \omega)G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega)(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega). \end{cases}$$

Distribuindo agora o produto do lado esquerdo de ambas as equações,

$$\begin{cases} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\nabla^2 U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega) + k^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega) = -4\pi F(\mathbf{r}, \omega)U(\mathbf{r}, \omega)G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega)\nabla^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + k^2 U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega)G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega). \end{cases}$$

Por fim, subtraindo a primeira equação da segunda

$$U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega)\nabla^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\nabla^2 U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega) = 4\pi F(\mathbf{r}, \omega)U(\mathbf{r}, \omega)G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - 4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega). \quad (2.81)$$

Vamos considerar que a função de Green utilizada é uma função simétrica (38, p. 697). Ou seja, $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$. Desta maneira, por conveniência de notação, podemos reescrever a equação anterior como

$$U^{(s)}(\mathbf{r}', \omega)\nabla^2 G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - G(\mathbf{r}' - \mathbf{r})\nabla^2 U^{(s)}(\mathbf{r}', \omega) = 4\pi F(\mathbf{r}', \omega)U(\mathbf{r}', \omega)G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - 4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r})U^{(s)}(\mathbf{r}', \omega).$$

Utilizando, do lado esquerdo da equação, a propriedade vetorial demonstrada no Apêndice A, podemos escrever a equação anterior como

$$\nabla \cdot \left[U^{(s)}(\mathbf{r}', \omega)\nabla G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - G(\mathbf{r}' - \mathbf{r})\nabla U^{(s)}(\mathbf{r}', \omega) \right] = 4\pi F(\mathbf{r}', \omega)U(\mathbf{r}', \omega)G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - 4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r})U^{(s)}(\mathbf{r}', \omega). \quad (2.82)$$

Precisamos agora integrar dentro de um volume em ambos os lados da expressão anterior. O volume de integração V_R considerado será uma esfera de raio R , com o material espalhador posicionado na origem O no centro desta esfera (Figura 4). Assim, integrando em ambos os lados da equação (2.82),

$$\begin{aligned} \int_{V_R} d^3 r' \nabla \cdot \left[U^{(s)}(\mathbf{r}', \omega) \nabla G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \nabla U^{(s)}(\mathbf{r}', \omega) \right] = \\ = \int_{V_R} d^3 r' 4\pi F(\mathbf{r}', \omega) U(\mathbf{r}', \omega) G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - 4\pi \int_{V_R} d^3 r' \delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) U^{(s)}(\mathbf{r}', \omega). \end{aligned} \quad (2.83)$$

Aplicando o teorema da divergência no lado esquerdo da equação, transformo a integração sobre o volume V_R em uma integração sobre a superfície S_R . Do lado direito, a integral envolvendo o potencial espalhador $F(\mathbf{r}', \omega)$ é feita no volume do material espalhador V , uma vez que $F(\mathbf{r}', \omega) = 0$ se $\mathbf{r}' \notin V$.

$$\begin{aligned} \int_{S_R} d^2 r' \hat{\mathbf{n}} \cdot \left[U^{(s)}(\mathbf{r}', \omega) \nabla G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \nabla U^{(s)}(\mathbf{r}', \omega) \right] = \\ = \int_V d^3 r' 4\pi F(\mathbf{r}', \omega) U(\mathbf{r}', \omega) G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - 4\pi U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega) \end{aligned} \quad (2.84)$$

Lembrando da notação da derivada direcional $\partial f / \partial \hat{\mathbf{n}} \equiv \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla f$, posso reescrever a equação anterior como

$$\begin{aligned} \int_{S_R} d^2 r' U^{(s)}(\mathbf{r}', \omega) \frac{\partial G(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{\partial \hat{\mathbf{n}}} - \int_{S_R} d^2 r' G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \frac{\partial U^{(s)}(\mathbf{r}', \omega)}{\partial \hat{\mathbf{n}}} = \\ = \int_V d^3 r' 4\pi F(\mathbf{r}', \omega) U(\mathbf{r}', \omega) G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - 4\pi U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega) \end{aligned} \quad (2.85)$$

Por fim, explicitando $U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega)$, obtemos uma expressão para o campo espalhado

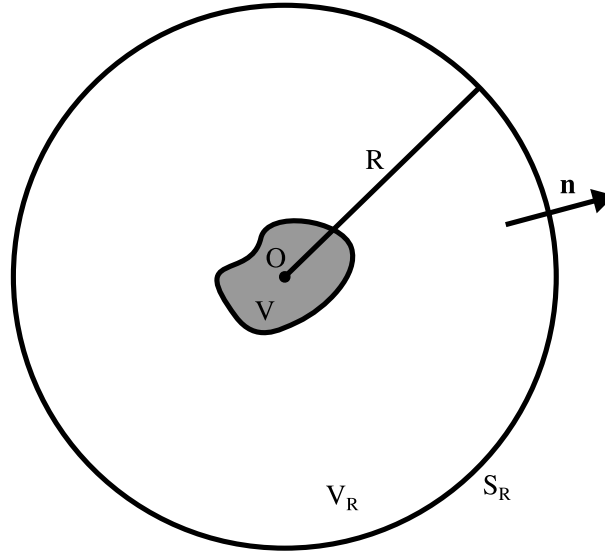
$$\begin{aligned} U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega) = \int_V d^3 r' F(\mathbf{r}', \omega) U(\mathbf{r}', \omega) G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi} \int_{S_R} d^2 r' U^{(s)}(\mathbf{r}', \omega) \frac{\partial G(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{\partial \hat{\mathbf{n}}} + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{S_R} d^2 r' G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \frac{\partial U^{(s)}(\mathbf{r}', \omega)}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \end{aligned} \quad (2.86)$$

Postulando que para uma longa distância do espalhador o campo espalhado se comporte como uma onda esférica (38), para $R \rightarrow \infty$ as integrais de superfície em (2.86) não contribuirão para o campo. Logo podemos reescrever a equação (2.86), para um R muito grande como,

$$U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega) = \int_V d^3 r' F(\mathbf{r}', \omega) U(\mathbf{r}', \omega) G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad (2.87)$$

Até o momento estamos tratando a equação (2.87) em sua forma mais geral. Ou seja, não estamos utilizando nenhuma função de Green específica, assumimos apenas que $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega)$ era

Figura 4 – Esquema ilustrando a região de integração utilizado na Equação 2.82. R é o raio da esfera, O é a origem no qual o objeto espalhador de volume V está centrado. Como estamos tratando de um problema espacial, naturalmente essa esfera possuirá um volume V_R e uma superfície S_R . Por fim, $\hat{\mathbf{n}}$ é um versor ortogonal à superfície da esfera.



Fonte: Adaptado de Born e Wolf(38)

uma função simétrica. Para prosseguirmos, necessitamos impor uma função de Green para este problema. Considere então a seguinte função para o espaço livre,

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) = \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.88)$$

Como estamos interessados no campo distante do espalhador, podemos simplificar a expressão da função de Green. Seja Q um ponto dentro do espalhador e \mathbf{r}' o vetor posição que aponta para Q e P um ponto de interesse distante do espalhador, podemos escrever o vetor posição que aponta para P como $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{s}}$, lembrando que $\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}} = 1$.

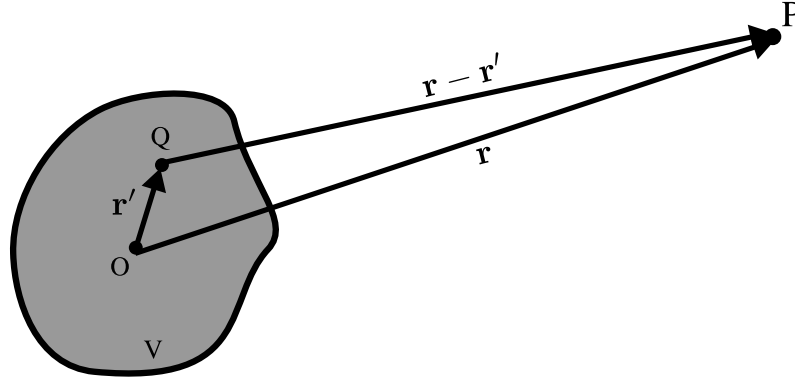
Considerando que P está distante do espalhador, $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$. Portanto,

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \\ &= \sqrt{|\mathbf{r}|^2 + |\mathbf{r}'|^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} \\ &= |\mathbf{r}| \sqrt{1 + \left(\frac{|\mathbf{r}'|}{|\mathbf{r}|}\right)^2 - 2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}|^2}}. \end{aligned}$$

Com $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'| \implies |\mathbf{r}'|/|\mathbf{r}| \ll 1$, desconsideraremos termos de ordem quadrática desta razão. Logo,

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx |\mathbf{r}| \sqrt{1 - 2\frac{\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}|}}. \quad (2.89)$$

Figura 5 – Notação para o desenvolvimento da aproximação para campo distante



Fonte: Adaptado de Born e Wolf(38)

Lembrando que a expansão em série de um binômio (40, p. 33) é dada por

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots \quad (2.90)$$

Se $x \ll 1$, podemos desprezar os termos de ordem quadrática e superior, e a expansão fica na forma

$$(1+x)^m \approx 1 + mx. \quad (2.91)$$

Assim, obtemos uma situação semelhante em (2.89), uma vez que o termo $\frac{\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}|} \ll 1$. Podemos simplificar essa expressão para

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx |\mathbf{r}| \left(1 - \frac{\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}|} \right).$$

Logo, escrevendo $|\mathbf{r}| = r$, obtenho

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}'. \quad (2.92)$$

Desta maneira, posso reescrever (2.88) como

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) \approx \frac{e^{ikr} e^{-ik\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}'}}{r - \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}'}$$

Uma vez que $\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}' \propto r'$, podemos simplificar o denominador considerando que $r - \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}' \approx r$. Desta maneira, finalmente posso escrever a função de Green da seguinte forma,

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) \approx \frac{e^{ikr} e^{-ik\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}'}}{r}. \quad (2.93)$$

É importante ressaltar essas aproximações são impostas, por isso nossa solução também será aproximada. Por conveniência de notação utilizarei o sinal de igualdade mesmo para expressões aproximadas, portanto, é importante que o leitor tenha em mente o regime de validade dessas expressões. Desta forma, reescrevo o campo espalhado como

$$U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{e^{ikr}}{r} \int_V d^3 r' F(\mathbf{r}', \omega) U(\mathbf{r}', \omega) e^{-ik\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}'} \quad (2.94)$$

Lembre-se que escrevemos o campo total como $U(\mathbf{r}, \omega) = U^{(i)}(\mathbf{r}, \omega) + U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega)$. Logo

$$U(\mathbf{r}, \omega) = U^{(i)}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{e^{ikr}}{r} \int_V d^3 r' F(\mathbf{r}', \omega) U(\mathbf{r}', \omega) e^{-ik\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}'}. \quad (2.95)$$

Observe que obtemos uma equação recursiva para o campo total cuja solução fechada, em geral, não é trivial de ser obtida. Ao efetuarmos a substituição da equação (2.95) em si mesmo, um número infinito de vezes, teremos a seguinte série

$$U(\mathbf{r}, \omega) = U^{(i)}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{e^{ikr}}{r} \int_V d^3 r' F(\mathbf{r}', \omega) U^{(i)}(\mathbf{r}', \omega) e^{-ik\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}'} + \\ + \frac{e^{ikr}}{r} \int_V d^3 r' F(\mathbf{r}', \omega) e^{-ik\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}'} \frac{e^{ikr'}}{r'} \int_V d^3 r'' F(\mathbf{r}'', \omega) U^{(i)}(\mathbf{r}'', \omega) e^{-ik\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}''} + \dots \quad (2.96)$$

Para calcularmos o valor do campo total utilizando (2.96) precisamos somar esta série infinita que, na maioria dos casos, é divergente. Uma forma de contornarmos esse problema é truncar esta série, transformando-a em uma série finita e portanto convergente. Se considerarmos os n primeiros termos desta série, dizemos que efetuamos uma aproximação de Born de ordem $n - 1$.

Neste nosso problema de espalhamento, recorreremos a aproximação de Born de primeira ordem. Fisicamente, essa aproximação implica em considerar que nosso meio produz um espalhamento fraco, ou seja, o índice de refração $n(\mathbf{r}, \omega)$ é aproximadamente 1 (35, p. 113). Com isso teremos pela equação (2.73) que $F(\mathbf{r}, \omega) \approx 0$. Logo pela equação (2.94) teremos $U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega) \approx 0$. Isto implica que $|U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega)| \ll |U^{(i)}(\mathbf{r}, \omega)|$. Desta forma, pela equação (2.75),

$$U(\mathbf{r}, \omega) \approx U^{(i)}(\mathbf{r}, \omega). \quad (2.97)$$

Logo, podemos reescrever (2.95) como,

$$U(\mathbf{r}, \omega) = U^{(i)}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{e^{ikr}}{r} \int_V d^3 r' F(\mathbf{r}', \omega) U^{(i)}(\mathbf{r}', \omega) e^{-ik\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}'}. \quad (2.98)$$

Observe agora que removemos a dependência recursiva da expressão do campo total, que dependerá somente do campo incidente e do potencial espalhador. Note que poderíamos fazer a aproximação de Born apenas com os argumentos físicos, ou seja, sem considerar a série descrita

na equação (2.96). No entanto, é importante que o leitor esteja ciente de sua existência, pois caso o espalhador não possuísse um índice de refração quase unitário, teríamos de considerar termos de ordem mais alta a fim de descrevermos corretamente o campo total.

Portanto pelas equações (2.75) e (2.98), podemos escrever a expressão do campo espalhado como

$$U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{e^{ikr}}{r} \int_V d^3r' F(\mathbf{r}', \omega) U^{(i)}(\mathbf{r}', \omega) e^{-ik\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}'}. \quad (2.99)$$

Perceba que as equações do campo total e espalhado estão mais tratáveis, possibilitando agora obtermos soluções analíticas fechadas.

2.3 INTRODUÇÃO A SISTEMAS COM SIMETRIA \mathcal{PT}

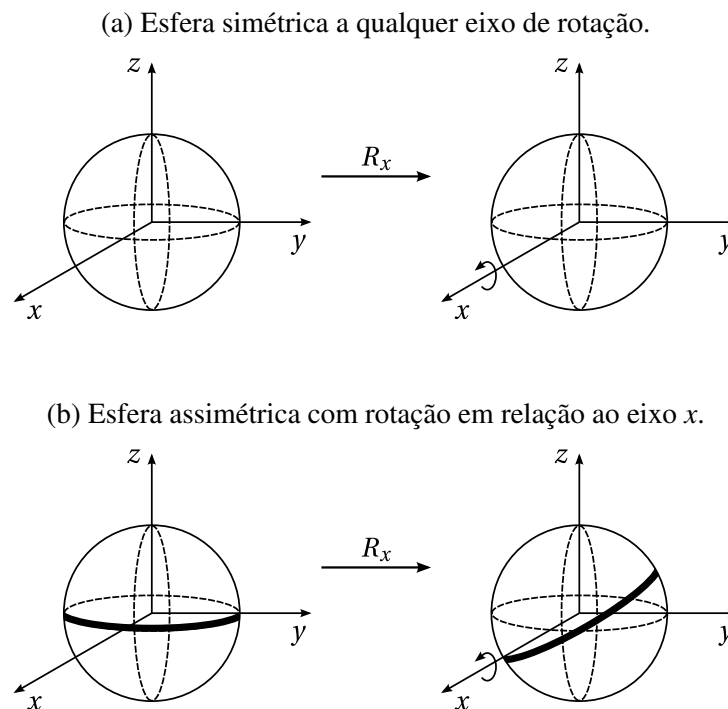
2.3.1 DEFININDO A SIMETRIA DE UM SISTEMA

Simetrias são associadas a transformações feitas em um sistema. Sempre que uma transformação arbitrária A for realizada neste sistema e o resultado que obtemos for indistinguível do sistema original, dizemos que este sistema possui simetria em relação a A (41).

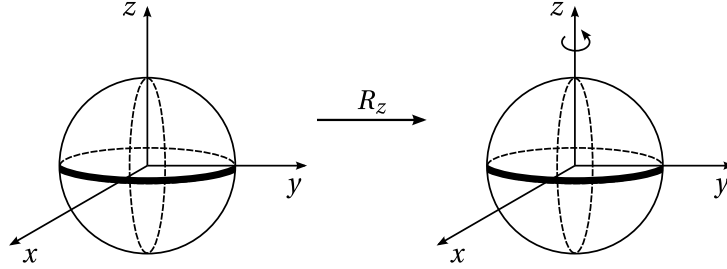
Para ilustrar um pouco melhor, imagine uma esfera perfeita (lisa e sem marcas). Podemos efetuar uma rotação R arbitrária nesta esfera e o sistema permanecerá indistinguível do sistema anterior. Neste caso, esta esfera possui uma simetria de rotação em relação a qualquer eixo arbitrário que escolhermos (Figura 6a).

No entanto, podemos construir um sistema que possui simetria em relação a um único eixo de rotação. Considere agora que haja uma linha longitudinal ao redor do equador desta esfera. A partir de agora, ela deixa de ser simétrica em relação a qualquer eixo de rotação e podemos conferir isso realizando algumas rotações. Por exemplo, ao efetuarmos uma rotação entorno do eixo x , o sistema resultante é facilmente distinguível do original (Figura 6b). Por outro lado, ao efetuarmos uma rotação entorno do eixo z o sistema resultante será igual ao original. Portanto esta segunda esfera é simétrica a rotações entorno do eixo z . Em outras palavras, este sistema é **invariante** a uma transformação de rotação em torno do eixo z (Figura 6c).

Figura 6 – Esquema ilustrando a simetria de um sistema utilizando uma esfera sujeita a transformações de rotação R .



(c) Esfera simétrica com rotação em relação ao eixo z .



Fonte: Autor

2.3.2 OPERAÇÕES DE PARIDADE E INVERSÃO TEMPORAL

A partir de agora, vamos tratar de duas transformações importantes para nosso estudo: a transformação de paridade e de inversão temporal. Podemos interpretar a operação de paridade como uma reflexão em relação à origem. Desta maneira, em um sistema clássico, podemos expressar as equações de transformação como,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(x) &= -x, \\ \mathcal{P}(p) &= -p,\end{aligned}$$

onde x representa a posição e p representa o momento. Por outro lado, se considerarmos um sistema quântico, onde a posição e o momento são representadas pelos operadores X e P , podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathcal{P}X\mathcal{P}^{-1} &= -X, \\ \mathcal{P}P\mathcal{P}^{-1} &= -P.\end{aligned}$$

O operador de inversão temporal \mathcal{T} atuará diretamente na direção do fluxo do tempo no sistema, invertendo o fluxo natural da evolução temporal. Matematicamente podemos expressar a ação deste operador como $\mathcal{T}(t) = -t$ e a sua atuação na posição e momento podem ser expressas para um sistema clássico como,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(x) &= x, \\ \mathcal{T}(p) &= -p.\end{aligned}$$

Já para um sistema quântico, as expressões são dadas por

$$\begin{aligned}\mathcal{T}X\mathcal{T}^{-1} &= X, \\ \mathcal{T}P\mathcal{T}^{-1} &= -P.\end{aligned}$$

É importante ressaltar que o operador de reversão temporal é anti linear, ou seja, efetuará a conjugação complexa das constantes multiplicativas (42, p. 30). Desta forma, ao aplicar o operador \mathcal{T} em uma combinação linear obtenho,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(ax_1 + bx_2) &= a^* \mathcal{T}(x_1) + b^* \mathcal{T}(x_2), \\ \mathcal{T}(cp_1 + dp_2) &= c^* \mathcal{T}(p_1) + d^* \mathcal{T}(p_2),\end{aligned}$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Apesar da expressão anterior ter sido escrita para um sistema clássico, podemos encontrar uma expressão análoga se considerarmos combinações dos operadores X e P para um sistema quântico.

2.3.3 SIMETRIA \mathcal{PT} , SISTEMAS ABERTOS E FECHADOS

Um sistema com simetria \mathcal{PT} é um sistema que possui invariância sob a aplicação combinada das transformações de inversão temporal e paridade.

Quando nos tratamos de sistemas, sejam quânticos ou clássicos, as expressões que os descrevem podem ser obtidas através dos hamiltonianos destes sistemas. No entanto, para obtermos uma descrição completa precisamos definir algumas condições de contorno. A partir dessas condições de contorno determinaremos se um sistema será classificado como aberto (isolado) ou fechado (não isolado) (42, p. 25).

Um sistema isolado não está em contato com o ambiente ao seu redor. Portanto, não existe nenhuma troca de energia, partículas, probabilidade, e afins. Na mecânica quântica, este sistema é descrito por um hamiltoniano hermitiano H , ou seja, ele é invariante sobre uma conjugação hermitiana ($H = H^\dagger$). A partir desta propriedade podemos garantir que os autovalores de H são reais e o sistema terá uma evolução temporal unitária, conservando a probabilidade do sistema (42, p. 26).

Por outro lado, um sistema não isolado permite trocas com o ambiente ao seu redor. O hamiltoniano que descreve este sistema não é hermitiano, não garantindo a evolução temporal unitária, conservação da probabilidade e realidade dos autovalores. Desta forma, mesmo que este sistema seja mais realista, não poderemos utilizar o formalismo da mecânica quântica que estamos acostumados. É importante ressaltar que é possível construir um hamiltoniano hermitiano para este caso. Para tanto, precisaremos considerar o ambiente como parte do sistema, criando assim um grande sistema isolado. No entanto, o custo de se fazer esta combinação é a introdução de inúmeros graus de liberdade no problema.

Para compreendermos matematicamente as diferenças entre sistemas abertos e fechados, analisaremos um exemplo. Considere um sistema quântico no qual uma partícula não relativística está sujeita a um potencial $V(\mathbf{r})$ tal que $V(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}$. O hamiltoniano deste sistema é dado por (42, p. 26),

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}), \quad (2.100)$$

onde \mathbf{p} é o momento da partícula e m é sua massa. Suponha também que esta partícula esteja em uma região R do espaço. Desta maneira, podemos escrever a equação de Schrödinger dependente do tempo para este hamiltoniano como,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, t). \quad (2.101)$$

Multiplicando a equação anterior por $\psi^*(\mathbf{r}, t)$ tenho,

$$i\hbar\psi^*(\mathbf{r}, t)\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi^*(\mathbf{r}, t)\nabla^2\psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r})\psi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t). \quad (2.102)$$

Calculando o conjugado complexo desta equação obtemos,

$$-i\hbar\psi(\mathbf{r}, t)\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi(\mathbf{r}, t)\nabla^2\psi^*(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}, t)\psi^*(\mathbf{r}, t). \quad (2.103)$$

Subtraindo (2.103) de (2.102) e evidenciando as constantes teremos,

$$i\hbar\left[\psi^*(\mathbf{r}, t)\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t) + \psi(\mathbf{r}, t)\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(\mathbf{r}, t)\right] = \frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi(\mathbf{r}, t)\nabla^2\psi^*(\mathbf{r}, t) - \psi^*(\mathbf{r}, t)\nabla^2\psi(\mathbf{r}, t)\right]. \quad (2.104)$$

Podemos identificar a derivada de um produto ao lado esquerdo desta equação e ao lado direito podemos utilizar a propriedade³ $\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi = \nabla \cdot (\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi)$. Reescrevendo a expressão (2.104),

$$\frac{\partial}{\partial t}[\psi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t)] = -\frac{i\hbar}{2m}\nabla \cdot [\psi(\mathbf{r}, t)\nabla\psi^*(\mathbf{r}, t) - \psi^*(\mathbf{r}, t)\nabla\psi(\mathbf{r}, t)]. \quad (2.105)$$

Definindo a densidade de probabilidade $\rho(\mathbf{r}, t) = \psi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t)$ e a corrente de probabilidade $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = i\hbar/2m[\psi(\mathbf{r}, t)\nabla\psi^*(\mathbf{r}, t) - \psi^*(\mathbf{r}, t)\nabla\psi(\mathbf{r}, t)]$, podemos simplificar a equação anterior

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.106)$$

Esta expressão é a equação de continuidade e aparece em diversas áreas da física. Vamos agora integrar os dois lados desta equação em toda a região R ,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_R d^3r\rho(\mathbf{r}, t) = -\int_S d^2r\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t). \quad (2.107)$$

Do lado direito aplicamos o teorema da divergência e a integral no volume R se transforma em uma integral sobre superfície S que engloba a região R . O versor $\hat{\mathbf{n}}$ é normal a esta superfície e aponta para fora da região de integração. Para simplificar a notação definimos as seguintes funções,

$$P(t) = \int_R d^3r\rho(\mathbf{r}, t), \quad (2.108)$$

$$F(t) = \int_S d^2r\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t), \quad (2.109)$$

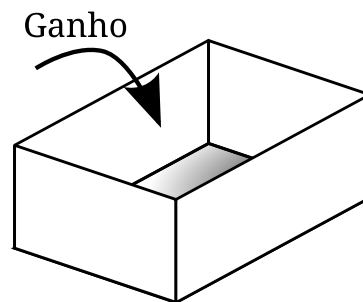
onde $P(t)$ descreve a probabilidade total dentro da região R e $F(t)$ representa o fluxo total de probabilidade que passa pela superfície S . Desta forma, a equação (2.107) pode ser expressa de uma forma mais simples

$$P'(t) = -F(t). \quad (2.110)$$

³ A demonstração desta propriedade pode ser vista no apêndice A

Esta expressão nos diz como a probabilidade dentro da região R varia no tempo em relação ao fluxo de probabilidade através da superfície S . Se o sistema é fechado não haverá fluxo de probabilidade pela superfície, logo $F(t) = 0$. Desta maneira, a derivada da probabilidade será nula, implicando assim em $P(t)$ constante. Por outro lado, se o sistema é aberto (Figura 7) existirá um fluxo de probabilidade através da superfície S , resultando em uma variação da probabilidade total com o passar do tempo. Esta variação, aumento ou diminuição da probabilidade total impedirá que o sistema fique em equilíbrio (42, p. 27).

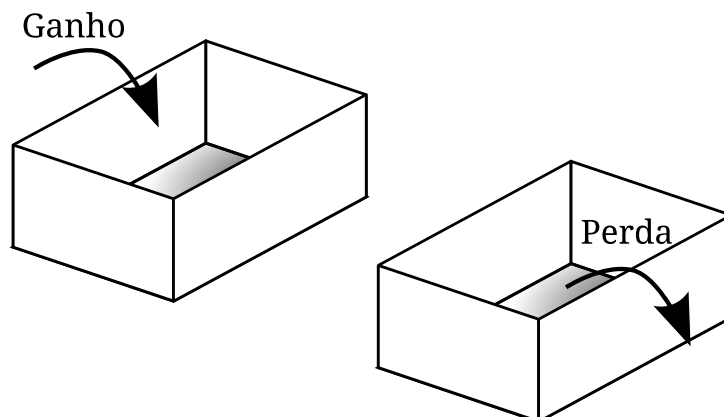
Figura 7 – Esquema ilustrando um sistema aberto com ganho. A probabilidade total do sistema aumenta com o tempo e portanto este sistema não conseguirá atingir o equilíbrio.



Fonte: Adaptado de Bender(42)

Por outro lado, é possível construir um sistema aberto cujo fluxo de probabilidade através da superfície delimitadora da região em que este sistema se encontra seja nulo. Para isso, combinaremos um sistema com ganho com um outro com perda (Figura 8). Caso o ganho e perda deste novo sistema composto sejam equivalentes, o fluxo $F(t)$ na superfície que delimita a região deste sistema será nulo. Embora este sistema possua $F(t) = 0$, ele não atingirá o equilíbrio, uma vez que em um dos subsistemas a probabilidade sempre aumentará enquanto que no outro ela sempre diminuirá.

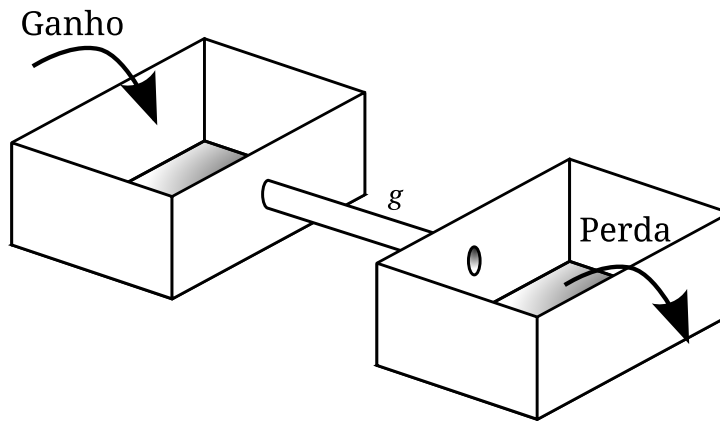
Figura 8 – Esquema ilustrando um sistema aberto com ganho e perda. Embora o fluxo de probabilidade seja nulo através da superfície que engloba este sistemas ele não conseguirá atingir o equilíbrio.



Fonte: Adaptado de Bender(42)

Este problema pode ser resolvido ao conectarmos estes dois subsistemas através de um acoplamento g (Figura 9). Desta forma, a probabilidade do subsistema com ganho pode fluir para o subsistema com perda tornando possível que este sistema composto atinja o equilíbrio dinâmico (42, p. 28). Sendo assim, este sistema possui características de um sistema fechado apesar de ser aberto.

Figura 9 – Esquema ilustrando um sistema aberto acoplado com ganho e perda. Note que o fluxo de probabilidade é nulo através da superfície que engloba este sistema. O acoplamento g faz com que a probabilidade do subsistema com ganho possa fluir para o subsistema com perda, possibilitando assim que o sistema atinja o equilíbrio dinâmico.



Fonte: Adaptado de Bender(42)

Tanto o sistema retratado na figura 8 quanto na figura 9 são \mathcal{PT} simétricos. Podemos visualizar esta simetria se considerarmos a operação de paridade trocando as caixas de posição e a operação de inversão temporal trocando o fluxo de ganho para perda e vice-versa. Podemos ainda classificar estes dois sistemas \mathcal{PT} simétricos em dois tipos: o que não possui acoplamento e não consegue atingir o equilíbrio dinâmico é chamado de sistema **com quebra da fase \mathcal{PT} simétrica**; já o que possui o acoplamento g e pode alcançar o equilíbrio dinâmico é chamado de sistema **sem quebra de fase \mathcal{PT} simétrica**.

Podemos representar matematicamente estes sistemas através do hamiltoniano

$$H = \begin{pmatrix} a + ib & g \\ g & a - ib \end{pmatrix}, \quad (2.111)$$

onde $a, b, g \in \mathbb{R}$ e o sistema com $g = 0$ é representado na figura 8 e o sistema com $g \neq 0$ é representado na figura 9. Os autovalores de H podem ser facilmente calculados através da equação característica

$$\det(H - IE) = E^2 - 2aE + a^2 + b^2 - g^2, \quad (2.112)$$

onde I é a matriz identidade de segunda ordem. Resolvendo este polinômio quadrático obtemos,

$$E_{\pm} = a \pm \sqrt{g^2 - b^2}. \quad (2.113)$$

Perceba que o valor do acoplamento irá determinar se os autovalores serão reais ou complexos. Para $g > b$ ambos os autovalores serão reais e para $g < b$ eles serão complexos. Podemos definir as condições para a quebra da fase \mathcal{PT} simétrica em função do acoplamento g . Um sistema com uma quebra de fase possuirá autovalores de energia complexos, enquanto que um sistema sem quebra de fase \mathcal{PT} simétrica possuirá autovalores reais. Por fim, o ponto $g = \pm b$ caracteriza a transição do sistema entre a presença e ausência de quebra da fase (42, p. 32).

Portanto, podemos observar que os sistemas \mathcal{PT} simétricos são intermediários entre fechados e abertos, e mesmo não possuindo um hamiltoniano hermitiano ainda é possível obtermos autovalores de energia reais.

2.3.4 SIMETRIA \mathcal{PT} NO CONTEXTO DA ÓPTICA

Apesar da simetria \mathcal{PT} ser uma teoria criada para sistemas quânticos, com a aproximação paraxial em sistemas ópticos obtemos uma equação semelhante à de Schrödinger, traçando uma analogia entre um sistema quântico e um sistema óptico clássico. Desta forma, nesta seção vamos demonstrar esta analogia óptica - quântica e determinar as condições para um sistema óptico possua simetria \mathcal{PT} .

Portanto, considere um campo U se propagando na direção z em um meio 1 com índice de refração n_0 , tal que $n_0 \in \mathbb{R}$. Assumindo que este campo seja uma onda plana, ele irá satisfazer a seguinte equação de Helmholtz,

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} U(z) + k_0^2 U(z) = 0, \quad (2.114)$$

onde $k_0 = n_0 \omega / c$. A solução para esta equação é dada por $U(z) = C e^{ik_0 z}$, tal que C é uma constante.

Vamos considerar agora que este campo continue se propagando em um meio 2 com índice de refração $n(x)$ e a direção de propagação do campo não sofra muitas variações em relação ao meio anterior, mantendo-se próxima ao eixo z . Desta forma, a equação de Helmholtz para o campo no meio 2 é dada por (42, p. 434),

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} U(x, z) + k^2 U(x, z) = 0, \quad (2.115)$$

onde $k = n(x) \omega / c$.

Para que o campo se mantenha próximo ao eixo z , o índice de refração do meio 2 não pode ser muito diferente do índice de refração do meio 1. Desta forma, podemos expressar $n(x)$ da seguinte forma

$$n(x) = n_0 [1 + v(x)], \quad \text{tal que } v(x) \ll 1. \quad (2.116)$$

Portanto, o campo descrito pela equação (2.115) se propagará aproximadamente como $e^{ik_0 z}$, sofrendo apenas pequenos desvios. Podemos então escrever uma solução para (2.115) da seguinte

forma (42, p. 434)

$$U(x, z) = e^{ik_0 z} \psi(x, z), \quad (2.117)$$

onde $\psi(x, z)$ é uma função envelope que irá modular a exponencial. Substituindo essa solução na equação (2.115) e simplificando as exponenciais comuns a todos os termos, obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi(x, z) + 2ik_0 \frac{\partial}{\partial z} \psi(x, z) + (k^2 - k_0^2) \psi(x, z) = 0. \quad (2.118)$$

Lembrando que $k = n(x)\omega/c$ e $k_0 = n_0\omega/c \implies \omega/c = k_0/n_0$, podemos reescrever k como $k = k_0 n(x)/n_0$. Usando a expressão (2.116), $k = k_0[1 + v(x)]$. Logo, $k^2 - k_0^2$ é,

$$\begin{aligned} k^2 - k_0^2 &= k_0^2[1 + v(x)]^2 - k_0^2 \\ &= k_0^2 + 2k_0^2 v(x) + k_0^2[v(x)]^2 - k_0^2 \\ &= 2k_0^2 v(x) + k_0^2[v(x)]^2. \end{aligned}$$

Uma vez que $v(x) \ll 1$, podemos desprezar o termo de ordem quadrática:

$$k^2 - k_0^2 \approx 2k_0^2 v(x). \quad (2.119)$$

Utilizando a aproximação paraxial⁴ $\partial^2 \psi / \partial z^2 \ll \partial^2 \psi / \partial x^2$, podemos desconsiderar a segunda derivada em relação a z da função envelope na expressão (2.118). Assim,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, z) + 2ik_0 \frac{\partial}{\partial z} \psi(x, z) + 2k_0^2 v(x) \psi(x, z) = 0.$$

Dividindo ambos os lados da equação anterior por $2k_0$ obtemos

$$\frac{1}{2k_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, z) + i \frac{\partial}{\partial z} \psi(x, z) + k_0 v(x) \psi(x, z) = 0. \quad (2.120)$$

Podemos reorganizar esta equação da seguinte forma,

$$i \frac{\partial}{\partial z} \psi(x, z) = -\frac{1}{2k_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, z) - k_0 v(x) \psi(x, z). \quad (2.121)$$

Note a semelhança de (2.121) em relação à equação de Schrödinger dependente do tempo, apesar de descreverem fenômenos diferentes. Essa analogia nos permite utilizar resultados aplicados à mecânica quântica em sistemas ópticos.

Podemos desta forma, encontrar as condições necessárias para que um sistema óptico possua simetria $\mathcal{P}\mathcal{T}$. Como vimos na seção anterior, um sistema $\mathcal{P}\mathcal{T}$ simétrico será descrito por um hamiltoniano invariante ao operador $\mathcal{P}\mathcal{T}$. Ou seja, para o caso quântico $(\mathcal{P}\mathcal{T})H(\mathcal{P}\mathcal{T})^{-1} = H$. Lembre-se que posso escrever a equação de Schrödinger dependente do tempo em termos do hamiltoniano da seguinte forma,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi.$$

⁴ Esta aproximação assume que a maior contribuição para $U(x, z)$ na variável z é dado pelo termo $e^{ik_0 z}$ (42, p. 435)

Desta maneira, reescrevendo (2.121) em termos de um “hamiltoniano”

$$i \frac{\partial}{\partial z} \psi(x, z) = \mathcal{H} \psi(x, z). \quad (2.122)$$

De forma que

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2k_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_0 v(x). \quad (2.123)$$

Aplicando os operadores de reversão temporal e paridade nesta expressão anterior,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \circ \mathcal{T}(\mathcal{H}) &= -\mathcal{P} \circ \mathcal{T} \left(\frac{1}{2k_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - \mathcal{P} \circ \mathcal{T}(k_0 v(x)) \\ &= -\mathcal{P} \left(\frac{1}{2k_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - \mathcal{P}(k_0 v^*(x)). \end{aligned}$$

Perceba que utilizamos as operações de paridade e inversão temporal em sua forma funcional. Uma vez que o “hamiltoniano” óptico não é uma matriz como acontece no caso quântico. Desta forma,

$$\mathcal{P} \circ \mathcal{T}(\mathcal{H}) = -\frac{1}{2k_0} \frac{\partial^2}{\partial(-x)^2} - k_0 v^*(-x). \quad (2.124)$$

Para a derivada em termos de $-x$, podemos rescrevê-la da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial(-x)^2} &= \left[\frac{\partial}{\partial(-x)} \right] \left[\frac{\partial}{\partial(-x)} \right] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial(-x)} \frac{\partial x}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial}{\partial(-x)} \frac{\partial x}{\partial x} \right] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial(-x)} \right] \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial(-x)} \right] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\frac{\partial(-x)}{\partial x}} \right] \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\frac{\partial(-x)}{\partial x}} \right] \\ &= \left[(-1) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left[(-1) \frac{\partial}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{\partial^2}{\partial(-x)^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (2.125)$$

Desta forma, (2.124) ficará

$$\mathcal{P} \circ \mathcal{T}(\mathcal{H}) = -\frac{1}{2k_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_0 v^*(-x). \quad (2.126)$$

Se \mathcal{H} é \mathcal{PT} simétrico, precisa satisfazer que $\mathcal{P} \circ \mathcal{T}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$. Utilizando as expressões (2.123) e (2.126) teremos,

$$-\frac{1}{2k_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_0 v^*(-x) = -\frac{1}{2k_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_0 v(x).$$

Logo,

$$v^*(-x) = v(x). \quad (2.127)$$

Como a função $v(x)$ é complexa, posso representá-la como $v(x) = v_R(x) + iv_I(x)$, onde v_R, v_I são funções reais que representam a parte real e imaginária respectivamente de $v(x)$. Se a equação anterior for satisfeita teremos

$$v_R(-x) = v_R(x), \quad (2.128)$$

$$v_I(-x) = -v_I(x). \quad (2.129)$$

Ou seja, $v_R(x)$ deve ser par e $v_I(x)$ deve ser ímpar. Pela equação (2.116) $v(x) = n(x)/n_0 - 1$, portanto as equações anteriores também são válidas para o índice de refração $n(x)$. Logo, se o sistema é \mathcal{PT} simétrico, o índice de refração satisfaz $n^*(-x) = n(x)$ onde $n_R(x)$ é par e $n_I(x)$ é ímpar (42, p. 435).

Este fato é importante de ser destacado pois a parte imaginária do índice de refração está associado com perda e ganho do sistema. Sendo mais específico, uma parte imaginária positiva significa que o campo sofrerá uma perda ao se propagar por aquele meio e uma parte imaginária negativa significa que o campo será amplificado ao se propagar.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

3.1 ESPALHAMENTO POR UMA ESFERA GAUSSIANA

3.1.1 MODELAGEM E DESCRIÇÃO DO POTENCIAL ESPALHADOR

O potencial espalhador utilizado por Lahiri e Wolf(25) é descrito pela seguinte equação,

$$F(\mathbf{r}, \omega) = \frac{Ak^2}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3.1)$$

onde A e σ são constantes positivas geralmente dependentes da frequência angular, $k = \omega/c$ e c é a velocidade da luz no vácuo. Para tornar este potencial não hermitiano, vamos estender o domínio desta função para o corpo dos complexos. Como queremos que o potencial resultante seja $\mathcal{P}\mathcal{T}$ simétrico, necessitamos que a relação $F^*(-\mathbf{r}, \omega) = F(\mathbf{r}, \omega)$ seja satisfeita. Desta forma, uma maneira de tornar este potencial não hermitiano é multiplicar a expressão (3.1) pelo termo $(1 + i\vec{\beta} \cdot \mathbf{r})$. Obteremos então:

$$F(\mathbf{r}, \omega) = \frac{Ak^2}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) (1 + i\vec{\beta} \cdot \mathbf{r}), \quad (3.2)$$

tal que $\vec{\beta}$ é um vetor que controla a não hermiticidade do sistema. Perceba que para o caso em que $\vec{\beta} = 0$, retornamos ao potencial de Lahiri e Wolf(25). A introdução da não hermiticidade neste sistema poderia ser feita de outras formas, mas nesta extensão com um termo linear conseguiremos encontrar expressões analíticas fechadas para este novo potencial.

De acordo com a equação (2.73), o potencial espalhador pode ser descrito em função do quadrado do índice de refração da seguinte forma,

$$F(\mathbf{r}, \omega) = \frac{k^2}{4\pi} [n^2(\mathbf{r}, \omega) - 1].$$

Portanto, utilizando (3.2) e a expressão anterior, o quadrado do índice de refração será

$$n^2(\mathbf{r}, \omega) = 1 + \frac{2A}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) (1 + i\vec{\beta} \cdot \mathbf{r}). \quad (3.3)$$

Desta maneira, as partes reais e imaginárias de $n^2(\mathbf{r}, \omega)$ são dadas por

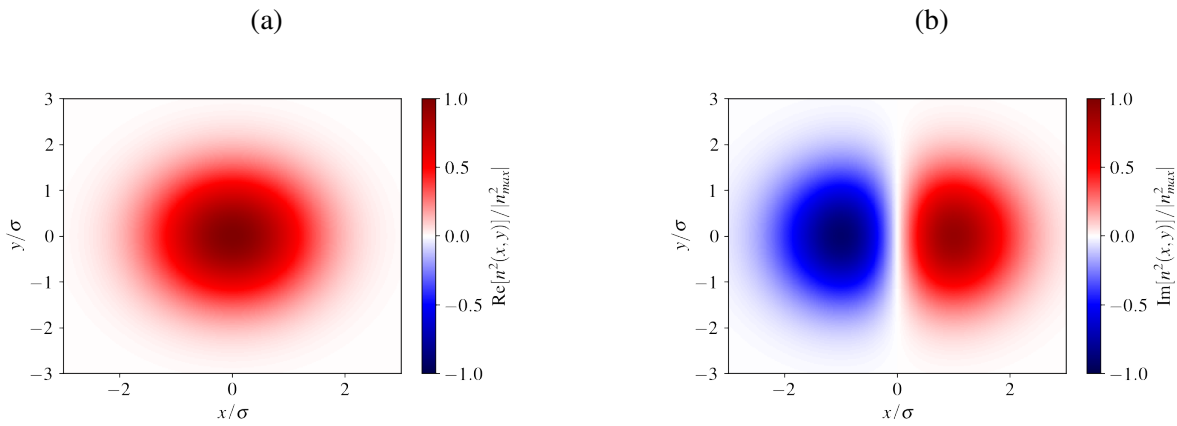
$$\text{Re}\{n^2(\mathbf{r}, \omega)\} = 1 + \frac{2A}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3.4)$$

$$\text{Im}\{n^2(\mathbf{r}, \omega)\} = (\vec{\beta} \cdot \mathbf{r}) \frac{2A}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right). \quad (3.5)$$

O comportamento das expressões anteriores pode ser visto na figura 10. Lembrando que a parte imaginária do índice de refração está relacionado com as propriedades de ganho e perda do material.

Observando a figura 10a, percebemos que a esfera Gaussiana possui um raio de aproximadamente σ . Já a figura 10b nos diz que há um hemisfério com ganho e outro com perda, e na intersecção entre essas duas regiões a parte imaginária é nula, não havendo ganho ou perda.

Figura 10 – Parte real (a) e imaginária (b) do quadrado do índice de refração normalizadas. Os parâmetros utilizados foram $A = 1$, $\lambda = 550$ nm, $\sigma = 3\lambda$, $\vec{\beta} = \beta\hat{\mathbf{x}}$ onde $\beta = 10^6$ m⁻³.



Fonte: Pinto e Brandão(43)

3.1.2 PROPRIEDADES DE COERÊNCIA DO CAMPO INCIDENTE

Considere uma onda plana policromática se propagando na direção do vetor unitário $\hat{\mathbf{s}}_0$ que incide na esfera Gaussiana e possui um volume V (Figura 11). Este campo incidente pode ser caracterizado em uma frequência específica e em uma determinada posição \mathbf{r} por um ensemble de realizações da forma,

$$\left\{ U^{(i)}(\mathbf{r}, \omega) \right\} = \left\{ a(\omega) e^{ik\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \mathbf{r}} \right\}, \quad (3.6)$$

onde $k = \omega/c$, c é a velocidade da luz e $a(\omega)$ é a amplitude aleatória do campo.

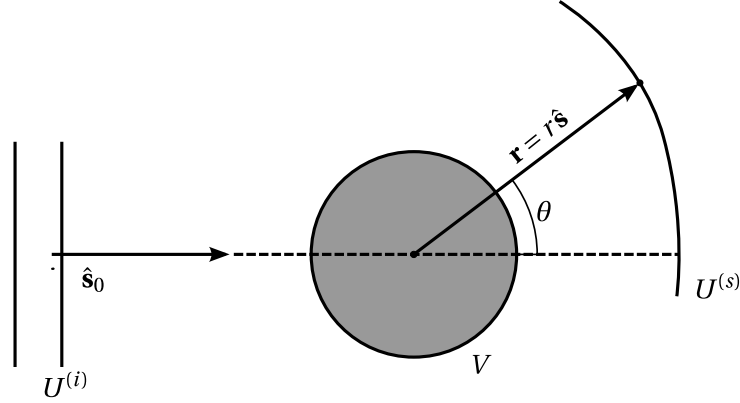
Com a base desenvolvida no capítulo anterior, podemos descrever algumas propriedades deste campo incidente. Calculando a função de densidade espectral cruzada $W^{(i)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$, utilizando a equação (2.41) juntamente com a equação (3.6), teremos

$$W^{(i)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \langle a^*(\omega) a(\omega) \rangle e^{iks_0 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}.$$

Pela equação (2.42) e pela equação anterior, obtemos que $W^{(i)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) = S^{(i)}(\omega) = \langle a^*(\omega) a(\omega) \rangle$. Isso significa que o módulo ao quadrado da amplitude do campo incidente não depende da posição, uma característica já conhecida de ondas planas. Em cada posição fixa \mathbf{r} , o espectro é descrito por $S^{(i)}(\omega)$ e a onda possui o mesmo espectro em todas as posições. Podemos escrever a densidade espectral cruzada do campo incidente,

$$W^{(i)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = S^{(i)}(\omega) e^{iks_0 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}. \quad (3.7)$$

Figura 11 – Processo de espalhamento por uma esfera gaussiana. O campo incidente $U^{(i)}$ se propagando em uma direção $\hat{\mathbf{s}}_0$ incide na esfera descrita pelo potencial (3.2). Estamos interessados em obter as propriedades do campo espalhado $U^{(s)}$ em um ponto \mathbf{r} distante do espalhador.



Fonte: Autor

Se calcularmos o grau de coerência espectral através da equação (2.43),

$$\mu^{(i)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \frac{W^{(i)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)}{\sqrt{S^{(i)}(\mathbf{r}_1, \omega)S^{(i)}(\mathbf{r}_2, \omega)}} = e^{iks_0 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}, \quad (3.8)$$

o seu módulo será $|\mu^{(i)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)| = 1$. Portanto, percebemos que nosso campo incidente é espacialmente coerente na frequência ω .

Em relação ao campo espalhado $U^{(s)}$, estamos interessados em medidas em pontos distantes do espalhador. Consideraremos também a esfera gaussiana como um meio fracamente espalhador, nos possibilitando utilizar a primeira aproximação de Born. Desta forma, pela equação (2.99) posso escrever a expressão para o campo espalhado como,

$$U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega) = a(\omega) \frac{e^{ikr}}{r} \int_V d^3 r' F(\mathbf{r}', \omega) e^{-ik(\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}_0) \cdot \mathbf{r}'} \quad (3.9)$$

Definindo $\mathbf{K} = k(\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}_0)$, posso reescrever $U^{(s)}$ em termos da transformada de Fourier do potencial espalhador,

$$U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega) = a(\omega) \frac{e^{ikr}}{r} \tilde{F}(\mathbf{K}, \omega). \quad (3.10)$$

Logo, podemos obter a função de densidade espectral cruzada para o campo espalhado, utilizando novamente a equação (2.41),

$$W^{(s)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \langle a^*(\omega)a(\omega) \rangle \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} \tilde{F}^*(\mathbf{K}_1, \omega) \frac{e^{ikr_2}}{r_2} \tilde{F}(\mathbf{K}_2, \omega).$$

De forma que $\mathbf{K}_j = k(\hat{\mathbf{s}}_j - \hat{\mathbf{s}})$ para $i = 1, 2$. Reescrevendo essa equação em uma forma mais simples,

$$W^{(s)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = S^{(i)}(\omega) \frac{e^{ik(r_2 - r_1)}}{r_1 r_2} \tilde{F}^*(\mathbf{K}_1, \omega) \tilde{F}(\mathbf{K}_2, \omega) \quad (3.11)$$

Com a equação anterior podemos calcular a densidade espectral,

$$S^{(s)}(r\hat{\mathbf{s}}, \omega) = \frac{S^{(i)}(\omega)}{r^2} |\tilde{F}(\mathbf{K}, \omega)|^2. \quad (3.12)$$

Assim como no campo incidente, podemos calcular o grau de coerência espectral,

$$\mu^{(s)}(r\hat{\mathbf{s}}_1, r\hat{\mathbf{s}}_2, \omega) = \frac{W^{(s)}(r\hat{\mathbf{s}}_1, r\hat{\mathbf{s}}_2, \omega)}{\sqrt{S^{(s)}(r\hat{\mathbf{s}}_1, \omega)S^{(s)}(r\hat{\mathbf{s}}_2, \omega)}}.$$

Logo, substituindo as quantidades conhecidas e simplificando,

$$\mu^{(s)}(r\hat{\mathbf{s}}_1, r\hat{\mathbf{s}}_2, \omega) = \frac{e^{ik(r_2-r_1)} \tilde{F}^*(\mathbf{K}_1, \omega) \tilde{F}(\mathbf{K}_2, \omega)}{|\tilde{F}(\mathbf{K}_1, \omega)| |\tilde{F}(\mathbf{K}_2, \omega)|}.$$

Por fim, podemos calcular o módulo de $\mu^{(s)}$,

$$\left| \mu^{(s)}(r\hat{\mathbf{s}}_1, r\hat{\mathbf{s}}_2, \omega) \right| = \sqrt{\mu^{*(s)}(r\hat{\mathbf{s}}_1, r\hat{\mathbf{s}}_2, \omega) \mu^{(s)}(r\hat{\mathbf{s}}_1, r\hat{\mathbf{s}}_2, \omega)} = \sqrt{\frac{|\tilde{F}(\mathbf{K}_1, \omega)|^2 |\tilde{F}(\mathbf{K}_2, \omega)|^2}{|\tilde{F}(\mathbf{K}_1, \omega)|^2 |\tilde{F}(\mathbf{K}_2, \omega)|^2}} = 1. \quad (3.13)$$

Portanto, o campo espalhado $U^{(s)}$ também é espacialmente coerente na frequência ω considerada no ensemble. Note que as propriedades de coerência do campo incidente excepcionalmente se preservaram para o campo espalhado. Normalmente tanto o espectro da luz quanto o seu estado de coerência se alteram durante o processo de espalhamento, principalmente quando a luz incidente é descrita por um feixe (localizado espacialmente) e quando o espalhador possui um índice de refração aleatório (35, p. 117).

Perceba que toda a análise que fizemos até o momento foi feita em relação a um potencial espalhador geral $F(\mathbf{r}, \omega)$. Ou seja, para o campo espalhado $U^{(s)}$, as propriedades de coerência independem da geometria do espalhador utilizado.

3.1.3 DENSIDADE ESPECTRAL DO CAMPO ESPALHADO

Ao calcularmos a transformada de Fourier¹ $\tilde{F}(\mathbf{K}, \omega)$ do potencial espalhador dado pela equação (3.2) obtemos,

$$\tilde{F}(\mathbf{K}, \omega) = Ak^2 \exp\left(-\frac{|\mathbf{K}|^2 \sigma^2}{2}\right) \left(1 + \sigma^2 \vec{\beta} \cdot \mathbf{K}\right). \quad (3.14)$$

Podemos reescrever a equação anterior em termos do ângulo θ entre a direção do ponto de interesse $\hat{\mathbf{s}}$ e a direção da onda incidente $\hat{\mathbf{s}}_0$. Vamos começar calculando $|\mathbf{K}|^2$,

$$\begin{aligned} |\mathbf{K}|^2 &= \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} \\ &= k^2 (\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}_0) \cdot (\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}_0) \\ |\mathbf{K}|^2 &= k^2 (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}} - 2\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}_0 + \hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \hat{\mathbf{s}}_0). \end{aligned}$$

¹ Os cálculos detalhados desta transformada podem ser vistos no apêndice B

Lembrando que $\hat{\mathbf{s}}$ e $\hat{\mathbf{s}}_0$ são vetores unitários, ou seja $\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \hat{\mathbf{s}}_0 = 1$. Desta forma,

$$\begin{aligned} |\mathbf{K}|^2 &= k^2 (2 - 2 \cos \theta) \\ &= 4k^2 \left(\frac{1 - \cos \theta}{2} \right). \end{aligned}$$

Para simplificarmos a equação, podemos fazer uso da propriedade trigonométrica $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$, obtendo

$$|\mathbf{K}|^2 = 4k^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right). \quad (3.15)$$

Para definir vetor não hermitiano, vamos considerar que $\vec{\beta}$ possua um módulo β e aponte na direção de $\hat{\mathbf{s}}_0$, ou seja assumimos que $\vec{\beta}$ seja paralelo à direção da onda incidente. Desta forma, o produto escalar $\vec{\beta} \cdot \mathbf{K}$ é dado por

$$\begin{aligned} \vec{\beta} \cdot \mathbf{K} &= \beta k \hat{\mathbf{s}}_0 \cdot (\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}_0) \\ &= \beta k (\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \hat{\mathbf{s}}_0) \\ &= \beta k (\cos \theta - 1) \\ &= -2\beta k \left(\frac{1 - \cos \theta}{2} \right). \end{aligned}$$

Utilizando novamente a propriedade trigonométrica anterior obtemos

$$\vec{\beta} \cdot \mathbf{K} = -2\beta k \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right). \quad (3.16)$$

Portanto, a partir das equações (3.15) e (3.16), podemos reescrever (3.14) como,

$$\tilde{F}(\theta, \omega) = Ak^2 \exp \left[-2k^2 \sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \left[1 - 2\sigma^2 \beta k \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]. \quad (3.17)$$

Para que possamos determinar a densidade espectral do campo espalhado através da equação (2.73), precisamos atribuir uma expressão para a densidade espectral do campo incidente. Portanto, vamos definir que $S^{(i)}(\omega)$ possa ser descrita por uma distribuição gaussiana, com amplitude S_0 , largura Γ_0 e centrada em ω_0 . Ou seja,

$$S^{(i)}(\omega) = S_0 \exp \left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\Gamma_0^2} \right], \quad (3.18)$$

Portanto, a equação (3.12) gera,

$$\begin{aligned} S_\beta(\theta, \omega) &= \frac{A^2 S_0}{r^2} \left(\frac{\omega}{c} \right)^4 \exp \left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\Gamma_0^2} - 4 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \times \\ &\quad \times \left[1 - 2\sigma^2 \beta \left(\frac{\omega}{c} \right) \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Com fim de simplificação, a equação anterior será reescrita em termos de parâmetros adimensionais. Portanto, vamos definir as transformações

$$\omega \rightarrow \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \Gamma_0 \rightarrow \frac{\Gamma_0}{\omega_0}, \quad \beta \rightarrow \beta \frac{c}{\omega_0}, \quad \sigma \rightarrow \sigma \frac{\omega_0}{c}, \quad S \rightarrow \frac{c^4 r^2 S}{\omega_0^4 A^2 S_0}. \quad (3.20)$$

Desta maneira, posso reescrever a (3.19) em sua forma normalizada,

$$S_\beta(\theta, \omega) = \omega^4 \exp \left[-\frac{(\omega - 1)^2}{2\Gamma_0^2} - 4\sigma^2 \omega^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \left[1 - 2\beta \sigma^2 \omega \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]^2. \quad (3.21)$$

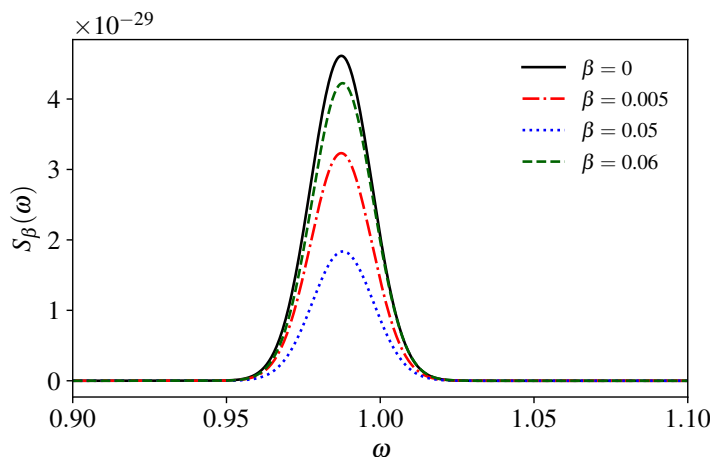
Esta equação permite analisarmos de uma forma simplificada a influência do parâmetro não hermitiano β na densidade espectral do campo espalhado.

3.1.4 MUDANÇAS NO ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS INDUZIDAS PELA NÃO HERMITICIDADE

3.1.4.1 ANÁLISE DAS FREQUÊNCIAS

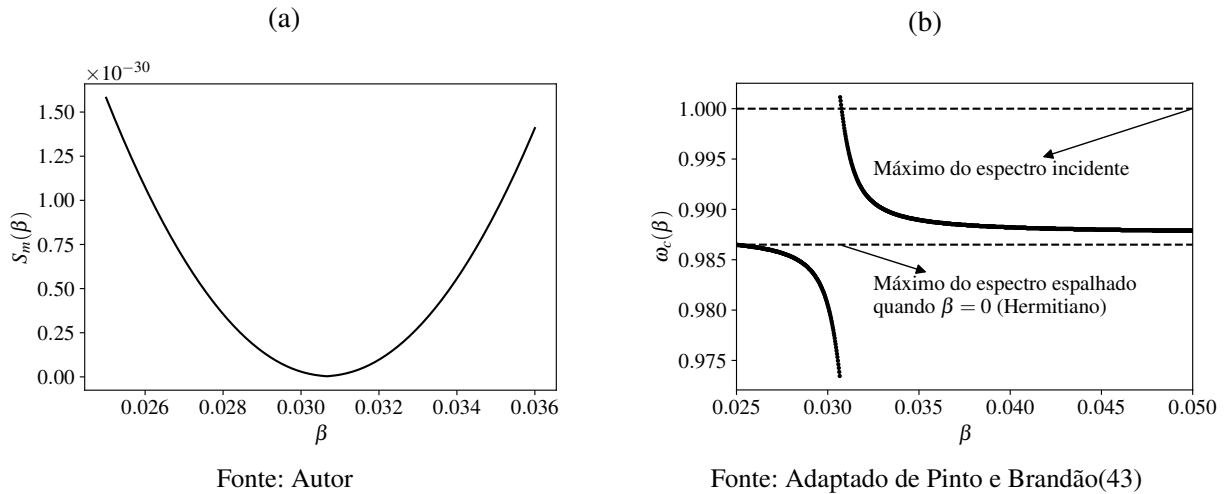
Como estamos fazendo uma extensão para o plano complexo do potencial utilizado por Lahiri e Wolf(25), na análise seguinte assumiremos o valor $\theta = 24.9^\circ$. Ao observarmos as curvas S_β em função da frequência para determinados valores do parâmetro não hermitiano, percebemos que a densidade espectral apresenta um comportamento estranho conforme aumentamos β (Figura 12). Se analisarmos valores de $\beta \leq 0.05$, podemos ter a impressão de que conforme aumentamos o valor deste parâmetro a amplitude da densidade espectral tende a diminuir. No entanto, quando olhamos para $\beta = 0.06$ a amplitude de S_β se torna maior do que para $\beta = 0.05$.

Figura 12 – Densidade espectral S_β em função da frequência ω . Em preto temos o caso hermitiano, observe que para $\beta \leq 0.05$ a amplitude diminui com o aumento de β . Para $\beta = 0.06$ obtemos uma amplitude maior do que os valores anteriores. Os parâmetros utilizados foram, $\theta = 24.9^\circ$, $\sigma = 6\pi$ e $\Gamma_0 = 0.01$.



Para estudar este comportamento do espectro do campo espalhado, podemos observar como o valor máximo de S_β muda com o parâmetro não hermitiano β . Seja S_m o valor do máximo global da densidade espectral, a figura 13a nos mostra uma curva semelhante a uma parábola com um mínimo no intervalo $0.030 \leq \beta \leq 0.032$. O processo de encontrar este mínimo analiticamente partindo da equação (3.21) não é trivial. No entanto, encontrar a expressão neste mínimo não é mandatório para as análises seguintes. Para estes parâmetros que utilizamos na figura 13a ($\theta = 24.9^\circ$, $\sigma = 6\pi$ e $\Gamma_0 = 0.01$), numericamente podemos encontrar que o mínimo ocorre em $\beta \approx 0.0307$.

Figura 13 – Máximo da densidade espectral S_m (a) e frequência na qual a densidade espectral é máxima ω_c (b) em função de β . Os parâmetros utilizados foram $\theta = 24.9^\circ$, $\sigma = 6\pi$ e $\Gamma_0 = 0.01$.

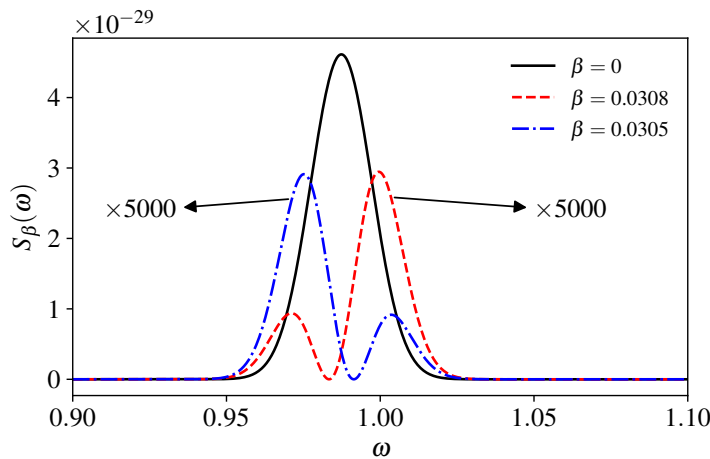


O resultado principal em Lahiri e Wolf(25) foi que o espalhamento de um campo policromático por um meio determinístico causa um deslocamento do espectro de frequências do campo. Vamos analisar agora se a não hermiticidade do meio pode contribuir neste deslocamento. Seja ω_c a frequência central da distribuição, ou seja a frequência no qual $S_\beta(\omega)$ assume o seu valor máximo. Ao observarmos como ω_c varia com o parâmetro β podemos observar a presença de uma descontinuidade na região $0.030 \leq \beta \leq 0.035$ (Figura 14). Ao investigarmos o valor numérico de β que causa a descontinuidade, encontraremos $\beta \approx 0.0307$. Perceba que este é o mesmo valor que encontramos para o mínimo da curva da figura 13a, o que nos mostra que existe uma relação entre o mínimo e a descontinuidade observada na figura 13b.

Uma vez que possuímos o valor de β que minimiza $S_m(\beta)$, para os parâmetros considerados, podemos observar o comportamento da densidade espectral $S_\beta(\omega)$ para valores de β próximos de $\beta = 0.0307$. A figura 14 nos mostra que com β perto da descontinuidade, surge um ponto onde a densidade espectral do campo espalhado é nula, dividindo assim o espectro em duas partes. É possível observar também que este espectro dividido apresenta um máximo global e um máximo local. Perceba também que para β antes da descontinuidade, o máximo global se localiza do lado esquerdo do espectro. Por outro lado, para β depois da descontinuidade o máximo global se encontra do lado direito. Não podemos deixar de ressaltar também que o a

amplitude da densidade espectral próximo de $\beta = 0.0307$ é três ordens de grandeza menores do que o caso hermitiano.

Figura 14 – Densidade espectral S_β em função da frequência ω . Em preto temos o caso hermitiano, em vermelho tracejado temos a densidade espectral (reescalada) para β depois da descontinuidade, em roxo tracejado e pontilhado temos a densidade espectral (reescalada) para β antes da descontinuidade. Os parâmetros utilizados foram $\theta = 24.9^\circ$, $\sigma = 6\pi$ e $\Gamma_0 = 0.01$.



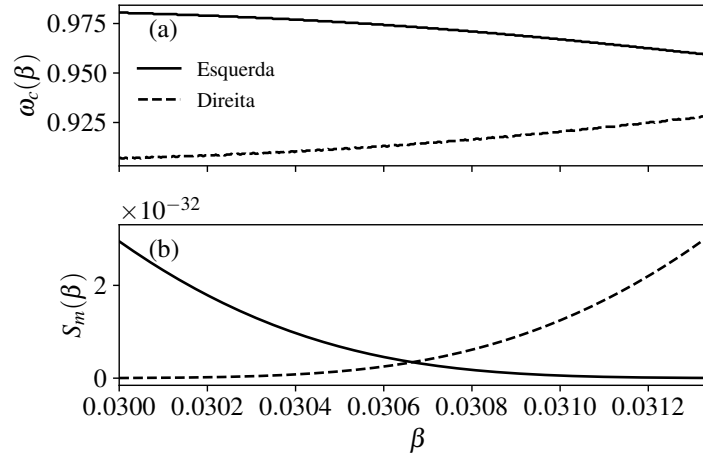
Fonte: Adaptado de Pinto e Brandão(43)

Da figura 13b podemos observar que a frequência central se desloca do valor hermitiano quando estamos próximos da descontinuidade ($\beta = 0.0307$). Desta forma, vamos analisar o comportamento de cada máximo nesta região. A parte superior da figura 15 nos mostra que conforme aumentamos o valor do parâmetro não hermitiano, os máximos tendem a se deslocar um em direção ao outro. Já na parte inferior podemos observar a origem do comportamento descontínuo da curva da frequência central ω_c . Se focarmos nossa atenção, em particular, no máximo do lado direito (linha tracejada) veremos que é inicialmente o máximo local. Ou seja, o valor que estaríamos considerando na curva de S_m seria o do máximo do lado esquerdo. No entanto, conforme β aumenta, o valor máximo local esquerdo cresce enquanto o do lado direito diminui. Quando $\beta = 0.0307$, ocorre uma intersecção entre as curvas e ambos os máximos passam a ser iguais. Já para $\beta > 0.0307$, o máximo global passa a ser o máximo do lado direito causando assim a descontinuidade observada na figura 13b.

Até o momento, estamos realizando nossa análise considerando apenas as figuras apresentadas. Vamos a partir de agora analisar a função de densidade espectral (Equação 3.21). Podemos reescrever a equação com o auxílio de três funções auxiliares,

$$S_\beta(\omega) = g(\omega)h(\omega)p_\beta(\omega).$$

Figura 15 – Frequência central ω_c (a) e máximo da densidade espectral S_m (b) em função do parâmetro não hermitiano β . A curva sólida representa o máximo que surge do lado esquerdo após a separação do espectro. A curva tracejada representa o máximo que surge do lado direito.



Fonte: Adaptado de Pinto e Brandão(43)

De forma que

$$g(\omega) = \exp\left[-\frac{(\omega-1)^2}{2\Gamma_0^2}\right], \quad (3.22)$$

$$h(\omega) = \exp\left(-\frac{\omega^2}{2\Gamma_1^2}\right), \quad (3.23)$$

$$p_\beta(\omega) = \omega^4 \left[1 - 2\beta\sigma^2\omega \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^2, \quad (3.24)$$

onde,

$$\Gamma_1^2 = \frac{1}{8\sigma^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (3.25)$$

Note que $g(\omega)$ e $h(\omega)$ são duas funções gaussianas centradas em 1 e 0 respectivamente, e $p_\beta(\omega)$ representa um polinômio de sexto grau. É importante ressaltar que toda a dependência não hermitiana está contida em $p_\beta(\omega)$, portanto, qualquer efeito decorrente da não hermiticidade no processo de espalhamento do sistema é descrito por este polinômio.

Considerando os parâmetros utilizados $\theta = 24.9^\circ$ e $\sigma = 6\pi$, pela equação (3.25) obtemos $\Gamma_1 = 0.0076$. Como $\Gamma_1 \ll 1$, a contribuição de $h(\omega)$ no produto $h(\omega)g(\omega)$ no intervalo $\omega \in [0.95, 1.05]$ é apenas uma multiplicação por uma constante. Logo, $h(\omega)$ será apenas um fator de escala do espectro espalhado e podemos desconsiderá-lo nas análises seguintes.

Para o caso hermitiano onde $\beta = 0$ e $p_0(\omega) = \omega^4$, teremos que $S_\beta(\omega)$ será o produto da gaussiana centrada em 1 por ω^4 . Podemos notar que $g(\omega)$ é a expressão da densidade espectral incidente (Equação 3.18) sujeita à normalização (Equação 3.20). Portanto, o deslocamento espectral observado por Lahiri e Wolf(25) ocorre devido ao fator ω^4 que causa uma distorção no

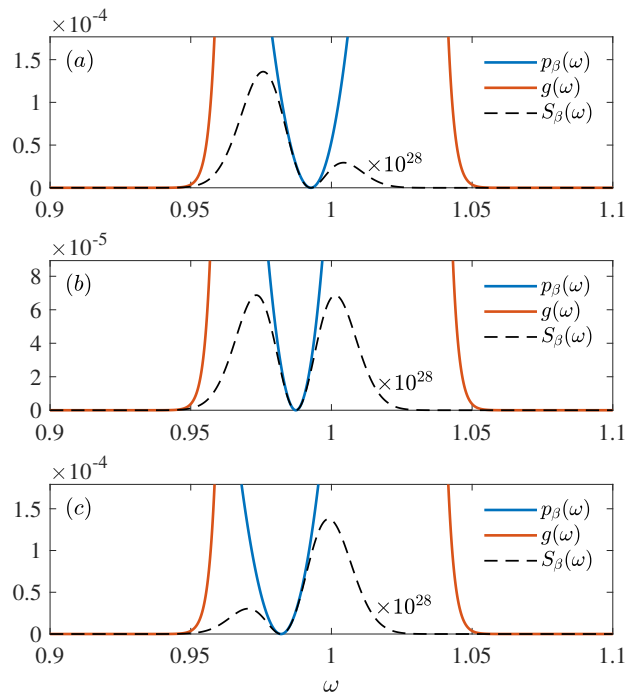
espectro da radiação incidente. Note também que $p_0(\omega)$ possui a raiz 0 com multiplicidade 4. Como $g(\omega)$ possui uma largura $\Gamma_0 = 0.01 < 1$, esta raiz não afetará o espectro e portanto não há separações na curva de $S_{\beta=0}(\omega)$.

Por outro lado, para o caso não hermitiano $\beta \neq 0$ uma nova raiz com multiplicidade 2 surge em $p_\beta(\omega)$. Podemos observar pela figura 16 que a raiz surge, nesses parâmetros, na região próxima da frequência central de $g(\omega)$, implicando na separação espectral que vimos anteriormente. Com o auxílio da equação (3.24), podemos escrever esta raiz como

$$\omega_r = \frac{1}{2\beta\sigma^2 \sin^2(\theta/2)}. \quad (3.26)$$

Perceba que ω_r depende tanto de propriedades do material (tamanho σ , ganho e perda β) quanto do ângulo θ de medição do espalhamento. Portanto, caso desejemos, é possível ajustar estas variáveis de forma a eliminar uma frequência específica do espectro hermitiano do campo espalhado uma vez que $S_\beta(\omega_r) = 0$.

Figura 16 – Processo de separação do espectro devido a não Hermiticidade do material. A curva laranja mostra a função gaussiana centrada em 1, $g(\omega)$, a curva tracejada representa a densidade espectral $S_\beta(\omega)$ reescalada e a curva em azul representa o polinômio $p_\beta(\omega)$. A função $h(\omega)$ não foi representada pois, nesta região, apenas contribui com uma constante multiplicativa. A raiz ω_r do polinômio elimina uma frequência específica do espectro hermitiano, separando o espectro neste processo. Os parâmetros utilizados foram $\theta = 24.9^\circ$, $\sigma = 6\pi$, $\Gamma_0 = 0.01$, (a) $\beta = 0.0305$, (b) $\beta = 0.0307$, (c) $\beta = 0.0308$.



3.1.4.2 ANÁLISE ESPACIAL

Fixando a frequência $\omega = 1$ e estudando como é o comportamento de S_β conforme variamos o ângulo θ , podemos reescrever a expressão (3.21) como

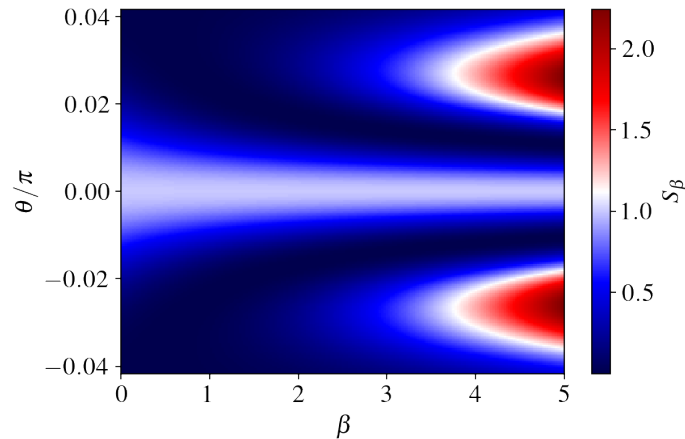
$$S_\beta(\theta) = \exp\left[-4\sigma^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \left[1 - 2\beta\sigma^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^2 \quad (3.27)$$

Estamos interessados agora em determinar quais direções recebem mais ou menos radiação espalhada. Para o caso hermitiano, por exemplo, a expressão anterior se resume a

$$S_{\beta=0}(\theta) = \exp\left[-4\sigma^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]. \quad (3.28)$$

Podemos observar que a direção receptora de mais radiação, ou seja onde $S_{\beta=0}(\theta)$ se maximiza, é dada pelo ponto onde o argumento da exponencial é nulo. Portanto, desejamos encontrar θ no qual $\sin^2(\theta/2) = 0$. Considerando o intervalo $-\pi \leq \theta \leq \pi$, a solução que obtemos é $\theta = 0$. Logo, para o caso hermitiano, a direção que recebe mais radiação é a mesma direção do campo incidente.

Figura 17 – Distribuição angular da densidade espectral S_β para uma fixa $\omega = 1$. As regiões simétricas acima e abaixo de $\theta = 0$ representam ângulos de espalhamento que são proibidos na configuração Hermitiana. Os parâmetros utilizados foram $\sigma = 6\pi$ e $\Gamma_0 = 0.01$.



Fonte: Pinto e Brandão(43)

Por outro lado, no caso não hermitiano $\beta \neq 0$ (figura 17) surgem regiões simétricas próximas de $\theta = 0$ no qual os ângulos de espalhamento eram proibidos para o caso hermitiano. Note que conforme β aumenta, a quantidade de radiação centrada em $\theta = 0$ diminui e a quantidade de radiação que as novas regiões recebem cresce. Para encontrarmos estes ângulos, precisamos analisar os pontos críticos² da expressão (3.27). Desta forma, para a equação $dS_\beta/d\theta = 0$

² Os cálculos detalhados desta análise podem ser vistos no apêndice C

obtemos a expressão

$$\sin \theta \left[1 - 2\beta \sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \left[1 + \beta - 2\beta \sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] = 0. \quad (3.29)$$

Perceba que a equação anterior possui os mesmos pontos críticos do caso hermitiano, $\theta_1 = 0$ (máximo) e $\theta_2 = \pi$ (mínimo). No entanto, existe a presença de mais quatro pontos críticos,

$$\theta_{3\pm} = \pm 2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\beta}} \right) \quad (\text{mínimo}), \quad (3.30)$$

$$\theta_{4\pm} = \pm 2 \sin^{-1} \left[\sqrt{\frac{1}{2\sigma^2} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)} \right] \quad (\text{máximo}). \quad (3.31)$$

Estas soluções simétricas podem ser observadas claramente para valores mais elevados de β (lado direito da figura 17). Perceba que estes ângulos de espalhamento dependem da dimensão σ e do parâmetro de ganho e perda β do material. Em um material que se mantenha com o tamanho fixo (σ constante), podemos controlar estes ângulos apenas ajustando o ganho e a perda do material espalhador.

4 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi possível observar o surgimento de uma separação assimétrica no espectro de frequências deste campo. Esta separação foi gerada pela introdução de uma raiz dentro da região do espectro hermitiano do campo espalhado pelo termo que descreve a não hermiticidade do sistema. A expressão analítica exata para esta raiz foi encontrada e demonstramos que ela depende do parâmetro não hermitiano e do ângulo de espalhamento. Desta forma, é possível ajustar nosso sistema a fim de eliminar uma frequência específica do espectro, uma vez que a densidade espectral do campo espalhado é nula neste ponto.

Por fim, em uma análise em que varremos os ângulos de espalhamento para uma frequência fixa, pudemos perceber que o ganho e perda do material introduz novos pontos críticos na expressão da densidade espectral. Estes novos pontos descrevem outros máximos e mínimos no espectro além dos esperados para o caso hermitiano. Portanto, podemos concluir que as propriedades de ganho e perda do material induzem novas direções de espalhamento que não eram possíveis no caso hermitiano.

Em resumo, pudemos observar que as propriedades de ganho e perda de um material determinístico não hermitiano \mathcal{PT} simétrico influenciam fortemente no espectro da radiação espalhada de uma onda policromática. Ficam como perspectivas futuras uma ampliação deste estudo de forma a abranger outros materiais determinísticos como, por exemplo, esferas “semi-soft” que podem ser obtidas com uma combinação linear de gaussianas. É possível também explorar outras geometrias de materiais uma vez que a combinação de funções especiais podem nos gerar potenciais em formatos variados, como elipses ou cilindros. Por fim, podemos também considerar a expansão desta análise para espalhadores não determinísticos, uma vez que representam uma classe mais realista de materiais.

REFERÊNCIAS

- 1 COHEN-TANNOUDJI, C. et al. *Quantum Mechanics (2 vol. set)*. [S.l.]: Wiley-Interscience, 2006. Citado na página 13.
- 2 SAKURAI, J. J.; COMMINS, E. D. *Modern quantum mechanics, revised edition*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1995. Citado na página 13.
- 3 BENDER, C. M.; BOETTCHER, S. Real spectra in non-hermitian hamiltonians having pt symmetry. *Physical Review Letters*, APS, v. 80, n. 24, p. 5243, 1998. Citado na página 13.
- 4 MOSTAFAZADEH, A. Pseudo-hermiticity versus pt symmetry: the necessary condition for the reality of the spectrum of a non-hermitian hamiltonian. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 43, n. 1, p. 205–214, 2002. Citado na página 13.
- 5 MOSTAFAZADEH, A. Pseudo-hermiticity versus pt -symmetry. ii. a complete characterization of non-hermitian hamiltonians with a real spectrum. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 43, n. 5, p. 2814–2816, 2002. Citado na página 13.
- 6 MOSTAFAZADEH, A. Pseudo-hermiticity versus pt -symmetry iii: Equivalence of pseudo-hermiticity and the presence of antilinear symmetries. *Journal of Mathematical Physics*, v. 43, p. 3944–3951, 2002. Citado na página 13.
- 7 LONGHI, S. Quantum-optical analogies using photonic structures. *Laser & Photonics Reviews*, Wiley Online Library, v. 3, n. 3, p. 243–261, 2009. Citado na página 13.
- 8 LONGHI, S. Parity-time symmetry meets photonics: A new twist in non-hermitian optics. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 120, n. 6, p. 64001, 2018. Citado na página 13.
- 9 RÜTER, C. E. et al. Observation of parity–time symmetry in optics. *Nature physics*, Nature Publishing Group, v. 6, n. 3, p. 192–195, 2010. Citado na página 13.
- 10 ZYABLOVSKY, A. A. et al. Pt -symmetry in optics. *Physics-Uspekhi*, IOP Publishing, v. 57, n. 11, p. 1063, 2014. Citado na página 13.
- 11 LIN, Z. et al. Unidirectional invisibility induced by pt -symmetric periodic structures. *Physical Review Letters*, APS, v. 106, n. 21, p. 213901, 2011. Citado na página 13.
- 12 REGENSBURGER, A. et al. Parity–time synthetic photonic lattices. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 488, n. 7410, p. 167–171, 2012. Citado na página 13.
- 13 FENG, L. et al. Experimental demonstration of a unidirectional reflectionless parity-time metamaterial at optical frequencies. *Nature materials*, Nature Publishing Group, v. 12, n. 2, p. 108–113, 2013. Citado na página 13.
- 14 WEIMANN, S. et al. Topologically protected bound states in photonic parity–time-symmetric crystals. *Nature materials*, Nature Publishing Group, v. 16, n. 4, p. 433–438, 2017. Citado na página 13.
- 15 LONGHI, S. Pt -symmetric laser absorber. *Physical Review A*, APS, v. 82, n. 3, p. 031801, 2010. Citado na página 13.

- 16 CHONG, Y.; GE, L.; STONE, A. D. P t-symmetry breaking and laser-absorber modes in optical scattering systems. *Physical Review Letters*, APS, v. 106, n. 9, p. 093902, 2011. Citado na página 13.
- 17 WONG, Z. J. et al. Lasing and anti-lasing in a single cavity. *Nature photonics*, Nature Publishing Group, v. 10, n. 12, p. 796–801, 2016. Citado na página 13.
- 18 MIAO, P. et al. Orbital angular momentum microlaser. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 353, n. 6298, p. 464–467, 2016. ISSN 0036-8075. Disponível em: <<https://science.sciencemag.org/content/353/6298/464>>. Citado na página 13.
- 19 WOLF, E. Non-cosmological redshifts of spectral lines. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 326, n. 6111, p. 363–365, 1987. Citado na página 13.
- 20 WOLF, E. Red shifts and blue shifts of spectral lines emitted by two correlated sources. *Physical review letters*, APS, v. 58, n. 25, p. 2646, 1987. Citado na página 13.
- 21 WOLF, E. Redshifts and blueshifts of spectral lines caused by source correlations. *Optics communications*, Elsevier, v. 62, n. 1, p. 12–16, 1987. Citado na página 13.
- 22 WOLF, E. Correlation-induced changes in the degree of polarization, the degree of coherence, and the spectrum of random electromagnetic beams on propagation. *Optics Letters*, Optical Society of America, v. 28, n. 13, p. 1078–1080, 2003. Citado na página 13.
- 23 WOLF, E.; FOLEY, J.; GORI, F. Frequency shifts of spectral lines produced by scattering from spatially random media. *JOSA A*, Optical Society of America, v. 6, n. 8, p. 1142–1149, 1989. Citado na página 13.
- 24 DOGARIU, A.; WOLF, E. Spectral changes produced by static scattering on a system of particles. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 23, n. 17, p. 1340–1342, 1998. Citado na página 13.
- 25 LAHIRI, M.; WOLF, E. Spectral changes of stochastic beams scattered on a deterministic medium. *Optics Letters*, v. 37, p. 2517, 2012. ISSN 0146-9592. Citado 5 vezes nas páginas 13, 45, 50, 51 e 53.
- 26 WANG, T.; ZHAO, D. Effects of source correlation on the spectral shift of light waves on scattering. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 38, n. 9, p. 1545–1547, 2013. Citado na página 13.
- 27 BRANDÃO, P. A.; CAVALCANTI, S. Non-hermitian spectral changes in the scattering of partially coherent radiation by periodic structures. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 44, n. 17, p. 4363–4366, 2019. Citado na página 13.
- 28 BRANDÃO, P. A.; CAVALCANTI, S. B. Scattering of partially coherent radiation by non-hermitian localized structures having parity-time symmetry. *Physical Review A*, APS, v. 100, n. 4, p. 043822, 2019. Citado na página 13.
- 29 VIEIRA, R.; BRANDÃO, P. Wolf effect in the scattering of polychromatic radiation by two spheres having parity-time symmetry. *Journal of Optics*, IOP Publishing, v. 22, n. 12, p. 125601, 2020. Citado na página 13.
- 30 BRANDÃO, P.; KOROTKOVA, O. Scattering theory for stationary materials with pt symmetry. *Physical Review A*, APS, v. 103, n. 1, p. 013502, 2021. Citado na página 13.

- 31 BRANDÃO, P. A.; MENDONÇA, J. P.; CAVALCANTI, S. Low coherence-induced resonance in double-layer structures having parity–time symmetry. *Optics Letters*, Optical Society of America, v. 46, n. 4, p. 717–720, 2021. Citado na página 13.
- 32 KOROTKOVA, O.; BRANDÃO, P. A. Light scattering from stationary pt-symmetric collections of particles. *Optics Letters*, Optical Society of America, v. 46, n. 6, p. 1417–1420, 2021. Citado na página 13.
- 33 MANDEL, L.; WOLF, E. *Optical coherence and quantum optics*. [S.l.]: Cambridge university press, 1995. Citado na página 15.
- 34 GOODMAN, J. W. *Statistical optics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2000. Citado na página 16.
- 35 WOLF, E. *Introduction to the Theory of Coherence and Polarization of Light*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. Citado 7 vezes nas páginas 16, 19, 21, 22, 23, 33 e 48.
- 36 LAUTERBORN, W.; KURZ, T. *Coherent optics: fundamentals and applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.
- 37 WOLF, E. New theory of partial coherence in the space–frequency domain. part i: spectra and cross spectra of steady-state sources. *JOSA*, Optical Society of America, v. 72, n. 3, p. 343–351, 1982. Citado na página 21.
- 38 BORN, M.; WOLF, E. *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. Citado 7 vezes nas páginas 25, 27, 28, 29, 30, 31 e 32.
- 39 GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Electrodynamics; 3rd ed.* [S.l.]: Pearson, 1999. Citado na página 27.
- 40 ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J.; HARRIS, F. E. *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide; 7th ed.* [S.l.]: Elsevier, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 63.
- 41 SOZZI, M. *Discrete symmetries and CP violation: From experiment to theory*. [S.l.]: Oxford University Press, 2008. Citado na página 35.
- 42 BENDER, C. M. *PT symmetry: In quantum and classical physics*. [S.l.]: World Scientific, 2019. Citado 7 vezes nas páginas 36, 37, 39, 40, 41, 42 e 44.
- 43 PINTO, M.; BRANDÃO, P. Asymmetrical splitting in the spectrum of stochastic radiation scattered by non-hermitian materials having pt symmetry. *Physical Review A*, APS, v. 101, n. 5, p. 053817, 2020. Citado 6 vezes nas páginas 46, 51, 52, 53, 54 e 55.

APÊNDICE A – PROPRIEDADE VETORIAL

Desejamos demonstrar neste apêndice a seguinte propriedade, dada duas funções escalares ψ e ϕ . Temos que

$$\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi = \nabla \cdot (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi).$$

Partindo do fato de que podemos escrever o divergente do produto de uma função escalar com uma função vetorial como (40, p. 156),

$$\nabla \cdot (f \mathbf{V}) = \nabla f \cdot \mathbf{V} + f \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (\text{A.1})$$

Façamos agora a substituição $f \rightarrow \psi$ e $\mathbf{V} \rightarrow \nabla \phi$. Logo a equação anterior ficará da forma

$$\nabla \cdot (\psi \nabla \phi) = \nabla \psi \cdot \nabla \phi + \psi \nabla \cdot \nabla \phi,$$

que podemos reescrever como

$$\nabla \cdot (\psi \nabla \phi) = \nabla \psi \cdot \nabla \phi + \psi \nabla^2 \phi. \quad (\text{A.2})$$

Se trocarmos ϕ com ψ na Equação A.2 obtemos uma nova equação,

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \nabla^2 \psi. \quad (\text{A.3})$$

Por fim, subtraindo a Equação A.3 da Equação A.2,

$$\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi = \nabla \cdot (\psi \nabla \phi) - \nabla \cdot (\phi \nabla \psi).$$

Deixando em evidência o operador divergente do lado direito da equação anterior, obteremos

$$\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi = \nabla \cdot (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi). \quad (\text{A.4})$$

Como queríamos demonstrar.

APÊNDICE B – TRANSFORMADA DE FOURIER DO POTENCIAL ESPALHADOR

Neste apêndice vamos calcular detalhadamente a transformada de Fourier do potencial espalhador definido na seção 3.1.1. Partindo de

$$F(\mathbf{r}, \omega) = \frac{Ak^2}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) (1 + i\vec{\beta} \cdot \mathbf{r}). \quad (\text{B.1})$$

Sua transformada de Fourier tridimensional é dada pela expressão,

$$\tilde{F}(\mathbf{K}, \omega) = \int F(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) d^3r, \quad (\text{B.2})$$

onde a integral é feita sobre todo o espaço. Substituindo o valor de (B.1) em (B.2) teremos

$$\tilde{F}(\mathbf{K}, \omega) = \int \frac{Ak^2}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right) (1 + i\vec{\beta} \cdot \mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) d^3r. \quad (\text{B.3})$$

Juntando as exponenciais,

$$\tilde{F}(\mathbf{K}, \omega) = \int \frac{Ak^2}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left[-\left(\frac{r^2}{2\sigma^2} + i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}\right)\right] (1 + i\vec{\beta} \cdot \mathbf{r}) d^3r. \quad (\text{B.4})$$

Distribuindo agora as integrais dentro do segundo fator,

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\mathbf{K}, \omega) = \int \frac{Ak^2}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left[-\left(\frac{r^2}{2\sigma^2} + i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}\right)\right] d^3r + \\ + i\vec{\beta} \cdot \int \mathbf{r} \frac{Ak^2}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left[-\left(\frac{r^2}{2\sigma^2} + i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}\right)\right] d^3r. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Possuimos agora dois tipos de integrais para resolver. Portanto vamos definir,

$$I_1 = \int \frac{Ak^2}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left[-\left(\frac{r^2}{2\sigma^2} + i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}\right)\right] d^3r \quad (\text{B.6})$$

$$I_2 = \int \mathbf{r} \frac{Ak^2}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left[-\left(\frac{r^2}{2\sigma^2} + i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}\right)\right] d^3r. \quad (\text{B.7})$$

Desta maneira a transformada de Fourier do potencial espalhador pode ser expressa em termos das integrais da seguinte forma

$$\tilde{F}(\mathbf{K}, \omega) = I_1 + i\vec{\beta} \cdot I_2. \quad (\text{B.8})$$

Vamos primeiro calcular a integral I_1 . Seja $\mathbf{K} = (K_x, K_y, K_z)$ e $\mathbf{r} = (x, y, z)$, desta forma teremos que $r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = x^2 + y^2 + z^2$. Logo, podemos reescrever I_1 como,

$$I_1 = \int \frac{Ak^2}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left\{-\left[\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2\sigma^2} + i(K_x x + K_y y + K_z z)\right]\right\} d^3r. \quad (\text{B.9})$$

Separando as exponenciais em fatores com a mesma coordenada

$$I_1 = \int \frac{Ak^2}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left[-\left(\frac{x^2}{2\sigma^2} + iK_x x\right)\right] \exp\left[-\left(\frac{y^2}{2\sigma^2} + iK_y y\right)\right] \exp\left[-\left(\frac{z^2}{2\sigma^2} + iK_z z\right)\right] d^3 r. \quad (\text{B.10})$$

Uma vez que $d^3 r = dx dy dz$, podemos separar as integrais da seguinte forma

$$I_1 = \frac{Ak^2}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{x^2}{2\sigma^2} + iK_x x\right)\right] dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{y^2}{2\sigma^2} + iK_y y\right)\right] dy \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{z^2}{2\sigma^2} + iK_z z\right)\right] dz. \quad (\text{B.11})$$

Perceba que as integrais sobre x , y e z são semelhantes, mudando apenas a constante K_i , onde $i = x, y, z$. Desta forma, podemos reescrever a equação (B.11) como,

$$I_1 = \frac{A}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} J(K_x) J(K_y) J(K_z), \quad (\text{B.12})$$

onde defino $J(K)$ como

$$J(K) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{x^2}{2\sigma^2} + iKx\right)\right] dx. \quad (\text{B.13})$$

Para resolvermos a integral anterior, precisaremos manipular um pouco o argumento da exponencial. Desta forma, para deixarmos esta expressão em um formato mais simples, vamos completar o seu quadrado,

$$\frac{x^2}{2\sigma^2} + iKx + \alpha^2 - \alpha^2 = \left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}} + \alpha\right)^2 - \alpha^2 \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{x^2}{2\sigma^2} + iKx + \alpha^2 = \frac{x^2}{2\sigma^2} + 2\frac{x\alpha}{\sigma\sqrt{2}} + \alpha^2 \quad (\text{B.15})$$

$$iKx = 2\frac{x\alpha}{\sigma\sqrt{2}} \quad (\text{B.16})$$

$$iK = 2\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2}} \quad (\text{B.17})$$

$$\alpha = \frac{iK\sigma\sqrt{2}}{2} \quad (\text{B.18})$$

$$\alpha = \frac{iK\sigma}{\sqrt{2}}. \quad (\text{B.19})$$

E teremos também que

$$\alpha^2 = -\frac{K^2\sigma^2}{2}. \quad (\text{B.20})$$

Logo, da equação (B.14) podemos reescrever o expoente da integral como

$$\frac{x^2}{2\sigma^2} + iKx = \left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}} + \frac{iK\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{K^2\sigma^2}{2}. \quad (\text{B.21})$$

Substituindo este resultado em (B.13) e explicitando a parte da exponencial que não depende de x , temos

$$J(K) = \exp\left(-\frac{K^2\sigma^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}} + \frac{iK\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2\right] dx. \quad (\text{B.22})$$

Vamos fazer agora uma substituição de variável. Seja $u = x/\sigma\sqrt{2} + iK_x\sigma/\sqrt{2}$, temos que o seu diferencial será $du = dx/\sigma\sqrt{2}$, logo $dx = \sigma\sqrt{2}du$. Quando $x \rightarrow \pm\infty$ temos que $u \rightarrow \pm\infty$. Portanto,

$$J(K) = \exp\left(-\frac{K^2\sigma^2}{2}\right) \sigma\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2) du. \quad (\text{B.23})$$

Esta integral que encontramos é uma integral gaussiana no qual o seu resultado é $\sqrt{\pi}$. Portanto,

$$J(K) = \exp\left(-\frac{K^2\sigma^2}{2}\right) \sigma\sqrt{2\pi} \quad (\text{B.24})$$

Substituindo (B.24) em (B.11),

$$I_1 = \frac{Ak^2}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{K_x^2\sigma^2}{2}\right) \sigma\sqrt{2\pi} \exp\left(-\frac{K_y^2\sigma^2}{2}\right) \sigma\sqrt{2\pi} \exp\left(-\frac{K_z^2\sigma^2}{2}\right) \sigma\sqrt{2\pi}. \quad (\text{B.25})$$

Juntando as exponenciais e as constantes obtemos,

$$I_1 = \frac{Ak^2}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(K_x^2 + K_y^2 + K_z^2)\sigma^2}{2}\right] (2\pi\sigma^2)^{3/2}. \quad (\text{B.26})$$

Lembrando que $|\mathbf{K}|^2 = K_x^2 + K_y^2 + K_z^2$ e simplificando as constantes finalmente escrevemos,

$$\boxed{I_1 = Ak^2 \exp\left(-\frac{|\mathbf{K}|^2\sigma^2}{2}\right)}. \quad (\text{B.27})$$

Vamos agora calcular \mathbf{I}_2 , partindo da equação (B.7) expandindo \mathbf{r} em termos de cada coordenada

$$\mathbf{I}_2 = \frac{Ak^2}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \left\{ \hat{\mathbf{x}} \int \exp\left[-\left(\frac{r^2}{2\sigma^2} + i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}\right)\right] x d^3r + \hat{\mathbf{y}} \int \exp\left[-\left(\frac{r^2}{2\sigma^2} + i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}\right)\right] y d^3r + \hat{\mathbf{z}} \int \exp\left[-\left(\frac{r^2}{2\sigma^2} + i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}\right)\right] z d^3r \right\}. \quad (\text{B.28})$$

Podemos simplificar a expressão anterior escrevendo da seguinte forma,

$$\mathbf{I}_2 = \frac{Ak^2}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} [\hat{\mathbf{x}}G_x(\mathbf{K}) + \hat{\mathbf{y}}G_y(\mathbf{K}) + \hat{\mathbf{z}}G_z(\mathbf{K})], \quad (\text{B.29})$$

tal que,

$$G_u(\mathbf{K}) = \int \exp\left[-\left(\frac{r^2}{2\sigma^2} + i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}\right)\right] u d^3r \quad \text{tal que } u = x, y, z. \quad (\text{B.30})$$

Vamos resolver primeiro para $G_x(\mathbf{K})$, expandindo a integral da mesma forma que fizemos no cálculo de I_1 ,

$$G_x(\mathbf{K}) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} + iK_x x \right) \right] x dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{y^2}{2\sigma^2} + iK_y y \right) \right] dy \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{z^2}{2\sigma^2} + iK_z z \right) \right] dz \quad (\text{B.31})$$

Utilizando a equação (B.13) e definindo uma nova função auxiliar, podemos reescrever esta equação como

$$G_x(\mathbf{K}) = g(K_x)J(K_y)J(K_z), \quad (\text{B.32})$$

tal que,

$$g(K) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} + iKx \right) \right] x dx. \quad (\text{B.33})$$

De forma análoga a I_1 , vamos reescrever o argumento da exponencial. Com o auxílio da equação (B.21) temos,

$$g(K) = \exp \left(- \frac{K^2 \sigma^2}{2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}} + \frac{iK\sigma}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] x dx. \quad (\text{B.34})$$

Fazendo a substituição $u = x/\sigma\sqrt{2} + iK\sigma/\sqrt{2}$ teremos que $du = dx/\sigma\sqrt{2} \implies dx = \sigma\sqrt{2} du$. Assim, escrevemos $x = \sigma\sqrt{2}u - iK\sigma^2$. Note que quando $x \rightarrow \pm\infty$ temos que $u \rightarrow \pm\infty$, desta forma, os limites de integração permanecem iguais. Substituindo na expressão anterior obtemos,

$$g(K) = \exp \left(- \frac{K^2 \sigma^2}{2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2) (\sigma\sqrt{2}u - K\sigma^2) du. \quad (\text{B.35})$$

Distribuindo a exponencial no segundo fator e separando as integrais,

$$g(K) = \exp \left(- \frac{K^2 \sigma^2}{2} \right) \left[2\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2) u du \overset{0}{\leftarrow} - iK\sigma^3 \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2) du \right] \quad (\text{B.36})$$

A primeira integral do lado direito é nula pois o integrando é uma função ímpar integrada em um intervalo simétrico. Já a segunda integral é uma integral gaussiana. Portanto,

$$g(K) = -iK\sigma^3 \sqrt{2\pi} \exp \left(- \frac{K^2 \sigma^2}{2} \right) \quad (\text{B.37})$$

Substituindo (B.37) e (B.24) em (B.32),

$$G_x(\mathbf{K}) = -iK_x \sigma^3 \sqrt{2\pi} \exp \left(- \frac{K_x^2 \sigma^2}{2} \right) \exp \left(- \frac{K_y^2 \sigma^2}{2} \right) \sigma \sqrt{2\pi} \exp \left(- \frac{K_z^2 \sigma^2}{2} \right) \sigma \sqrt{2\pi}. \quad (\text{B.38})$$

Juntando as exponenciais e as constantes podemos escrever

$$G_x(\mathbf{K}) = -iK_x \sigma^2 (2\pi\sigma^2)^{3/2} \exp\left(-\frac{|\mathbf{K}|^2 \sigma^2}{2}\right). \quad (\text{B.39})$$

Portanto, obtemos a expressão para G em qualquer coordenada, note que neste caso mudará apenas a constante K_x que multiplica a exponencial. Desta forma, substituindo a equação (B.39) na equação (B.29) teremos,

$$\mathbf{I}_2 = \frac{Ak^2}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \left[-\hat{\mathbf{x}}iK_x \sigma^2 (2\pi\sigma^2)^{3/2} \exp\left(-\frac{|\mathbf{K}|^2 \sigma^2}{2}\right) + \hat{\mathbf{y}}iK_y \sigma^2 (2\pi\sigma^2)^{3/2} \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-\frac{|\mathbf{K}|^2 \sigma^2}{2}\right) + \hat{\mathbf{z}}iK_z \sigma^2 (2\pi\sigma^2)^{3/2} \exp\left(-\frac{|\mathbf{K}|^2 \sigma^2}{2}\right) \right]. \quad (\text{B.40})$$

Deixando em evidencia as constantes multiplicativas e a exponencial obtemos,

$$\mathbf{I}_2 = -iAk^2 \sigma^2 \exp\left(-\frac{|\mathbf{K}|^2 \sigma^2}{2}\right) (\hat{\mathbf{x}}K_x + \hat{\mathbf{y}}K_y + \hat{\mathbf{z}}K_z). \quad (\text{B.41})$$

Como $\mathbf{K} = \hat{\mathbf{x}}K_x + \hat{\mathbf{y}}K_y + \hat{\mathbf{z}}K_z$, podemos finalmente escrever

$$\boxed{\mathbf{I}_2 = -i\mathbf{K}\sigma^2 Ak^2 \exp\left(-\frac{|\mathbf{K}|^2 \sigma^2}{2}\right)}. \quad (\text{B.42})$$

Substituindo (B.27) e (B.42) em (B.8) teremos

$$\tilde{F}(\mathbf{K}, \omega) = Ak^2 \exp\left(-\frac{|\mathbf{K}|^2 \sigma^2}{2}\right) + i\vec{\beta} \cdot \left[-i\mathbf{K}\sigma^2 Ak^2 \exp\left(-\frac{|\mathbf{K}|^2 \sigma^2}{2}\right) \right]. \quad (\text{B.43})$$

Evidenciando as exponenciais e as constantes obtenho a equação final

$$\boxed{\tilde{F}(\mathbf{K}, \omega) = Ak^2 \exp\left(-\frac{|\mathbf{K}|^2 \sigma^2}{2}\right) (1 + \sigma^2 \vec{\beta} \cdot \mathbf{r})}. \quad (\text{B.44})$$

Esta expressão é a transformada de Fourier do potencial espalhador e será importantíssima no estudo do comportamento da densidade espectral de um campo espalhado por um material não Hermitiano.

APÊNDICE C – ANÁLISE DOS PONTOS CRÍTICOS DA DENSIDADE ESPECTRAL PARA UMA FREQUÊNCIA FIXA

Neste anexo, temos como objetivo analisar os pontos críticos da densidade espectral normalizada S_β . Como foi discutido na seção 3.1.4.1 a análise dos pontos críticos diretamente da equação (3.21) para ω ou β não é nada trivial. No entanto, se considerarmos a análise destes pontos críticos em relação a θ o processo já se torna analiticamente viável, Portanto comecemos pela equação (3.21),

$$S_\beta(\theta, \omega) = \omega^4 \exp \left[-\frac{(\omega - 1)^2}{2\Gamma_0^2} - 4\sigma^2 \omega^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \left[1 - 2\beta \sigma^2 \omega \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]^2.$$

Para simplificar um pouco mais nossa análise, vamos fixar uma frequência em $\omega = 1$. Desta forma a equação anterior se simplifica em,

$$S_\beta(\theta) = \exp \left[-4\sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \left[1 - 2\beta \sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]^2 \quad (\text{C.1})$$

Diferenciando em relação a θ

$$\begin{aligned} \frac{dS_\beta}{d\theta} = & \exp \left[-4\sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \left[-4\sigma^2 \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \left[1 - 2\beta \sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]^2 + \\ & + 2 \exp \left[-4\sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \left[1 - 2\beta \sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \left[-2\beta \sigma^2 \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Utilizando que $\sin \theta = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$ e fatorando os termos,

$$\frac{dS_\beta}{d\theta} = -2\sigma^2 \sin \theta \exp \left[-4\sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \left[1 - 2\beta \sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \left[1 - 2\beta \sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \beta \right]. \quad (\text{C.3})$$

Igualando a derivada a 0, retirando as constantes e eliminando a exponencial teremos,

$$\sin \theta \left[1 - 2\beta \sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \left[1 - 2\beta \sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \beta \right] = 0. \quad (\text{C.4})$$

De imediato podemos ver o primeiro ponto crítico dado por $\sin \theta = 0$ o que implica em $\theta = n\pi$ tal que $n \in \mathbb{Z}$. No entanto, em nosso problema temos que o ângulo está no intervalo $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Portanto teremos dois pontos, $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \pi$. Ao considerarmos o segundo fator da equação (C.4),

$$1 - 2\beta \sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = 0. \quad (\text{C.5})$$

Obtemos mais dois pontos críticos dados por,

$$\theta_{3\pm} = \pm 2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\beta}} \right). \quad (\text{C.6})$$

Por fim, o último fator da equação C.4,

$$1 - 2\beta\sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \beta = 0. \quad (\text{C.7})$$

Logo, obtenho o par de pontos críticos,

$$\theta_{4\pm} = \pm 2 \sin^{-1} \left[\sqrt{\frac{1}{2\sigma^2} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)} \right] \quad (\text{C.8})$$

Para checarmos se estes pontos críticos são máximos ou mínimos, precisaremos analisar a segunda derivada de $S_\beta(\theta)$. Partindo da equação (C.3) podemos tomar os dois fatores $\exp[-4\sigma^2 \sin^2(\theta/2)] [1 - 2\beta\sigma^2 \sin^2(\theta/2)]$ e distribuir no último fator. Desta forma obteremos,

$$\begin{aligned} \frac{dS_\beta}{d\theta} = -2\sigma^2 \sin \theta \left\{ \exp \left[-4\sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \left[1 - 2\beta\sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]^2 + \right. \\ \left. + \beta \exp \left[-4\sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \left[1 - 2\beta\sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \right\} \quad (\text{C.9}) \end{aligned}$$

O primeiro termo dentro das chaves é nossa função $S_\beta(\theta)$. Portanto, a equação (C.3) pode ser reescrita como,

$$\frac{dS_\beta}{d\theta} = -2\sigma^2 \sin \theta \left\{ S_\beta(\theta) + \beta \exp \left[-4\sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \left[1 - 2\beta\sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \right\} \quad (\text{C.10})$$

Calculando a segunda derivada da expressão anterior,

$$\begin{aligned} \frac{d^2S_\beta}{d\theta^2} = -2\sigma^2 \cos \theta \left\{ S_\beta(\theta) + \beta \exp \left[-4\sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \left[1 - 2\beta\sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \right\} - \\ - 2\sigma^2 \sin \theta \left\{ \frac{dS_\beta}{d\theta} + \beta \exp \left[-4\sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \left[-4\sigma^2 \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[1 - 2\beta\sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] + \beta \exp \left[-4\sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \left[-2\sigma^2 \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \right\}. \quad (\text{C.11}) \end{aligned}$$

Juntando os produtos de senos e cossenos e fatorando termos em comum, conseguimos simplificar a expressão para

$$\begin{aligned} \frac{d^2S_\beta}{d\theta^2} = -2\sigma^2 \cos \theta \left\{ S_\beta(\theta) + \beta \exp \left[-4\sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \left[1 - 2\beta\sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \right\} - \\ - 2\sigma^2 \sin \theta \left\{ \frac{dS_\beta}{d\theta} - \sigma^2 \beta \sin \theta \exp \left[-4\sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \left[2 - 4\beta\sigma^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \beta \right] \right\}. \quad (\text{C.12}) \end{aligned}$$

Lembre-se que para que um ponto crítico seja um máximo, é preciso que $d^2S_\beta/d\theta^2 < 0$, já para ser um mínimo é necessário que $d^2S_\beta/d\theta^2 > 0$. Se $d^2S_\beta/d\theta^2 = 0$ teremos um ponto de inflexão. Portanto, vamos começar a utilizar este teste da segunda derivada para determinar se os pontos críticos que encontramos são máximos ou mínimos. Portanto, para $\theta_1 = 0$ tenho,

$$\left. \frac{d^2S_\beta}{d\theta^2} \right|_{\theta_1=0} = -2\sigma^2(S_\beta(0) + \beta). \quad (\text{C.13})$$

A equação (C.1) nos dá que $S_\beta(0) = 1$. Logo,

$$\left. \frac{d^2S_\beta}{d\theta^2} \right|_{\theta_1=0} = -2\sigma^2(1 + \beta). \quad (\text{C.14})$$

Como $\beta \geq 0$, temos que $\theta_1 = 0$ será sempre um ponto de máximo pois sua derivada sempre será negativa. Consideremos agora o segundo ponto crítico $\theta_2 = \pi$,

$$\left. \frac{d^2S_\beta}{d\theta^2} \right|_{\theta_2=\pi} = 2\sigma^2[S_\beta(\pi) + \beta \exp(-4\sigma^2)(1 - 2\beta\sigma^2)], \quad (\text{C.15})$$

de forma que pela equação (C.1) tenho $S_\beta(\pi) = \exp(-4\sigma^2)(1 - 2\beta\sigma^2)^2$. Logo,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2S_\beta}{d\theta^2} \right|_{\theta_2=\pi} &= 2\sigma^2 \left[\exp(-4\sigma^2)(1 - 2\beta\sigma^2)^2 + \beta \exp(-4\sigma^2)(1 - 2\beta\sigma^2) \right] \\ &= 2\sigma^2 \exp(-4\sigma^2)(1 - 2\beta\sigma^2)(1 - 2\beta\sigma^2 + \beta) \\ &= 2\sigma^2 \exp(-4\sigma^2)(1 - 2\beta\sigma^2)[1 - \beta(2\sigma^2 - 1)] \\ &= 2\sigma^2 \exp(-4\sigma^2)(2\sigma^2)(2\sigma^2 - 1) \left(\frac{1}{2\sigma^2} - \beta \right) \left(\frac{1}{2\sigma^2 - 1} - \beta \right). \end{aligned}$$

Portanto temos

$$\left. \frac{d^2S_\beta}{d\theta^2} \right|_{\theta_2=\pi} = (2\sigma^2)^2(2\sigma^2 - 1) \exp(-4\sigma^2) \left(\frac{1}{2\sigma^2} - \beta \right) \left(\frac{1}{2\sigma^2 - 1} - \beta \right). \quad (\text{C.16})$$

Para este ponto crítico temos alguns parâmetros que temos que levar em consideração. No estudo feito até agora usamos $\sigma = 6\pi$, no entanto, para diferentes valores deste parâmetro obteremos comportamentos diferentes. Por exemplo, se $\sigma = 1/\sqrt{2}$ temos que $\theta_2 = \pi$ é um ponto de inflexão. Desta forma, manteremos $\sigma = 6\pi$ fixo nesta análise e observaremos apenas o comportamento em relação a β . Defino portanto, as funções auxiliares

$$f(\beta) = \frac{1}{2\sigma^2} - \beta, \quad (\text{C.17})$$

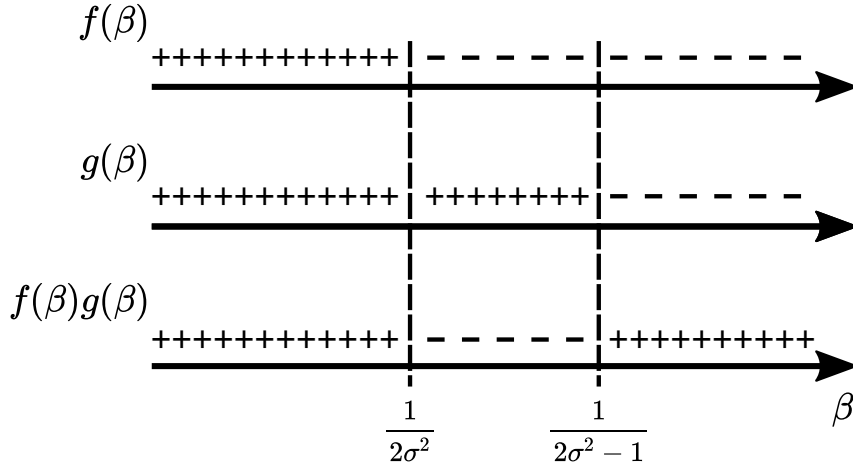
$$g(\beta) = \frac{1}{2\sigma^2 - 1} - \beta. \quad (\text{C.18})$$

Podemos reescrever a equação (C.16) como

$$\left. \frac{d^2S_\beta}{d\theta^2} \right|_{\theta_2=\pi} = Af(\beta)g(\beta), \quad (\text{C.19})$$

onde A é uma constante positiva. Desta forma, o sinal da expressão anterior dependerá do produto das funções f e g . Utilizando as equações (C.17) e (C.18) podemos ver que $f(\beta) < 0$ para $\beta > 1/2\sigma^2$ e $f(\beta) > 0$ para $\beta < 1/2\sigma^2$. Analogamente, temos $g(\beta) < 0$ para $\beta > 1/(2\sigma^2 - 1)$ e $g(\beta) > 0$ para $\beta < 1/(2\sigma^2 - 1)$. O diagrama abaixo ilustra visualmente o comportamento dos sinais das funções nos intervalos de β . Portanto, podemos observar que $d^2S_\beta/d\theta^2 < 0$ apenas

Figura 18 – Diagrama dos sinais das funções $f(\beta)$ e $g(\beta)$. É possível ver que o produto das funções assume um valor negativo apenas para um intervalo específico de valores.



quando o parâmetro não Hermitiano assume valores no intervalo,

$$\frac{1}{2\sigma^2} < \beta < \frac{1}{(2\sigma^2 - 1)}, \quad (\text{C.20})$$

desta maneira obtemos que $\theta_2 = \pi$ é máximo. Por outro lado para β fora deste intervalo θ_2 será mínimo. Por fim, para ambos os casos $\beta = 1/2\sigma^2$ ou $\beta = 1/(2\sigma^2 - 1)$, θ_2 será um ponto de inflexão.

Vamos considerar agora as duas raízes $\theta_{3\pm}$:

$$\theta_{3\pm} = 2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2\beta\sigma}} \right).$$

Pelo fato de $\theta_{3\pm}$ serem raízes, da equação (C.4) obtemos que a seguinte expressão é verdadeira,

$$1 - 2\beta\sigma^2 \sin^2 \frac{\theta_{3\pm}}{2} = 0.$$

Perceba que a expressão do lado esquerdo aparece também em $S_\beta(\theta)$. Logo $\theta_{3\pm}$ também são raízes da densidade espectral. Desta forma, temos que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2S_\beta}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_{3\pm}} &= -2\sigma^2 \cos \theta_{3\pm} \left[S_\beta(\theta_{3\pm})^0 + \beta \exp \left(-4\sigma^2 \sin^2 \frac{\theta_{3\pm}}{2} \right) \left(1 - 2\beta\sigma^2 \sin^2 \frac{\theta_{3\pm}}{2} \right)^0 \right] - \\ &- 2\sigma^2 \sin \theta_{3\pm} \left[\frac{dS_\beta}{d\theta} \right]^0 - \sigma^2 \beta \sin \theta_{3\pm} \exp \left(-4\sigma^2 \sin^2 \frac{\theta_{3\pm}}{2} \right) \left[2 \left(1 - 2\beta\sigma^2 \sin^2 \frac{\theta_{3\pm}}{2} \right)^0 + \beta \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Podemos simplificar um pouco essa expressão usando que $1 - 2\beta\sigma^2 \sin^2 \frac{\theta_{3\pm}}{2} = 0 \Rightarrow \sin^2 \theta_{3\pm}/2 = 1/2\sigma^2\beta$. Desta forma, obtenho

$$\left. \frac{d^2 S_\beta}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_{3\pm}} = 2\sigma^4 \beta^2 \sin^2 \theta_{3\pm} \exp\left(-\frac{2}{\beta}\right). \quad (\text{C.22})$$

Sabemos que a exponencial é sempre positiva, assim como os parâmetros σ e β . Uma vez que o valor de $\sin \theta_{3\pm}$ está ao quadrado, isso garante também que ele será sempre positivo. Portanto, $d^2 S_\beta/d\theta^2 > 0$ o que implica que os pontos críticos $\theta_{3\pm}$ são mínimos.

Por fim, para o último par de raízes $\theta_{4\pm}$ podemos realizar um procedimento análogo ao par anterior. Portanto,

$$\theta_{4\pm} = 2 \sin^{-1} \left[\sqrt{\frac{1}{2\sigma^2} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} \right].$$

Logo, é equivalente

$$1 - 2\beta\sigma^2 \sin^2 \frac{\theta_{4\pm}}{2} + \beta = 0.$$

Portanto,

$$1 - 2\beta\sigma^2 \sin^2 \frac{\theta_{4\pm}}{2} = -\beta, \quad (\text{C.23})$$

onde ainda podemos escrever

$$\sin^2 \frac{\theta_{4\pm}}{2} = \frac{1}{2\sigma^2} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad (\text{C.24})$$

Substituindo as eq. (C.23) e (C.24) em (C.3) terei

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 S_\beta}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_{4\pm}} &= -2\sigma^2 \cos \theta_{4\pm} \left[S_\beta(\theta_{4\pm}) - \beta^2 \exp\left(-2 - \frac{2}{\beta}\right) \right] + \\ &\quad + 2\sigma^4 \sin^2 \theta_{4\pm} \left[\beta \exp\left(-2 - \frac{2}{\beta}\right) (-2\beta + \beta) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

No entanto, da expressão (C.1) temos que

$$S_\beta(\theta_{4\pm}) = \beta^2 \exp\left(-2 - \frac{2}{\beta}\right). \quad (\text{C.26})$$

Portanto o primeiro termo entre colchetes se anula na equação (C.25). Desta forma, teremos

$$\left. \frac{d^2 S_\beta}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_{4\pm}} = -2\sigma^4 \beta^2 \sin^2 \theta_{4\pm} \exp\left(-2 - \frac{2}{\beta}\right). \quad (\text{C.27})$$

Como já foi discutido anteriormente, a exponencial será sempre positiva da mesma forma que o seno ao quadrado. Uma vez que os demais parâmetros também serão positivos, teremos que

$$\left. \frac{d^2 S_\beta}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_{4\pm}} < 0. \quad (\text{C.28})$$

Portanto as raízes $\theta_{4\pm}$ ambas são pontos de máximo.