

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA

LUCIELLY DE SOUZA ALVES

Espalhamento de luz por materiais com simetria \mathcal{PT}

MACEIÓ - AL

2023

LUCIELLY DE SOUZA ALVES

Espalhamento de luz por materiais com simetria \mathcal{PT}

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho

Maceió - AL

2023

Catálogo na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

A474e Alves, Lucielly de Souza.
Espalhamento de luz por materiais com simetria PT / Lucielly de Souza Alves. –
2023.
65 f. : il. color.

Orientador: Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho.
Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto
de Física. Maceió, 2023.

Bibliografia: f. 57-65.

1. Simetria paridade-tempo (Física). 2. Espalhamento (Física). I. Título.

CDU: 535



PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

“Espalhamento de luz por materiais com simetria PT”

por

Lucielly de Souza Alves

A Banca Examinadora composta pelos professores Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho (orientador e presidente da banca), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas; André de Lima Moura, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas; e Alex Emanuel Barros Costa, do Instituto Federal de Alagoas, consideram a **candidata aprovada com conceito “ A ”**.

Maceió, 10 de fevereiro de 2023.

Prof. Dr. Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho

Prof. Dr. André de Lima Moura

Prof. Dr. Alex Emanuel Barros Costa

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado forças para enfrentar todas as adversidades e jamais desistir dos meus sonhos, por me guiar por caminhos que eu jamais pensei andar e colocar pessoas incríveis na minha vida para que eu nunca estivesse só.

Agradeço em especial ao meu orientador Paulo por ter aceito me orientar e me guiar nesse caminho. Não foi fácil iniciar e finalizar essa tese sem ao menos ter tido o privilégio de conhecê-lo pessoalmente, mas apesar de tudo, ele sempre me ajudou da melhor forma possível e eu só tenho a agradecer. Agradeço também aos professores Alex e André por aceitarem fazer parte da minha banca examinadora. Agradeço imensamente também ao Victor Xavier, que sempre me deu todo o suporte necessário durante essa pandemia, muito obrigada.

Agradeço minha família, em especial meus pais, Sebastião e Lucélia por todo apoio e suporte que me deram desde o início, por incentivarem meus estudos estando sempre ao meu lado, a minha madrastra Luciana e padrasto Marcos por todas as palavras de incentivo e confiança depositada em mim durante esses anos. Agradeço a minha outra mãe e pai os quais a vida me presenteou, minha sogra Ana Paula e meu sogro Fernando, por todo amor, apoio e conselhos. Ao meu irmão Edson, sobrinho Christian, e cunhadas Jeane e Fernanda. Só tenho a agradecer a vocês por todo amor, família.

Agradeço aos meus amigos da UFMT por todas as longas conversas, as partilhas, as histórias e todos esse anos juntos, obrigada Paloma, Amanda, Alfredo, Anísio, Lilian, Ariana, Daiara, Dhimy e Laiana. Obrigada por me incentivarem e pelas varias horas de ligações juntos, vocês tornaram o meu caminho ao longo desses anos mais prazeroso, me fizeram rir quando eu queria chorar e nunca desistiram de mim, vocês são parte da minha família e por isso eu sou eternamente grata.

Agradeço aos meus amigos indianos Sangami, Sakthi, Sharath, Ila, Debj e Kartiga, minha estadia na Polônia é mais doce com vocês aqui, obrigada por compartilharem a cultura de vocês comigo, fazendo-me sentir em casa.

Agradeço imensamente ao meu amado marido João Pedro, desde o início dessa pós-graduação você foi meu amigo, me ajudando e passando pelas adversidades de uma pandemia comigo. Minha vida mudou completamente com você nela meu amor, eu buscava um

titulo de mestre e ganhei muito mais do que eu poderia esperar, um parceiro para vida, um companheiro, que me apoia e acredita em mim as vezes até mais do que eu mesma. Obrigada por sempre ter enxugado as minhas lágrimas amor, por segurar a minha mão e traçar esse caminho comigo, sempre ao meu lado, sem você eu não teria me mantido sã. Não existem palavras para descrever o quanto sou grata, e essa é apenas uma etapa de muitas que vamos construir juntos. Por tudo, obrigada meu amor.

Resumo

O objetivo da dissertação é analisar, com um certo nível de detalhe, o espalhamento de radiação eletromagnética monocromática por um material dielétrico isotrópico e linear com simetria \mathcal{PT} na aproximação de Born. Estudar a luz espalhada por um material específico pode nos retornar informações úteis sobre a natureza do material. Assim, verificamos como o espalhamento da luz se comporta em um material que apresenta simetria \mathcal{PT} e como a presença de ganho e perda dentro do material pode afetar a densidade espectral do campo espalhado. A densidade espectral é uma quantidade que pode ser medida diretamente no laboratório. Verificamos que, para certas distribuições de ganho e perda, a direção do campo espalhado pode variar sem alterar a geometria do espalhador. O caráter não-Hermitiano do índice de refração do espalhador também se reflete no padrão de intensidade espalhada, que agora passa a ser assimétrico com relação ao ângulo de espalhamento.

Palavras-chave: Simetria \mathcal{PT} ; Teoria de espalhamento.

Abstract

The objective of this dissertation is to analyze, with a certain level of detail, the scattering of monochromatic electromagnetic radiation by an isotropic and linear dielectric material having \mathcal{PT} symmetry in the Born approximation. Studying the light scattered by a specific material can give us useful information about the nature of the material. Thus, we verify how light scattering behaves in a material that has \mathcal{PT} symmetry and how the presence of gain and loss within the material can affect the spectral density of the scattered field. Spectral density is a quantity that can be measured directly in the laboratory. We verified that, for certain gain and loss distributions, the scattered field direction can be varied without changing the scatterer geometry. The non-Hermitian character of the refractive index of the scatterer is also reflected in the scattered intensity pattern, which now becomes asymmetric with respect to the scattering angle.

Keywords: \mathcal{PT} symmetry; Scattering theory;

Sumário

1	Motivação	11
2	Simetria \mathcal{PT}	13
2.1	Introdução a simetria \mathcal{PT}	13
2.2	Simetria \mathcal{PT} na quântica	14
2.2.1	Operações de paridade e reversão temporal	16
2.3	Autovalores de um Hamiltoniano \mathcal{PT} -simétrico	17
2.3.1	Simetria \mathcal{PT} quebrada e inteira	19
2.4	Sistemas Óptico \mathcal{PT} simétricos	22
2.4.1	Conceito de simetria \mathcal{PT} para sistemas ópticos	22
2.5	Conclusão	24
3	Teoria do espalhamento	25
3.1	Introdução	25
3.2	Equação de Helmholtz não-homogênea	27
3.3	Função de Green	29
3.3.1	Derivação da equação integral básica do espalhamento	29
3.3.2	Aproximação para o campo distante	32
3.4	Aproximação de Born	33
3.5	Conclusão	35

4	Espalhamento por um material com simetria \mathcal{PT}	37
4.1	Introdução	37
4.2	Potencial espalhador na aproximação de Born	38
4.3	Densidade espectral	40
4.4	Máximos da densidade espectral	42
4.5	Tamanho do espalhador	45
4.6	Conclusão	47
5	Conclusões gerais e perspectivas	49
A	Operadores: Paridade e Reversão temporal	61
A.1	Operador de Paridade	61
A.2	Operador de reversão temporal	62
B	Formalismo da equação da onda	67
B.1	Equações de Maxwell e equação da onda.	67

Lista de Figuras

- 2.1 Níveis de energia do Hamiltoniano $H = P^2 - (iX)^N$ em função do parâmetro N . Retirado e adaptado de [1] 19
- 2.2 Um sistema \mathcal{PT} -simétrico composto por dois sistemas (cavidades) acoplados (superior) com ganho (vermelho) e perda (azul), e os autovalores correspondentes (inferior) versus o contraste ganho-perda. Retirado e adaptado de [2] 21
- 3.1 Demonstração do campo incidindo em um material espalhador de volume V limitado por uma superfície fechada S . Retirado e adaptado de [3] 30
- 3.2 Notação para aproximação de campos distantes. Retirado e adaptado de [3] . 32
- 3.3 Ilustrando (a) espalhamento simples, correspondendo a primeira aproximação de Born, (b) espalhamento duplo correspondendo a segunda aproximação de Born. Retirado e adaptado de [3] 34
- 3.4 Esquema demonstrando os vetores de onda incidente e espalhada. 35
- 4.1 Parte imaginária do potencial 4.2, sendo (a) com $\beta_y = 0$, (b) $\beta_y = 5$, (c) $\beta_y = 10$. 39

4.2	Densidade espectral em função de θ e ϕ , onde o primeiro conjunto de figuras (a,b,c) demonstram os casos que apenas β_z esta variando, sendo (a) o caso em que ($\beta_x = -5, \beta_y = -10, \beta_z = 10$), (b) mesmos β_x, β_y mas variando $\beta_z = 0$, e (c) mais uma vez mantendo os mesmo β_x, β_y , mas $\beta_z = -10$. Já no segundo conjunto (d,e,f) temos o caso onde apenas o β_y varia, com (d) sendo ($\beta_x = -5, \beta_y = 10, \beta_z = -10$), (e) com os mesmos β_x, β_z , variando $\beta_y = 0$ e (f) igualmente trocando só $\beta_z = -10$	42
4.3	Máximos da densidade espectral em função de θ e ϕ , sendo (a) quando $\beta_y = \beta_z = -10$ enquanto β_x varia de -10 à 10 e (b) retrata a densidade espectral para os mesmos valores de $\beta_y = \beta_z = -10$, sendo na parte superior $\beta_x = 5$ e inferior $\beta_x = -5$	43
4.4	Máximos da densidade espectral em função de θ e ϕ sendo (a) $\beta_x = \beta_z = -10$ enquanto β_y varia de -10 à 10 e (b) retrata a densidade espectral para os mesmos valores de $\beta_x = \beta_z = -10$, sendo na parte superior $\beta_y = 10$ e inferior $\beta_y = -10$	44
4.5	Máximos da densidade espectral em função de θ e ϕ quando $\beta_x = \beta_y = -10$ enquanto β_z varia de -10 à 10 e (b) retrata a densidade espectral para os mesmos valores de $\beta_x = \beta_y = -10$, sendo na parte superior $\beta_z = 10$ e inferior $\beta_z = -10$	45
4.6	Máximos da densidade para os valores de $\beta_x = \beta_z = -10$, variando β_y de -10 à 10 para $\sigma = 0.1, 0.3, 0.5$	46

Na formulação de Dirac-von Neumann de mecânica quântica, todos os observáveis físicos devem ser representados por operadores auto-adjuntos ou Hermitianos em um espaço de Hilbert [4, 5, 6]. O Hamiltoniano de um sistema obviamente não é exceção. Esta última condição não apenas leva a autovalores reais de energia, mas também garante que a norma da função de onda permaneça invariante com o tempo [7].

Curiosamente, duas décadas atrás, Bender e seus colegas mostraram teoricamente que uma ampla classe de Hamiltonianos não-Hermitianos, os chamados Hamiltonianos \mathcal{PT} -simétricos, também podem ter um espectro inteiramente real [1], no entanto, é importante nos atentarmos que a condição de simetria \mathcal{PT} não é necessária nem suficiente para garantir um espectro de autovalores reais [8, 9, 10].

Em geral, um hamiltoniano é \mathcal{PT} -simétrico desde que todas as suas autofunções sejam simultaneamente autofunções do operador \mathcal{P} e \mathcal{T} [11, 12, 13]. Ultimamente, a perspectiva de estudar potenciais complexos no âmbito da óptica tem sido sugerido [14, 15, 16]. O que torna isso possível é a equivalência formal entre a equação de Schrödinger da mecânica quântica e a equação da onda óptica [17].

A noção de simetria \mathcal{PT} é agora extensivamente considerada em diversas áreas da física, incluindo, por exemplo, teorias quânticas de campos [11, 12], modelos não-Hermitianos de Anderson [18], álgebras de Lie complexas [19], teorias de rede QCD [20], e em virtude dessa equivalência formal entre as equações, campos da óptica e fotônica receberam grandes contribuições em relação a simetria \mathcal{PT} também [21], como por exemplo, invisibilidade unidirecional [22, 23, 24] e cristais fotônicos [25, 26, 27], apenas para mencionar alguns.

Trabalhos anteriores sobre simetria \mathcal{PT} em óptica foram concebidos para implementar processos físicos de espalhamento e transições de fase em sistemas \mathcal{PT} -simétricos [28, 29]. No caso do espalhamento, habitualmente assume-se que o meio espalhador é Hermitiano, linear e isotrópico [3]. Mas com a descoberta da simetria- \mathcal{PT} muita coisa tem mudado, diante disso, o estudo do espalhamento por materiais não-Hermitianos é algo que começou a ser desenvolvido recentemente e tem produzidos bons frutos. Desde então muitos estudos sobre o espalhamento da luz em materiais não-Hermitianos vem sendo estudados [30, 31, 32, 33]. Inspirado nisso, nesse trabalho teremos como objetivo estudar o espalhamento da luz através de materiais com ganho e perda (ou comumente chamados de não-Hermitianos) dentro dos limites da aproximação de Born.

Iniciamos no capítulo 1 com uma breve motivação sobre o desenvolvimento do trabalho. O capítulo 2 introduz os conceitos fundamentais da simetria \mathcal{PT} e suas respectivas aplicações na área da mecânica quântica, discutindo as propriedades mais importantes que descrevem essa simetria. Faremos também a conexão de tal simetria com o campo de pesquisa da óptica. O capítulo 3 apresenta a teoria clássica do espalhamento e a equação da onda satisfeita pelo campo elétrico na sua aproximação escalar, partindo do conjunto das equações de Maxwell. Será exposta também a teoria formal do espalhamento para campos escalares e a representação de espalhamento múltiplo com a série de Born. Discutiremos como são dadas tais aproximações e suas aplicações de interesse para o nosso trabalho. No capítulo 4, trataremos do espalhamento da luz por um material \mathcal{PT} -simétrico na primeira aproximação de Born. Nosso trabalho conclui que as direções do campo espalhado podem sofrer mudanças dependendo da presença de ganho e perda no material espalhador. Por fim, no capítulo 5, as conclusões serão discutidas bem como algumas perspectivas futuras.

2.1 Introdução a simetria \mathcal{PT}

Quando Dirac formulou os postulados da teoria quântica, ele sugeriu que a Hermiticidade fosse a condição fundamental para os operadores que representavam variáveis dinâmicas, como, por exemplo, o Hamiltoniano. Para Dirac, o requisito dessa condição era o dispositivo matemático que ele precisava para garantir que todas as previsões para os resultados das medições do mundo real de sistemas quânticos resultassem em um número real. Isso é importante, pois só números reais são medidos no laboratório. A escolha de Dirac da Hermiticidade como a propriedade fundamental do operador Hamiltoniano não foi seriamente contestada por cerca de setenta anos.

Essa escolha é uma condição sutil e abstrata que é matemática em sua origem. Em termos gerais, a exigência de Hermiticidade impõe um limite a um sistema. Esta é uma idealização na qual um sistema é isolado de qualquer ambiente circundante (e, portanto, não pode ser medido). Embora isso forneça uma estrutura matemática tratável para a teoria quântica, é um requisito não físico, pois todos os sistemas interagem com seu ambiente e, se desejamos medir um sistema, essa interação é necessária.

Em 1998, Carl Bender e Stefan Boettcher [1] publicaram um artigo explorando a substituição da Hermiticidade por outra condição. Eles mostraram que poderiam substituir essa condição matematicamente motivada de Dirac por uma fisicamente motivada, preservando o espectro real obtido a partir dos resultados experimentais. A nova teoria, no entanto, apresentava recursos muito interessantes.

A simetria subjacente que Bender e Boettcher encontraram foi o que chamaram de simetria \mathcal{PT} . O \mathcal{P} significa simetria de paridade. Se um sistema respeita a simetria \mathcal{P} , então a evolução do sistema não mudaria para uma versão espacialmente refletida do sistema. O \mathcal{T} significa reversão no tempo. A simetria de reversão temporal é exatamente o que parece, um sistema físico que respeita essa simetria evoluiria da mesma maneira, independentemente do tempo avançar ou retroceder. Alguns sistemas exibem individualmente simetrias \mathcal{P} e \mathcal{T} , mas é a combinação dos dois que parece ser interessante para questionar o postulado da Hermiticidade do Hamiltoniano de um sistema quântico.

2.2 Simetria \mathcal{PT} na quântica

Para abordarmos a simetria \mathcal{PT} devemos discorrer um pouco sobre mecânica quântica. Primeiro, vamos lembrar que na mecânica quântica o Hamiltoniano H é assumido como Hermitiano, o que significa que

$$H = H^\dagger, \quad (2.1)$$

onde o sobrescrito \dagger denota conjugação Hermitiana (isto é, transposição mais conjugação complexa). Isso garante autovalores de energia reais e, correspondentemente, uma evolução temporal unitária para a qual a probabilidade de encontrar a partícula em algum estado é conservada além de também garantir que os autoestados sejam ortogonais entre si. Sistemas abertos, por outro lado, podem ser descritos por Hamiltonianos não-Hermitianos, isto é,

$$H \neq H^\dagger, \quad (2.2)$$

para os quais a probabilidade em geral não é conservada e a evolução no tempo não é unitária. O que Bender e Boettcher mostraram, no entanto, foi que a Hermiticidade não é uma condição estritamente necessária para obter autovalores reais de H , e que toda uma classe de Hamiltonianos não-Hermitianos (com ganho e perda) pode ter autovalores reais mesmo não sendo Hermitiano.

Com isso vemos que a ideia central da teoria quântica \mathcal{PT} -simétrica é substituir a condição de que o Hamiltoniano de uma teoria quântica seja Hermitiano pela condição mais geral de que ela possua simetria de reflexão espaço-tempo (simetria \mathcal{PT}). Isso nos permite construir

e estudar novos tipos de Hamiltonianos que anteriormente teriam sido ignorados.

É fundamental que ao substituir a condição de Hermiticidade pela simetria \mathcal{PT} , não deixemos de abrir mão de nenhuma das propriedades físicas chave que uma teoria quântica deve ter. De forma geral, um Hamiltoniano é \mathcal{PT} simétrico desde que todas as suas autofunções sejam simultaneamente autofunções do operador \mathcal{PT} . Veremos que se a simetria \mathcal{PT} do Hamiltoniano não for quebrada, então o Hamiltoniano exibirá todas as características de uma teoria quântica descritas por um Hamiltoniano Hermitiano.

Começaremos revisando algumas ideias básicas da teoria quântica. Nos cursos elementares de mecânica quântica aprende-se que uma teoria quântica é especificada pelo operador Hamiltoniano que atua em um espaço de Hilbert. É de suma importância ressaltar também que o Hamiltoniano H tem as seguintes propriedades: o de determinar os auto-estados de energia $|E_n\rangle$. Esses são os auto-estados do operador Hamiltoniano e resolvem a equação de Schrödinger independente do tempo

$$H |E_n\rangle = E_n |E_n\rangle. \quad (2.3)$$

Em princípio, pode-se medir esses níveis de energia. O resultado de tal medição física é um número real, por isso é essencial que esses autovalores de energia sejam reais. Uma teoria quântica pode ter dois tipos de simetrias: simetrias contínuas, como invariância de Lorentz, e simetrias discretas, como invariância de paridade e de reversão no tempo.

O Hamiltoniano H determina a evolução temporal de um sistema quântico. Uma teoria quântica é simétrica sob uma transformação representada por um operador A se o mesmo comuta com o Hamiltoniano:

$$[A, H] = 0. \quad (2.4)$$

Observe que se uma transformação de simetria é representada por um operador linear A e se A comuta com o Hamiltoniano, então os autoestados de H também são autoestados de A . Vamos entender um pouco então sobre esses operadores de simetria discreta, que são a paridade (reflexão no espaço), e a reversão temporal.

2.2.1 Operações de paridade e reversão temporal

O efeito de \mathcal{P} no operador de coordenadas da mecânica quântica \mathbf{X} e no operador de momento \mathbf{P} é mudar seus sinais:

$$\mathcal{P}^\dagger \mathbf{X} \mathcal{P} = -\mathbf{X}, \quad (2.5)$$

$$\mathcal{P}^\dagger \mathbf{P} \mathcal{P} = -\mathbf{P}. \quad (2.6)$$

Observe que \mathcal{P} é um operador linear ¹ e que deixa invariante a relação de comutação fundamental (a álgebra de Heisenberg) da mecânica quântica,

$$\mathbf{X}\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{X} = i\hbar\mathbb{1}, \quad (2.7)$$

onde $\mathbb{1}$ é a matriz identidade. Já o operador de reversão no tempo é representado pelo símbolo \mathcal{T} . Este operador deixa \mathbf{X} invariante, mas muda o sinal de \mathbf{P}

$$\mathcal{T}\mathbf{X}\mathcal{T}^{-1} = \mathbf{X}, \quad (2.8)$$

$$\mathcal{T}\mathbf{P}\mathcal{T}^{-1} = -\mathbf{P}. \quad (2.9)$$

Assim como o operador de paridade \mathcal{P} , o operador de reversão no tempo \mathcal{T} deixa a relação de comutação 2.7 invariante, mas isso requer que \mathcal{T} inverta o sinal do número complexo i

$$\mathcal{T}i\mathcal{T} = -i. \quad (2.10)$$

A equação 2.10 indica que \mathcal{T} é um operador antilinear. Além disso, como \mathcal{P} e \mathcal{T} são operadores de reflexão, temos que o quadrado desses operadores são equivalente ao operador identidade,

$$\mathcal{P}^2 = \mathbb{1}, \quad (2.11)$$

$$\mathcal{T}^2 = \mathbb{1}. \quad (2.12)$$

Finalmente, os operadores \mathcal{P} e \mathcal{T} comutam

$$[\mathcal{P}, \mathcal{T}] = \mathcal{P}\mathcal{T} - \mathcal{T}\mathcal{P} = 0. \quad (2.13)$$

¹A álgebra que prova essas contas podem ser encontradas no apêndice A.

Em termos dos operadores \mathcal{P} e \mathcal{T} , definimos uma classe de Hamiltonianos, que têm a propriedade de ser \mathcal{PT} -simétrica no sentido de que eles comutam com o operador \mathcal{PT} , isto é [34],

$$[\mathcal{PT}, H] = \mathcal{P}TH - H\mathcal{PT} = 0. \quad (2.14)$$

Um Hamiltoniano \mathcal{PT} -simétrico não precisa ser Hermitiano; isto é, não precisa satisfazer a condição de simetria de Hermiticidade mostrada na equação 2.1. Podemos ver algumas das principais propriedades desses operadores na tabela (2.1), cujas demonstrações podem ser encontradas no apêndice A. Iremos mostrar na próxima seção que, de fato, os autovalores de alguns operadores \mathcal{PT} -simétricos possuem autovalores reais, sendo assim possível ter uma teoria quântica consistente cuja dinâmica é descrita por um Hamiltoniano não-Hermitiano.

Tabela 2.1: Operadores discretos \mathcal{P}, \mathcal{T} e \mathcal{PT} juntamente com seus requisitos de ação e simetria.

Operador	Linear/Antilinear	Ação	Simetria
\mathcal{P}	operador linear e unitário	$\mathcal{P}\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(-\mathbf{r}, t)$	$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = H(-\mathbf{p}, -\mathbf{r}, -t)$
\mathcal{T}	operador antilinear e antiunitário	$\mathcal{T}\psi(\mathbf{r}, t) = \psi^*(\mathbf{r}, -t)$	$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = H^*(-\mathbf{p}, \mathbf{r}, -t)$
\mathcal{PT}	operador antilinear e antiunitário	$\mathcal{PT}\psi(\mathbf{r}, t) = \psi^*(-\mathbf{r}, -t)$	$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = H^*(\mathbf{p}, -\mathbf{r}, -t)$ Mecânica quântica: $V(\mathbf{r}) = V^*(-\mathbf{r})$ Óptica: $n(\mathbf{r}, w) = n(-\mathbf{r}, w)$

2.3 Autovalores de um Hamiltoniano \mathcal{PT} -simétrico

Usando a simetria \mathcal{PT} como uma condição alternativa à Hermiticidade, podemos construir infinitos novos Hamiltonianos que teriam sido simplesmente ignorados no passado por não serem Hermitianos. Por exemplo, os primeiros estudos da teoria de campo de Reggeon no final

da década de 1970 levou inúmeros pesquisadores a observar que os Hamiltonianos cúbicos da mecânica quântica [35, 36, 37], como o mostrado abaixo,

$$H = P^2 + iX^3 \quad (2.15)$$

podem ter autovalores reais. Além disso, em 1980 foi estudado com base no argumentos de somabilidade de Borel, o espectro de um Hamiltoniano relacionado a equação 2.15 é tido como real [38]. Em cada um desses casos, a possibilidade de um Hamiltoniano não-Hermitiano complexo ter níveis de energia reais foi vista como uma curiosidade isolada. Acreditava-se que tal Hamiltoniano não poderia descrever uma teoria válida da mecânica quântica porque a não-Hermiticidade do Hamiltoniano resultaria em evolução temporal não unitária [39, 40, 41].

Quando Bender decidiu investigar esse mesmo Hamiltoniano, sugeriu que tal Hamiltoniano possuía espectro real de energias por conta da presença de uma simetria. Essa investigação se deu por meio de uma técnica perturbativa desenvolvida pelo mesmo anos antes, para resolver problemas não lineares [42]. Ressaltando também que para descrever esses novos Hamiltonianos não-Hermitianos com níveis de energia reais, foi utilizado a simetria- \mathcal{PT} . Para apresentar os resultados de seus estudos numéricos, vamos reescrever o Hamiltoniano como

$$H = P^2 - (iX)^N, \quad (2.16)$$

onde N é um parâmetro contínuo real. Os autovalores deste Hamiltoniano são reais para todo $N \geq 2$, enquanto que para $N < 2$ o espectro é complexo. Mas só em 2001 Dorey provou rigorosamente que o espectro de H para $N \geq 2$ é real, discreto e positivo [43, 44]. Percebemos então que claramente o Hamiltoniano descrito na equação 2.15 é apenas um membro de uma enorme e notável classe de Hamiltonianos \mathcal{PT} -simétricos, cujos níveis de energia são reais e positivos. O espectro de H exibe três comportamentos distintos em função de N (ver a figura 2.1):

Quando $1 < N < 2$ há apenas um número finito de autovalores reais positivos e um número infinito de pares complexos conjugados de autovalores. Dizemos que nesta região a simetria \mathcal{PT} é quebrada e que $N \geq 2$ é uma região de simetria \mathcal{PT} inteira. Também, $\langle X \rangle \neq 0$ no estado fundamental porque H quebra a simetria de paridade. À medida que N diminui de 2 para 1, os níveis de energia adjacentes se coalescem em pares conjugados

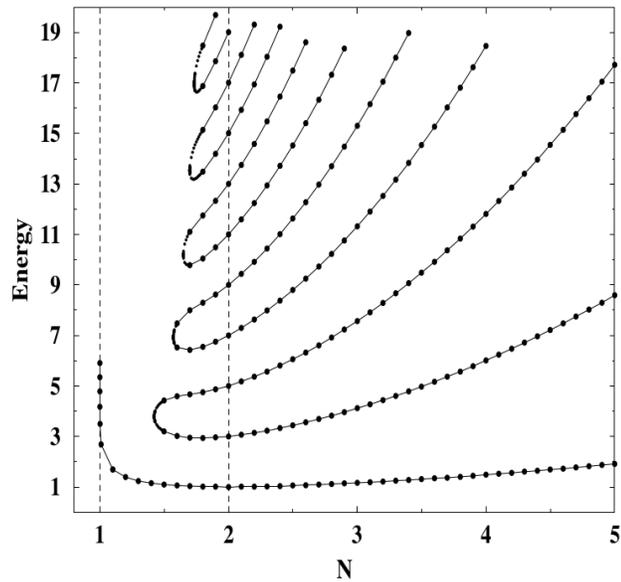


Figura 2.1: Níveis de energia do Hamiltoniano $H = P^2 - (iX)^N$ em função do parâmetro N . Retirado e adaptado de [1]

complexos começando na extremidade superior do espectro e quando $N \leq 1$ os autovalores são todos complexos. No limite inferior $N = 2$ desta região encontra-se o oscilador harmônico e é exatamente nesse ponto que ocorre a chamada quebra espontânea da simetria \mathcal{PT} no sistema, onde o espectro de autovalores do Hamiltoniano dado pela equação 2.16 deixa de ser real para tornar-se complexo, $N = 2$ é o chamado ponto excepcional. Falaremos mais sobre isso no tópico abaixo.

Com isso, podemos entender a associação entre a simetria \mathcal{PT} e os espectros reais da seguinte forma, se a simetria \mathcal{PT} de um Hamiltoniano H é inteira então todas as autofunções de H são simultaneamente autofunções de \mathcal{PT} .

2.3.1 Simetria \mathcal{PT} quebrada e inteira

O ponto de transição entre o estado de simetria \mathcal{PT} quebrada e inteira é o que chamamos de ponto excepcional. Pontos excepcionais são singularidades espectrais no espaço de parâmetros de um sistema em que dois ou mais autovalores, e seus autovetores correspondentes, coalescem simultaneamente. O termo ponto excepcional foi introduzido pela primeira vez no estudo da perturbação de operadores lineares não-Hermitianos [45], mas sua importância física foi

inicialmente apontada em [46, 47], onde a terminologia de degenerescência não-Hermitiana foi usada para distinguir esses pontos críticos de degenerescência regulares que ocorrem em sistemas Hermitianos [48, 49]. O interesse por essas degenerescências espectrais peculiares foi despertado em uma família particular de Hamiltonianos não-Hermitianos, os chamados sistemas \mathcal{PT} -simétricos.

Percebeu-se que comutar com o operador \mathcal{PT} não é suficiente para garantir um espectro real, pois os Hamiltonianos formalmente \mathcal{PT} -simétricos podem sofrer uma transição de fase para o regime de simetria espontaneamente quebrada, no qual aparecem autovalores complexos. A transição de fase acontece como resultado de uma variação paramétrica no Hamiltoniano [1, 50, 13, 11, 8, 51].

Para esclarecer esses pontos vamos utilizar um exemplo simples, considere um sistema composto por duas cavidades acopladas, uma com ganho e outra com perda, como ilustra a figura 2.2. Neste caso, podemos representar o sistema através de um Hamiltoniano de dois níveis de energia

$$H = \begin{bmatrix} a + ib & g \\ g & a - ib \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

onde g é a constante de acoplamento, a diagonal complexa representa ganho e perda, onde $+ib$ é o ganho e $-ib$ a perda, sendo $a, b, g \in \mathbb{R}$ e $H|\phi_{1,2}\rangle = E_{1,2}|\phi_{1,2}\rangle$. Observamos que quando $b = 0$ os autovalores são reais e a probabilidade é conservada durante a evolução temporal. Mas, por outro lado, se a parte imaginária da diagonal for diferente de zero, então a matriz é não-Hermitiana e portanto os autovalores resultantes (E_n) podem em geral ser complexos, levando a uma evolução temporal com amplificação ou dissipação. Nesse caso, falamos que os autovetores à direita ² correspondentes não são mais ortogonais. Os autovalores da esquerda podem por sua vez ser obtidos através de $H^\dagger|\tilde{\phi}_{1,2}\rangle = E_{1,2}^*|\tilde{\phi}_{1,2}\rangle$. Com isso, a não ortogonalidade dos dois estados é expressa pela relação $\langle\tilde{\phi}_{1,2}|\phi_{1,2}\rangle = 0$. Os autovalores de H podem ser facilmente calculados, tendo em vista que é uma matriz simples, tendo como resultado então:

$$E_{\pm} = a \pm g\sqrt{1 - \left(\frac{b}{g}\right)^2}. \quad (2.18)$$

²O leitor deve se lembrar que quando temos uma matriz não-Hermitiana temos autovetores diferentes à direita e esquerda.

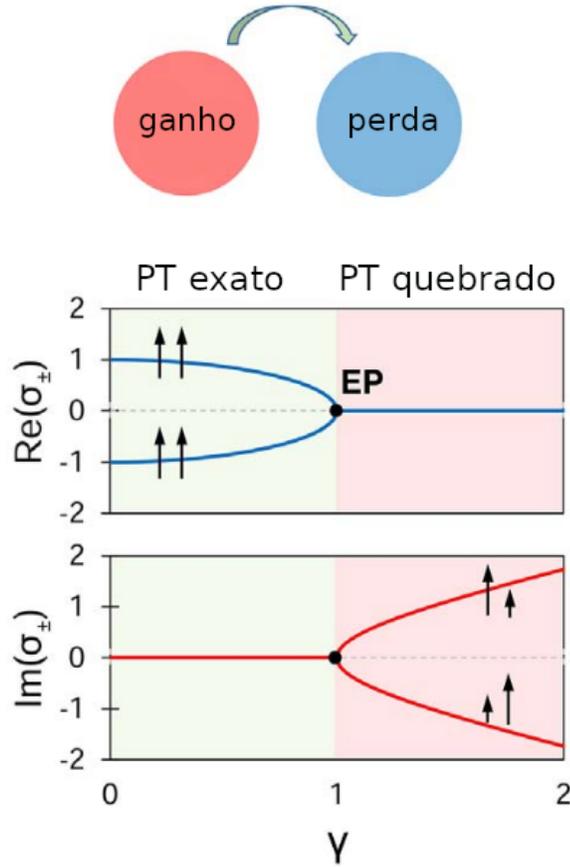


Figura 2.2: Um sistema \mathcal{PT} -simétrico composto por dois sistemas (cavidades) acoplados (superior) com ganho (vermelho) e perda (azul), e os autovalores correspondentes (inferior) versus o contraste ganho-perda. Retirado e adaptado de [2]

Vemos então que quando $b/g < 1$, os dois autovalores são reais. Nesse regime, conhecido como “fase \mathcal{PT} inteira”, como mostra na figura 2.2, os dois modos são distribuídos em ambas as cavidades e nenhuma delas experimenta um ganho ou perda líquida, isto é, permanece neutro. Por outro lado, as características dos modos mudam drasticamente assim que $b/g > 1$, onde o sistema entra na “fase \mathcal{PT} -quebrada”. A simetria de cada modo é quebrada de tal forma que um deles reside principalmente na cavidade de ganho e, portanto, desfruta de amplificação, enquanto o outro habita a cavidade com perdas experimentando atenuação.

2.4 Sistemas Óptico \mathcal{PT} simétricos

Vimos como a descoberta da simetria \mathcal{PT} em sistemas quânticos expandiu nossos conceitos de Hermiticidade e fez com que novos modelos não-Hermitianos pudessem ser criados. Como essa teoria, cuja as implicações matemáticas tem sido motivo de debate teórico por muitos anos, pode ser aplicada na óptica? Foi recentemente reconhecido que a óptica pode fornecer um terreno fértil onde os conceitos de simetria \mathcal{PT} podem ser explorados.

2.4.1 Conceito de simetria \mathcal{PT} para sistemas ópticos

Antes de considerar a simetria \mathcal{PT} na óptica vamos estender nossa discussão sobre a operação de simetria \mathcal{P} e \mathcal{T} juntamente com sua combinação, \mathcal{PT} , considerando a equação de Schrödinger de partícula unitária

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi, \quad (2.19)$$

onde ψ é a função de onda, \hbar é a constante reduzida de Planck, e m é a massa da partícula. Temos que o Hamiltoniano é dado por,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \equiv \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V(x), \quad (2.20)$$

sendo composto pelo operador de energia cinética,

$$H_c = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (2.21)$$

e o operador de energia potencial $V(x)$. Este Hamiltoniano é Hermitiano como mostrado na equação 2.1, se o potencial for real $V(x) = V^*(x)$, garantindo a evolução da energia e do tempo. Esta teoria descreve sistemas quânticos conservativos, que são completamente isolados da vizinhança e envolvem partículas estáveis.

Na ausência de condições de contorno e possíveis fluxos de energia dentro e fora do domínio de interesse, o potencial $V(x)$ torna-se complexo, levando à não-Hermiticidade. Muitas vezes é comumente assumido que um sistema aberto com potencial complexo $V(x) \neq V^*(x)$ inevitavelmente resulta em um espectro de energia complexo devido à sua evolução não conservativa.

No entanto, sistemas não Hermitianos podem ter um espectro de valor real se seu Hamiltoniano comuta com o operador \mathcal{PT} , como mostrado na equação 2.14. Temos que a equação de Schrödinger comuta com o operador \mathcal{PT} se e somente se a energia potencial satisfaz $V(x) = V^*(-x)$. Isto implica que existe uma função par para a parte real do potencial

$$\text{Re}\{V(-x)\} = \text{Re}\{V(x)\}, \quad (2.22)$$

e uma função impar para sua parte imaginária

$$\text{Im}\{V(-x)\} = -\text{Im}\{V(x)\}. \quad (2.23)$$

Agora estamos prontos para traduzir esses conceitos para o campo do eletromagnetismo. Com esse objetivo em mente, quais seriam as condições para que um sistema óptico seja considerado um sistema \mathcal{PT} simétrico? Nós já citamos aqui que no artigo original de Bender e Boettcher foi introduzido a simetria \mathcal{PT} no contexto da mecânica quântica [1]. Porém, em pouco tempo o conceito de mecânica quântica \mathcal{PT} -simétrica foi estendido à óptica [52, 16, 14, 53]. Isto ocorreu primeiramente usando a aproximação paraxial para a equação da propagação da onda eletromagnética [54]. Com tal aproximação, chegamos a uma forma idêntica à da equação de Schrödinger, porém com interpretações diferentes para os seus termos constituintes. A percepção de uma analogia matemática entre a equação de Schrödinger e a equação de onda eletromagnética no limite paraxial foi a base para se começar a estudar implementações da simetria \mathcal{PT} em uma plataforma fotônica, onde a não-Hermiticidade pode ser ajustada com ganho e perda ópticos [52, 53].

Podemos então introduzir o conceito de simetria \mathcal{PT} em óptica da seguinte maneira. Nos casos bidimensionais e unidimensionais, As equações de Maxwell se reduzem à equação escalar de Helmholtz

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon(x, z) \right] \mathcal{E}(x, z) = 0, \quad (2.24)$$

onde \mathcal{E} é o campo elétrico, que coincide formalmente com a equação estacionária de Schrödinger [55].

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{2m}{\hbar^2} (V(x, z) - E) \right] \psi(x, z) = 0, \quad (2.25)$$

sob as substituições,

$$V(x, z) - E \rightarrow \epsilon(x, z), \quad (2.26)$$

$$\psi(x, z) \rightarrow \mathcal{E}(x, z), \quad (2.27)$$

$$-\frac{2m}{\hbar^2} \rightarrow \left(\frac{\omega}{c}\right)^2. \quad (2.28)$$

A condição de simetria \mathcal{PT} para um sistema mecânico quântico descrito pela equação 2.25 é reduzida ao requisito

$$V(x, z) = V^*(-x, -z) \quad (2.29)$$

Portanto, por analogia entre a energia potencial em mecânica quântica e a permissividade em óptica, a condição de simetria \mathcal{PT} para o sistema óptico é definida como a condição imposta à permissividade do meio

$$\text{Re}\{\epsilon(\omega, x, z)\} = \text{Re}\{\epsilon(\omega, -x, -z)\}, \quad (2.30)$$

$$\text{Im}\{\epsilon(\omega, x, z)\} = -\text{Im}\{\epsilon(\omega, -x, -z)\}. \quad (2.31)$$

A simetria \mathcal{PT} pode ser prontamente estabelecida pela incorporação de ganho e perda, ou seja, o índice de refração agora vai ser quem desempenha o papel do potencial complexo. Essa analogia também levou a uma enxurrada de atividades de pesquisa semelhantes em outros ambientes físicos, como eletrônica [56, 57, 58], micro-ondas [59, 60], mecânica [61], acústica [62, 63, 64, 65, 66], e sistemas atômicos [67, 68, 69], para citar alguns.

2.5 Conclusão

Neste capítulo fizemos uma breve discussão sobre a descoberta da simetria- \mathcal{PT} na quântica, e suas aplicações na óptica, nosso próximo objetivo é estender sobre a teoria do espalhamento baseado na aproximação de Born, que será de grande importância para nossa pesquisa

No próximo capítulo iremos discutir a teoria clássica do espalhamento da luz, mostrando o formalismo do espalhamento para campos escalares. Posteriormente iremos usar essa teoria para aplicar em um sistema onde o índice de refração satisfaz a condição da simetria \mathcal{PT} .

Teoria do espalhamento

3.1 Introdução

Muito do que sabemos sobre as forças fundamentais da natureza foi aprendido com experimentos de espalhamento, nos quais um alvo é essencialmente bombardeado com um feixe de partículas. Exemplos bem conhecidos são os espalhamentos elétron-pósitron, elétron-próton e próton-antipróton [70, 71]. Mais muitos outros feixes e ou partículas-alvo foram e são atualmente usados em uma rica variedade de diferentes tipos de experimentos. Talvez o mais famoso de todos os experimentos de espalhamento seja o espalhamento de partículas alfa em átomos de ouro, realizada por Rutherford e seus colaboradores no início do século 20 [72].

Podemos aprender muito com o espalhamento, cada fenômeno físico que contribui para a geração da luz espalhada deixa sua impressão por assim dizer, na intensidade, polarização e composição espectral da luz espalhada [73, 74]. As marcas características dos diferentes fenômenos físicos na luz espalhada nos permitem estudar esses fenômenos e os vários problemas relacionados a eles [75]. Com a ajuda do espalhamento da luz, estuda-se a estrutura das moléculas [76], determinam-se os pesos moleculares de soluções e proteínas [77], cristais ópticos [78], e muitas outras questões.

Quando um feixe de luz incide sobre a matéria, o campo elétrico associado à luz induz oscilações periódicas dos elétrons do material. O material então serve como uma fonte secundária de luz e irradia luz na forma de radiação fixa com um comprimento de onda igual ao da luz incidente. A intensidade, polarização, distribuição angular e estrutura fina da radiação espalhada são determinadas pelo tamanho, forma, constantes ópticas e interações das

moléculas no material espalhado. Inversamente, a partir do conhecimento das propriedades de espalhamento da luz de um determinado sistema, o físico-químico por exemplo, pode com a ajuda da teoria eletromagnética da radiação e da teoria cinética da matéria, obter uma imagem molecular detalhada desse sistema [79].

O primeiro sucesso na investigação da luz espalhada ocorreu em 1869, quando Tyndall [80] montou um experimento de laboratório no qual observou a luz espalhada por partículas muito finas. O experimento consistia em uma pequena quantidade de partículas, cujo tamanho era pequeno em comparação com o comprimento de onda da luz visível, onde essas partículas foram colocadas em um tubo de vidro. Um intenso feixe de luz branca foi direcionado ao longo do eixo do tubo. A luz espalhada foi observada em diferentes ângulos em relação à direção da luz incidente. Como resultado desse experimento, Tyndall descobriu que a luz espalhada revelava uma tonalidade azulada e que a polarização linear completa ou quase completa da luz espalhada era observada em um ângulo de 90° em relação à direção da luz incidente.

Com base nessas observações, Tyndall chegou à ideia de que a cor azul e a polarização da luz no céu eram determinadas pelo espalhamento da luz solar por finas partículas de poeira que sempre estão presentes na atmosfera terrestre em quantidades suficientes. As conclusões e dados experimentais de Tyndall claramente serviram como ponto de partida para as primeiras pesquisas teóricas de Rayleigh sobre espalhamento de luz.

Concluimos que o espalhamento da luz é o fenômeno de ricochete da radiação eletromagnética pelos átomos ou moléculas do meio através do qual eles estão viajando. Então, quando a luz viaja através de um meio, ela é refletida em qualquer direção após atingir as partículas no meio. Sabe-se que o espalhamento da luz pode ser classificado com base na energia da luz espalhada. Existindo dois tipos de espalhamento, sendo eles, espalhamento elástico, que é quando a energia da luz espalhada é conservada, então tal espalhamento é chamado de espalhamento elástico. Por exemplo, espalhamento de Rayleigh e de Mie. Espalhamento Inelástico: Se a energia da luz espalhada não for conservada, por exemplo, espalhamento Raman e Brillouin. Neste capítulo iremos discutir um pouco sobre a teoria do espalhamento da luz, mostraremos suas aproximações e como isso será importante para nossa pesquisa.

3.2 Equação de Helmholtz não-homogênea

A teoria do eletromagnetismo é baseada nas quatro equações de Maxwell. Essas equações são um conjunto de equações diferenciais parciais que combinam o campo elétrico \mathbf{E} e a indução magnética \mathbf{B} entre si. Uma vez que essas equações são aplicadas a um sistema macroscópico, também são usados o deslocamento elétrico \mathbf{D} e o campo magnético \mathbf{H} [81]. Na forma diferencial, as equações de Maxwell na ausência de carga ou fontes de corrente são dadas por

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (3.4)$$

onde \mathbf{r} é o vetor posição e t é o tempo.

Se assumirmos que as soluções das equações de Maxwell têm uma dependência harmônica do tempo $e^{-i\omega t}$, onde ω é a frequência angular, a partir da qual soluções arbitrárias podem ser construídas por superposições de Fourier, podemos usar amplitudes dependentes de frequência $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega)$, ao invés dos campos dependentes do tempo usados na equação de Maxwell acima [82, 83]. Neste chamado domínio de espaço-frequência, as equações de Maxwell são escritas como

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (3.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (3.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega), \quad (3.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega). \quad (3.8)$$

Vamos considerar agora um sistema material, macroscópico que é isotrópico e responde linearmente a um campo aplicado. Então os campos \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} e \mathbf{H} , respectivamente, são conectados via

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad (3.9)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega), \quad (3.10)$$

sendo ϵ a permissividade elétrica e μ a permeabilidade magnética. A partir das equações de Maxwell podemos obter as equações da onda do campo eletromagnético ¹

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \mu(\mathbf{r}, \omega) k^2 \mathbf{E} + \nabla[\ln \mu(\mathbf{r}, \omega)] \times \nabla \times \mathbf{E} + \nabla[\mathbf{E} \cdot \nabla \ln \epsilon(\mathbf{r}, \omega)] = 0, \quad (3.11)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \mu(\mathbf{r}, \omega) k^2 \mathbf{H} + \nabla[\ln \epsilon(\mathbf{r}, \omega)] \times \nabla \times \mathbf{H} + \nabla[\mathbf{H} \cdot \nabla \ln \mu(\mathbf{r}, \omega)] = 0, \quad (3.12)$$

sendo $k = \omega/c$ o número de onda onde $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ é a velocidade da luz no vácuo e ϵ_0 e μ_0 correspondem a permissividade no vácuo e a permeabilidade no vácuo. Consideremos agora que o campo eletromagnético incide em um meio linear, isotrópico e não magnético. Com isso, a equação 3.11 pode ser simplificada para

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + k^2 \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \nabla[\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla \ln \epsilon(\mathbf{r}, \omega)] = 0, \quad (3.13)$$

como o último termo à esquerda da equação acopla as componentes cartesianas do campo elétrico, o tratamento do espalhamento baseado nesta equação é bastante complicado. Mas a equação pode ser simplificada assumindo que a função dielétrica $\epsilon(\mathbf{r})$ varia lentamente com a posição ou seja, é constante ao longo de distâncias da ordem do comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k$. Neste caso, o último termo à esquerda da equação 3.13 pode ser desprezado e obtemos

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + k^2 n^2(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (3.14)$$

onde reescrevemos $\epsilon(\mathbf{r}, \omega)$ em termos do índice de refração do meio, por meio da expressão, $\epsilon(\mathbf{r}, \omega) = n^2(\mathbf{r}, \omega)$.

Notamos que, ao contrário da equação 3.13, as componentes cartesianas de $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ na equação 3.14 não estão mais acopladas entre si, o que permite resolver esta equação para cada componente separadamente. De fato, a solução de uma componente fornece uma boa visão do comportamento geral da solução da equação 3.14. Podemos continuar nossa análise substituindo a componente cartesiana $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ por uma componente arbitrária $U(\mathbf{r}, \omega)$ (aproximação escalar), que consiste em desprezar a natureza vetorial do campo, tendo assim

$$[\nabla^2 + k^2 n^2(\mathbf{r}, \omega)]U(\mathbf{r}, \omega) = 0. \quad (3.15)$$

Esta é a equação fundamental da teoria do espalhamento escalar, sendo ela uma equação de Helmholtz não-homogênea, que será o ponto de partida para a análise do campo espalhado.

¹Essa demonstração pode ser encontrada no apêndice B

Será mais conveniente reescrever a equação 3.15 de tal forma,

$$[\nabla^2 + k^2]U(\mathbf{r}, \omega) = -4\pi F(\mathbf{r}, \omega)U(\mathbf{r}, \omega), \quad (3.16)$$

onde

$$F(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi}k^2[n^2(\mathbf{r}, \omega) - 1]. \quad (3.17)$$

Sendo a função $F(\mathbf{r}, \omega)$ conhecida como potencial de espalhamento do meio, em analogia com a terminologia usada na teoria quântica do espalhamento, que é governada por uma equação que é matematicamente equivalente à equação 3.16, a equação de Schrödinger independente do tempo para partículas não relativísticas.

3.3 Função de Green

Entre as várias ferramentas de uso comum na teoria de espalhamento, as funções de Green desempenham um papel proeminente, permeando quase todas as facetas do campo (e relacionadas), desde o espalhamento de ondas clássicas até a teoria quântica de campos relativística e a mecânica estatística. No campo da matemática uma função de Green é a resposta ao impulso de um operador diferencial linear não-homogêneo definido em um domínio com condições iniciais ou condições de contorno especificadas [84].

3.3.1 Derivação da equação integral básica do espalhamento

A equação do campo escalar é uma equação diferencial portanto é possível obter uma solução formal para o campo transformando a equação 3.16 em uma equação integral. Para isso, usamos o método da função de Green. Seja então $G(\mathbf{r})$ uma função de Green que resolva a equação de Helmholtz não-homogênea ou seja

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.18)$$

onde $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ é a função delta de Dirac. É conhecido que se adicionar à uma função de Green particular G qualquer solução S da equação homogênea, $(\nabla^2 + k^2)S = 0$, o resultado $G + S$ ainda é uma função de Green

$$(\nabla^2 + k^2)(G + S) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (3.19)$$

Por outro lado, a diferença entre qualquer duas funções de Green deve ser uma solução da equação homogênea. É aceitável então usar a equação 3.18 para resolver a equação diferencial 3.16.

Consideramos um campo eletromagnético monocromático, incidente em um meio linear, isotrópico, não magnético, ocupando um domínio finito V (figura 3.1). Temos que ao incidir nesse meio linear um campo espalhado é gerado $U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega)$. Com isso podemos expressar nosso campo $U(\mathbf{r}, \omega)$ como a soma do campo incidente $U^{(i)}(\mathbf{r}, \omega)$ e do campo espalhado $U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega)$, sendo assim;

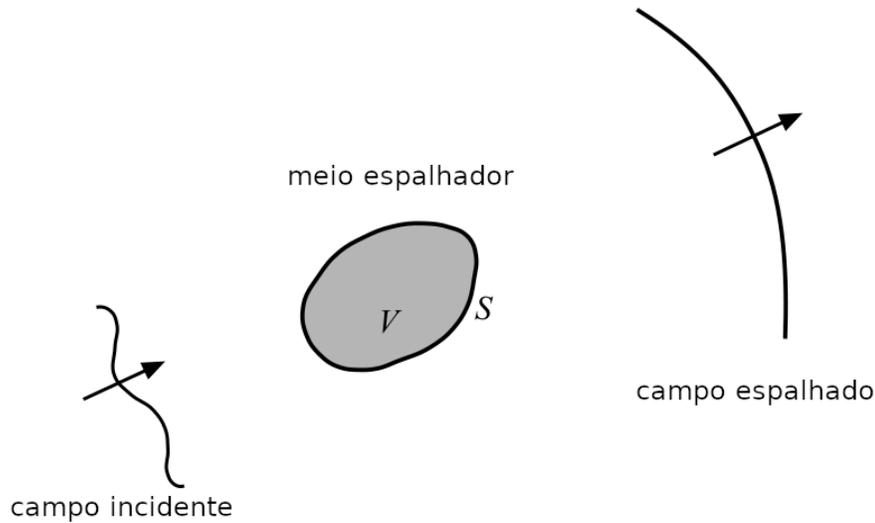


Figura 3.1: Demonstração do campo incidindo em um material espalhador de volume V limitado por uma superfície fechada S . Retirado e adaptado de[3]

$$U(\mathbf{r}, \omega) = U^{(i)}(\mathbf{r}, \omega) + U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega). \quad (3.20)$$

Sendo o campo incidente geralmente uma onda plana, sabemos que tal campo satisfaz a equação de Helmholtz em todo o espaço,

$$(\nabla^2 + k^2)U^{(i)}(\mathbf{r}, \omega) = 0. \quad (3.21)$$

Seguindo da equação acima e usando a equação de Helmholtz 3.16, vemos que o campo espalhado satisfaz a equação;

$$(\nabla^2 + k^2)U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega) = -4\pi F(\mathbf{r}, \omega)U(\mathbf{r}, \omega). \quad (3.22)$$

A solução geral de qualquer equação não-homogênea pode ser escrita imediatamente em termos das funções de Green, primeiro expandindo $F(\mathbf{r}, \omega)U(\mathbf{r}, \omega)$ como uma combinação linear de funções delta,

$$F(\mathbf{r}, \omega)U(\mathbf{r}, \omega) = \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')F(\mathbf{r}', \omega)U(\mathbf{r}', \omega)d\mathbf{r}'. \quad (3.23)$$

Pode-se assim escrever a forma geral para solução de uma equação não-homogênea imediatamente em termos das funções de Green, sendo

$$U(\mathbf{r}, \omega) = U^{(i)}(\mathbf{r}, \omega) - 4\pi \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega)F(\mathbf{r}', \omega)U(\mathbf{r}', \omega)d\mathbf{r}'. \quad (3.24)$$

Sendo a equação 3.22 nossa equação de interesse agora, precisamos definir quem é nossa respectiva função de Green. A função de Green para $(\nabla^2 + k^2)$ pode ser deduzido do fato bem conhecido de que [83, 85],

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}). \quad (3.25)$$

Ao usar isso, descobrimos imediatamente que

$$[\nabla^2 + k^2]e^{ik/r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}). \quad (3.26)$$

Simplesmente substituindo \mathbf{r} por $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ e r por $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ nesta equação obtemos duas funções de Green G^+, G^- para $[\nabla^2 + k^2]$, sendo

$$G_{\pm}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{e^{\pm ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (3.27)$$

Com isso podemos escrever nossa equação do espalhamento na forma integral da seguinte forma

$$U(\mathbf{r}) = e^{ik\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \mathbf{r}} + \int F(\mathbf{r}')U(\mathbf{r}') \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', \quad (3.28)$$

onde a frequência ω foi omitida. Note que escolhemos $e^{\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \mathbf{r}}$ para o campo incidente $U^{(i)}(\mathbf{r})$ e também escolhemos a função de Green como G_+ . Essas escolhas foram feitas porque estamos interessados no problema de espalhamento e, neste contexto, $U(\mathbf{r})$ deve ter a forma de uma onda esférica divergente. Veremos agora que a equação 3.28 deve ter um comportamento assintótico.

3.3.2 Aproximação para o campo distante

Observamos em primeiro lugar que a função potencial de espalhamento é um fator no integrando na equação 3.28, de modo que as regiões de \mathbf{r}' onde $F(\mathbf{r}')$ é muito pequena não contribuem consideravelmente para a integral. Portanto, embora a integração seja, em princípio, para todo \mathbf{r}' , ela se estende efetivamente apenas sobre a região de \mathbf{r}' próxima à origem, onde o potencial $F(\mathbf{r}')$ é significativo [4, 3]. Deste modo, ao considerar a forma assintótica $|\mathbf{r}| = r \rightarrow \infty$ da equação 3.28 podemos tornar $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$ e, portanto (figura 3.2),

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}/r = r - \mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{s}}, \quad (3.29)$$

onde $\hat{\mathbf{s}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$. O termo $\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{s}}$ na equação acima é muito pequeno em comparação com r e pode

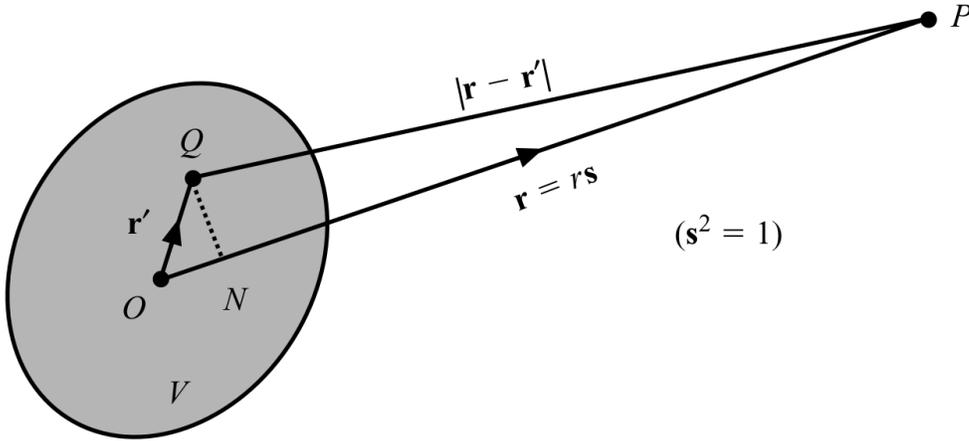


Figura 3.2: Notação para aproximação de campos distantes. Retirado e adaptado de [3]

ser desprezado na substituição de $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ no denominador da equação 3.28, mas no caso da expressão $e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \approx e^{ikr} e^{-ik\hat{\mathbf{s}}\cdot\mathbf{r}'}$ o valor de $\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}'$ é claramente importante mesmo sendo pequeno em relação a kr . Com isso em mente podemos fazer as seguintes aproximações,

$$\text{Para a parte de G no denominador} \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r \quad (3.30)$$

$$\text{Para a parte de G no numerador} \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}' \quad (3.31)$$

desse modo,

$$\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik\hat{\mathbf{s}}\cdot\mathbf{r}'}. \quad (3.32)$$

Com essas devidas considerações podemos substituir a equação 3.32 na integral da equação 3.28 e obter a relação integral para $U(\mathbf{r})$

$$U(\mathbf{r}) \approx e^{ik\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \mathbf{r}} + \frac{e^{ikr}}{r} \int F(\mathbf{r}')U(\mathbf{r}')e^{-ik\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}'} d^3\mathbf{r}'. \quad (3.33)$$

Obtendo assim uma boa relação para o campo em uma aproximação distante.

3.4 Aproximação de Born

Partindo da equação básica do espalhamento de potencial, equação 3.28

$$U(\mathbf{r}) = e^{ik\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \mathbf{r}} + \int_V F(\mathbf{r}')U(\mathbf{r}')G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3r', \quad (3.34)$$

pode-se fazer uma aproximação reescrevendo essa equação, trocando $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$ e $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}''$, tendo assim

$$U(\mathbf{r}') = e^{ik\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \mathbf{r}'} + \int_V F(\mathbf{r}'')U(\mathbf{r}'')G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') d^3r''. \quad (3.35)$$

Podemos assim substituir $U(\mathbf{r}')$ da equação 3.35 na equação 3.34

$$U(\mathbf{r}) = e^{ik\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \mathbf{r}} + \int_V d^3r' F(\mathbf{r}')G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')e^{ik\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \mathbf{r}'} + \int_V d^3r' F(\mathbf{r}')G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \int_V F(\mathbf{r}'')U(\mathbf{r}'')G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') d^3r''. \quad (3.36)$$

Se a interação entre a luz incidente e o material for fraca, ou seja ($|U^s| \ll |U^i|$), pode-se obter uma boa aproximação do campo total se $U(\mathbf{r}')$ for substituído por U^i no integrando do lado direito da equação 3.34. Isso nos dá a aproximação de Born de primeira ordem. A aproximação na qual mantemos a primeira integral da série acima e zeramos todas as outras. Se repetirmos mais uma vez esse procedimento, obtemos mais uma aproximação, quando ignoramos o ultimo termo, levando a aproximação de segunda ordem de Born

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}) = & e^{ik\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \mathbf{r}} + \int_V d^3r' F(\mathbf{r}')G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')e^{ik\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \mathbf{r}'} \\ & + \int_V d^3r' F(\mathbf{r}')G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \int_V d^3r'' F(\mathbf{r}'')G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')e^{ik\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \mathbf{r}''} \\ & + \int_V d^3r' F(\mathbf{r}')G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \int_V d^3r'' F(\mathbf{r}'')G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') \int_V d^3r''' F(\mathbf{r}''')G(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}''')U(\mathbf{r}'''). \end{aligned}$$

Fisicamente esse procedimento corresponde ao que chamamos de espalhamento múltiplo como podemos observar na figura 3.3 .

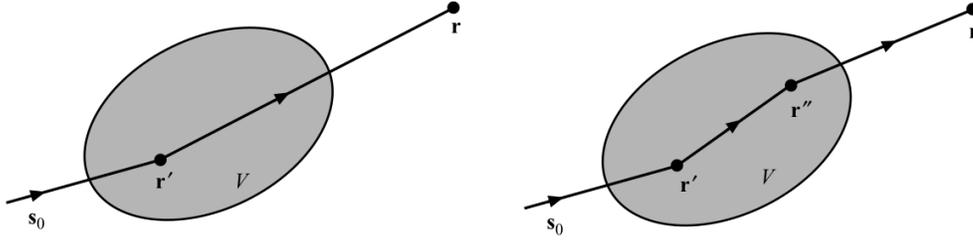


Figura 3.3: Ilustrando (a) espalhamento simples, correspondendo a primeira aproximação de Born, (b) espalhamento duplo correspondendo a segunda aproximação de Born. Retirado e adaptado de [3]

Poderíamos continuar com esse procedimento sucessivamente, mas podemos perceber que ao iterar este procedimento, podemos formar uma série infinita que esquematicamente se parece com

$$U = e^{ik\hat{s}_0 \cdot \mathbf{r}} + \int_V GU e^{ik\hat{s}_0 \cdot \mathbf{r}} + \int_V GU \int_V GU e^{ik\hat{s}_0 \cdot \mathbf{r}} + \int_V GU \int_V GU \int_V GU e^{ik\hat{s}_0 \cdot \mathbf{r}} + \dots \quad (3.37)$$

como as equações se tornam cada vez mais longas, as vezes as expressamos de forma simbólica, como mostrado acima.

Vamos escrever então a primeira aproximação de Born já substituindo o valor da função de Green em uma aproximação para o campo distante, como mostrado na equação 3.32, tendo assim

$$U = e^{ik\hat{s}_0 \cdot \mathbf{r}} + \frac{e^{ikr}}{r} \int F(\mathbf{r}') e^{-ik\hat{s} \cdot \mathbf{r}'} e^{ik\hat{s}_0 \cdot \mathbf{r}'} d^3 \mathbf{r}', \quad (3.38)$$

onde

$$U^{(s)}(\mathbf{r}) = f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (3.39)$$

A equação 3.39 confirma que longe do espalhador o campo espalhado $U^{(s)}(\mathbf{r})$ de fato se comporta como uma onda esférica de saída, como esperado. Pode-se reparar que a chamada função $f(\theta, \phi)$ corresponde a nossa integral na equação 3.38, muito conhecida como amplitude de espalhamento desempenhando um papel importante na teoria de espalhamento.

$$f(\theta, \phi) = \int F(\mathbf{r}') e^{-ik\hat{s} \cdot \mathbf{r}'} e^{ik\hat{s}_0 \cdot \mathbf{r}'} d^3 \mathbf{r}' \quad (3.40)$$

Note que decidimos escolher $\mathbf{k}_{(incidente)} = k\hat{s}_0$ e $\mathbf{k}_{(espalhado)} = k\hat{s}$, como ilustrado na figura 3.4. Podemos simplificar as exponenciais da equação 3.40, definindo $\mathbf{K} = k\hat{s} - k\hat{s}_0$.

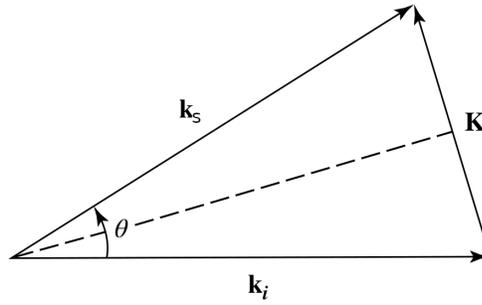


Figura 3.4: Esquema demonstrando os vetores de onda incidente e espalhada.

Sendo \mathbf{K} o vetor de onda de espalhamento na direção (θ, ϕ) . Com isso obtemos de forma simplificada a equação para a amplitude de espalhamento

$$f(\theta, \phi) = \int F(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}'} d^3\mathbf{r}'. \quad (3.41)$$

Essa equação será importante para nossa pesquisa, no próximo capítulo iremos utilizá-la para fazer uma análise do campo espalhado considerando um potencial \mathcal{PT} -simétrico, com isso seremos capazes de analisar melhor sobre o comportamento da densidade espectral da luz em um material que possui ganho e perda.

3.5 Conclusão

Neste capítulo desenvolvemos a teoria do espalhamento baseado na aproximação de Born de campo distante, nosso próximo objetivo então é juntar os conceitos do capítulo 2 de materiais com simetria- \mathcal{PT} junto com o conceito do capítulo 3 de espalhamento e estudar o espalhamento de materiais que tem ganho e perda.

Nosso próximo objetivo principal é considerar então um material com propriedades de ganho e perda e observar qual é a resposta do espalhamento do campo espalhado em termos da aproximação de Born para um campo distante. No nosso trabalho iremos focar apenas na primeira aproximação de Born, onde usaremos tal aproximação para investigar o espalhamento de uma onda eletromagnética através de um material \mathcal{PT} -simétrico.

Espalhamento por um material com simetria \mathcal{PT}

4.1 Introdução

Nessa seção iremos tecer um pouco sobre o espalhamento aplicado em um material com simetria \mathcal{PT} . Desde a descoberta da simetria \mathcal{PT} na quântica, tem-se explorado sobre suas aplicações na óptica, e com o avanço dessa descoberta surgiram pesquisas sobre o espalhamento da luz por matérias com potencial imaginário. Nos últimos anos, noções extraídas da física da simetria de tempo de paridade (\mathcal{PT}) atraíram considerável atenção. Em particular, a percepção de que a interação entre ganho e perda pode levar a características totalmente novas e inesperadas. Com isso iniciou-se um intenso esforço de pesquisa para explorar o comportamento dos potenciais \mathcal{PT} -simétricos tanto teórica quanto experimentalmente [21, 86, 53].

Como foi demonstrado no capítulo 2, a presença de regiões de ganho e perda equilibradas em tais estruturas pode levar a uma ampla gama de fenômenos interessantes, como refração negativa [87] e etc. De modo geral, a maioria desses estudos se concentrou em sistemas de ondas guiadas e redes. No entanto, muito menos atenção tem sido dada a arranjos de espalhamento em geometria bidimensional [88, 89]. Portanto, é interessante explorar o efeito da simetria \mathcal{PT} na resposta de espalhamento de ondas eletromagnéticas. Neste capítulo iremos estudar o espalhamento da luz através de um material com simetria \mathcal{PT} , para tal consideramos uma esfera Gaussiana envolvendo ganho e perda de forma totalmente simétrica. Mostramos que tal estrutura pode desviar a luz espalhada por uma quantidade que está relacionada ao ganho e a perda que foram incorporados cuidadosamente na estrutura. Além

disso, veremos que o padrão do espalhamento de campo distante pode mudar com o ângulo de incidência.

4.2 Potencial espalhador na aproximação de Born

Neste trabalho estudamos um problema que se trata de uma onda plana monocromática se propagando na direção de um vetor unitário $\hat{\mathbf{s}}_0$, e incidindo em uma esfera Gaussiana que possui um volume V . Esse problema é parecido com o apresentado no capítulo 3 para tratar da física do espalhamento.

Para iniciarmos nosso estudo, é importante recordar-se das equações 3.38 e 3.41, com isso será possível escrever as equações para o problema proposto em questão. Na aproximação de Born podemos perceber que o nosso $f(\theta, \phi)$ é simplesmente a transformada de Fourier de $F(\mathbf{r}')$ calculada na transferência de momento \mathbf{K} ,

$$U(\mathbf{r}) = e^{ik\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \mathbf{r}} + \frac{e^{ikr}}{r} \int F(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}'} d^3\mathbf{r}'. \quad (4.1)$$

Desse modo para resolver a primeira aproximação de Born devemos definir um potencial e calcular sua transformada de Fourier. Como visto no capítulo 2, para que esse potencial seja considerado um potencial \mathcal{PT} -simétrico, ou seja não-Hermitiano, deve-se assegurar que a relação $F^*(-\mathbf{r}) = F(\mathbf{r})$ seja satisfeita. Para tal, o índice de refração deve ser complexo, incorporando ganho e perda. Tendo isso em mente, vamos definir o potencial que será usado como sendo, [90, 91],

$$F(\mathbf{r}) = \frac{Ak^2}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) (1 + i\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}) \quad (4.2)$$

onde A e σ são constantes positivas, e $k = 2\pi/\lambda$ onde λ é o comprimento de onda. É importante notar também que a expressão $(1 + i\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r})$ no potencial é o que o torna não-Hermitiano, sendo $\boldsymbol{\beta}$ um vetor capaz de controlar a não Hermiticidade do nosso sistema. Observe que quando $\boldsymbol{\beta}$ é nulo retorna-se ao caso Hermitiano.

Façamos agora uma análise das partes real e imaginária desse potencial, sendo

$$\frac{1}{F_0} \operatorname{Re}[F(\mathbf{r})] = \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{F_0} \operatorname{Im}[F(\mathbf{r})] = \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}), \quad (4.4)$$

onde escolhemos chamar $F_0 = Ak^2/(2\pi\sigma^2)^{\frac{3}{2}}$ para não seguir carregando muitos termos tendo em vista que é apenas uma constante. Com $\boldsymbol{\beta}$ sendo,

$$\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r} = (\beta_x x + \beta_y y + \beta_z z). \quad (4.5)$$

Como o comportamento da parte real exibe apenas uma gaussiana será mais interessante mostrar a parte imaginária (região de ganho e perda) com diferentes valores de $\boldsymbol{\beta}$. O comportamento dessa expressão pode ser observado na figura 4.1.

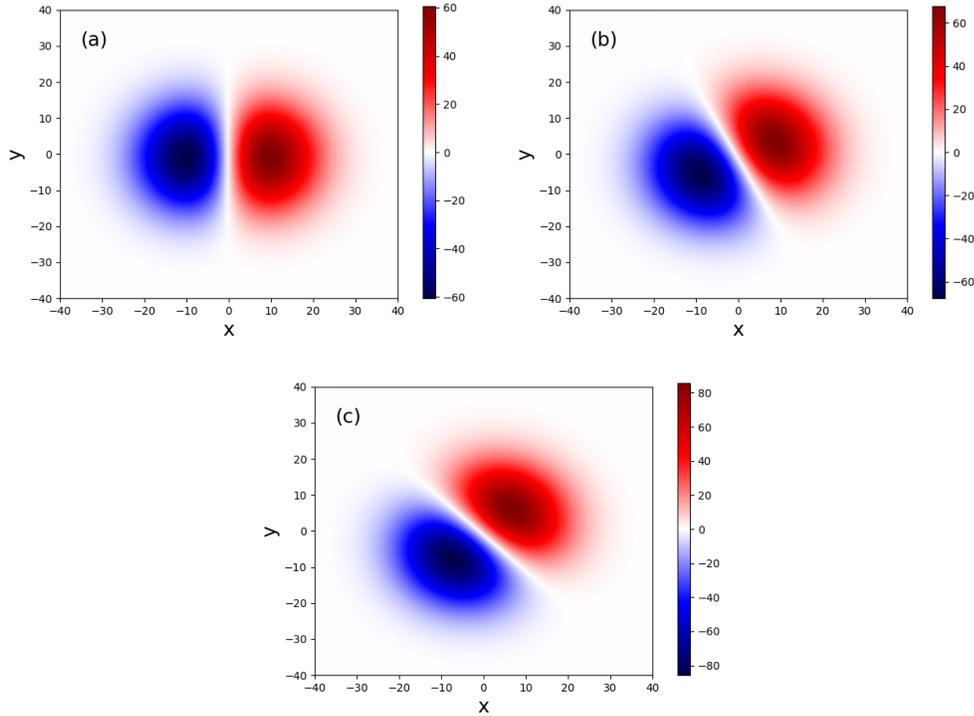


Figura 4.1: Parte imaginária do potencial 4.2, sendo (a) com $\beta_y = 0$, (b) $\beta_y = 5$, (c) $\beta_y = 10$.

Podemos ver na figura 4.1 que há um hemisfério para ganho e perda em todas as figuras, de diferentes valores de β_y , sendo a intersecção entre as duas regiões (azul e vermelha) a região que não porta nem ganho nem perda.

Pode-se observar que conforme os valores de β_y variam, o potencial em questão também varia, isto é, para diferentes valores de ganho e perda no material, a forma do potencial espalhador muda, o que é interessante de ser explorado.

4.3 Densidade espectral

Com base no que vimos no capítulo 3, usaremos a equação do espalhamento considerando a primeira aproximação de Born e a aproximação para o campo distante, equação 4.1. Tendo definido um potencial \mathcal{PT} -simétrico na seção anterior, podemos iniciar nosso estudo substituindo o potencial mostrado na equação 4.2 na equação 4.1. Assim teremos a base para analisarmos as propriedades do espalhamento através de um material com simetria de paridade e reversão temporal. Substituindo as equações em questão, temos então,

$$U = e^{ik\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \mathbf{r}} + \frac{e^{ikr}}{r} F_0 \int \exp\left(-\frac{r'^2}{2\sigma^2}\right) (1 + i\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}') e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}'} d^3\mathbf{r}'. \quad (4.6)$$

Note que na aproximação de Born, a amplitude de espalhamento $f(\theta, \phi)$ ou seja, nossa integral, é simplesmente a transformada de Fourier do potencial. Desse modo, se calcularmos a transformada de Fourier $F(\mathbf{K})$ do potencial $F(\mathbf{r})$ nós obtemos que

$$F(\mathbf{K}) = Ak^2 \exp\left\{-\frac{|\mathbf{K}|^2 \sigma^2}{2}\right\} (1 + \sigma^2 \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K}). \quad (4.7)$$

Substituindo na equação acima, temos que

$$U = e^{ik\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \mathbf{r}} + \frac{e^{ikr}}{r} Ak^2 \exp\left\{-\frac{|\mathbf{K}|^2 \sigma^2}{2}\right\} (1 + \sigma^2 \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K}). \quad (4.8)$$

Assumindo que a aproximação de Born é válida, estamos interessados agora em observar a densidade espectral desse campo espalhado. Para tal, nós usamos a expressão [91],

$$S(\mathbf{r}) = |U^s(\mathbf{r})|^2. \quad (4.9)$$

Lembrando que $U^s(\mathbf{r})$ é o campo espalhado, e equação 3.39, temos que a densidade espectral é dada por

$$S = \frac{1}{r^2} |F(\mathbf{K})|^2, \quad (4.10)$$

onde

$$|\mathbf{K}|^2 = |k(\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}_0)|^2 \quad (4.11)$$

$$= 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (4.12)$$

Pois $\hat{\mathbf{s}}$ e $\hat{\mathbf{s}}_0$ são vetores unitários. Com isso, temos que a densidade espectral fica

$$S = \frac{1}{r^2} \left| Ak^2 \exp \left\{ -\frac{4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \sigma^2}{2} \right\} (1 + \sigma^2 \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K}) \right|^2. \quad (4.13)$$

Vamos considerar apenas que $1/r^2 = C$ é uma constante. Sendo

$$\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K} = k(\boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{s}} - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{s}}_0) \quad (4.14)$$

$$= k\boldsymbol{\beta} \cdot (\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}_0), \quad (4.15)$$

mas escolhemos $\hat{\mathbf{s}}_0$ sendo na direção $\hat{\mathbf{z}}$ e

$$\boldsymbol{\beta} = \beta_x \hat{\mathbf{x}} + \beta_y \hat{\mathbf{y}} + \beta_z \hat{\mathbf{z}}, \quad (4.16)$$

então

$$\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K} = k\{\beta_x s_x + \beta_y s_y + \beta_z (s_z - 1)\}, \quad (4.17)$$

sendo $s_x = \sin \theta \cos \phi$, $s_y = \sin \theta \sin \phi$ e $s_z = \cos \theta$. Sabendo disso e substituindo na equação 4.17, podemos escrever a equação espectral agora de uma nova forma que nos permita analisar o quanto de campo está sendo emitido nas direções θ e ϕ ,

$$S = C \left| Ak^2 \exp \left\{ -2k^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \sigma^2 \right\} (1 + \sigma^2 k \{\beta_x \sin \theta \cos \phi + \beta_y \sin \theta \sin \phi + \beta_z (\cos \theta - 1)\}) \right|^2. \quad (4.18)$$

Através dessa equação podemos analisar o comportamento da densidade espectral desse material não-Hermitiano, demonstrado na figura 4.2.

Com o objetivo de definir como a densidade espectral do material muda em relação a diferentes valores de β , nós mantivemos alguns valores de β fixo enquanto variamos outros, conforme demonstrado na figura 4.2. A figura 4.2 nos mostra para qual direção a luz está sendo propaganda, sendo as regiões mais escuras (tons de azul) onde a luz se propaga menos e os pontos amarelados as regiões em que está sendo concentrada a maior quantidade de emissão de luz. Pode-se perceber que a direção de propagação da luz muda para cada valor

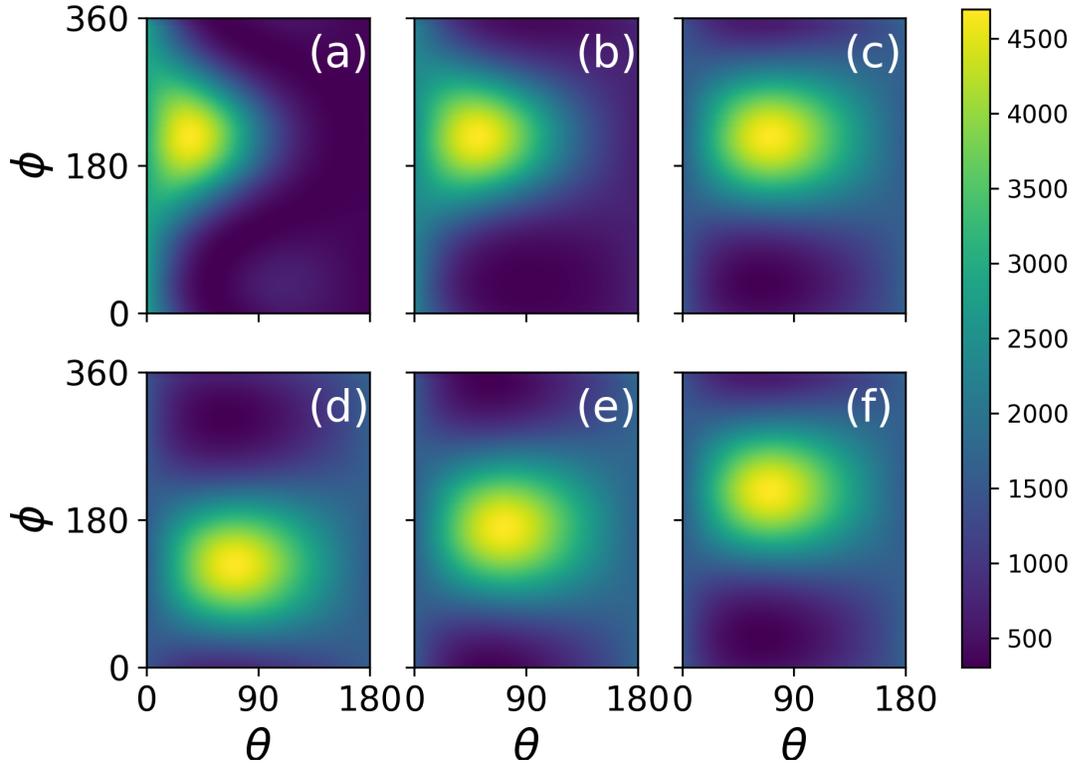


Figura 4.2: Densidade espectral em função de θ e ϕ , onde o primeiro conjunto de figuras (a,b,c) demonstram os casos que apenas β_z esta variando, sendo (a) o caso em que ($\beta_x = -5, \beta_y = -10, \beta_z = 10$), (b) mesmos β_x, β_y mas variando $\beta_z = 0$, e (c) mais uma vez mantendo os mesmo β_x, β_y , mas $\beta_z = -10$. Já no segundo conjunto (d,e,f) temos o caso onde apenas o β_y varia, com (d) sendo ($\beta_x = -5, \beta_y = 10, \beta_z = -10$), (e) com os mesmos β_x, β_z , variando $\beta_y = 0$ e (f) igualmente trocando só $\beta_z = -10$.

diferente de β_x, β_y e β_z , sendo esse parâmetro relacionado a parte imaginária do potencial, ou seja, a parte com ganho e perda. Com isso fica nítido que o ganho e a perda está controlando a direção de propagação da onda incidente.

4.4 Máximos da densidade espectral

Nesta seção, vamos analisar os máximos da densidade espectral vistos na seção anterior. A análise dos máximos é muito interessante para o nosso trabalho, tendo em vista que a região

de maior densidade espectral é onde está localizado mais luz. Podemos determinar com exatidão como a posição dos máximos variam conforme mudamos β , como vimos na seção anterior que modificando o ganho e a perda do material nós podemos controlar a direção de maior propagação da luz.

Apenas observando a figura 4.2 não somos capazes de distinguir os valores exatos dos máximos da densidade em relação aos valores de β . Para resolver esse problema analiticamente temos que minimizar a equação 4.18. Porém, as derivadas são muito complicadas de se resolver, tornando esse processo mais custoso. Sendo assim, decidimos por fazer uma análise numérica da equação 4.18, onde escrevemos um algoritmo de busca, considerando as constantes $\sigma = 0.1$ e $A = 1$. Mantivemos duas direções de β fixos em -10 , enquanto a direção remanescente varia em um intervalo de -10 à 10 . Com isso, pode-se fazer uma análise dos máximos entre esses pontos e determinar para que direção era emitida mais luz dependendo dos valores de β_x, β_y e β_z , como mostrado nas figuras a seguir.

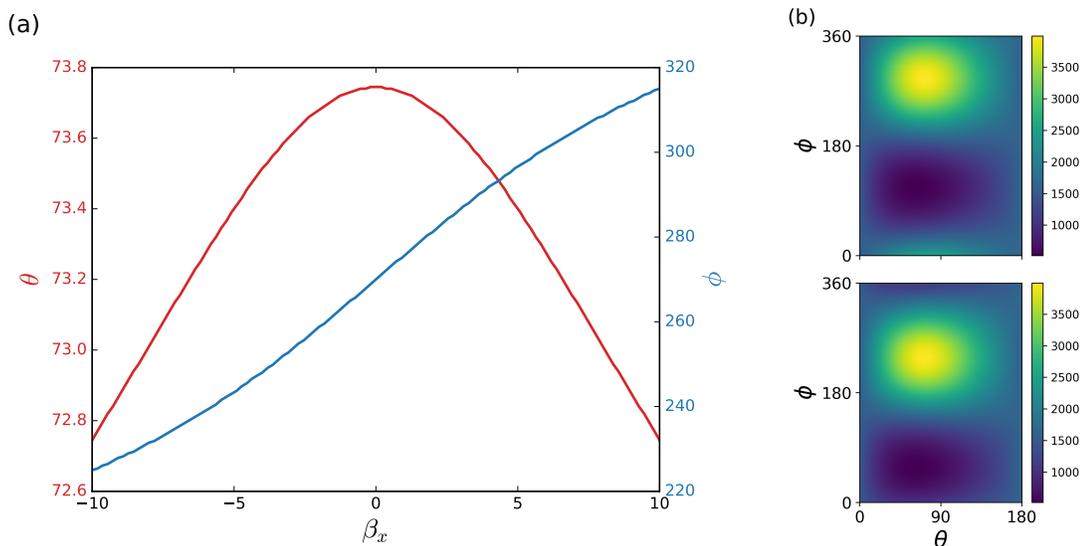


Figura 4.3: Máximos da densidade espectral em função de θ e ϕ , sendo (a) quando $\beta_y = \beta_z = -10$ enquanto β_x varia de -10 à 10 e (b) retrata a densidade espectral para os mesmos valores de $\beta_y = \beta_z = -10$, sendo na parte superior $\beta_x = 5$ e inferior $\beta_x = -5$.

Decidimos fazer a análise dos máximos em cada direção de β , fixando os mesmos parâmetros para ambos os casos para que pudéssemos fazer uma comparação clara de como o comportamento muda dependendo de cada direção. Começamos então com o caso em que

$\beta_y = \beta_z = -10$ são mantidos fixo enquanto β_x varia de -10 à 10. Na figura 4.3 (a) pode-se observar que para esse caso o máximo da densidade espectral varia em torno de um grau em θ , enquanto que sua maior variação ocorre em relação ao eixo ϕ . Percebe-se que o máximo dessa densidade se desloca conforme os valores de β_x aumentam e ficam positivos, demonstrando uma curva crescente em ϕ . Na figura 4.3 (b) nos escolhemos os mesmos valores de $\beta_y = \beta_z$ fixos em -10 com a parte superior da figura 4.3 (b) sendo $\beta_x = 5$ e a parte inferior $\beta_x = -5$. Com isso podemos comparar com os resultados apresentados na figura 4.3 (a) e ver como é claro que a direção em que esta sendo emitido mais luz quase não varia em θ mas cresce muito em ϕ conforme β_x cresce.

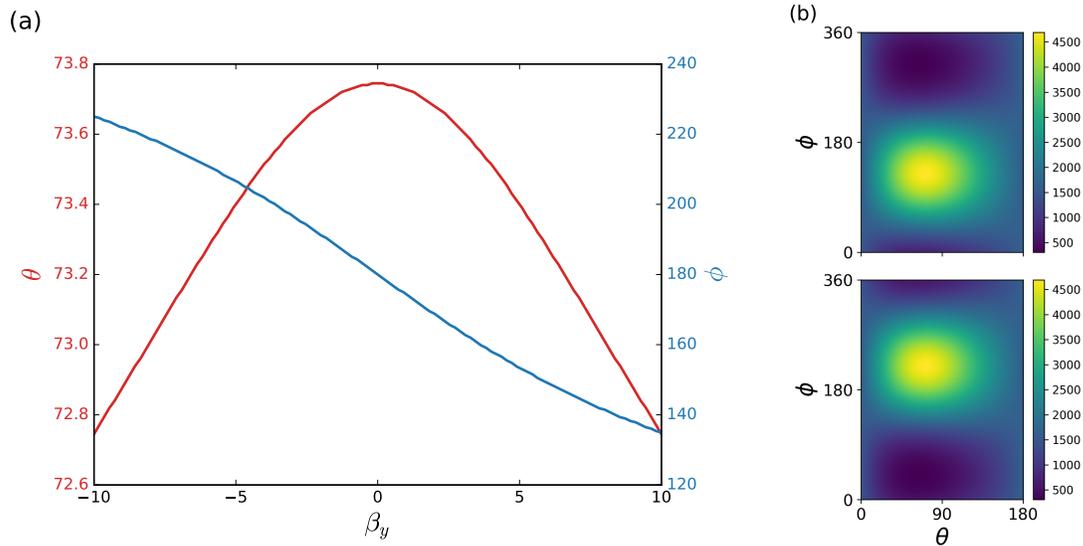


Figura 4.4: Máximos da densidade espectral em função de θ e ϕ sendo (a) $\beta_x = \beta_z = -10$ enquanto β_y varia de -10 à 10 e (b) retrata a densidade espectral para os mesmos valores de $\beta_x = \beta_z = -10$, sendo na parte superior $\beta_y = 10$ e inferior $\beta_y = -10$.

Na figura 4.4 (a) temos o gráfico mostrando os valores máximos da densidade espectral para os valores de $\beta_x = \beta_z = -10$ fixos enquanto β_y varia de -10 à 10, aqui vemos novamente que a variação do máximo é mínima em relação a θ (linha vermelha), tendo exatamente a mesma da figura 4.3. Mas podemos observar que o comportamento dos máximos em ϕ é o oposto do demonstrado na figura 4.3, nesse caso vemos que conforme β_y aumenta, a posição do máximo se desloca formando uma curva decrescente. Na figura 4.4 (b) podemos observar melhor a forma que a direção de propagação da luz muda sua posição conforme mudamos os

valores de β_y , sendo a parte inferior da figura correspondente a $\beta_y = -10$ onde claramente podemos observar que a posição que esta recebendo mais luz é superior a quando $\beta_y = 10$.

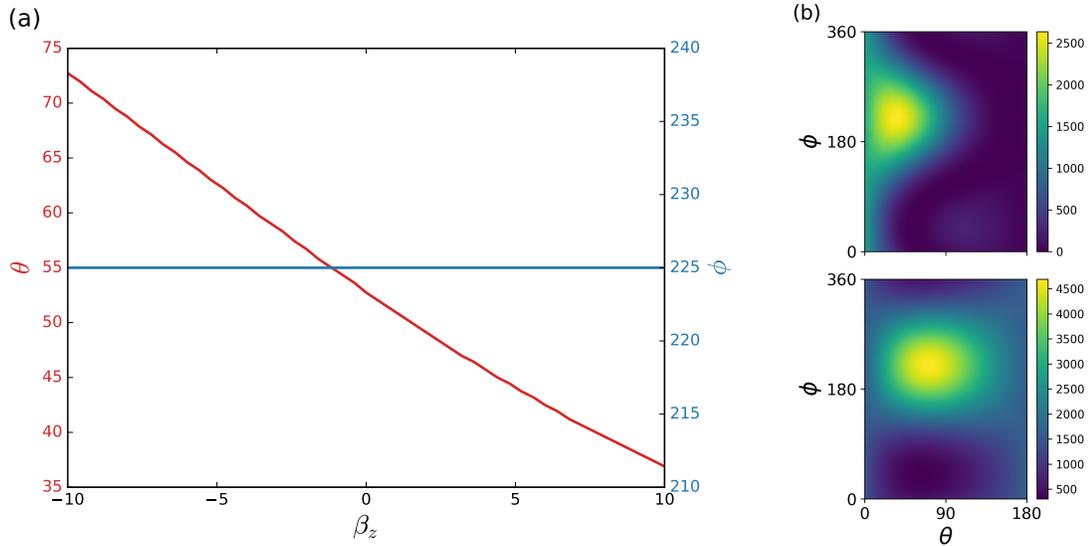


Figura 4.5: Máximos da densidade espectral em função de θ e ϕ quando $\beta_x = \beta_y = -10$ enquanto β_z varia de -10 à 10 e (b) retrata a densidade espectral para os mesmos valores de $\beta_x = \beta_y = -10$, sendo na parte superior $\beta_z = 10$ e inferior $\beta_z = -10$.

Por fim, repetimos o mesmo caso mas agora variando β_z de -10 a 10. Na figura 4.5, podemos observar agora um comportamento totalmente diferente, nesse caso em (a) vemos que quando mantemos $\beta_x = \beta_y = -10$ fixos e variamos β_z a posição do máximo varia em θ , diferente do que tínhamos observado até então, além de que nesse caso não temos mudança na posição do máximo da densidade em relação a ϕ , note que independente da variação de β_z a posição em ϕ se mantém a mesma. Pode-se confirmar esse comportamento observando a figura 4.5(b) onde vemos como a luz desloca sua posição em θ mas mantendo o mesmo valor em ϕ .

4.5 Tamanho do espalhador

Dado que os resultados apresentados até agora dizem respeito a um espalhador de tamanho de comprimento de onda, seria interessante ver como os máximos da densidade induzido por ganho e perda são afetados por diferentes tamanhos de espalhador. Para fazer essa análise,

nós fixamos os valor de β como sendo $\beta_x = \beta_z = -10$, variando β_y de -10 à 10, com três possíveis valores de σ , sendo eles $\sigma = 0.1, 0.3, 0.5$. Variar os valores para σ é equivalente a mudar o tamanho do meu material, ou seja, se eu troco o valor de σ eu troco o tamanho do meio espalhador. Na figura 4.6 vemos que que quando $\sigma = 0.1$ (linha azul na figura 4.6), que é o caso que estávamos usando inicialmente em todos os nossos resultados anteriores, vemos claramente o mesmo padrão apresentado na figura 4.4, onde o θ varia em torno de 72 à 73 graus e ϕ em torno de 130 à 225 graus. Quando mudamos o valor de σ para 0.3 (linha verde) vemos que a posição dos máximos da densidade caem em relação a θ , sendo em torno de 29 graus, e no ultimo caso em que o tamanho do espalhador é $\sigma = 0.5$ (linha vermelha clara) vemos que novamente a posição dos máximos mudaram em relação a θ , mas é interessante observar também que para todos os tamanhos de σ apresentados não interferiram com a forma que os máximos variam no eixo ϕ , sendo a linha vermelha escura representando a variação dos máximos em relação a ϕ para os três tamanhos diferentes do espalhador.

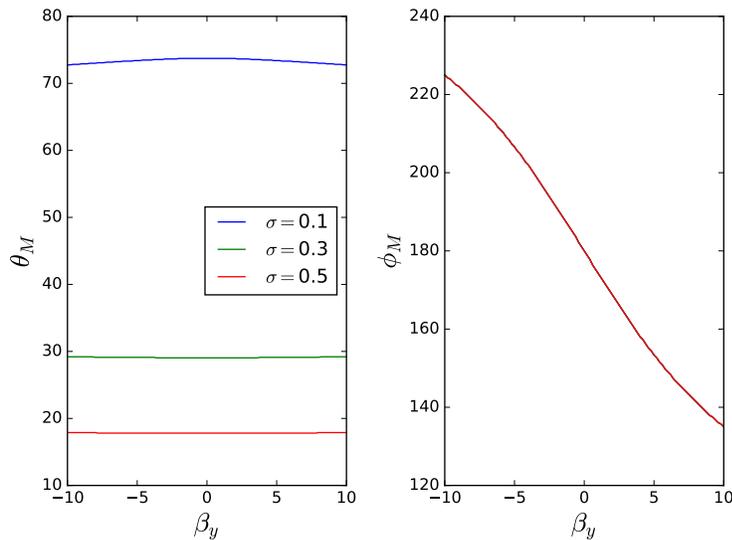


Figura 4.6: Máximos da densidade para os valores de $\beta_x = \beta_z = -10$, variando β_y de -10 à 10 para $\sigma = 0.1, 0.3, 0.5$

4.6 Conclusão

Neste capítulo utilizamos dos conhecimentos adquiridos no capítulo 2 e 3 para que finalmente pudéssemos verificar o comportamento da luz espalhada através de um material \mathcal{PT} -simétrico. Com isso fomos capazes de mostrar como a adição de ganho e perda no material é capaz de modificar a direção em que a luz incidente é propagada. No capítulo a seguir iremos finalizar nossas conclusões sobre os conhecimentos aqui adquiridos, analisando cada passo necessário para a construção do nosso trabalho e descrevendo por fim nossas perspectivas futuras.

Conclusões gerais e perspectivas

O objetivo desse trabalho foi estudar o comportamento do espalhamento de luz através de matérias com simetria \mathcal{PT} e através disso ver como o uso da não Hermiticidade pode beneficiar o ramo do espalhamento de uma forma inovadora. No capítulo 1 fizemos uma breve discussão introdutória sobre a simetria \mathcal{PT} e o espalhamento da luz com o intuito de demonstrar como ambas as áreas juntas veem contribuindo para avanços da óptica de diferentes formas.

Construímos os capítulos 2 e 3 como base da teoria geral para o trabalho. No capítulo 2 discutimos sobre a simetria \mathcal{PT} na mecânica quântica onde fizemos uma leve introdução sobre os operadores Hamiltonianos que comutam com os operadores paridade e reversão temporal simultaneamente e assim demostramos como a Hermiticidade poderia ser substituída pela simetria \mathcal{PT} . Foi mostrado a existência das fases quebrada e inteira. Por fim, introduzimos a simetria \mathcal{PT} na óptica, demonstrando como os conceitos que foram estabelecidos na mecânica quântica podiam ser estendidos à óptica, através da semelhança com a aproximação paraxial para a equação da onda eletromagnética com a equação de Schorödinger.

No capítulo 3 apresentamos inicialmente uma discussão de como a teoria do espalhamento foi essencial para a descoberta de varias forças fundamentais da natureza. Em sequência começamos a construir a base matemática necessária através das bem estabelecidas equações de Maxwell com o intuito de obter a equação fundamental do espalhamento escalar (uma equação de Helmholtz não-homogênea). Através da equação escalar do campo, que se tratava de uma equação diferencial, usamos o método da função de Green e fomos capaz de chegar na forma integral da mesma, fizemos então uma aproximação para o campo distante com

o intuito de finalmente chegarmos a aproximação de Born de primeira ordem e a equação para amplitude de espalhamento que foi de suma importância para nossa pesquisa aqui apresentada, com isso concluímos nosso conhecimento teórico necessário para implementar na pesquisa proposta.

Após construirmos toda a base teórica necessária para o nosso trabalho, iniciamos nossa pesquisa definindo nosso potencial espalhador, e garantindo que esse potencial seja \mathcal{PT} -simétrico, com isso fomos capazes de investigar como o espalhamento da luz se comportaria através de um material com simetria de paridade e tempo. Investigamos então a resposta de espalhamento de estruturas com ganho e perda. Mostramos que, devido as regiões de ganho e perda, tais sistemas podem desviar a luz de maneiras incomuns. Com isso, fomos capaz de analisar em que direção a luz estava sendo emitida, podendo assim definir a região de maior propagação de luz. Vimos como a direção de propagação da luz muda para diferentes valores de ganho e perda no material.

Finalmente deixamos como propostas para trabalhos futuros, estender essa pesquisa para um caso que inclua feixes parcialmente coerentes, o que nos permitiria estudar como as propriedades de coerência do campo eletromagnético se comportam quando adicionamos diferentes valores para o ganho e perda de um material.

Referências Bibliográficas

- [1] Carl M Bender and Stefan Boettcher. Real spectra in non-hermitian hamiltonians having p t symmetry. *Physical review letters*, 80(24):5243, 1998.
- [2] Mohammad-Ali Miri and Andrea Alù. Exceptional points in optics and photonics. *Science*, 363(6422):eaar7709, 2019.
- [3] Max Born and Emil Wolf. *Frontmatter*. Cambridge University Press, 7 edition, 2019.
- [4] Ramamurti Shankar. *Principles of quantum mechanics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [5] J Sakurai and J Napolitano. Modern quantum mechanics. 2-nd edition. *Person New International edition*, 2014.
- [6] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Frank Laloe. Quantum mechanics, volume 1. *Quantum Mechanics*, 1:898, 1986.
- [7] A Guo, GJ Salamo, D Duchesne, R Morandotti, M Volatier-Ravat, V Aimez, GA Siviloglou, and DN Christodoulides. Observation of p t-symmetry breaking in complex optical potentials. *Physical review letters*, 103(9):093902, 2009.
- [8] Ali Mostafazadeh. Pseudo-hermiticity versus pt symmetry: the necessary condition for the reality of the spectrum of a non-hermitian hamiltonian. *Journal of Mathematical Physics*, 43(1):205–214, 2002.

- [9] Ali Mostafazadeh. Pseudo-hermiticity versus pt-symmetry. ii. a complete characterization of non-hermitian hamiltonians with a real spectrum. *Journal of Mathematical Physics*, 43(5):2814–2816, 2002.
- [10] Ali Mostafazadeh. Pseudo-hermiticity versus pt-symmetry iii: Equivalence of pseudo-hermiticity and the presence of antilinear symmetries. *Journal of Mathematical Physics*, 43(8):3944–3951, 2002.
- [11] Carl M Bender, Dorje C Brody, and Hugh F Jones. Complex extension of quantum mechanics. *Physical Review Letters*, 89(27):270401, 2002.
- [12] Carl M Bender, Dorje C Brody, and Hugh F Jones. Must a hamiltonian be hermitian? *American Journal of Physics*, 71(11):1095–1102, 2003.
- [13] Zafar Ahmed. Real and complex discrete eigenvalues in an exactly solvable one-dimensional complex pt-invariant potential. *Physics Letters A*, 282(6):343–348, 2001.
- [14] K. G. Makris, R. El-Ganainy, D. N. Christodoulides, and Z. H. Musslimani. Beam dynamics in \mathcal{PT} symmetric optical lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 100:103904, Mar 2008.
- [15] R El-Ganainy, KG Makris, DN Christodoulides, and Ziad H Musslimani. Theory of coupled optical pt-symmetric structures. *Optics letters*, 32(17):2632–2634, 2007.
- [16] ZH Musslimani, Konstantinos G Makris, Ramy El-Ganainy, and Demetrios N Christodoulides. Optical solitons in p t periodic potentials. *Physical Review Letters*, 100(3):030402, 2008.
- [17] Stefano Longhi. Quantum-optical analogies using photonic structures. *Laser & Photonics Reviews*, 3(3):243–261, 2009.
- [18] Ilya Ya Goldsheid and Boris A Khoruzhenko. Distribution of eigenvalues in non-hermitian anderson models. *Physical review letters*, 80(13):2897, 1998.
- [19] Bijan Bagchi and Christiane Quesne. $sl(2, c)$ as a complex lie algebra and the associated non-hermitian hamiltonians with real eigenvalues. *Physics Letters A*, 273(5-6):285–292, 2000.

- [20] H Markum, R Pullirsch, and T Wettig. Non-hermitian random matrix theory and lattice qcd with chemical potential. *Physical review letters*, 83(3):484, 1999.
- [21] Aleksandr Andreevich Zyablovsky, Aleksei P Vinogradov, A Aleksandrovich Pukhov, A Viktorovich Dorofenko, and A Abramovich Lisyansky. Pt-symmetry in optics. *Physics-Uspokhi*, 57(11):1063, 2014.
- [22] Zin Lin, Hamidreza Ramezani, Toni Eichelkraut, Tsampikos Kottos, Hui Cao, and Demetrios N Christodoulides. Unidirectional invisibility induced by p t-symmetric periodic structures. *Physical Review Letters*, 106(21):213901, 2011.
- [23] Alois Regensburger, Christoph Bersch, Mohammad-Ali Miri, Georgy Onishchukov, Demetrios N Christodoulides, and Ulf Peschel. Parity–time synthetic photonic lattices. *Nature*, 488(7410):167–171, 2012.
- [24] Kei Matsushima, Yuki Noguchi, and Takayuki Yamada. Unidirectional invisibility in a pt-symmetric structure designed by topology optimization. *Opt. Lett.*, 47(13):3315–3318, Jul 2022.
- [25] O Kang-Hyok and Kwang-Hyon Kim. Parity-time symmetric photonic topological coupled waveguides. *Optics & Laser Technology*, 144:107403, 2021.
- [26] Menglin LN Chen, Li Jun Jiang, Shuang Zhang, Ran Zhao, Zhihao Lan, and EI Wei. Comparative study of hermitian and non-hermitian topological dielectric photonic crystals. *Physical Review A*, 104(3):033501, 2021.
- [27] Tiecheng Wang and Xiang Gou. Band structures and scattering properties of the simplest one-dimensional \mathcal{PT} -symmetric photonic crystal. *Scientific Reports*, 12(1):16100, Sep 2022.
- [28] A Ruschhaupt, F Delgado, and JG Muga. Physical realization of-symmetric potential scattering in a planar slab waveguide. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38(9):L171, 2005.
- [29] Stefano Longhi. Optical realization of relativistic non-hermitian quantum mechanics. *Physical review letters*, 105(1):013903, 2010.

- [30] Paulo A Brandão and Solange B Cavalcanti. Scattering of partially coherent radiation by non-hermitian localized structures having parity-time symmetry. *Physical Review A*, 100(4):043822, 2019.
- [31] RA Vieira and PA Brandão. Wolf effect in the scattering of polychromatic radiation by two spheres having parity-time symmetry. *Journal of Optics*, 22(12):125601, 2020.
- [32] Paulo A Brandão and SB Cavalcanti. Non-hermitian spectral changes in the scattering of partially coherent radiation by periodic structures. *Optics Letters*, 44(17):4363–4366, 2019.
- [33] Olga Korotkova and Paulo A Brandão. Light scattering from stationary pt-symmetric collections of particles. *Optics letters*, 46(6):1417–1420, 2021.
- [34] Alex Krasnok, Nikita Nefedkin, and Andrea Alu. Parity-time symmetry and exceptional points: A tutorial. *arXiv preprint arXiv:2103.08135*, 2021.
- [35] Richard C. Brower, Miguel A. Furman, and Moshe Moshe. Critical exponents for the reggeon quantum spin model. *Physics Letters B*, 76(2):213–219, 1978.
- [36] Benjamin C Harms, Stanley T Jones, and Chung-I Tan. Complex energy spectra in reggeon quantum mechanics with quartic interactions. *Nuclear Physics B*, 171:392–412, 1980.
- [37] Benjamin C Harms, Stanley T Jones, and Chung-I Tan. New structure in the energy spectrum of reggeon quantum mechanics with quartic couplings. *Physics Letters B*, 91(2):291–295, 1980.
- [38] E Caliceti, S Graffi, and M Maioli. Perturbation theory of odd anharmonic oscillators. *Communications in Mathematical Physics*, 75(1):51–66, 1980.
- [39] Michael E Fisher. Yang-lee edge singularity and ϕ^3 field theory. *Physical Review Letters*, 40(25):1610, 1978.
- [40] John L Cardy and Giuseppe Mussardo. S-matrix of the yang-lee edge singularity in two dimensions. *Physics Letters B*, 225(3):275–278, 1989.

- [41] Al B Zamolodchikov. Two-point correlation function in scaling lee-yang model. *Nuclear Physics B*, 348(3):619–641, 1991.
- [42] Carl M Bender, Kimball A Milton, Stephen S Pinsky, and LM Simmons Jr. A new perturbative approach to nonlinear problems. *Journal of mathematical Physics*, 30(7):1447–1455, 1989.
- [43] Patrick Dorey, Clare Dunning, and Roberto Tateo. Supersymmetry and the spontaneous breakdown of pt symmetry. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 34(28):L391, 2001.
- [44] Patrick Dorey, Clare Dunning, and Roberto Tateo. Spectral equivalences, bethe ansatz equations, and reality properties in pt-symmetric quantum mechanics. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 34(28):5679, 2001.
- [45] Tosio Kato. Analytic perturbation theory. In *Perturbation theory for linear operators*, pages 364–426. Springer, 1966.
- [46] MV Berry and DHJ O’Dell. Diffraction by volume gratings with imaginary potentials. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 31(8):2093, 1998.
- [47] WD Heiss. Phases of wave functions and level repulsion. *The European Physical Journal D-Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, 7(1):1–4, 1999.
- [48] Michael V Berry. Physics of nonhermitian degeneracies. *Czechoslovak journal of physics*, 54(10):1039–1047, 2004.
- [49] WD Heiss. Exceptional points of non-hermitian operators. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 37(6):2455, 2004.
- [50] Géza Lévai and Miloslav Znojil. Systematic search for pt-symmetric potentials with real energy spectra. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 33(40):7165, 2000.
- [51] Carl M Bender. Making sense of non-hermitian hamiltonians. *Reports on Progress in Physics*, 70(6):947–1018, may 2007.

- [52] R. El-Ganainy, K. G. Makris, D. N. Christodoulides, and Ziad H. Musslimani. Theory of coupled optical pt-symmetric structures. *Opt. Lett.*, 32(17):2632–2634, Sep 2007.
- [53] Christian E. Rüter, Konstantinos G. Makris, Ramy El-Ganainy, Demetrios N. Christodoulides, Mordechai Segev, and Detlef Kip. Observation of parity–time symmetry in optics. *Nature Physics*, 6(3):192–195, Mar 2010.
- [54] Melvin Lax, William H. Louisell, and William B. McKnight. From maxwell to paraxial wave optics. *Phys. Rev. A*, 11:1365–1370, Apr 1975.
- [55] Aleksei P Vinogradov, Aleksandr V Dorofeenko, Aleksandr M Merzlikin, and Aleksandr A Lisiansky. Surface states in photonic crystals. *Physics-Uspexhi*, 53(3):243–256, jun 2010.
- [56] Joseph Schindler, Zin Lin, JM Lee, Hamidreza Ramezani, Fred M Ellis, and Tsampikos Kottos. -symmetric electronics. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 45(44):444029, 2012.
- [57] Xin Yang, Jiawen Li, Yifei Ding, Mengwei Xu, Xue-Feng Zhu, and Jie Zhu. Observation of transient parity-time symmetry in electronic systems. *Physical Review Letters*, 128(6):065701, 2022.
- [58] Fred M Ellis. Simplified symmetry for electronics. *Nature Electronics*, 1(5):268–269, 2018.
- [59] S Bittner, B Dietz, Uwe Günther, HL Harney, M Miski-Oglu, A Richter, and F Schäfer. P t symmetry and spontaneous symmetry breaking in a microwave billiard. *Physical review letters*, 108(2):024101, 2012.
- [60] Yanzhong Liu, Tengfei Hao, Wei Li, Jose Capmany, Ninghua Zhu, and Ming Li. Observation of parity-time symmetry in microwave photonics. *Light: Science & Applications*, 7(1):1–9, 2018.
- [61] Carl M Bender, Bjorn K Berntson, David Parker, and E Samuel. Observation of pt phase transition in a simple mechanical system. *American Journal of Physics*, 81(3):173–179, 2013.

- [62] Romain Fleury, Dimitrios L Sounas, and Andrea Alu. Parity-time symmetry in acoustics: theory, devices, and potential applications. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 22(5):121–129, 2016.
- [63] Xuefeng Zhu, Hamidreza Ramezani, Chengzhi Shi, Jie Zhu, and Xiang Zhang. P t-symmetric acoustics. *Physical Review X*, 4(3):031042, 2014.
- [64] Romain Fleury, Dimitrios Sounas, and Andrea Alù. An invisible acoustic sensor based on parity-time symmetry. *Nature communications*, 6(1):1–7, 2015.
- [65] Yves Aurégan and Vincent Pagneux. P t-symmetric scattering in flow duct acoustics. *Physical review letters*, 118(17):174301, 2017.
- [66] Chengzhi Shi, Marc Dubois, Yun Chen, Lei Cheng, Hamidreza Ramezani, Yuan Wang, and Xiang Zhang. Accessing the exceptional points of parity-time symmetric acoustics. *Nature communications*, 7(1):1–5, 2016.
- [67] Chao Hang, Guoxiang Huang, and Vladimir V Konotop. P t symmetry with a system of three-level atoms. *Physical review letters*, 110(8):083604, 2013.
- [68] Zhaoyang Zhang, Yiqi Zhang, Jiteng Sheng, Liu Yang, Mohammad-Ali Miri, Demetrios N Christodoulides, Bing He, Yanpeng Zhang, and Min Xiao. Observation of parity-time symmetry in optically induced atomic lattices. *Physical review letters*, 117(12):123601, 2016.
- [69] Peng Peng, Wanxia Cao, Ce Shen, Weizhi Qu, Jianming Wen, Liang Jiang, and Yanhong Xiao. Anti-parity-time symmetry with flying atoms. *Nature Physics*, 12(12):1139–1145, 2016.
- [70] T Omori, M Fukuda, T Hirose, Y Kurihara, R Kuroda, M Nomura, A Ohashi, T Okugi, K Sakaue, T Saito, et al. Efficient propagation of polarization from laser photons to positrons through compton scattering and electron-positron pair creation. *Physical review letters*, 96(11):114801, 2006.

- [71] Andrej B Arbuzov, Victor S Fadin, EA Kuraev, LN Lipatov, NP Merenkov, and L Trentadue. Small-angle electron-positron scattering with a per mille accuracy. *Nuclear Physics B*, 485(1-2):457–499, 1997.
- [72] Professor E. Rutherford F.R.S. Lxxix. the scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 21(125):669–688, 1911.
- [73] Robert Karplus and Maurice Neuman. The scattering of light by light. *Physical Review*, 83(4):776, 1951.
- [74] Craig F Bohren and Donald R Huffman. *Absorption and scattering of light by small particles*. John Wiley & Sons, 2008.
- [75] John C Stover. Optical scattering. measurement and analysis. *SPIE Press Volume*, 1995.
- [76] Immanuel L Fabelinskii. *Molecular scattering of light*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [77] E Folta-Stogniew and K Williams. Determination of molecular masses of proteins in solution: Implementation of an hplc size exclusion chromatography and laser light scattering service in a core laboratory. *Journal of biomolecular techniques: JBT*, 10(2):51, 1999.
- [78] PP Ewald. Crystal optics for visible light and x rays. *Reviews of modern physics*, 37(1):46, 1965.
- [79] Gerald Oster. The scattering of light and its applications to chemistry. *Chemical reviews*, 43(2):319–365, 1948.
- [80] John Tyndall. On the blue color of the sky, the polarization of skylight, and polarization of light by cloudy matter generally. *Journal of the Franklin Institute*, 88(1):34–40, 1869.
- [81] John David Jackson. *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, 2021.

- [82] F Michael Kahnert. Numerical methods in electromagnetic scattering theory. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 79:775–824, 2003.
- [83] Julius Adams Stratton. *Electromagnetic theory*, volume 33. John Wiley & Sons, 2007.
- [84] George B Arfken and Hans-Jurgen Weber. *Mathematical methods for physicists*. Academic Press Orlando, FL, 1967.
- [85] David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Cambridge University Press, 4 edition, 2017.
- [86] Ramy El-Ganainy, Konstantinos G Makris, Mercedeh Khajavikhan, Ziad H Musslimani, Stefan Rotter, and Demetrios N Christodoulides. Non-hermitian physics and pt symmetry. *Nature Physics*, 14(1):11–19, 2018.
- [87] Romain Fleury, Dimitrios L Sounas, and Andrea Alu. Negative refraction and planar focusing based on parity-time symmetric metasurfaces. *Physical review letters*, 113(2):023903, 2014.
- [88] YD Chong, Li Ge, and A Douglas Stone. P t-symmetry breaking and laser-absorber modes in optical scattering systems. *Physical Review Letters*, 106(9):093902, 2011.
- [89] Henning Schomerus. From scattering theory to complex wave dynamics in non-hermitian pt-symmetric resonators. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 371(1989):20120194, 2013.
- [90] MA Pinto and PA Brandão. Asymmetrical splitting in the spectrum of stochastic radiation scattered by non-hermitian materials having pt symmetry. *Physical Review A*, 101(5):053817, 2020.
- [91] Mayukh Lahiri and Emil Wolf. Spectral changes of stochastic beams scattered on a deterministic medium. *Optics Letters*, 37(13):2517–2519, 2012.

Operadores: Paridade e Reversão temporal

A.1 Operador de Paridade

A operação de paridade é também conhecida como inversão espacial [5, 6]. Nós consideramos na mecânica quântica que há uma transformação do estado $|\alpha\rangle$ quando o espaço é invertido, isso é dado por

$$|\alpha\rangle \rightarrow \mathcal{P}|\alpha\rangle, \quad (\text{A.1})$$

onde \mathcal{P} é o operador paridade, definido a partir da mudança de sinal do valor esperado de \mathbf{X}

$$\langle\alpha|\mathbf{X}|\alpha\rangle = -(\langle\alpha|\mathcal{P}^\dagger)\mathbf{X}(\mathcal{P}|\alpha\rangle), \quad (\text{A.2})$$

ou ainda,

$$\langle\alpha|\mathcal{P}^\dagger\mathbf{X}\mathcal{P}|\alpha\rangle = -\langle\alpha|\mathbf{X}|\alpha\rangle \quad (\text{A.3})$$

tendo então,

$$\mathcal{P}^\dagger\mathbf{X}\mathcal{P} = -\mathbf{X}. \quad (\text{A.4})$$

Definimos então que \mathcal{P} é um operador unitário, tal que $\mathcal{P}^\dagger\mathcal{P} = \mathcal{P}\mathcal{P}^\dagger = 1$. Com isso vemos que,

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}^\dagger\mathbf{X}\mathcal{P}) = -\mathcal{P}\mathbf{X} \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{X}\mathcal{P} = -\mathcal{P}\mathbf{X} \quad (\text{A.6})$$

$$\{\mathbf{X}, \mathcal{P}\} = 0. \quad (\text{A.7})$$

Agora vamos analisar a ação de \mathcal{P} sobre um estado $|\mathbf{x}\rangle$,

$$\{\mathbf{X}, \mathcal{P}\} |\mathbf{x}\rangle = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{X}(\mathcal{P} |x\rangle) + \mathcal{P}(\mathbf{X} |x\rangle) = 0 \quad (\text{A.9})$$

sendo que $\mathbf{X} |x\rangle = \mathbf{x} |x\rangle$, então

$$\mathbf{X}(\mathcal{P} |\mathbf{x}\rangle) = -\mathbf{x}(\mathcal{P} |\mathbf{x}\rangle). \quad (\text{A.10})$$

Vemos então que $\mathcal{P} |\mathbf{x}\rangle$ é autovetor de \mathbf{X} com autovalor $-\mathbf{x}$. Assim, $\mathcal{P} |\mathbf{x}\rangle$ deve ser proporcional ao estado $|\mathbf{-x}\rangle$, uma vez que o espectro de \mathbf{X} é contínuo. Isto é,

$$\mathcal{P} |\mathbf{x}\rangle = e^{i\delta} |\mathbf{-x}\rangle, \quad (\text{A.11})$$

onde δ é um fator de fase real. Usualmente, $e^{i\delta} = 1$. Vemos também que \mathcal{P} é Hermitiano,

$$\langle \alpha | \mathcal{P}^\dagger \mathbf{X} \mathcal{P} | \alpha \rangle^\dagger = - \langle \alpha | \mathbf{X} | \alpha \rangle^\dagger \quad (\text{A.12})$$

$$\langle \alpha | \mathcal{P} \mathbf{X} \mathcal{P}^\dagger | \alpha \rangle = - \langle \alpha | \mathbf{X} | \alpha \rangle \quad (\text{A.13})$$

$$\mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P}. \quad (\text{A.14})$$

Vejamos algumas propriedades simples de \mathcal{P} . O operador \mathcal{P}^2 é o operador identidade, tendo em vista que,

$$\mathcal{P} |\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{-x}\rangle \quad (\text{A.15})$$

$$\mathcal{P}^2 |\mathbf{x}\rangle = \mathcal{P}(\mathcal{P} |\mathbf{x}\rangle) = \mathcal{P} |\mathbf{-x}\rangle = |\mathbf{x}\rangle. \quad (\text{A.16})$$

Logo, $\mathcal{P}^2 = 1$ ou $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{-1}$. É fácil mostrar por recorrência que o operador \mathcal{P}^n é igual a um quando n é par, e igual ao próprio \mathcal{P} quando n é ímpar.

A.2 Operador de reversão temporal

Sendo \mathcal{T} o operador de reversão temporal [5, 6], considere

$$|\alpha\rangle \rightarrow \mathcal{T} |\alpha\rangle, \quad (\text{A.17})$$

onde $\mathcal{T} |\alpha\rangle$ é o estado reverso no tempo. Se $|\alpha\rangle$ for um autoestado de momento $|\mathbf{p}\rangle$, é esperado que $\mathcal{T} |\alpha\rangle$ seja $|\mathbf{-p}\rangle$. Ou seja, deve ser reverso por uma transformação de reversão temporal.

Vamos então deduzir uma propriedade importante, olhando para a evolução temporal de um estado reverso no tempo. Seja $|\alpha\rangle$ dado por

$$|\alpha, t_0 = 0; t = dt\rangle = U(0, dt) |\alpha\rangle \quad (\text{A.18})$$

$$= [1 - \frac{iHdt}{\hbar}] |\alpha\rangle, \quad (\text{A.19})$$

onde em um tempo inicial $t_0 = 0$ e depois de um tempo posterior $t = dt$. Sendo H o Hamiltoniano que determina a evolução temporal. Vamos supor agora que aplicando \mathcal{T} em $t = 0$ e deixando o sistema evoluir sob a influência de H , temos que a evolução temporal do estado de movimento é

$$|\tilde{\alpha}\rangle = [1 - \frac{iHdt}{\hbar}] \mathcal{T} |\alpha\rangle. \quad (\text{A.20})$$

Por outro lado, se o movimento é simétrico por reversão temporal, esperamos que o estado seja aquele que

$$\mathcal{T} |\alpha, t_0 = 0; t = -dt\rangle, \quad (\text{A.21})$$

logo

$$|\tilde{\alpha}\rangle = \mathcal{T} |\alpha, t_0 = 0; t = -dt\rangle \quad (\text{A.22})$$

$$= \mathcal{T} [1 - \frac{iH(-dt)}{\hbar}] |\alpha\rangle. \quad (\text{A.23})$$

Com isso, combinando as duas expressões para $|\tilde{\alpha}\rangle$, temos

$$\mathcal{T} [1 - \frac{iH(-dt)}{\hbar}] |\alpha\rangle = [1 - \frac{iHdt}{\hbar}] \mathcal{T} |\alpha\rangle \quad (\text{A.24})$$

$$\mathcal{T} i(H |\alpha\rangle) = -iH(\mathcal{T} |\alpha\rangle), \quad (\text{A.25})$$

sendo essa relação verdadeira para qualquer ket. Vendo a equação A.25 percebemos que \mathcal{T} não pode ser unitário se quisermos que o movimento reverso no tempo faça sentido. Pois se \mathcal{T} não fosse unitário seria legítimo cancelar os i 's das equações, e teríamos

$$-HT = \mathcal{T}H, \quad (\text{A.26})$$

o que é um resultado totalmente equivocado. Portando é melhor que \mathcal{T} seja antiunitário,

$$\mathcal{T}(c_1 |\alpha\rangle + c_2 |\beta\rangle) = c_1^* \mathcal{T} |\alpha\rangle + c_2^* \mathcal{T} |\beta\rangle. \quad (\text{A.27})$$

O que também define \mathcal{T} como sendo um operador antilinear. Com isso, temos

$$\mathcal{T}i(H|\alpha\rangle) = -iH(\mathcal{T}|\alpha\rangle) \quad (\text{A.28})$$

$$-i\mathcal{T}H|\alpha\rangle = -iH\mathcal{T}|\alpha\rangle. \quad (\text{A.29})$$

Assim chegamos a,

$$\mathcal{T}H = H\mathcal{T}, \quad (\text{A.30})$$

o que nos mostra que o Hamiltoniano deve ser invariante sobre reversão temporal. Com isso, podemos agora começar a estabelecer o comportamento de operadores sob reversão temporal.

Seja

$$|\tilde{\alpha}\rangle = \mathcal{T}|\alpha\rangle \quad (\text{A.31})$$

$$|\tilde{\beta}\rangle = \mathcal{T}|\beta\rangle, \quad (\text{A.32})$$

onde $|\tilde{\alpha}\rangle$ e $|\tilde{\beta}\rangle$ são estados de movimento reverso. Podemos escrever o elemento de matriz de um operador A como,

$$\langle\beta|A|\alpha\rangle = \langle\alpha|A|\beta\rangle^* \quad (\text{A.33})$$

$$= \langle\alpha|A^\dagger|\beta\rangle, \quad (\text{A.34})$$

sendo $\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T} = 1$ e aplicando na equação acima

$$\langle\beta|A|\alpha\rangle = \langle\alpha|\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}A^\dagger\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}|\beta\rangle \quad (\text{A.35})$$

$$= \langle\tilde{\alpha}|\mathcal{T}A^\dagger\mathcal{T}^{-1}|\tilde{\beta}\rangle. \quad (\text{A.36})$$

Se A é um operador Hermitiano, então a equação A.36 pode ser escrita como,

$$\langle\beta|A|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\mathcal{T}A\mathcal{T}^{-1}|\tilde{\beta}\rangle. \quad (\text{A.37})$$

Isso nos mostra que os observáveis são pares ou ímpares sob reversão temporal se,

$$\mathcal{T}A\mathcal{T}^{-1} = +A \quad \rightarrow \quad \text{par} \quad (\text{A.38})$$

$$\mathcal{T}A\mathcal{T}^{-1} = -A \quad \rightarrow \quad \text{ímpar}. \quad (\text{A.39})$$

Como exemplo, faça-mos os operadores momento linear e posição:

Operador momento linear

Na reversão temporal, o momento linear troca de sinal, de maneira que

$$\mathcal{T}\mathbf{P}\mathcal{T}^{-1} = -\mathbf{P}. \quad (\text{A.40})$$

Podemos provar isso a partir de

$$\mathbf{P}|\mathbf{p}\rangle = \mathbf{p}|\mathbf{p}\rangle, \quad (\text{A.41})$$

$$\mathbf{P}\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}|\mathbf{p}\rangle = \mathbf{p}|\mathbf{p}\rangle, \quad (\text{A.42})$$

$$\mathcal{T}\mathbf{P}\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}|\mathbf{p}\rangle = \mathbf{p}\mathcal{T}|\mathbf{p}\rangle. \quad (\text{A.43})$$

Onde \mathbf{p} é real, pois \mathbf{P} é Hermitiano. Mas temos também que $\mathcal{T}|\mathbf{p}\rangle = |-\mathbf{p}\rangle$, logo nossa equação fica

$$\mathcal{T}\mathbf{P}\mathcal{T}^{-1}|-\mathbf{p}\rangle = \mathbf{p}|-\mathbf{p}\rangle \quad (\text{A.44})$$

$$= -(\mathbf{P}|-\mathbf{p}\rangle). \quad (\text{A.45})$$

Que por fim, prova

$$\mathcal{T}\mathbf{P}\mathcal{T}^{-1} = -\mathbf{P}. \quad (\text{A.46})$$

Operador posição

Da mesma forma, temos que

$$\mathbf{X}|X\rangle = \mathbf{x}|X\rangle \quad (\text{A.47})$$

$$\mathbf{X}\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}|X\rangle = \mathbf{x}|X\rangle \quad (\text{A.48})$$

$$\mathcal{T}\mathbf{X}\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}|X\rangle = \mathbf{x}\mathcal{T}|X\rangle. \quad (\text{A.49})$$

Mas, uma vez que a posição da partícula é invariante sob reversão temporal, temos $\mathcal{T}|X\rangle = |X\rangle$, logo

$$\mathcal{T}\mathbf{X}\mathcal{T}^{-1}|X\rangle = \mathbf{x}|X\rangle \quad (\text{A.50})$$

$$= \mathbf{X}|X\rangle. \quad (\text{A.51})$$

O que prova que $\mathcal{T}\mathbf{X}\mathcal{T}^{-1} = \mathbf{X}$.

Formalismo da equação da onda

B.1 Equações de Maxwell e equação da onda.

Para darmos início a esse estudo consideremos então as equações de Maxwell macroscópicas.

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (\text{B.1})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (\text{B.2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (\text{B.3})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0. \quad (\text{B.4})$$

Note que usaremos o sistema de unidades gaussiano (CGS) por conveniência. Vamos considerar agora que nosso campo é harmônico, que o material espalhador possui um volume V , é isotrópico e está em repouso. Desse modo, podemos escrever as seguintes relações,

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (\text{B.7})$$

Devemos assumir que o meio não contém cargas ou correntes, ou seja $\mathbf{J} = 0$ e $\rho = 0$. Se substituirmos \mathbf{B} da equação B.7 na equação B.2, temos

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0. \quad (\text{B.8})$$

Dividindo ambos os lados por μ e aplicando o operador rotacional, temos

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = 0, \quad (\text{B.9})$$

se diferenciarmos a primeira equação de Maxwell em relação ao tempo, podemos obter uma expressão para $\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H})$ que será útil, veremos então, sendo

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (\text{B.10})$$

mas $\mathbf{J} = 0$. E se diferenciarmos em relação ao tempo, teremos

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}, \quad (\text{B.11})$$

substituindo B.11 em B.9, temos

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{B.12})$$

mas como vimos na equação B.6, podemos escrever o deslocamento elétrico de tal forma que substituindo na equação acima, temos

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon \mathbf{E}) = 0. \quad (\text{B.13})$$

Agora será de muita ajuda relembrar de algumas identidades vetoriais

$$\nabla \times (u\mathbf{A}) = u\nabla \times \mathbf{A} + \nabla u \times \mathbf{A}, \quad (\text{B.14})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \quad (\text{B.15})$$

$$\nabla \cdot (u\mathbf{A}) = u\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla u, \quad (\text{B.16})$$

utilizando a identidade B.14 a equação B.13 temos

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \frac{1}{\mu} \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{B.17})$$

Usando B.15 agora, a equação se torna

$$\frac{1}{\mu} [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}] + \nabla \frac{1}{\mu} \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{B.18})$$

Mas $\nabla \frac{1}{\mu} = -\frac{1}{\mu} \nabla(\ln \mu)$, então

$$\frac{1}{\mu} [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}] - \frac{1}{\mu} \nabla(\ln \mu) \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{B.19})$$

Multiplicando toda a equação por $-\mu$, temos por fim

$$-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \nabla^2 \mathbf{E} + \nabla(\ln \mu) \times \nabla \times \mathbf{E} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{B.20})$$

Lembrando das equações B.3 e B.6, se substituirmos B.6 em B.3 temos

$$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = 4\pi \rho. \quad (\text{B.21})$$

Podemos usar a identidade vetorial B.16 para simplificar essa expressão, que fica

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\mathbf{E} \cdot \nabla \epsilon}{\epsilon}. \quad (\text{B.22})$$

Lembrando que $\rho = 0$ pois estamos nos limitando a parte do campo que não contém cargas ou corrente. Com isso então, podemos escrever a equação B.20 de tal forma

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla(\ln \mu) \times \nabla \times \mathbf{E} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \nabla(\mathbf{E} \cdot \nabla \ln \epsilon) = 0. \quad (\text{B.23})$$

E de maneira análoga podemos obter uma equação para \mathbf{H} também

$$\nabla^2 \mathbf{H} + \nabla(\ln \epsilon) \times \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \nabla(\mathbf{H} \cdot \nabla \ln \mu) = 0. \quad (\text{B.24})$$