



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Quebra Dinâmica de Simetria de Lorentz em um
Modelo de Quatro Férmions Antissimétrico**

MAX WENDELL ANDRADE MELO

MACEIÓ-AL, JULHO DE 2023

Dissertação de Mestrado

Quebra Dinâmica de Simetria de Lorentz em um Modelo de
Quatro Férmions Antissimétrico

MAX WENDELL ANDRADE MELO

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Programa de Pós-graduação em Física
do Instituto de Física da Universidade
Federal de Alagoas como parte dos
requisitos necessários para a obtenção
do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Tiago Homero Mariz do Nascimento

Maceió-AL, Julho de 2023

Instituto de Física - UFAL

Catálogo na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

M528q Melo, Max Wendell Andrade.

Quebra dinâmica de simetria de Lorentz em um modelo de quatro férmions
antissimétrico / Max Wendell Andrade Melo. – 2023.
88 f. : il. color.

Orientador: Tiago Homero Mariz do Nascimento.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto
de Física. Maceió, 2023.

Bibliografia: f. 80-88.

1. Quebra dinâmica de simetria de Lorentz. 2. Teoria fermiônica
autointeragente. 3. Temperatura finita. I. Título.

CDU: 537.8

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**“Quebra Dinâmica de Simetria de Lorentz em um Modelo de Quatro
Férmions Antissimétrico”**

por

Max Wendell Andrade Melo

A Banca Examinadora composta pelos professores Tiago Homero Mariz do Nascimento, como presidente da banca examinadora e orientador, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas; Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas; e Albert Petrov, da Universidade Federal da Paraíba, consideram o candidato aprovado com grau “A”.

Maceió, 28 de julho de 2023.


Prof. Dr. Tiago Homero Mariz do Nascimento


Prof. Dr. Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho


Prof. Dr. Albert Petrov

DEDICATÓRIA

À toda a minha família e amigos, em especial ao meu pai e à minha mãe que apesar de todas as dificuldades sempre me incentivaram e apoiaram.

AGRADECIMENTOS

- Agradeço ao grande criador pela minha vida, proteção e saúde, minha e de meus familiares durante toda a minha jornada.
- Aos meus pais e familiares por todo o apoio fornecido e pela sua paciência.
- Agradeço a minha companheira Raline Araújo, que me ajudou a permanecer fiel no meu propósito, sua paciência, compreensão e seu amor foram fundamentais para que completasse essa etapa da minha vida.
- Ao Prof. Dr. Tiago Mariz por toda paciência e excelente orientação .
- Aos professores Joseclécio Dantas e Fábio Medeiros, por toda ajuda nos momentos mais crucias e pelos ensinamentos de vida que foram compartilhados.
- Aos colegas e amigos que fiz durante minha caminhada, em especial aos meus amigos de graduação Damião Franceilton, Luís Gomes, Reinaldo e Ketly.
- Aos meus colegas de sala e grandes amigos Júnior Lima e Marconi Junior, por toda a ajuda nos momentos difíceis, pelos momentos de descontração e pelas discussões sobre física que foram de grande proveito.
- Ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Física da UFAL, em especial aos professores Iram Gléria, Paulo Brandão, Italo Oliveira e Vinícius Manzoni por compartilhar conhecimento e experiências durante as disciplinas.

- À Capes pelo auxílio financeiro.

RESUMO

Nesta dissertação, estudamos a quebra dinâmica de simetria de Lorentz, ou seja, a quebra espontânea de simetria induzida por correções radiativas de uma teoria de férmionica autointeragente. Em nosso estudo verificamos que após introduzirmos um campo auxiliar tensorial antissimétrico, obtemos uma teoria com esse campo minimamente acoplado a um espinor, na qual calculamos o potencial efetivo de um loop, à temperatura zero e temperatura finita, e também a ação efetiva de um loop. Depois de calcularmos a equação de gap à temperatura zero do potencial efetivo, demonstramos explicitamente que o potencial resultante é definido positivamente e possui um conjunto contínuo de mínimos. Também investigamos as condições para a restauração da simetria quando calculamos a equação de gap à temperatura finita, na qual obtemos certas restrições nas componentes antissimétricas do campo tensorial. Além disso, obtemos a mesma ação cinética de segunda ordem nos campos quando consideramos a ação efetiva de um loop com a derivada direcional ou apenas uma derivada.

Palavras-chaves: Quebra dinâmica de simetria de Lorentz, teoria fermiônica autointeragente, temperatura finita.

ABSTRACT

In this dissertation, we study dynamic Lorentz symmetry breaking, that is, the spontaneous symmetry breaking induced by radiative corrections of a self-interacting fermionic theory. In our study we verified that after introducing an antisymmetric tensor auxiliary field, we obtain a theory with this field minimally coupled to a spinor, in which we calculate the effective potential of a loop, at zero temperature and finite temperature, and also the effective action of a loop. After computing the zero-temperature gap equation of the effective potential, we explicitly demonstrate that the resulting potential is positively defined and has a continuous set of minima. We also investigate the conditions for symmetry restoration when we calculate the gap equation at finite temperature, in which we obtain certain constraints on the antisymmetric components of the tensor field. Furthermore, we get the same second-order kinetic action on fields when we consider the effective action of a loop with the left-right derivative or just one derivative.

Keywords: Dynamic Lorentz symmetry breaking, self-interacting fermionic theory, finite temperature.

Sumário

Capa	1
Folha de rosto	1
Dedicatória	4
Agradecimentos	5
Resumo	7
Abstract	8
1 Introdução	12
2 Eletrodinâmica Quântica Estendida	18
2.1 Violação da simetria de Lorentz	18
2.1.1 TL passivas e ativas - análise para rotações	21
2.1.2 TL com campos de fundo - análise para rotações	24
2.2 Modelo Padrão Estendido e Eletrodinâmica Quântica Estendida	26
3 Quebra Dinâmica de Simetria	35
3.1 Introdução	35
3.2 Teoria de quatro férmions	37
3.3 Potencial Efetivo	40

SUMÁRIO	10
<hr/>	
3.3.1 Equação de gap	43
3.3.2 Equação de gap à temperatura finita	52
3.4 Ação Efetiva em um Laço	67
4 Conclusões e perspectivas	78
Referências Bibliográficas	81

Lista de Figuras

2.1	Rotação passiva por um ângulo ϕ .	22
2.2	Rotação ativa.	23
2.3	Transformação de observador - análise para rotações.	25
2.4	Transformação de partícula - análise para rotações.	26
3.1	Minímos não triviais.	51
3.2	Restauração de simetria do potencial.	65
3.3	Inclusão de temperaturas críticas para a restauração do potencial.	66

Capítulo 1

Introdução

O estudo analítico da natureza é de fundamental importância para atingirmos o atual nível de desenvolvimento tecnológico. A física ao longo da história tem dado uma importante contribuição para este avanço. Contudo, questões sobre a origem e acerca dos mistérios do universo têm sido feitas desde os primórdios da humanidade e sempre inquietaram os pensadores de diversas épocas. O atual estágio de conhecimento já é capaz de elucidar algumas dessas questões, porém ainda temos mais perguntas do que respostas sobre o cosmos.

As simetrias exerceram e exercem grande importância no quadro das leis físicas, sendo grandes aliadas na solução de diversos problemas. A procura por simetrias no estudo dos fenômenos físicos ganhou muita força após o trabalho de Noether, que sustentou a ideia de que para toda simetria existe uma lei de conservação associada, i.e., para quantidades como energia, momento e carga podemos relacionar uma

“corrente” a essas quantidades com uma equação de continuidade [1].

Dentre as simetrias mais bem estabelecidas na física está a simetria de Lorentz, tendo sido amplamente testada e comprovada por diversos experimentos [2, 3, 4] e constitui a base de um dos postulados da relatividade especial de Einstein. Podemos nos questionar se uma simetria tão bem estabelecida pode ser de algum modo violada. Nesse sentido, diversos estudos têm sido empregados nessa área de pesquisa, que podem nos conduzir ao entendimento de uma física ainda mais fundamental, oriunda da escala de energia de Planck [5].

Einstein, no ano de 1905, iniciou uma revolução na física, lançando a partir desse ano trabalhos inovadores, dentre eles a Teoria da Relatividade Restrita (TRR), que é basicamente composta por dois postulados: a constância da velocidade da luz no vácuo e o fato de que as leis da física devem ser as mesmas para quaisquer observadores em referenciais inerciais [6]. As primeiras transformações que relacionam diferentes referenciais inerciais foram obtidas por Galileu. Essas transformações têm um grande êxito para relacionar sistemas com baixas velocidades, i.e, as leis da mecânica clássica são invariantes ao aplicarmos as transformações de Galileu. Porém, para as equações de Maxwell do eletromagnetismo, ao serem submetidas às transformações de Galileu, elas não preservam a sua forma. Para contornar esse problema Lorentz e Poincaré obtiveram um conjunto de transformações que mantém as equações de Maxwell invariantes. As transformações de Lorentz foram então incorporadas na TRR, tais que as leis da física sejam invariantes em quaisquer conjunto de referenciais inerciais.

Dessa forma, na procura por quadros mais gerais nas leis da física, devemos

investigar os limites de aplicabilidade na busca por uma teoria ainda mais geral. Como acontece com a mecânica clássica, que têm resultados bastantes satisfatórios no regime de baixas velocidades, porém para fenômenos com velocidades comparáveis com a da luz a mecânica clássica deve sair de cena e dar lugar a relatividade restrita. O mesmo ocorre com a mecânica quântica que apresenta resultados com ampla verificação e validade com os dados experimentais. Contudo, para tratar de partículas com altíssimas energias devemos usar a Teoria Quântica de Campos (TQC), que descreve as partículas não como objetos pontuais, mas como excitações de um campo que está envolto no tecido do espaço-tempo, de modo que as entidades básicas de estudo passam a ser os campos [7]. Nessa direção, pesquisas tem sido realizadas para investigar se o já consolidado Modelo Padrão (MP) é o limite de baixas energias de uma teoria ainda mais fundamental [8].

O MP, desenvolvido nos anos 70, classifica e descreve as partículas elementares e mostra como se relacionam as suas propriedades, como massa, carga e outros números quânticos [9]. Para o MP toda a física é tida como um conjunto de interações entre férmions que são mediadas por bósons através dos campos. Assim, no MP dividimos as partículas em dois grupos: os férmions e os bósons. Os férmions possuem spin semi-inteiro e os bósons spin inteiro. Os férmions podem ainda ser divididos em léptons ($e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$) e quarks (u, c, t, d, b, s). Os léptons interagem com a força fraca e a eletromagnética, enquanto que os quarks interagem com todas essas forças e ainda com a força forte. Os bósons são vistos como os quanta de cada campo das quatro interações fundamentais. Os bósons W^+, W^- e Z^0 são os mediadores da força fraca e os glúons da força forte. Já os fótons são os mediadores da interação eletromagnética.

No contexto de teoria de cordas é possível obtermos naturalmente a violação da simetria de Lorentz e de CPT [10]. Então, o MP foi estendido para que incorporasse essa possibilidade na sua estrutura por meio de pequenos termos corretivos. Essa extensão do MP é chamada Modelo Padrão Estendido (MPE) e é a teoria mais bem sucedida que engloba a violação da invariância de Lorentz. Este modelo possui tensores e vetores constantes de fundo que estão relacionados com coeficientes que indicam uma direção preferencial no espaço-tempo, violando assim a simetria de Lorentz.

O estudo de quebra de simetria de Lorentz foi iniciado quando Carroll, Field e Jackiw (CFJ), no início da década de 90 [11], investigaram uma modificação na densidade lagrangiana de Maxwell adicionando um termo do tipo Chern-Simons, onde é acoplado um campo de gauge com um quadrivetor constante que induz uma violação da simetria de Lorentz. Anteriormente, Kostelecky e Samuel [10], em 1989, despertaram o desenvolvimento do MPE, em que eles estudaram a quebra espontânea de simetria no contexto de teoria de cordas como um mecanismo capaz de induzir uma violação da simetria de Lorentz.

O MPE foi concebido por Kostelecky e Colladay [12], no qual eles seguiram na mesma direção de CFJ e estudaram como poderiam incluir em todos os setores da langrangiana termos que violam a simetria de Lorentz. Para uma teoria autointeragente, foi mostrado em [13, 14, 15] que uma quebra de simetria CPT implica em violação de Lorentz a depender do número de índices presentes nos coeficientes que provocam esse efeito, número par de índices é invariante CPT, ao passo que número ímpar de índices viola a simetria CPT. Isto posto, a simetria de Lorentz e CPT não

são uma simetria absoluta e sim o caso limite de baixas energias de uma teoria de cordas, que se propõe a ser uma teoria ainda mais fundamental.

Nesta dissertação propomos então estudar a quebra dinâmica de simetria de Lorentz, que é a quebra de simetria de Lorentz através de correções radiativas [16, 17, 18, 19]. Para isso, vamos considerar uma teoria de quatro férmions antissimétrico e veremos que após a introdução de um campo auxiliar, mostramos que um potencial bumblebee surge como resultado de cálculos quânticos de um laço. Realizamos ainda a análise deste potencial, no qual constatamos a existência de mínimos não triviais, caracterizados por um potencial semelhante ao potencial do campo de Higgs. Efetuamos o estudo da equação de gap no regime de temperaturas zero e finita. Calculamos também a ação efetiva em um laço considerando que a corrente de nossa teoria seja escrita com uma derivada direcional, ao invés de uma derivada usual.

Esta dissertação está dividida da seguinte maneira: no segundo capítulo faremos uma breve discussão sobre as transformações de Lorentz sob os pontos de vista ativo e passivo, como também a análise dessas transformações com a inclusão de um campo de fundo constante. Também realizamos uma breve explanação sobre as principais características do MP e do MPE.

No terceiro capítulo realizamos o cálculo da equação da gap sem temperatura e no regime de temperatura finita, onde discutimos os principais resultados. Calculamos também as contribuições da ação efetiva em um laço, onde propomos uma modificação da lagrangiana inicial com a inclusão de uma derivada direcional.

Por fim, no quarto capítulo realizamos as discussões acerca dos resultados obtidos no terceiro, como também apresentamos algumas perspectivas para trabalhos

futuros.

Durante toda esta trabalho faremos o uso do sistema de unidades naturais, onde vale que $\hbar = k_B = c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1$, com a assinatura da métrica do espaço-tempo de Minkowski como sendo $\text{diag}(+1, -1, -1, -1)$.

Capítulo 2

Eletrodinâmica Quântica Estendida

Nesse capítulo realizaremos uma breve revisão sobre as transformações de Lorentz do ponto de vista passivo e ativo. Também efetuaremos a nossa análise para o caso em que temos campos de fundo, as chamadas transformações de partículas e de observador e veremos que a simetria de Lorentz é violada na presença desses campos. Por fim, realizaremos uma breve explanação sobre o Modelo Padrão e as principais motivações para o estudo de uma extensão do Modelo Padrão, o chamado Modelo Padrão Estendido, limitando-nos apenas no estudo da Eletrodinâmica Quântica Estendida (EDQ).

2.1 Violação da simetria de Lorentz

Com o advento da teoria da relatividade restrita ficou observado que as trans-

formações que relacionam corretamente dois ou mais referenciais inerciais devem ser as transformações de Lorentz¹, que diferem das já conhecidas transformações de Galileu onde o espaço e o tempo eram descritos pela física newtoniana e que prevaleciam até 1905, quando Albert Einstein lançou as bases da Relatividade Restrita. Conforme já mencionamos, a Relatividade Restrita estabelece que a física deve ser a mesma para quaisquer observadores em referenciais inerciais e ainda que a velocidade da luz é constante no vácuo, possuindo o valor de $c = 3 \times 10^8 m/s$ [6]. Essa nova teoria mudou o olhar dos cientistas sobre os problemas físicos e de imediato as concepções newtonianas sobre o espaço e o tempo deram lugar à uma nova entidade, a saber, o espaço-tempo.

Um determinado sistema é dito invariante de Lorentz se ao realizarmos as transformações próprias desse grupo, rotações e mudanças de velocidades (boosts), sua lagrangiana permanece inalterada, ou seja, as leis físicas não sofrem alterações após serem submetidas por qualquer uma dessas transformações [21]. Assim, devemos usar essas transformações e aglutiná-las com as teorias físicas desenvolvidas como simetrias a serem respeitadas.

Dada a homogeneidade do espaço-tempo, estabelecida pelos postulados da relatividade restrita, a quebra da simetria de Lorentz pode ser vista como uma anisotropia espaço-temporal que o sistema atinge quando um campo de fundo (de origem desconhecida) vetorial ou tensorial alcança o verdadeiro vácuo².

¹Essas transformações também são chamadas de transformações de Flitizgerald-Lorentz, tendo sido obtida também por um físico alemão chamado Wolder Voigt em um estudo sobre o deslocamento Doppler [20].

²A situação é análoga ao que ocorre no modelo de Ising, no qual por meio de uma transição de fase uma cadeia de spins em direções aleatórias passa a se orientarem em conjunto numa determinada direção quando o sistema é resfriado, criando dessa maneira um campo magnético de fundo e quebrando a isotropia espacial [22]

Iremos adotar nesta parte a notação conforme descrita em [22] na abordagem das transformações de Lorentz (TL). Usualmente, dizemos que existem dois tipos de TL: as ativas e as passivas. As TL passivas relacionam dois referenciais inerciais por rotações ou boosts, de modo que os pontos do espaço-tempo permanecem fixos, ou seja, as partículas ou campos permanecem inalterados em suas posições. Já as TL ativas mantêm o sistema de coordenadas fixos e aplica-se diretamente as transformações (rotações ou boosts) diretamente na partícula, i.e., quem se move nesta transformação são os pontos do espaço-tempo. Vale ressaltar que independente da escolha da TL a física descrita deve ser a mesma, porém se tivermos um campo de fundo no nosso sistema devemos ser um pouco mais cautelosos em nossa análise.

As TL passivas na presença de um campo de fundo constante são denominadas de TL de observador. Já o caso de TL ativas na presença de um campo de fundo constante são conhecidas como TL de partícula [23].

Para mantermos a consistência das leis da física entre dois sistemas de referências inerciais O e O' , que se movem um em relação ao outro e que estão inicialmente alinhadas, mas num instante de tempo posterior um deles se move com velocidade c , devemos usar as TL que envolvem coordenadas temporais. Podemos relacionar os dois sistemas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt), \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right),\end{aligned}\tag{2.1}$$

com $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Notemos que, se o parâmetro $\gamma \approx 1$, as transformações de Lorentz são equivalentes as transformações de Galileu.

O conjunto de equações escrita em (2.1) são as transformações apropriadas para relacionar mudanças em coordenadas temporais e espaciais, para sistemas que sofrem boosts.

Vamos analisar o caso em que ocorre rotações em um sistema e observarmos como as TL de observador e de partícula se relacionam, e assim verificar se temos a mesma situação física depois das transformações. Em seguida, faremos a mesma análise incluindo campos de fundo.

2.1.1 TL passivas e ativas - análise para rotações

Iremos iniciar a nossa análise pelo caso de rotações passivas e ativas e investigar se em ambos os casos temos a simetria das leis físicas conservadas. Consideremos uma dada rotação passiva que é realizada no plano xy , em que o sistema O é rotacionado por um ângulo ϕ conforme é ilustrado na Fig.(2.1)

Dessa maneira, podemos construir uma matriz que relaciona o sistema que sofreu a rotação O' e o sistema original O da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \text{sen}\phi \\ -\text{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

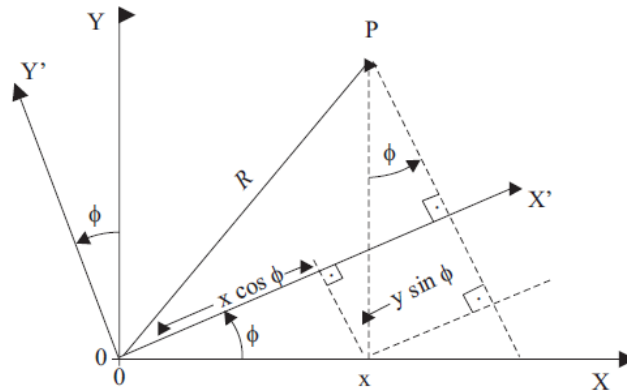


Figura 2.1: Rotação passiva por um ângulo ϕ .

Fonte: Belich *et. al.*, 2007.

Podemos escrever a matriz acima levando em consideração rotações passivas por ângulos infinitesimais $\delta\phi$, de modo que teremos

$$\begin{bmatrix} \delta x' \\ \delta y' \end{bmatrix} = \delta\phi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Por meio dessas matrizes conseguimos relacionar os pontos do espaço entre o sistema rotacionado e o não rotacionado com consistência.

Iremos analisar agora o caso de rotações ativas. Nesta situação uma partícula pontual é quem sofrerá uma rotação por um determinado ângulo ϕ e o nosso sistema $O(x, y)$ permanecerá sem qualquer mudança. Esta situação é ilustrada na Fig.(2.2)

Dessa forma podemos construir uma matriz para representar esta rotação sofrida pela partícula da seguinte maneira:

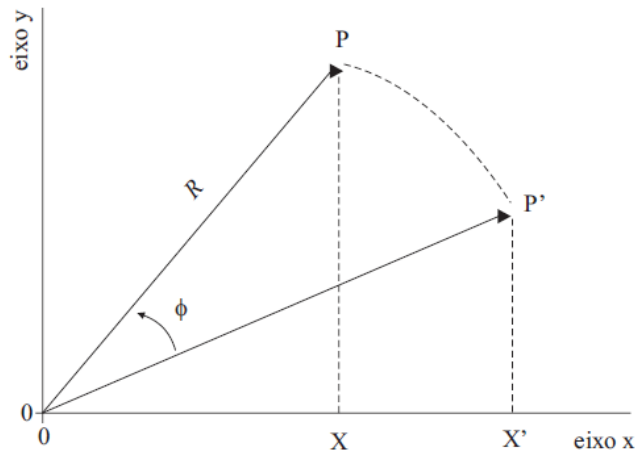


Figura 2.2: Rotação ativa.

Fonte: Belich *et. al.*, 2007.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\text{sen}\phi \\ \text{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Seguindo o mesmo procedimento das rotações passivas, podemos construir uma matriz para rotações ativas em que as partículas são rotacionadas por ângulos infinitesimais $\delta\phi$. Desse modo, a matriz (2.3) possuirá a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \delta x' \\ \delta y' \end{bmatrix} = \delta\phi \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Notemos que os dois tipos de transformações descrevem as rotações de maneiras equivalentes, de tal forma que se realizarmos uma rotação passiva de um ângulo ϕ e uma rotação passiva de $-\phi$ iremos obter a mesma situação física, o que

é esperado pelos princípios da relatividade restrita.

Iremos abordar em seguida uma análise semelhante dessas transformações, com campos de fundo, e notaremos que essa equivalência será perdida.

2.1.2 TL com campos de fundo - análise para rotações

Vamos analisar a situação para o grupo de rotações com a presença de um campo de fundo constante. Consideremos a situação ilustrada na Fig. (2.3), onde temos duas placas planas e paralelas carregadas com cargas positivas e negativas (semelhante a um capacitor de placas planas e paralelas). Desse modo, um campo de fundo uniforme representado pelo campo elétrico $\vec{E} = -E\hat{z}$ é criado³. Um determinado vetor que localiza a partícula (o elétron neste caso) é dado por $\vec{R} = (0, a, 0)$, que está inicialmente perpendicular ao campo de fundo. Realizaremos uma rotação no sistema $O(x, y)$ por um ângulo $\phi = \frac{\pi}{2}$ radianos, conforme assinalado na Fig. (2.3).

³Estaremos desprezando todos os efeitos indesejáveis nas bordas do nosso sistema.

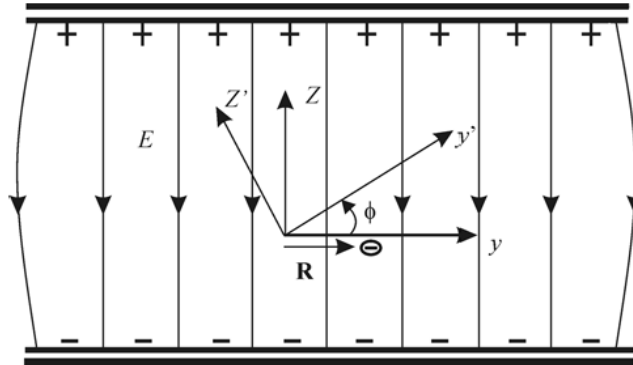


Figura 2.3: Transformação de observador - análise para rotações.

Fonte: Belich *et. al.*, 2007.

Em uma transformação de observador, observamos que o vetor posição $\vec{R} = (0, a, 0)$ segue perpendicular ao campo elétrico de fundo \vec{E} ao realizarmos uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos e que o vetor posição que localiza a partícula será antiparalelo ao eixo z' . Se o campo de fundo fosse de algum modo desligado, essa situação seria equivalente ao caso das rotações passivas.

Já para o caso de uma transformação de partícula, onde consideramos uma rotação de $-\frac{\pi}{2}$ radianos que é aplicada diretamente na partícula, o vetor de posição $\vec{R} = (0, a, 0)$ irá agora ser paralelo ao campo de fundo \vec{E} após essa transformação e antiparalelo ao eixo z , conforme é ilustrado na Fig. (2.4).

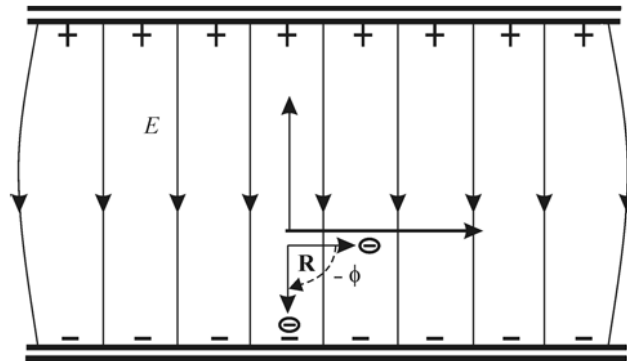


Figura 2.4: Transformação de partícula - análise para rotações.

Fonte: Belich *et. al.*, 2007.

Dessa maneira, perdemos a simetria entre as transformações de observador e de partícula devido à presença de um campo de fundo. Repare que nas duas situações, a rotação fez com que o vetor posição do elétron \vec{R} seja antiparalelo ao eixo z , porém a presença de um dado campo de fundo fez com que a simetria inicial se perda.

Verificamos assim que a violação de Lorentz ocorre apenas no referencial da partícula, sendo preservada no referencial do observador. A seguir, vamos analisar quais são os principais ingredientes do Modelo Padrão e também da Eletrodinâmica Quântica Estendida.

2.2 Modelo Padrão Estendido e Eletrodinâmica Quântica Estendida

A Teoria Quântica de Campos (TQC) aglutina em sua estrutura a simetria

de Lorentz e a Mecânica Quântica.. Com isso, podemos dizer que a TQC é uma teoria quântica e relativística. Devido ao sucesso da TQC na descrição dos fenômenos físicos, foi desenvolvido o MP que é usado para descrever partículas elementares e suas interações. Com ele, conseguimos obter uma descrição completa de três das quatro interações fundamentais: a força eletromagnética, a força nuclear forte e a força nuclear fraca. Assim, deixando de incorporar apenas a força gravitacional nesse modelo [8]. Estima-se que os efeitos da gravitação quântica sejam consideráveis na escala de altíssimas energias, que são da ordem de $M_{Planck} \approx 10^{19} GeV$. Contudo, o MP usual é estabelecido numa escala de energias da ordem de $M_w \approx 10^2 GeV$, que é a escala eletrofraca. O Modelo Padrão é dessa maneira uma teoria de campos relativística e invariante de Lorentz, que apresenta boa concordância com os resultados experimentais [24].

Todavia, o MP possui algumas limitações, as quais são: ainda não foram detectadas os grávitons (que seriam as partículas mediadoras da interação gravitacional), não explica satisfatoriamente questões acerca da matéria escura, energia escura, a hierarquia das escalas de energia, assimetria entre matéria ordinária e anti-matéria (assimetria bariônica), dentre outros problemas. Sendo assim, o MP é uma teoria inacabada, que irá precisar de alguns ajustes para superar tais limitações. É diante dessas limitações que se abre a possibilidade de estudo de uma física além do modelo padrão. Desse modo, o MP usual junto com a Relatividade Restrita é visto como o limite de baixas energias de uma teoria ainda mais fundamental na qual a violação de Lorentz e CPT são possíveis, como é o caso de algumas teorias de cordas específicas, nas quais a violação espontânea da simetria de Lorentz são possíveis [25, 26].

A violação de simetria de Lorentz pode ser de fundamental importância na compreensão de alguns fenômenos, tal como a detecção do desvio do valor da constante de estrutura fina, dada por $\alpha = e^2/\hbar c$, oriunda de observações astronômicas. Essa constante adimensional mede a intensidade da interação eletromagnética entre fótons e elétrons, e existem fortes indícios de que seu valor esteja se alterando e que ela foi diferente nos estágios iniciais do cosmos [27]. Como α é composta por três constantes, alguma delas deve estar com o seu valor variando e existem fortes razões para acreditar que deva ser a velocidade da luz no vácuo [22]. Outro forte indicativo da violação de Lorentz vem dos raios cósmicos além do limite de altíssimas energias de Greisen-Zapsepín-Kuzmin (GZK)⁴ [28, 29], no qual os prótons constituintes desses feixes deveriam decair em outras partículas (nesse caso em píons) após interagirem com a radiação cósmica de fundo⁵ e eles não seriam detectadas na Terra. Neste caso, uma possível explicação é que essas partículas adquirem por algum mecanismo uma velocidade maior do que a da luz, sendo chamadas de partículas superluminais.

No nível de energias permitidas pelo Modelo Padrão, a violação explícita da simetria de Lorentz é estudada a partir da adição de pequenos termos corretivos à sua lagrangiana. Os novos termos corretivos adicionados devem ser pequenos o suficiente (caso contrário já teríamos detectado esses efeitos), de modo que na escala de energias do MP convencional eles possam ser desprezados. Desse modo, a constatação desses efeitos físicos só são possíveis de serem medidos apenas com auxílio de

⁴A energia desses feixes são estimadas como sendo $E_{GZK} \approx 6 \times 10^{19} \text{ GeV}$.

⁵A radiação cósmica de fundo é uma das principais evidências em favor do Big Bang, pois essa radiação que hoje está na faixa de microondas é proveniente de fótons criados nos primeiros instantes do nosso universo.

experimentos de altíssima sensibilidade ⁶. Os experimentos mais comuns que fazem a investigação da violação da simetria de Lorentz e CPT estão relacionados com oscilações de neutrinos e Kaóns [30, 31, 32], armadilhas de Penning [33], comparação de relógios [34, 35, 36], investigações envolvendo a quebra de simetria CPT com o espectro da radiação cósmica de fundo [37, 38, 39, 40, 41], entre outros.

Em 1989, Kostelecky e Samuel surgiram com a ideia de que a violação de simetria de Lorentz e CPT inseridas no contexto do MP, deve ser oriunda de interações presentes em teorias de cordas, através do mecanismo de quebra espontânea de simetria [10], onde os termos responsáveis por essa violação são valores esperados do vácuo (VEV). Em meados da década de 90 um grupo de pesquisadores, formado por Carrol, Field e Jackiw (CFJ), investigaram a adição de um termo do tipo Chern-Simons em $(3 + 1)$ dimensões, escrito como $(k_{AF})^\kappa \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} A^\lambda F^{\mu\nu}$ na lagrangiana da eletrodinâmica de Maxwell, com o intuito de verificarem se a simetria de Lorentz é apenas uma aproximação [11]. Aqui o vetor de fundo constante $(k_{AF})^\kappa$ é o responsável por fixar um campo de fundo que causa uma quebra na simetria de Lorentz. Contudo, neste modelo encontrou-se algumas dificuldades⁷.

Coube a Colladay e Kostelecky em 1998, motivados pelo trabalho de CFJ, desenvolverem o Modelo Padrão Estendido (MPE), onde eles incorporaram todos os termos que violam Lorentz e CPT [12, 42], porém mantiveram intactas as propriedades do MP usual como a renormalizabilidade, unitariedade, a causalidade, a

⁶O grande Colisor de Hadróns (LHC) atualmente opera na escala de $13TeV$, ou seja, ainda muito distante do nível de energia em que essas teorias fundamentais atuam.

⁷Em medições de testes astrofísicos, foram encontrados limites rigorosos para a massa que o fóton deveria apresentar na teoria, e não conseguiram verificar correções para a EDQ na escala de energia investigada.

invariância de gauge e as simetrias dos grupos de rotação $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ ⁸.

Desse modo, o MPE também funciona como uma teoria efetiva que procura investigar a física emergente de uma teoria mais fundamental que é proveniente da escala de altas energias, por meio de pequenos termos aditivos que violam a simetria de Lorentz de forma explícita, e com isso conseguir realizar correções mensuráveis ao MP [16]. Esses novos termos são quantidades tensoriais renormalizáveis e invariantes de gauge provenientes de teorias mais fundamentais, e.g., teorias de cordas, que, como já mencionamos, a violação de CPT e Lorentz surge naturalmente [43, 44]. Podemos dizer resumidamente que o MPE contém em sua estrutura uma lagrangiana que é invariante sob as transformações de Lorentz de observador, mas que ainda exibe a possibilidade de algumas interações causarem quebra espontânea de simetria de Lorentz e CPT no nível de energias do MP. Os termos corretivos são frutos do mecanismo de quebra espontânea, onde os campos tensoriais adquirem valores esperados no vácuo não triviais [45, 46].

O MPE pode ser dividido em dois setores: o setor mínimo e o não-mínimo. O setor não-mínimo é constituído por operadores de dimensão de massa $d \geq 5$ e os termos relacionados a esse setor ou são não renormalizáveis ou podem gerar fantasmas. Já o setor mínimo é caracterizado por operadores de dimensão de massa $d \leq 4$. A lagrangiana do MPE é descrita como sendo a soma da lagrangiana do MP e a lagrangiana de termos que induzem a violação de simetria de Lorentz,

$$\mathcal{L}_{MPE} = \mathcal{L}_{MP} + \mathcal{L}_{VL}. \quad (2.5)$$

⁸ $SU(3)$ está relacionada com a interação forte, $SU(2)$ está relacionada com a interação fraca e $U(1)$ com a interação eletromagnética.

Podemos também analisar a \mathcal{L}_{MPE} em duas extensões: uma no setor de gauge e no setor de férmions. O setor de gauge para \mathcal{L}_{VL} é formado pelo único termo CPT-ímpar, que foi introduzido por CFJ [11], e ainda o termo CPT-par que foi introduzido por Kostelecky e Colladay [42]. Já no setor de férmions, coube a Kostelecky e Colladay realizarem uma extensão da teoria de Dirac com violação de simetria, ao inserirem campos de fundo constantes [12].

A Eletrodinâmica Quântica (EDQ) é uma TQC para descrever os elétrons, pósitrons e fótons, e foi desenvolvida por volta de 1950 por Feynman, Schwinger e Tomonaga [47]. A EDQ é uma das teorias mais bem sucedidas que estuda como se dá a interação da luz e a matéria, sendo ela invariante de gauge e obedece aos postulados da relatividade especial e da teoria quântica simultaneamente. A lagrangiana da EDQ é feita da adição da lagrangiana de Maxwell $\mathcal{L}_{Maxwell}$ com a lagrangiana de Dirac \mathcal{L}_D . Deste modo, podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{EDQ} &= \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{Maxwell} \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\cancel{D} - m - e\cancel{A})\psi.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Dado o grande sucesso da EDQ (por meio de várias comprovações experimentais em total acordo com a teoria), vamos analisar uma ampliação nesse modelo, de modo que ela passe a englobar a violação de Lorentz conforme já discutimos. Para a EDQ Estendida devemos fazer a adição de alguns termos de maneira explícita, de modo

que no setor mínimo ela seja escrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EDQ}^{Estendida} &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \Gamma^\mu D_\mu \psi - \bar{\psi} M \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} (k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu} F^{\kappa\lambda} F^{\mu\nu} \\ &+ \frac{1}{2} (k_{AF})^\kappa \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} A^\lambda F^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

que envolve o setor fermiônico (dois primeiros termos) e o setor bosônico (o terceiro, quarto e quinto termos). Para os operadores relacionados ao setor fermiônico, Γ^μ é adimensional e o operador M tem dimensão de massa $d = 1$.

Notemos que o coeficiente CPT ímpar $(k_{AF})^\kappa$ tem dimensão de massa $d = 1$ e que $A^\lambda F^{\mu\nu}$ tem dimensão de massa $d = 3$. Já o coeficiente $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$ é adimensional e o operador $F^{\kappa\lambda} F^{\mu\nu}$ tem dimensão de massa $d = 4$. Esse termo é CPT par e assim não viola a simetria CPT, enquanto que o termo com $(k_{AF})^\kappa$ viola a simetria CPT. Porém, ambos os termos violam a simetria de Lorentz. Para as quantidades escritas na lagrangiana (2.7) relativas ao setor fermiônico, temos

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu &= \gamma^\mu + \Gamma_1^\mu, \\ M &= m + M_1, \\ \Gamma_1^\mu &= c^{\nu\mu} \gamma_\nu + d^{\nu\mu} \gamma_5 \gamma_\nu + e^\mu + i f^\mu \gamma_5 + \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda\mu} \sigma_{\kappa\lambda}, \\ M_1 &= a_\mu \gamma^\mu + b_\mu \gamma_5 \gamma^\mu + \frac{1}{2} H_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

A quebra de simetria é introduzida no setor fermiônico por meio dos vetores/tensores: $a_\mu, b_\mu, e_\mu, c^{\nu\mu}, d^{\nu\mu}, e^\mu, f^\mu$ e $g^{\kappa\lambda\mu}$. Para número ímpar de índices, temos a violação de Lorentz e CPT, ao passo que para número par, temos apenas a violação de Lorentz. Já no setor bosônico temos os seguintes coeficientes que são

responsáveis pela quebra $(k_{AF})^\kappa$ e $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$. Vale ressaltar ainda que os termos que violam Lorentz no setor fermiônico são valores esperados no vácuo (VEV) dos seus respectivos campos de fundo $\langle A \rangle = a$, $\langle B_\mu \rangle = b_\mu$, e assim por diante.

O termo de CFJ adicionado na lagrangiana de Maxwell ($\mathcal{L}_{Maxwell}$) e escrita na equação (2.7) é um termo do tipo Chern-Simons quadrimensional, CPT-ímpar com operadores de dimensão de massa 3 que é escrito como sendo

$$\mathcal{L}_{CFJ} = \frac{1}{2} (k_{AF})^\kappa \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} A^\lambda F^{\mu\nu}. \quad (2.9)$$

Conforme já mencionamos, a quebra de simetria de Lorentz é devido ao quadrivetor constante $(k_{AF})^\kappa$ que quebra a equivalência entre as transformações de observador e de partícula [48]. A teoria de Chern-Simons tridimensional possui muitas aplicações em física, como a descrição do efeito Hall, a supercondutividade em materiais dentre outras aplicações [49]. Desse modo, a motivação para a ampliação deste modelo tridimensional já consolidado reside no fato de que essa extensão pode trazer ainda mais esclarecimentos a outros fenômenos. Outros aspectos clássicos relacionado ao termo CFJ está ligado com relações de dispersão e questões ligadas com a unitariedade e causalidade, em nível quântico, seu estudo está ligado a possibilidade para a sua geração perturbativa, estudos de renormalização e renormalizabilidade, relações com possíveis anomalias [50].

O termo CPT-par escrito na lagrangiana (2.7) foi estudado por Kostelecky e Mewes [51, 52] em 2002, onde eles exibiram um termo adicionado a eletrodinâmica que viola Lorentz composto por um vetor de fundo $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$, que também define uma direção preferencial para observação e possui as mesmas simetrias do tensor

de Riemann, visto que o vetor $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$ satisfaz as propriedades de simetria e de antissimetria semelhantes as do tensor de Riemann e ainda possui um duplo traço nulo.

Nesse sentido, existem algumas maneiras possíveis de obtermos uma violação da simetria de Lorentz em uma dada teoria. Por exemplo, podemos investigar teorias de campos não comutativas, onde temos uma álgebra não comutativa entre as coordenadas espaço-temporais, de modo que $[x^\mu, x^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}$ ⁹ [53]. Outro cenário possível é investigar as relações de dispersão de partículas que se propagam livremente e são pertinentes nas investigações de raios cósmicos ultra energéticos [54, 55].

Contudo, neste trabalho investigaremos como a presença de campos de fundo vetoriais/tensoriais possibilitam a criação de uma anisotropia no espaço-tempo, por meio de um processo de transição de fase onde teremos um valor esperado do vácuo (VEV) não nulo quando o sistema atinge o estado de mínima energia, similar ao que ocorre no mecanismo de Higgs onde um campo escalar seleciona de modo espontâneo um dos estados fundamentais para ocupar e assim contribui como massa para as partículas do MP [56].

No próximo capítulo, vamos estudar a quebra dinâmica de simetria, tal que iremos observar a geração de um coeficiente $b_{\mu\nu}$ antissimétrico, que podemos associar a parte antissimétrica do coeficiente $c_{\mu\nu}$ descrito na equação (2.8).

⁹A quantidade $\Theta^{\mu\nu}$ é um tensor antissimétrico e constante.

Capítulo 3

Quebra Dinâmica de Simetria

Neste capítulo vamos estudar a quebra dinâmica de simetria, através de um modelo fermiônico derivativo que possui uma corrente antissimétrica. Vamos calcular a sua correspondente equação de gap, e por conseguinte o correspondente potencial efetivo. Também vamos efetuar o cálculo à temperatura finita a fim de obter as correspondentes condições para a restauração de simetria. Por fim, realizaremos a cálculo da ação efetiva em um laço, considerando uma alteração no termo de corrente, no qual passaremos a usar uma derivada direcional ao invés de uma derivada usual.

3.1 Introdução

Podemos incorporar a quebra de simetria de Lorentz usualmente de três ma-

neiras em uma teoria. A primeira maneira é a explícita, onde um vetor/tensor constante que gera a direção privilegiada é adicionado desde o início na teoria (que inicialmente é simétrica perante essas transformações). Desse modo, podemos dizer que na maneira explícita realiza-se a adição de termos de forma *ad hoc* na lagrangiana para que ela forneça a assimetria desejada [57], como ocorre no modelo da eletrodinâmica de CFJ. A segunda maneira é a anômala em que o próprio espaço-tempo possui uma topologia não trivial [58], com isso, acontece o surgimento natural de termos que violam a simetria. Entretanto, a maneira anômala é tratada em contextos muito raros e aparece em poucos trabalhos, porque usualmente tratamos de topologia simples. Por fim temos a maneira espontânea, de onde o vetor/tensor emerge como um valor esperado do vácuo (VEV) de um campo tensorial. O mecanismo de quebra espontânea de simetria de Lorentz é o procedimento mais consolidado que gera a violação da simetria de Lorentz no MPE com acoplamento gravitacional [59]. Além disso, o mecanismo de violação explícita no setor gravitacional não é consistente com as identidades de Bianchi e gera algumas dificuldades [60].

A justificativa pela escolha do mecanismo da quebra espontânea vem da Teoria de Cordas, na qual os campos vetoriais/tensoriais podem atingir um valor esperado do vácuo não trivial, conforme o mecanismo de Coleman-Weinberg [61]. Esses dados VEV's são os coeficientes tensoriais no MPE e são os responsáveis pela violação da simetria de Lorentz. Ainda mais, podemos entender a quebra dinâmica de simetria como sendo a quebra espontânea atingida através de correções quânticas [62].

Na próxima seção vamos apresentar a teoria de quatro férmions e analisar o

modelo que iremos estudar.

3.2 Teoria de quatro férmions

Os modelos de quatro férmions são caracterizados por apresentarem acoplamento de quatro campos fermiônicos. Um dos primeiros modelos de quatro férmions foi apresentado por Thirring para descrever interações em $(1 + 1)$ dimensões [63]. Em 1963, Bjorken utilizou-se de uma teoria fermiônica autointeragente em $(1 + 3)$ dimensões, com a inclusão de quebra de simetria de Lorentz como mecanismo para dar origem aos fótons dinamicamente, em que o termo de corrente é escrito como $J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ [64], semelhante ao que foi utilizado por Thirring.

Neste trabalho, estamos interessados na quebra dinâmica de simetria de Lorentz em um modelo de quatro férmions antissimétrico, que gera uma anisotropia espaço-temporal. Veremos que um potencial do tipo bumblebee pode ser dinamicamente induzido por meio de correções radiativas¹ de uma teoria fermiônica autointeragente.

Os modelos do tipo bumblebee vetorial são teorias que envolvem um campo mais simples que provocam uma violação de simetria de Lorentz e CPT de maneira espontânea, a partir de um potencial que é função deste campo [65]. Estes modelos são amplamente utilizados no contexto de teorias da gravitação, como em estudos sobre buracos negros [66, 67], buracos de minhoca [68], soluções Gödel [69], espa-

¹São correções quânticas que vão além do nível de árvore que são oriundas dos termos de interação de uma dada teoria

lhamento de partículas [70] dentre outros. No contexto da gravitação, a quebra de simetria de Lorentz foi trabalhada em [59, 71].

Existe também um outro modelo para um campo tensorial antissimétrico que também induz uma violação da simetria de Lorentz de forma espontânea, conhecido como o campo de Kalb-Ramond [72, 73]. Os modelos de bumblebee vetorial e Kalb-Ramond (bumblebee tensorial) são construídos com um termo cinético e um termo de potencial. O termo de potencial é o responsável por induzir a quebra espontânea de simetria de Lorentz, que pode assim assumir algumas formas específicas.

Os modelos bumblebee vetorial, conforme dissemos, são amplamente investigados no setor gravitacional, apesar disso existe um progressivo interesse em estudos deste modelo aplicado em outras linhas de pesquisa. O modelo vetorial para a teoria do modelo bumblebee é dada pela lagrangiana² [75, 43, 76]

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{12}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{\partial} - ieB^\mu\gamma_\mu - m)\psi - \frac{\lambda}{4}(B_\mu B^\mu - \beta^2)^2. \quad (3.1)$$

Este modelo vetorial com um potencial de quebra espontânea foi estudado em [71], onde foram obtidos resultados das equações de Einstein no espaço-tempo com curvatura com a inclusão da quebra espontânea de simetria de Lorentz³.

Estamos particularmente interessados em uma ampliação deste modelo conforme feito em [74], no qual usou-se um campo tensorial antissimétrico $B^{\mu\nu}$ ao invés do campo vetorial B^μ .

²A constante λ faz o papel de um multiplicador de Lagrange no termo de potencial, é positiva e representa um acoplamento.

³Foi no trabalho de [71] que esse modelo recebeu o nome de bumblebee.

A lagrangiana para o modelo bumblebee tensorial será escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B &= -\frac{1}{12}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda} + \bar{\psi} (i\partial - ieB^{\mu\nu}\gamma_{[\mu}\partial_{\nu]} - m) \psi \\ &\quad - \frac{\lambda}{4} (B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \beta^2)^2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

em que $H_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu B_{\nu\lambda} + \partial_{\nu\mu} B_{\lambda\mu} + \partial_\lambda B_{\mu\nu}$ é o tensor de intensidade, que faz o papel do termo cinético na equação (3.2). O termo de acoplamento com o setor fermiônico é dado por $\gamma_{[\mu}\partial_{\nu]} = \frac{1}{2}(\gamma_\mu\partial_\nu - \gamma_\nu\partial_\mu)$ que aparece no segundo termo. O terceiro termo é o termo de potencial quadrático, responsável pela quebra espontânea de simetria.

Vale ressaltar ainda que apenas o acoplamento $i\bar{\psi}B^{\mu\nu}\gamma_{[\mu}\partial_{\nu]}\psi$ permite obter o potencial para o campo $B_{\mu\nu}$. Vamos introduzir a quebra espontânea de simetria de Lorentz pela forma mais usual, ao efetuarmos o deslocamento

$$B_{\mu\nu} \rightarrow \beta_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

onde $\beta_{\mu\nu}$ é o valor esperado do vácuo (VEV) do campo. A nossa lagrangiana terá então a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B &= -\frac{1}{12}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda} + \bar{\psi} (i\partial - ib^{\mu\nu}\gamma_{[\mu}\partial_{\nu]} - ieB^{\mu\nu}\gamma_{[\mu}\partial_{\nu]} - m) \psi \\ &\quad - \frac{\lambda}{4} \left(B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + \frac{2}{e}B_{\mu\nu}b^{\mu\nu} \right)^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

em que $b^{\mu\nu} = e\beta_{\mu\nu}$, teremos também o surgimento do termo $-ib^{\mu\nu}\gamma_{[\mu}\partial_{\nu]}$ devido a violação explícita da simetria de Lorentz.

Na próxima seção vamos estudar uma teoria de quatro férmions e constata-

remos que ao introduzirmos um campo auxiliar, vamos obter exatamente a teoria de bumblebee antissimétrico escrita na equação (3.2).

3.3 Potencial Efetivo

Queremos investigar se correções radiativas podem causar uma violação de simetria de Lorentz em uma dada teoria fermiônica autointeragente. Nesse sentido, vamos explorar como a quebra espontânea de simetria de Lorentz e como o potencial bumblebee pode ser induzido dinamicamente [61]. Nesta parte, realizaremos uma revisão da solução equação de gap em $T = 0$, conforme foi realizada em [74].

Para isso, consideremos a seguinte lagrangiana,

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi - \frac{G}{2} J_{\mu\nu} J^{\mu\nu}, \quad (3.5)$$

em que usaremos um termo de corrente dado por $J_{\mu\nu} = i(\bar{\psi}\gamma_{[\mu}\partial_{\nu]}\psi)$.

Vamos inserir em (3.5) um campo auxiliar $B_{\mu\nu}$ de caráter antissimétrico, de modo que o termo $J_{\mu\nu}J^{\mu\nu}$ seja eliminado, i.e., vamos eliminar as autointerações desse modelo, onde $G = \frac{e^2}{g^2}$. Desta maneira vamos obter a seguinte equação:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \frac{g^2}{2} \left(B_{\mu\nu} - \frac{e}{g^2} J_{\mu\nu} \right)^2, \quad (3.6)$$

tal que podemos escrever a lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{g^2}{2} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{\partial} - ieB^{\mu\nu}\gamma_{[\mu}\partial_{\nu]} - m)\psi, \quad (3.7)$$

em que: $\gamma_{[\mu}\partial_{\nu]} = \frac{1}{2}(\gamma_{\mu}\partial_{\nu} - \gamma_{\nu}\partial_{\mu})$. Essa equação é a mesma que foi obtida em [74], porém estamos desconsiderando a matriz γ_5 em nossos cálculos, pois dessa forma poderemos obter um potencial sem termos de fixação de calibre ao efetuar o cálculo exato do potencial e de seus mínimos, o que é uma vantagem para o nosso estudo. Iremos investigar se a lagrangiana escrita em (3.7) também induz dinamicamente um potencial do tipo bumblebee.

Nosso ponto de partida aqui é considerar de maneira adequada o funcional gerador Z . Escreveremos o funcional gerador⁴ com o auxílio dos termos de fonte, devemos fazer que,

$$Z(\bar{\eta}, \eta) = \int DB_{\mu\nu} D\psi D\bar{\psi} e^{i \int d^4x (\mathcal{L} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)}, \quad (3.8)$$

em que já incluímos a integração sobre o campo auxiliar $B_{\mu\nu}$.

Neste ponto vamos realizar um deslocamento nos campos fermiônicos de tal modo que:

$$\psi \rightarrow \psi - S\eta; \quad (3.9)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} - \bar{\eta}S, \quad (3.10)$$

⁴O funcional gerador representa a amplitude vácuo - vácuo, i.e., na presença de fontes $\langle 0|0\rangle_J$.

de maneira que temos

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}S^{-1}\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta &= \bar{\psi}S^{-1}\bar{\psi}S^{-1}S\eta - \bar{\eta}SS^{-1}\psi + \bar{\eta}SS^{-1}S\eta \\
&+ \bar{\eta}\psi - \bar{\eta}S\eta + \bar{\psi}\eta - \bar{\eta}S\eta, \\
&= \bar{\psi}S^{-1}\psi - \bar{\eta}S\eta.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Separando agora as integrais nos campos fermiônicos, visto que $B_{\mu\nu}$ não possui dependência dos espinores ψ e $\bar{\psi}$, e efetuando a integração, obtemos

$$Z(\bar{\eta}, \eta) = \int DB_{\mu\nu} e^{i \int d^4x \frac{g^2}{2} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}} \int D\psi D\bar{\psi} e^{i \int d^4x (\bar{\psi}S^{-1}\psi - \bar{\eta}S\eta)}, \tag{3.12}$$

onde temos que $S^{-1} = (i\rlap{/}\partial - ieB^{\mu\nu}\gamma_{[\mu}\partial_{\nu]} - m)$.

Para escrevermos o determinante fermiônico usaremos a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
&\int D\psi D\bar{\psi} \exp\left(i \int d^4x [\bar{\psi}(i\rlap{/}\partial - m - ieB^{\mu\nu}\gamma_{[\mu}\partial_{\nu]})\psi]\right) \\
&= \det(\rlap{/}\partial - m - eB^{\mu\nu}\gamma_{[\mu}\partial_{\nu]}).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Vamos manipular a equação acima utilizando a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
\det\Theta &= \prod_i \theta_i = \prod_i e^{\ln\theta_i} \\
&= e^{\sum_i \ln\theta_i} = e^{\text{Tr}\ln\Theta} \\
&= e^{i(-i\text{Tr}\ln\Theta)} = e^{iS_{ef}}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Com isso, podemos organizar a equação (3.12) como

$$\begin{aligned} Z(\bar{\eta}, \eta) &= \int DB_{\mu\nu} \exp\left(iS_{ef}[B] - i \int d^4x \bar{\eta} S \eta\right) \\ &= \int DB_{\mu\nu} \exp\left(i \int d^4x \frac{g^2}{2} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}\right) \det(\not{p} - m - eB^{\mu\nu} \gamma_{[\mu} p_{\nu]}). \end{aligned} \quad (3.15)$$

A ação efetiva em um laço é então dada por

$$S_{ef}[B] = \frac{g^2}{2} \int d^4x B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - i \text{Tr} \ln(\not{p} - m - eB^{\mu\nu} \gamma_{[\mu} p_{\nu]}), \quad (3.16)$$

em que o símbolo “Tr” representa o traço sobre as matrizes de Dirac e também o traço sobre a integração no espaço dos momentos ou coordenadas espaciais.

Partiremos da equação (3.16) e recordando que da mecânica clássica $S = \int d^4x \mathcal{L} = \int dt (T - V)$, podemos escrever o potencial efetivo da nossa teoria como

$$V_{ef} = -\frac{g^2}{2} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + i \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln(\not{p} - eB_{\mu\nu} \gamma^{[\mu} p^{\nu]} - m). \quad (3.17)$$

Na próxima parte, faremos uma análise da equação de gap e veremos que um potencial do tipo Higgs pode ser induzido dinamicamente, tal que constataremos a presença de mínimos não triviais no potencial efetivo.

3.3.1 Equação de gap

Nesta parte estamos interessados em verificar a possibilidade que um potencial do tipo bumblebee possa ser dinamicamente induzido, usando correções radia-

tivas vamos investigar a existência de mínimos não triviais.

Para verificar a presença de mínimos não triviais na teoria, iremos agora buscar os mínimos do potencial efetivo, através de soluções para a equação

$$\left. \frac{dV_{ef}}{dB_{\mu\nu}} \right|_{B_{\mu\nu}=\beta_{\mu\nu}} = -\frac{g^2}{e}b^{\mu\nu} - ie\Pi^{\mu\nu} = 0, \quad (3.18)$$

onde

$$\Pi^{\mu\nu} = tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\not{\psi} - b_{\alpha\beta}\gamma^{[\alpha}p^{\beta]} - m)} \gamma^{[\mu}p^{\nu]}. \quad (3.19)$$

A equação (3.18) é a nossa equação de gap, onde temos que a derivada do V_{ef} é igualada a zero. O tensor $\Pi^{\mu\nu}$ é responsável pela correção quântica de primeira ordem do VEV do campo. Notemos ainda que a equação (3.19), por contagem de potências no momentos, apresenta uma divergência cúbica ultravioleta, que deve ser tratada por algum mecanismo de regularização dimensional para podermos efetuar a nossa integração.

Para resolver a equação de gap de forma exata vamos iniciar realizando algumas manipulações dos termos do denominador da equação (3.19), de modo que

$$\begin{aligned} \not{\psi} - \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\gamma^\alpha p^\beta + \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\gamma^\beta p^\alpha &= \not{\psi} + b_{\alpha\beta}p^\alpha\gamma^\beta \\ &= p_\beta\gamma^\beta + b_{\alpha\beta}p^\alpha\gamma^\beta = g_{\beta\alpha}p^\alpha\gamma^\beta + b_{\alpha\beta}p^\alpha\gamma^\beta \\ &= (g_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta})p^\alpha\gamma^\beta = p'_\beta\gamma^\beta, \end{aligned} \quad (3.20)$$

tal que podemos escrever

$$p'_\alpha = (g_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta})p^\beta = (g_{\beta\alpha} - b_{\beta\alpha})p^\beta = M_{\alpha\beta}p^\beta. \quad (3.21)$$

Para escrevermos p em termos de p' devemos fazer que

$$(M^{-1})^{\mu\beta} p'_\beta = (M^{-1})^{\mu\beta} M_{\beta\alpha} p^\alpha = g^\mu{}_\alpha p^\alpha = p^\mu, \quad (3.22)$$

que nos leva à seguinte relação

$$p_\mu = (M^{-1})_{\mu\beta} p'^\beta. \quad (3.23)$$

Com essas manipulações, vamos obter a seguinte equação:

$$\Pi^{\mu\nu} = \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p}' - m} \gamma^{[\mu} p'^{\nu]}. \quad (3.24)$$

De início vamos efetuar o cálculo do traço, tal que obtemos

$$\Pi^{\mu\nu} = 2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p'^\mu p'^\nu - p'^\mu p'^\nu}{p'^2 - m^2}. \quad (3.25)$$

Para efetuarmos o cálculo da integral acima, precisamos deixá-la em termos de uma única variável. Para isso vamos procurar reescrever a medida $d^4 p$ como

$$\begin{aligned} d^4 p' &= \det \left(\frac{\partial p'^\mu}{\partial p^\nu} \right) d^4 p = \det \left(M^{\mu\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial p^\nu} \right) d^4 p \\ &= \det (M^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu}) d^4 p \\ &= -\det (M^{\mu\alpha}) d^4 p, \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde temos que $\det(g_{\alpha\nu}) = -1$ para a métrica de Minkowski. Então, de (3.26) teremos a seguinte relação:

$$d^4p = -\det^{-1}(M^{\mu\alpha}) d^4p'. \quad (3.27)$$

Neste ponto, basta montarmos a matriz de $M^{\mu\alpha}$ e calcularmos o seu determinante. Feito isto, vamos obter que

$$\det(M^{\mu\alpha}) = \left(1 + \frac{b_{\kappa\lambda}b^{\kappa\lambda}}{2} - \frac{1}{16} (b_{\kappa\lambda}\tilde{b}^{\kappa\lambda})^2\right). \quad (3.28)$$

Com isso chegaremos a seguinte expressão para o tensor $\Pi^{\mu\nu}$ na qual usamos a equação (3.23):

$$\Pi^{\mu\nu} = -2 \left(1 + \frac{b_{\kappa\lambda}b^{\kappa\lambda}}{2} - \frac{1}{16} (b_{\kappa\lambda}\tilde{b}^{\kappa\lambda})^2\right)^{-1} \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \frac{p'^{\mu}(M^{-1})^{\nu\alpha}p'_{\alpha} - (M^{-1})^{\mu\alpha}p'_{\alpha}p'^{\nu}}{p'^2 - m^2}. \quad (3.29)$$

Então vamos reescrever a equação acima como

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} &= -2 \left(1 + \frac{b_{\kappa\lambda}b^{\kappa\lambda}}{2} - \frac{1}{16} (b_{\kappa\lambda}\tilde{b}^{\kappa\lambda})^2\right)^{-1} (g^{\mu\beta}(M^{-1})^{\nu\alpha} - (M^{-1})^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}) \\ &\times \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \frac{p'_{\alpha}p'_{\beta}}{p'^2 - m^2}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Antes de resolvermos a integral, vamos determinar as quantidades $(M^{-1})^{\mu\alpha}$ da seguinte maneira:

$$(M^{-1})^{\alpha\mu} M_{\mu}^{\beta} = g^{\alpha\beta} \quad (3.31)$$

$$\left(Ag^{\alpha\mu} + Bb^{\alpha\mu} + Cb^{\alpha\mu}b_{\alpha\mu} + D\tilde{b}^{\alpha\mu}\right) (g_{\mu}^{\beta} - b_{\mu}^{\beta}) = g^{\alpha\beta}, \quad (3.32)$$

tal que

$$A = \left(1 + \frac{1}{2}b_{\kappa\lambda}b^{\kappa\lambda}\right) C, \quad (3.33)$$

$$C = B = \left(1 + \frac{1}{2}b_{\kappa\lambda}b^{\kappa\lambda} - \frac{1}{16} \left(b_{\kappa\lambda}\tilde{b}^{\kappa\lambda}\right)^2\right)^{-1}, \quad (3.34)$$

$$D = \frac{1}{4}b_{\kappa\lambda}\tilde{b}^{\kappa\lambda}C. \quad (3.35)$$

Utilizando estes resultados, podemos escrever a matriz $(M^{-1})_{\alpha\beta}$ como sendo,

$$\begin{aligned} (M^{-1})_{\alpha\beta} &= \left[\left(1 + \frac{b_{\kappa\lambda}b^{\kappa\lambda}}{2}\right) g_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta} + b_{\alpha\gamma}b^\gamma{}_\beta - \frac{1}{4}b_{\kappa\lambda}\tilde{b}^{\kappa\lambda}\tilde{b}_{\alpha\beta} \right] \\ &\times \left(1 + \frac{b_{\kappa\lambda}b^{\kappa\lambda}}{2} - \frac{1}{16} \left(b_{\kappa\lambda}\tilde{b}^{\kappa\lambda}\right)^2\right)^{-1}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

notemos que a equação acima possui um termo em comum com o resultado do determinante escrito em (3.27), de modo ele poderá ser fatorado.

Nosso próximo passo é efetuar as integrais de laço, para isso iremos fazer agora o uso do processo de regularização dimensional para identificar as divergências na integral da equação (3.30). Para isso, vamos considerar

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \rightarrow \mu^{4-D} \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D}, \quad (3.37)$$

em que μ é um parâmetro de escala arbitrária, com dimensão de massa 1. Desse modo, vamos usar a fórmula de Feynman

$$\begin{aligned} \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} \frac{p_{\mu_1}\dots p_{\mu_P}}{(p^2 - m^2)^\alpha} &= \frac{1}{(2\pi)^D} \frac{i\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\alpha)(-m)^{\alpha-\frac{D}{2}}} [(g_{\mu_1\mu_2}\dots g_{\mu_{p-1}\mu_p} + \text{permutações}) \\ &\times \left(-\frac{m}{2}\right)^{\frac{P}{2}} \Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2} - \frac{P}{2}\right)]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Com isso, vamos obter o seguinte resultado para a integral considerada,

$$\mu^{4-D} \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{p'_\alpha p'_\beta}{p'^2 - m^2} = \frac{i^{1-D} 2^{-D} \pi^{-\frac{D}{2}} m^2 \mu^{4-D} (-m^2)^{\frac{D}{2}-1} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) g^{\alpha\beta}}{D}. \quad (3.39)$$

Vamos expandir em séries⁵ o resultado da equação acima em torno do ponto $D \rightarrow 4$, de modo que obtemos

$$\begin{aligned} \mu^{4-D} \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{p'_\alpha p'_\beta}{p'^2 - m^2} &= \frac{im^4 g_{\alpha\beta}}{32\pi^2} \left[\frac{1}{4-D} - \frac{1}{2} \left(\log \left(\frac{m^2 e^\gamma}{4\pi \mu^2} \right) - \frac{3}{2} \right) \right] \\ &= \frac{im^4}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right) g_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde usamos as definições $\frac{1}{\epsilon'} = \frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m}{\mu}$, $\epsilon = 4 - D$ e $\mu'^2 = 4\pi \mu^2 e^{-\gamma}$.

Dessa maneira o tensor tadpole $\Pi^{\mu\nu}$ escrito na equação (3.30) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} &= -2 \left(1 + \frac{b_{\kappa\lambda} b^{\kappa\lambda}}{2} - \frac{1}{16} \left(b_{\kappa\lambda} \tilde{b}^{\kappa\lambda} \right)^2 \right)^{-1} \left(g^{\mu\beta} (M^{-1})^{\nu\alpha} - (M^{-1})^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \right) \\ &\times \frac{im^4}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right) g_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

Iremos agora trabalhar na simplificação dos produtos envolvidos na equação acima:

$$\begin{aligned} g^\mu{}_\alpha (M^{-1})^{\nu\alpha} - (M^{-1})^{\mu\alpha} g^\nu{}_\alpha &= -2 \left(1 + \frac{1}{2} b_{\kappa\lambda} b^{\kappa\lambda} - \frac{1}{16} \left(b_{\kappa\lambda} \tilde{b}^{\kappa\lambda} \right)^2 \right)^{-1} \\ &\times \left(b^{\mu\nu} - \frac{1}{4} b_{\kappa\lambda} \tilde{b}^{\kappa\lambda} \tilde{b}^{\mu\nu} \right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

⁵Estamos desconsiderando na expansão em séries contribuições da ordem de $O((D-4)^1)$

Dessa maneira, o tensor tadpole é dado como:

$$\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu} &= -\frac{4im^4}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right) \left(1 + \frac{1}{2}b_{\kappa\lambda}b^{\kappa\lambda} - \frac{1}{16} \left(b_{\kappa\lambda}\tilde{b}^{\kappa\lambda} \right)^2 \right)^{-2} \\
&\quad \times \left(b^{\mu\nu} - \frac{1}{4}b_{\kappa\lambda}\tilde{b}^{\kappa\lambda}\tilde{b}^{\mu\nu} \right), \\
(-i)\Pi^{\mu\nu} &= -\frac{m^4}{8\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right) \left(1 + \frac{1}{2}b_{\kappa\lambda}b^{\kappa\lambda} - \frac{1}{16} \left(b_{\kappa\lambda}\tilde{b}^{\kappa\lambda} \right)^2 \right)^{-2} \\
&\quad \times \left(b^{\mu\nu} - \frac{1}{4}b_{\kappa\lambda}\tilde{b}^{\kappa\lambda}\tilde{b}^{\mu\nu} \right). \tag{3.43}
\end{aligned}$$

Vamos agora substituir esse resultado na equação de gap conforme escrita na equação (3.18),

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dV_{ef}}{dB_{\mu\nu}} \right|_{B_{\mu\nu}=\beta_{\mu\nu}} &= -\frac{e}{G}b^{\mu\nu} - \left[\frac{em^4}{8\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right) \left(1 + \frac{1}{2}b_{\kappa\lambda}b^{\kappa\lambda} - \frac{1}{16} \left(b_{\kappa\lambda}\tilde{b}^{\kappa\lambda} \right)^2 \right)^{-2} \right] \\
&\quad \times \left(b^{\mu\nu} - \frac{1}{4}b_{\kappa\lambda}\tilde{b}^{\kappa\lambda}\tilde{b}^{\mu\nu} \right) = 0, \tag{3.44}
\end{aligned}$$

onde $\beta_{\mu\nu} = \frac{b}{e}$.

A próxima etapa é integrar a equação (3.44) para verificar a existência de mínimos não triviais ($b^{\mu\nu} \neq 0$). Para isso vamos desprezar todos os termos do tipo $b_{\kappa\lambda}\tilde{b}^{\kappa\lambda}$, pois essas contribuições não vão gerar um potencial com quebra espontânea de simetria, visto que após a integração não teremos contribuições $b_{\kappa\lambda}\tilde{b}^{\kappa\lambda}$ no potencial, apenas $(b_{\kappa\lambda}\tilde{b}^{\kappa\lambda})^2$. Para efetuar o cálculo da equação de gap exatamente, vamos ter que resolver a equação

$$\left. \frac{dV_{ef}}{dB_{\mu\nu}} \right|_{B_{\mu\nu}=\beta_{\mu\nu}} = \left[-\frac{e}{G} - \frac{em^4}{8\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right) \left(1 + \frac{1}{2}b_{\kappa\lambda}b^{\kappa\lambda} \right)^{-2} \right] b^{\mu\nu} = 0, \tag{3.45}$$

com isso obtemos

$$\frac{1}{G} = -\frac{em^4}{8\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right) \left(1 + \frac{1}{2} b_{\mu\nu} b^{\mu\nu} \right)^{-2}. \quad (3.46)$$

Neste ponto, vamos utilizar o fator de massa renormalizada, dada por $m_R^4 = m^4/Z_m$, tal que

$$\frac{1}{Z_m} = \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right). \quad (3.47)$$

Ao substituir este fator em (3.46), temos

$$\frac{1}{G} = -m_R^4 \left(1 + \frac{1}{2} b_{\kappa\lambda} b^{\kappa\lambda} \right)^{-2}, \quad (3.48)$$

em que $G < 0$, e desta forma $G = -|G|$.

Podemos então escrever que

$$\left. \frac{dV_{ef}}{dB_{\mu\nu}} \right|_{B_{\mu\nu}=\beta_{\mu\nu}} = \left[-\frac{b^{\mu\nu}}{G} - m_R^4 \left(1 + \frac{1}{2} b_{\kappa\lambda} b^{\kappa\lambda} \right)^{-2} b^{\mu\nu} \right]. \quad (3.49)$$

Agora vamos integrar a equação de gap, tal que obtemos

$$V_{ef} = -\frac{B^2 e^2}{2G} - \frac{B^2 e^2 m_R^4}{2 + B^2 e^2} + c, \quad (3.50)$$

onde c é uma constante de integração e representamos o produto dos campos antisimétricos como $B^2 = B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$.

Neste momento, vamos realizar a substituição da equação (3.48) na equação

(3.50) de forma que com isso nosso potencial efetivo fica

$$V_{ef} = \frac{B^2 e^2 m_R^4}{2 \left(\frac{b^2}{2} + 1\right)^2} - \frac{B^2 e^2 m_R^4}{B^2 e^2 + 2} + c, \quad (3.51)$$

onde aqui representamos o produto dos valores esperados como $b^2 = b_{\mu\nu} b^{\mu\nu}$. Ainda mais, se usarmos $X_1 = B^2 e^2$ na equação acima encontramos que

$$\begin{aligned} V_{ef} &= \frac{X_1 m_R^4}{2 \left(1 + \frac{b^2}{2}\right)^2} - \frac{X_1 m_R^4}{2 \left(1 + \frac{X_1}{2}\right)} + c \\ &= \frac{X_1 m_R^4}{2} \left[\left(1 + \frac{b^2}{2}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{X_1}{2}\right)^{-1} \right] + c. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Podemos ilustrar comportamento de (3.51) na Fig. (3.1).

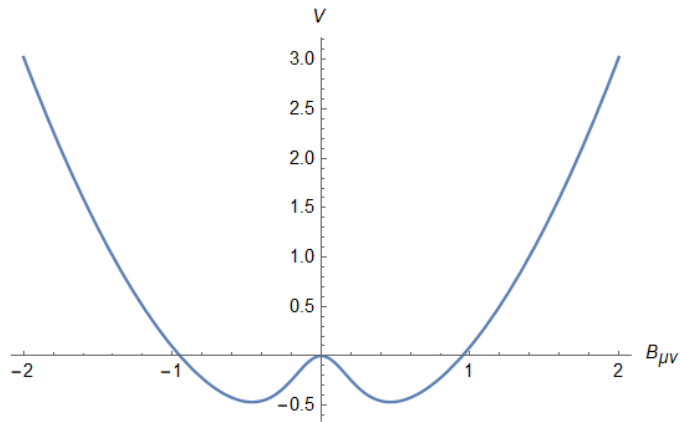


Figura 3.1: Mínimos não triviais.

Fonte: Autor, 2023.

Para obter um resultado expandido do potencial, usamos que $(1+x)^a = 1+ax$ na equação (3.52) e escolhemos apropriadamente que a constante de integração

seja fixada como $c = m_R^4 \frac{b^4}{4}$, tal que obtemos o seguinte resultado:

$$V_{ef} = \frac{m_R^4}{4} (e^2 B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - b_{\mu\nu} b^{\mu\nu})^2 + \dots, \quad (3.53)$$

que é o potencial bumblebee com quebra espontânea de simetria.

Notemos que para este potencial observamos a existência de um conjunto de mínimos onde $e^2 B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} = b_{\mu\nu} b^{\mu\nu}$. A escolha de um desses mínimos gera uma direção privilegiada, quebrando dessa maneira a invariância de Lorentz de forma espontânea. Posto isto, mostramos que através de correções quânticas obtemos o termo de potencial com quebra de simetria conforme escrito na equação (3.2), tal que

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{12} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} - \frac{m_R^4}{4} (e^2 B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - b_{\mu\nu} b^{\mu\nu})^2. \quad (3.54)$$

Esta situação é análoga ao que ocorre com o campo escalar de Higgs, porém em nosso caso estamos abordando um campo tensorial antissimétrico. Assim, vemos que é possível quebrar dinamicamente a simetria de Lorentz em $T = 0$.

A seguir, vamos analisar a inclusão da equação de gap no regime de temperatura finita e verificar se uma restauração da simetria de Lorentz é despertada, como também determinar em quais temperaturas críticas deve ocorrer tal restauração.

3.3.2 Equação de gap à temperatura finita

Nesta parte estamos interessados em analisar a equação de gap no regime termal, para verificarmos se com a inclusão da temperatura finita ocorre uma restauração da simetria considerada. Este estudo, até o momento, não havia sido abordado na literatura, de modo que esta seção possui cálculos originais.

Para realizarmos a implementação da temperatura, vamos considerar novamente a equação (3.30), dada por

$$\Pi^{\mu\nu} = -2 \det^{-1}(M^{\kappa\lambda}) [g^{\mu\beta}(M^{-1})^{\nu\alpha} - (M^{-1})^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}] \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{p'_\alpha p'_\beta}{p'^2 - m^2}. \quad (3.55)$$

De início vamos nos deter apenas na solução da integral acima. Em seguida, este resultado obtido será multiplicado pela estrutura tensorial restante. Para considerarmos os efeitos da temperatura finita faremos uso do formalismo de Matsubara [77], onde realizamos a separação das componentes espacial e temporal dos momentos e passamos as quantidades de nosso interesse para o espaço euclidiano da seguinte maneira:

$$\mu^{4-D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \rightarrow \mu^{3-d} \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} i \int \frac{dp_0}{(2\pi)}. \quad (3.56)$$

As quantidades presentes neste cálculo devem ser transformadas de acordo com o

mapeamento

$$p_0 \rightarrow ip_0 \quad (3.57)$$

$$p_E^\mu = \vec{p}^\mu + p_0 u^\mu \quad (3.58)$$

$$p^2 \rightarrow -p_E^2 \quad (3.59)$$

$$g^{\mu\nu} \rightarrow -\delta^{\mu\nu} \quad (3.60)$$

$$d^4 p \rightarrow id^4 p_E = idp_0 dp_1 dp_2 dp_3 \quad (3.61)$$

$$p_E^2 = p_0^2 + \vec{p}^2 \quad (3.62)$$

$$p^\alpha = \vec{p}^\alpha + p_0 u^\alpha \quad (3.63)$$

$$\vec{p}^\alpha \vec{p}^\beta = \frac{\vec{p}^2}{d} (u^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta), \quad (3.64)$$

onde o quadrivetor $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ possui apenas componente temporal e $\vec{p}^\mu = (0, p^i)$ é puramente espacial.

Dessa maneira temos que resolver a expressão

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} &= iN^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \int \frac{dp_0}{2\pi} \mu^{3-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p_E^\alpha p_E^\beta}{(-p_E^2 - m^2)} \\ &= -iN^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \int \frac{dp_0}{(2\pi)} \mu^{3-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{(\vec{p}^\alpha \vec{p}^\beta + \vec{p}^\alpha p_0 u^\beta + \vec{p}^\beta p_0 u^\alpha + p_0^2 u^\alpha u^\beta)}{\vec{p}^2 + p_0^2 + m^2} \\ &= -iN^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \int \frac{dp_0}{(2\pi)} \mu^{3-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{(\vec{p}^\alpha \vec{p}^\beta + p_0^2 u^\alpha u^\beta)}{\vec{p}^2 + p_0^2 + m^2}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

ou melhor,

$$\Pi^{\mu\nu} = -iN^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \int \frac{dp_0}{(2\pi)} \mu^{3-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{\vec{p}^2 + p_0^2 + m^2} \left[\frac{\vec{p}^2}{d} \delta^{\alpha\beta} - \left(\frac{\vec{p}^2}{d} - p_0^2 \right) u^\alpha u^\beta \right], \quad (3.66)$$

onde definimos $N^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}$ tal que

$$N^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = -2 \det^{-1} (M^{\kappa\lambda}) [g^{\mu}{}_{\beta} (M^{-1})^{\nu}{}_{\alpha} - (M^{-1})^{\mu}{}_{\alpha} g^{\nu}{}_{\beta}]. \quad (3.67)$$

Precisamos agora efetuar a integração da equação (3.65) em sua componente espacial \vec{p} . Desta maneira, usamos os resultados para as integrais de laço de Feynman no espaço euclidiano, dadas por

$$\int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{1}{(\vec{p}^2 + \Delta^2)^\alpha} = \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\alpha - \frac{n}{2})}{\Gamma(\alpha) (\Delta^2)^{\alpha - \frac{n}{2}}}, \quad (3.68)$$

$$\int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{\vec{p}^2}{(\vec{p}^2 + \Delta^2)^\alpha} = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{n\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\alpha - 1 - \frac{n}{2})}{\Gamma(\alpha) (\Delta^2)^{\alpha - 1 - \frac{n}{2}}}. \quad (3.69)$$

Assim, ao realizarmos adequadamente a integração, chegamos no resultado

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} &= -i N^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \int \frac{dp_0}{(2\pi)} \mu^{3-d} \frac{\pi^{d/2}}{(2\pi)^d} \left[\frac{1}{2} \frac{\Gamma(-\frac{d}{2}) \delta^{\alpha\beta}}{(p_0^2 + m^2)^{-\frac{d}{2}}} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma(-\frac{d}{2}) u^\alpha u^\beta}{(p_0^2 + m^2)^{-\frac{d}{2}}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{[(p_0^2 + m^2) - m^2] \Gamma(1 - \frac{d}{2}) u^\alpha u^\beta}{(p_0^2 + m^2)^{1 - \frac{d}{2}}} \right]. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Para reescrevermos a equação acima, é conveniente usarmos a propriedade $\Gamma(1+a) = a\Gamma(a)$, de maneira que obtemos

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} &= -i N^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \int \frac{dp_0}{2\pi} \mu^{3-d} \frac{\pi^{d/2}}{(2\pi)^d} \left[\frac{1}{2} \frac{\Gamma(-\frac{d}{2}) \delta^{\alpha\beta}}{(p_0^2 + m^2)^{-\frac{d}{2}}} - \left(\frac{1}{2} + \frac{d}{2} \right) \frac{\Gamma(-\frac{d}{2}) u^\alpha u^\beta}{(p_0^2 + m^2)^{-\frac{d}{2}}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{d m^2 \Gamma(-\frac{d}{2}) u^\alpha u^\beta}{2 (p_0^2 + m^2)^{1 - \frac{d}{2}}} \right], \end{aligned} \quad (3.71)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} = & -iN^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \int \frac{dp_0}{2\pi} \mu^{3-d} \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{(2\pi)^d} \Gamma\left(-\frac{d}{2}\right) \left[\frac{1}{2} \frac{\delta^{\alpha\beta}}{(p_0^2 + m^2)^{-\frac{d}{2}}} - \frac{(1+d)}{2} \frac{u^\alpha u^\beta}{(p_0^2 + m^2)^{-\frac{d}{2}}} \right. \\ & \left. + \frac{d}{2} \frac{m^2 u^\alpha u^\beta}{(p_0^2 + m^2)^{1-\frac{d}{2}}} \right]. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Neste ponto iremos considerar que o nosso sistema esteja em equilíbrio térmico, numa temperatura $T = \beta^{-1}$. Desse modo, para realizarmos a discretização da componente temporal p_0 , usamos as condições antiperiódicas (periódicas) para férmions (bósons) que nos levam aos valores discretos

$$p_0 \rightarrow \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{\beta} = \left(n + \frac{1}{2}\right) 2\pi T. \quad (3.73)$$

Ao passo que vamos relacionar a integral nos momentos com um somatório,

$$\int \frac{dp_0}{(2\pi)} \rightarrow T \sum_n, \quad (3.74)$$

e vamos inserir um parâmetro adimensional, dado por

$$\xi = \frac{m}{2\pi T}. \quad (3.75)$$

Dessa maneira, devemos realizar as seguintes mudanças nas quantidades que estão presentes na equação (3.72):

$$\frac{1}{(p_0^2 + m^2)^{-\frac{d}{2}}} = \frac{1}{\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \xi^2\right]^{-\frac{d}{2}}} \times \left(\frac{\xi^2}{m^2}\right)^{-\frac{d}{2}}, \quad (3.76)$$

e de maneira similar,

$$\frac{1}{(p_0^2 + m^2)^{1-\frac{d}{2}}} = \frac{1}{[(n + \frac{1}{2})^2 + \xi^2]^{1-\frac{d}{2}}} \times \left(\frac{\xi^2}{m^2}\right)^{1-\frac{d}{2}}. \quad (3.77)$$

Desse modo, podemos escrever o tensor tadpole $\Pi^{\mu\nu}$ como

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} = & -iN^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} T \sum_n \mu^{3-d} \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} \Gamma\left(-\frac{d}{2}\right) \left[\frac{\delta^{\alpha\beta}}{[(n + \frac{1}{2})^2 + \xi^2]^{-\frac{d}{2}}} \left(\frac{\xi^2}{m^2}\right)^{-\frac{d}{2}} \right. \\ & \left. - \frac{(1+d)u^\alpha u^\beta}{[(n + \frac{1}{2})^2 + \xi^2]^{-\frac{d}{2}}} \left(\frac{\xi^2}{m^2}\right)^{-\frac{d}{2}} + \frac{m^2 du^\alpha u^\beta}{[(n + \frac{1}{2})^2 + \xi^2]^{1-\frac{d}{2}}} \left(\frac{\xi^2}{m^2}\right)^{1-\frac{d}{2}} \right], \quad (3.78) \end{aligned}$$

devemos agora calcular os somatórios acima.

Para isso, vamos usar o formalismo explícito das relações de frequência de Matsubara [78], dado por

$$\begin{aligned} F(\lambda; a, b) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(n+b)^2 + a^2]^{-\lambda} \\ &= \pi^{1/2} a^{1-2\lambda} \frac{\Gamma(\lambda - \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda)} + 4 \sin(\pi\lambda) f_\lambda(a, b), \quad (3.79) \end{aligned}$$

em que a e b assumem valores reais, tais que

$$f_\lambda(a, b) = \int_{|a|}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 - a^2)^\lambda} \text{Re} \left(\frac{1}{\epsilon^{2\pi(z+ib)} - 1} \right). \quad (3.80)$$

A função $f_\lambda(a, b)$ é válida para $\lambda < 1$, com seus polos nos valores $1/2, -1/2, -3/2, \dots$. No limite $d \rightarrow 3$, temos os valores $\lambda = -3/2$ e $\lambda = -1/2$, que são valores dentro do limite de validade de λ na equação (3.79), e por consequência

não necessitaremos do uso de relações de recorrência para podermos calcular os devidos somatórios. Vale ressaltar ainda que o primeiro termo da expressão escrita em (3.79) deve retomar a contribuição para temperatura zero e o segundo termo é a contribuição de temperatura finita.

Desta maneira, após calcularmos os somatórios e realizadas as devidas expansões em séries, obtemos

$$\Pi^{\mu\nu} = -N^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \left(\Pi_{(1)}^{\alpha\beta} + \Pi_{(2)}^{\alpha\beta} \right), \quad (3.81)$$

em que escrevemos

$$\begin{aligned} \Pi_{(1)}^{\alpha\beta} &= \frac{im^4 \delta_{\alpha\beta}}{32\pi^2} \left[\frac{1}{3-d} - \frac{1}{2} \left(\log \left(\frac{m^2 e^\gamma}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{3}{2} \right) \right] - \frac{im^4}{12\pi^2 \xi^4} \delta_{\alpha\beta} G(\xi) \\ &= -\frac{im^4}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right) \delta_{\alpha\beta} - \frac{im^4}{12\pi^2 \xi^4} \delta_{\alpha\beta} G(\xi), \end{aligned} \quad (3.82)$$

na qual definimos $\frac{1}{\epsilon'} = \frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m}{\mu'}$, $\epsilon = 3 - d$ e $\mu'^2 = 4\pi\mu^2 e^{-\gamma}$. A função $G(\xi)$ é dada por

$$G(\xi) = \int_{|\xi|}^{\infty} dz ((z - \xi)(\xi + z))^{3/2} (\tanh(\pi z) - 1). \quad (3.83)$$

Agora, para o termo $\Pi_{(2)}^{\alpha\beta}$, temos

$$\Pi_{(2)}^{\alpha\beta} = -\frac{im^4 u^\alpha u^\beta}{12\pi^2 \xi^4} F(\xi), \quad (3.84)$$

em que

$$F(\xi) = \int_{|\xi|}^{\infty} dz \sqrt{(z - \xi)(\xi + z)} (\xi^2 - 4z^2) (\tanh(\pi z) - 1). \quad (3.85)$$

No regime de altas temperatura ($\xi \rightarrow 0$), as funções $G(\xi)$ e $F(\xi)$ nos rendem

$$\begin{aligned} G(\xi \rightarrow 0) &= -\frac{7}{960}, \\ F(\xi \rightarrow 0) &= \frac{7}{240}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Com isso, podemos reescrever a equação do tensor $\Pi^{\mu\nu}$ no espaço euclidiano como sendo

$$\Pi_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = N^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \left[-\frac{im^4}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right) \delta_{\alpha\beta} - \frac{7i\pi^2 T^4}{720} (\delta_{\alpha\beta} - 4u_\alpha u_\beta) \right], \quad (3.87)$$

em que usamos $\frac{m^4}{\xi^4} = (2\pi T)^4$.

Neste ponto, vamos reescrever as quantidades no espaço de Minkowski, para então multiplicarmos pelo termo constante $N^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}$. Com esse intuito, devemos realizar as mudanças

$$\delta_{\alpha\beta} \rightarrow -g_{\alpha\beta}, \quad (3.88)$$

$$u_\alpha \rightarrow -u_\alpha, \quad (3.89)$$

$$u_\beta \rightarrow -u_\beta. \quad (3.90)$$

Desse modo, no regime de altas temperaturas podemos reescrever o tensor tadpole

como

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} &= -2 \det^{-1}(M^{\kappa\lambda}) [g^{\mu\beta}(M^{-1})^{\nu\alpha} - (M^{-1})^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}] \times \left(\frac{im^4}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right) g_{\alpha\beta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{7i\pi^2 T^4}{720} (4u_\alpha u_\beta + g_{\alpha\beta}) \right). \end{aligned} \quad (3.91)$$

Neste momento, teremos que realizar as contrações entre os quadrivetores e tensores. Do resultado da equação (3.42), já obtemos o resultado com a contração de $g_{\alpha\beta}$. Então, vamos precisar desenvolver as contrações entre os quadrivetores $u_\alpha u_\beta$ e o termo $[g^{\mu\beta}(M^{-1})^{\nu\alpha} - (M^{-1})^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}]$, de maneira que temos

$$\begin{aligned} N^{\mu\nu} &= g^{\mu\beta} u_\alpha u_\beta (M^{-1})^{\nu\alpha} - (M^{-1})^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} u_\alpha u_\beta \\ &= u^\mu u_\alpha (M^{-1})^{\nu\alpha} - (M^{-1})^{\mu\alpha} u_\alpha u^\nu. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Usando o resultado da equação (3.36), ficamos com

$$\begin{aligned} N^{\mu\nu} &= u^\mu u_\alpha \left(\left(1 + \frac{b_{\mu\nu} b^{\mu\nu}}{2} \right) g^{\nu\alpha} + b^{\nu\alpha} + b^{\nu\gamma} b_\gamma^\alpha \right) \left(1 + \frac{b_{\kappa\lambda} b^{\kappa\lambda}}{2} \right)^{-1} \\ &\quad - u^\nu u_\alpha \left(\left(1 + \frac{b_{\mu\nu} b^{\mu\nu}}{2} \right) g^{\mu\alpha} + b^{\mu\alpha} + b^{\mu\gamma} b_\gamma^\alpha \right) \left(1 + \frac{b_{\kappa\lambda} b^{\kappa\lambda}}{2} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Vamos usar a decomposição das partes espacial e temporal de $b^{\mu\nu}$ de forma que

$$b^{\mu\nu} = \vec{b}^{\mu\nu} + b^{\mu 0} u^\nu + u^\mu b^{0\nu}, \quad (3.94)$$

tal que podemos escrever

$$\begin{aligned}
N^{\mu\nu} &= \left[u^\mu u_\alpha \vec{b}^{\nu\alpha} + u^\mu b^{\nu 0} u^2 + u^\mu u^\nu u_\alpha b^{0\alpha} \right. \\
&+ u^\mu u_\alpha \left(\vec{b}^{\nu\gamma} + b^{\nu 0} u^\gamma + u^\nu b^{0\gamma} \right) \left(\vec{b}_\gamma^\alpha + b_\gamma^0 u^\alpha + u_\gamma b_0^\alpha \right) \\
&- u^\nu u_\alpha \vec{b}^{\mu\alpha} - u^\nu b^{\mu 0} u^2 - u^\nu u^\mu u_\alpha b^{0\alpha} \\
&- u^\nu u_\alpha \left(\vec{b}^{\mu\gamma} + b^{\mu 0} u^\gamma + u^\mu b^{0\gamma} \right) \left(\vec{b}_\gamma^\alpha + b_\gamma^0 u^\alpha + u_\gamma b_0^\alpha \right) \left. \right] \\
&\times \left(1 + \frac{b_{\kappa\lambda} b^{\kappa\lambda}}{2} \right)^{-1}. \tag{3.95}
\end{aligned}$$

Para os produtos dos termos que envolvam as quantidades \vec{b}^{i0} ou \vec{b}^{i0} , resultam em contribuições nulas em nossos cálculos. O mesmo deve acontecer com os quadri-vetores u^i , b^{00} , b_0^0 . Desse modo, ficamos com a expressão

$$\begin{aligned}
N^{\mu\nu} &= \left[-u^\mu b^{0\nu} - b^{\mu 0} u^\nu + u^\mu \left(\vec{b}^{\nu\gamma} + b^{\nu 0} u^\gamma + u^\nu b^{0\gamma} \right) \left(u_\alpha \vec{b}_\gamma^\alpha + b_\gamma^0 u^2 + u_\gamma u_\alpha b_0^\alpha \right) \right. \\
&- u^\nu \left(\vec{b}^{\mu\gamma} + b^{\mu 0} u^\gamma + u^\mu b^{0\gamma} \right) \left(u_\alpha \vec{b}_\gamma^\alpha + b_\gamma^0 u^2 + u_\gamma u_\alpha b_0^\alpha \right) \left. \right] \left(1 + \frac{b_{\kappa\lambda} b^{\kappa\lambda}}{2} \right)^{-1} \\
&= \left[-u^\mu b^{0\nu} - b^{\mu 0} u^\nu + u^\mu \vec{b}^{\nu\gamma} b_\gamma^0 + u^\mu b^{\nu 0} u^\gamma b_\gamma^0 + u^\mu u^\nu b^{0\gamma} b_\gamma^0 - u^\nu \vec{b}^{\mu\gamma} b_\gamma^0 \right. \\
&- \left. u^\nu b^{\mu 0} u^\gamma b_\gamma^0 - u^\mu u^\nu b^{0\gamma} b_\gamma^0 \right] \left(1 + \frac{b_{\kappa\lambda} b^{\kappa\lambda}}{2} \right)^{-1} \\
&= \left[-u^\mu b^{0\nu} - b^{\mu 0} u^\nu - u^\mu \vec{b}^{\gamma\nu} b_\gamma^0 - \vec{b}^{\mu\gamma} b_\gamma^0 u^\nu \right] \left(1 + \frac{b_{\kappa\lambda} b^{\kappa\lambda}}{2} \right)^{-1}. \tag{3.96}
\end{aligned}$$

Substituindo o resultado (3.96) na equação (3.91), podemos escrever $\Pi^{\mu\nu}$ como

$$\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu} &= 2 \left(1 + \frac{b_{\kappa\lambda} b^{\kappa\lambda}}{2} \right)^{-2} \left[-\frac{im^4}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right) 2b^{\mu\nu} + \frac{7i\pi^2(T)^4}{720} 2b^{\mu\nu} \right. \\
&+ \left. \frac{7i\pi^2 T^4}{180} \left(u^\mu b^{0\nu} + b^{\mu 0} u^\nu + u^\mu \vec{b}^{\gamma\nu} b_\gamma^0 + \vec{b}^{\mu\gamma} b_\gamma^0 u^\nu \right) \right]. \tag{3.97}
\end{aligned}$$

Podemos ainda somar os dois primeiros termos que contém $b^{\mu\nu}$ e em seguida usar a decomposição que mencionamos acima, de forma que podemos escrever

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} &= 2 \left(1 + \frac{b_{\kappa\lambda} b^{\kappa\lambda}}{2}\right)^{-2} \left[\left(-\frac{im^4}{32\pi^2} \left(\frac{1}{e'} + \frac{3}{4} \right) + \frac{7i\pi^2 T^4}{720} \right) (2\vec{b}^{\mu\nu} + 2u^\mu b^{0\nu} + 2b^{\mu 0} u^\nu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{7i\pi^2 T^4}{180} (u^\mu b^{0\nu} + b^{\mu 0} u^\nu + u^\mu \vec{b}^{\gamma\nu} b_\gamma^0 + \vec{b}^{\mu\gamma} b_\gamma^0 u^\nu) \right], \end{aligned} \quad (3.98)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} &= \left(1 + \frac{b_{\kappa\lambda} b^{\kappa\lambda}}{2}\right)^{-2} \left[\left(-im_R^4 + \frac{7iT^4\pi^2}{180} \right) \vec{b}^{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. + \left(-im_R^4 + \frac{7i\pi^2 T^4}{60} \right) (u^\mu b^{0\nu} + b^{\mu 0} u^\nu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{7i\pi^2 T^4}{90} (u^\mu \vec{b}^{\gamma\nu} b_\gamma^0 + \vec{b}^{\mu\gamma} b_\gamma^0 u^\nu) \right]. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Iremos agora inserir esse resultado na equação de gap dada em (3.18):

$$\left. \frac{dV_{ef}}{dB_{\mu\nu}} \right|_{B_{\mu\nu}=\beta_{\mu\nu}} = -\frac{g^2}{e} b^{\mu\nu} - ie\Pi^{\mu\nu} = 0, \quad (3.100)$$

que assim temos

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV_{ef}}{dB_{\mu\nu}} \right|_{B_{\mu\nu}=\beta_{\mu\nu}} &= -\frac{e}{G} (\vec{b}^{\mu\nu} + b^{\mu 0} u^\nu + u^\mu b^{0\nu}) + \left(1 + \frac{b_{\kappa\lambda} b^{\kappa\lambda}}{2}\right)^{-2} \\ &\quad \times \left[\left(-m_R^4 + \frac{7T^4\pi^2}{180} \right) e\vec{b}^{\mu\nu} + \left(-m_R^4 + \frac{7\pi^2 T^4}{60} \right) e (u^\mu b^{0\nu} + b^{\mu 0} u^\nu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{7\pi^2 T^4}{180} e (u^\mu \vec{b}^{\gamma\nu} b_\gamma^0 + \vec{b}^{\mu\gamma} b_\gamma^0 u^\nu) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Feito isto, devemos investigar em quais condições ocorrerá a restauração da simetria

através da expressão

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{1}{G} - \left(m_R^4 - \frac{7\pi^2 T^4}{180} \right) \left(1 + \frac{b_{\mu\nu} b^{\mu\nu}}{2} \right)^{-2} \right] e \vec{b}^{\mu\nu} \\
& + \left[-\frac{1}{G} - \left(m_R^4 - \frac{7\pi^2 T^4}{60} \right) \left(1 + \frac{b_{\mu\nu} b^{\mu\nu}}{2} \right)^{-2} \right] e (u^\mu b^{0\nu} + b^{\mu 0} u^\nu) \\
& + \frac{7i\pi^2 T^4}{90} e (u^\mu \vec{b}^{\gamma\nu} b_{\gamma^0} + \vec{b}^{\mu\gamma} b_{\gamma^0} u^\nu) \left(1 + \frac{b_{\mu\nu} b^{\mu\nu}}{2} \right)^{-2} = 0. \quad (3.102)
\end{aligned}$$

Agora vamos analisar as soluções da equação (3.102) e determinar em quais condições existe uma temperatura crítica T_c . Como a temperatura aumenta gradativamente, a simetria inicial deverá ser restaurada e a temperatura crítica para essa transição de fase também pode ser estimada.

Notemos que temos três contribuições para a temperatura finita: uma puramente espacial, outra puramente temporal e outra que envolve o produto de termos espacial e temporal. Claramente, observamos que, desta última contribuição, temos que $(u^\mu \vec{b}^{\gamma\nu} b_{\gamma^0} + \vec{b}^{\mu\gamma} b_{\gamma^0} u^\nu) = 0$, tal que devemos escolher $\vec{b}^{\gamma\nu} \neq 0$ e $b_{\gamma^0} = 0$ ou $\vec{b}^{\gamma\nu} = 0$ e $b_{\gamma^0} \neq 0$. A mesma análise é válida para o segundo termo $\vec{b}^{\mu\gamma} b_{\gamma^0} u^\nu$.

Dessa forma, para impormos condições de uma temperatura crítica T_c , vamos considerar inicialmente $b^{0\nu} = 0$ e $\vec{b}^{\mu\nu} \neq 0$. Ficamos então com uma equação envolvendo apenas componentes espacial, dada por

$$\left[-\frac{1}{G} - \left(m_R^4 - \frac{7\pi^2 T^4}{180} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \vec{b}_{\mu\nu} \vec{b}^{\mu\nu} \right)^{-2} \right] e \vec{b}^{\mu\nu} = 0. \quad (3.103)$$

Assim, para obtermos a restauração da simetria, temos que

$$m_R^4 - \frac{7\pi^2 T^4}{180} \leq 0, \quad (3.104)$$

ou seja,

$$T^4 \geq \frac{180}{7\pi^2} m_R^4, \quad (3.105)$$

o que nos leva a temperatura crítica

$$T_c^4 = \frac{180}{7\pi^2} m_R^4. \quad (3.106)$$

Desta maneira, definindo $m_R^4 - \frac{7\pi^2 T^4}{180} = -m_{RT}^4$ e considerando $G = -|G|$, ao integramos a (3.103), obtemos o potencial

$$V_{ef} = \frac{B^2 e^2}{|G|} + \frac{B^2 e^2 m_{RT}^4}{2 + B^2 e^2} + c, \quad (3.107)$$

como $B^2 = B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$. Assim, quando a temperatura do sistema atingir o valor dado na equação (3.106) o potencial irá iniciar a restauração de sua simetria, e à medida que tivermos valores maiores para T_c a simetria será restaurada. Podemos também ilustrar o comportamento do potencial efetivo V_{ef} no regime termal para a solução tipo-espaço, conforme é assinalado na Fig. (3.2).

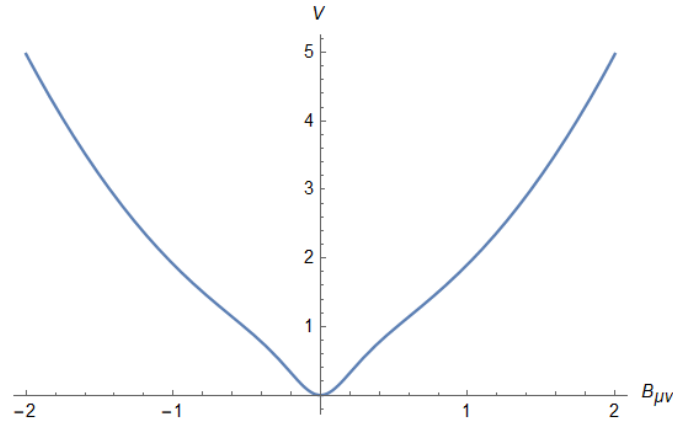


Figura 3.2: Restauração de simetria do potencial.

Fonte: Autor, 2023.

Neste caso, observamos a existência de apenas um mínimo global, diferente do que está ilustrado na Fig. (3.1), onde temos a presença de dois mínimos locais. Isso nos indica que a inclusão da temperatura, faz com que o potencial não possua um conjunto de mínimos onde ele possa decair e adquirir um valor esperado do vácuo não trivial.

Vamos agora considerar finalmente $b^{0\nu} \neq 0$ e $\vec{b}^{\mu\nu} = 0$ e determinar a temperatura crítica advinda da contribuição temporal. Isso nos leva à equação

$$\left[-\frac{1}{G} - \left(m_R^4 - \frac{7\pi^2 T^4}{60} \right) (1 + b^{0\nu} b_{0\nu})^{-2} \right] e u^\mu b^{0\nu} = 0. \quad (3.108)$$

Assim, da mesma forma que acima, para a restauração da simetria, temos que

$$m_R^4 - \frac{7\pi^2 T^4}{60} \leq 0, \quad (3.109)$$

ou seja,

$$T^4 \geq \frac{60}{7\pi^2} m_R^4, \quad (3.110)$$

o que nos leva a temperatura crítica

$$T_c^4 = \frac{60}{7\pi^2} m_R^4. \quad (3.111)$$

Note que este resultado é $\frac{1}{3}$ da temperatura crítica para a componente espacial e que, ao integrarmos a Eq. (3.108), obtemos exatamente o mesmo potencial (3.107). A situação em que a temperatura do sistema inicia a restauração da simetria inicial é apresentada na Fig. (3.3)

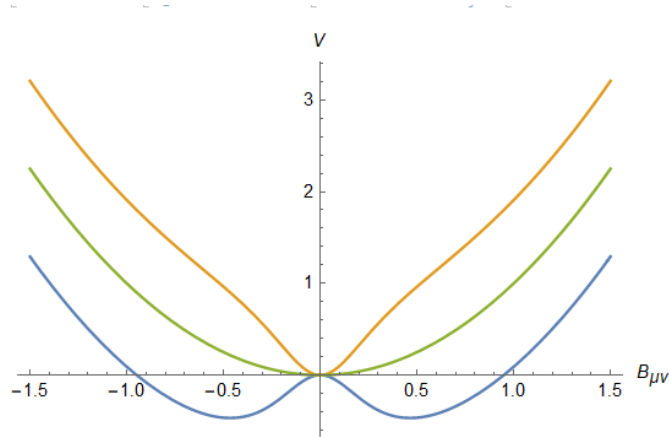


Figura 3.3: Inclusão de temperaturas críticas para a restauração do potencial.

Fonte: Autor, 2023.

Portanto, verificamos que para o modelo de quatro férmions antissimétrico com quebra espontânea de simetria de Lorentz a sua simetria é restaurada com a inclusão do regime de temperatura finita. Verificamos também a existência de duas temperaturas críticas, uma para a solução tipo espaço e outra relacionada a solução tipo tempo.

Na próxima seção vamos calcular a ação efetiva em um laço, incluindo uma modificação no termo de corrente. Com isso, vamos conseguir calcular a parte cinética da nossa teoria e verificar o sinal correto para este termo.

3.4 Ação Efetiva em um Laço

Nesta seção estamos interessados em calcular a ação efetiva em um laço, na qual propomos uma modificação na densidade de corrente $J_{\mu\nu}$ no modelo abordado em [74] substituindo a derivada usual por uma derivada direcional. Com isso, a expressão para $J_{\mu\nu}$ torna-se

$$J_{\mu\nu} = i\bar{\psi}(\gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial}_\nu - \gamma_\nu \overleftrightarrow{\partial}_\mu), \quad (3.112)$$

em que $\overleftrightarrow{\partial}_\nu = \frac{1}{2} \overrightarrow{\partial}_\nu - \frac{1}{2} \overleftarrow{\partial}_\nu$.

Feita esta modificação, a expressão para a lagrangiana fica

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \frac{g^2}{2} \left(B_{\mu\nu} - \frac{e}{g^2} J_{\mu\nu} \right)^2, \quad (3.113)$$

onde,

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi - \frac{G}{2} J_{\mu\nu} J^{\mu\nu}. \quad (3.114)$$

Ficamos então com a seguinte equação para a densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi + \frac{g^2}{2} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - e B^{\mu\nu} J_{\mu\nu}, \quad (3.115)$$

no qual o último termo pode ser escrito como

$$\begin{aligned} -eB^{\mu\nu}J_{\mu\nu} &= -eB^{\mu\nu}i\bar{\psi}(\gamma_{\mu}\overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\nu} - \gamma_{\nu}\overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mu})\psi \\ &= \bar{\psi}(-ieB^{\mu\nu}\gamma_{\mu}\overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\nu} + ieB^{\mu\nu}\gamma_{\nu}\overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mu})\psi. \end{aligned} \quad (3.116)$$

Assim, a lagrangiana de nosso interesse pode ser reescrita como

$$\mathcal{L} = \frac{g^2}{2}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\cancel{\not{D}} - ieB^{\mu\nu}\gamma_{\mu}\overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\nu} + ieB^{\mu\nu}\gamma_{\nu}\overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mu} - m)\psi. \quad (3.117)$$

Agora, vamos investigar a atuação da derivada direcional em cada termo, i.e., temos

$$\begin{aligned} B^{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma_{\mu}\overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\nu}\psi &= B^{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma_{\mu}(\partial_{\nu}\psi) + (\partial_{\nu}B^{\mu\nu})\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi + B^{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma_{\mu}(\partial_{\nu}\psi) \\ &= (\partial_{\nu}B^{\mu\nu})\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi + 2B^{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma_{\mu}(\partial_{\nu}\psi), \end{aligned} \quad (3.118)$$

e de maneira similar,

$$B^{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma_{\nu}\overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mu}\psi = (\partial_{\mu}B^{\mu\nu})\bar{\psi}\gamma_{\nu}\psi + 2B^{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma_{\nu}(\partial_{\mu}\psi). \quad (3.119)$$

Dessa modo, ao substituirmos estes resultados na equação (3.117), obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{g^2}{2}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\cancel{\not{D}} - m + ie\partial_{[\mu}B^{\mu\nu}\gamma_{\nu]} - 2ieB^{\mu\nu}\gamma_{[\mu}\partial_{\nu]})\psi. \quad (3.120)$$

O funcional gerador pode ser escrito como

$$\begin{aligned} Z(\eta, \bar{\eta}) &= \int DB_{\mu\nu} e^{i \int d^4x \frac{g^2}{2} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}} \det(\not{p} - m + ie\partial_{[\mu} B^{\mu\nu} \gamma_{\nu]} - 2ieB^{\mu\nu} \gamma_{[\mu} \partial_{\nu]}) \\ &= \int DB_{\mu\nu} e^{i \int d^4x \frac{g^2}{2} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}} e^{iS_{ef}}, \end{aligned} \quad (3.121)$$

em que efetuamos a integração nos férmions. A partir do determinante fermiônico, podemos escrever a ação efetiva

$$S_{ef} = -iTr \ln(\not{p} - m + ie\partial_{[\mu} B^{\mu\nu} \gamma_{\nu]} - 2eB^{\mu\nu} \gamma_{[\mu} p_{\nu]}). \quad (3.122)$$

Para simplificarmos esta ultima expressão vamos reescrever o termo $-2eB^{\mu\nu} \gamma_{[\mu} p_{\nu]}$ em que passamos o campo $B^{\mu\nu}$ pelo momento p_μ , de modo que

$$\begin{aligned} -2eB^{\mu\nu} \gamma_{[\mu} p_{\nu]} &= -2e\gamma_{[\mu} (p - i\partial)_{\nu]} B^{\mu\nu} \\ &= -2e\gamma_{[\mu} p_{\nu]} B^{\mu\nu} + 2ie\partial_{[\nu} B^{\mu\nu} \gamma_{\mu]}. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Tomando este resultado na expressão (3.122), obtemos

$$S_{ef} = -iTr \ln(\not{p} - m - e(2p - i\partial)_{[\nu} B^{\mu\nu} \gamma_{\mu]}). \quad (3.124)$$

O próximo passo é definir $P = \not{p} - m$ e $Q = e(2p - i\partial)_{[\nu} B^{\mu\nu} \gamma_{\mu]}$, de modo que

$$S_{ef} = -iTr \ln \left[P \left(1 - \frac{Q}{P} \right) \right], \quad (3.125)$$

tal que

$$\begin{aligned} S_{ef} &= -iTr \ln \left[(\not{p} - m) \left(1 - \frac{1}{\not{p} - m} e(2p - i\partial)_{[\nu} B^{\mu\nu} \gamma_{\mu]} \right) \right] \\ &= -iTr \left[\ln(\not{p} - m) + \ln \left(1 - S(p) e(2p - i\partial)_{[\nu} B^{\mu\nu} \gamma_{\mu]} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.126)$$

na qual usamos o propagador fermiônico escrito como

$$S(p) = \frac{1}{\not{p} - m} = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}. \quad (3.127)$$

Vamos então procurar uma expressão para a ação efetiva de n-ésima potência.

Para isso, vamos considerar que

$$S_{ef} = -iTr \ln(\not{p} - m) + S'_{ef}, \quad (3.128)$$

na qual escrevemos

$$S'_{ef} = -iTr \ln[1 - S(p) e(2p - i\partial)_{[\nu} B^{\mu\nu} \gamma_{\mu]}]. \quad (3.129)$$

O termo independente $-iTr \ln(\not{p} - m)$ corresponde a contribuição $S_{ef}^{(0)}$ e será absorvido como uma constante em nossa teoria.

Vamos expandir a equação (3.129) por meio da expressão $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$,

tal que podemos escrever

$$S_{ef} = S_{ef}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{ef}^{(n)}, \quad (3.130)$$

onde

$$S_{ef}^{(n)} = \frac{i}{n} Tr [-eS(p)(2p - i\partial)_{[\mu} B^{\mu\nu} \gamma_{\nu]}]^n. \quad (3.131)$$

Neste ponto, vamos calcular a contribuição para $n = 2$, ou seja, a contribuição de autoenergia. Então, temos

$$S_{ef}^{(2)} = \frac{ie^2}{2} Tr \int d^4x \langle x | S(p)(2p - i\partial)_{[\mu} B^{\mu\nu} \gamma_{\nu]} S(p)(2p - i\partial)_{[\kappa} B^{\kappa\lambda} \gamma_{\lambda]} | x \rangle, \quad (3.132)$$

e, ao passar o campo $B^{\mu\nu}$ pelo propagador $S(p)$ utilizando a relação de comutação $B^{\mu\nu} S(p) = S(p - i\partial) B^{\mu\nu}$, obtemos

$$S_{ef}^{(2)} = \frac{ie^2}{2} Tr \int d^4x \langle x | S(p)(2p - i\partial)_{[\mu} \gamma_{\nu]} S(p - i\partial)(2p - i\partial)_{[\kappa} \gamma_{\lambda]} B^{\kappa\lambda} B^{\mu\nu} | x \rangle. \quad (3.133)$$

Vamos inserir a completeza

$$1 = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} |p\rangle \langle p|, \quad (3.134)$$

de modo que

$$\begin{aligned} S_{ef}^{(2)} &= \frac{ie^2}{2} Tr \int d^4x \langle x | S(p)(2p - i\partial)_{[\mu} \gamma_{\nu]} S(p - i\partial)(2p - i\partial)_{[\kappa} \gamma_{\lambda]} \\ &\times \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2} B^{\kappa\lambda} |p\rangle \langle p| B^{\mu\nu} |x\rangle. \end{aligned} \quad (3.135)$$

A ação efetiva deverá ser reescrita como

$$\begin{aligned} S_{ef}^{(2)} &= \frac{ie^2}{2} Tr \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2} S(p)(2p - i\partial)_{[\mu} \gamma_{\nu]} S(p - i\partial)(2p - i\partial)_{[\kappa} \gamma_{\lambda]} \\ &\times B^{\kappa\lambda} B^{\mu\nu} \langle x|p\rangle \langle p|x\rangle, \end{aligned} \quad (3.136)$$

em que $\langle x|p\rangle\langle p|x\rangle = e^{ip\cdot x}e^{-ip\cdot x} = 1$, que são as transformadas de Fourier e sua inversa no espaço considerado. Desse modo, temos que

$$S_{ef}^{(2)} = \frac{ie^2}{2} Tr \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2} S(p)(2p - i\partial)_{[\mu\gamma\nu]} S(p - i\partial) \times (2p - i\partial)_{[\kappa\gamma\lambda]} B^{\kappa\lambda} B^{\mu\nu}, \quad (3.137)$$

ou ainda

$$S_{ef}^{(2)} = \frac{ie^2}{2} \int d^4x \Pi^{\kappa\lambda\mu\nu} B_{\kappa\lambda} B_{\mu\nu}, \quad (3.138)$$

no qual o tensor tadpole para o nosso caso é dado por

$$\Pi^{\kappa\lambda\mu\nu} = tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S(p)(2p - i\partial)_{[\kappa\gamma\lambda]} S(p - i\partial)(2p - i\partial)_{[\mu\gamma\nu]}. \quad (3.139)$$

Para efetuarmos o cálculo até segunda ordem em ∂_μ , vamos considerar a expansão

$$\frac{1}{\not{p} - m - i\partial} = \frac{1}{\not{p} - m} + \frac{1}{\not{p} - m} i\partial \frac{1}{\not{p} - m} + \frac{1}{\not{p} - m} i\partial \frac{1}{\not{p} - m} i\partial \frac{1}{\not{p} - m} + \dots \quad (3.140)$$

Substituindo a expansão acima na expressão (3.139), ficamos com

$$\begin{aligned} \Pi^{\kappa\lambda\mu\nu} &= tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (2p - i\partial)_{[\kappa\gamma\lambda]} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (2p - i\partial)_{[\mu\gamma\nu]} \\ &+ tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (2p - i\partial)_{[\kappa\gamma\lambda]} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} i\partial \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (2p - i\partial)_{[\mu\gamma\nu]} \\ &+ tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (2p - i\partial)_{[\kappa\gamma\lambda]} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} i\partial \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} i\partial \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (2p - i\partial)_{[\mu\gamma\nu]} \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (3.141)$$

Para calcularmos o termo cinético devemos manter nas expressões acima apenas os termos com duas derivas. Dessa forma, vamos dividir a equação (3.141) tal que

$$\Pi^{\kappa\lambda\mu\nu} = \Pi_{ss}^{\kappa\lambda\mu\nu} + \Pi_{sss}^{\kappa\lambda\mu\nu} + \Pi_{ssss}^{\kappa\lambda\mu\nu}, \quad (3.142)$$

na qual $\Pi_{ss}^{\kappa\lambda\mu\nu}$ é o termo que contém dois propagadores, $\Pi_{sss}^{\kappa\lambda\mu\nu}$ é o termo com três e $\Pi_{ssss}^{\kappa\lambda\mu\nu}$ com quatro.

Para o termo com dois propagadores, temos

$$\Pi_{ss}^{\kappa\lambda\mu\nu} = tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (-i\partial)_{[\kappa\gamma\lambda]} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (-i\partial)_{[\mu\gamma\nu]}, \quad (3.143)$$

para o termo com três propagadores, escrevemos

$$\begin{aligned} \Pi_{sss}^{\kappa\lambda\mu\nu} &= tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (-i\partial)_{[\kappa\gamma\lambda]} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} i\not{\partial} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (2p)_{[\mu\gamma\nu]} \\ &+ tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (2p)_{[\kappa\gamma\lambda]} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} i\not{\partial} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (-i\partial)_{[\mu\gamma\nu]}, \end{aligned} \quad (3.144)$$

e para quatro propagadores, temos

$$\Pi_{ssss}^{\kappa\lambda\mu\nu} = tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (2p)_{[\kappa\gamma\lambda]} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} i\not{\partial} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} i\not{\partial} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (2p)_{[\mu\gamma\nu]}. \quad (3.145)$$

Para cada caso, vamos calcular o traço e avaliar o resultado de cada uma das

integrais. Desse modo, o cálculo do traço da equação (3.143) resulta em

$$\begin{aligned}
\Pi_{ss}^{\kappa\lambda\mu\nu} &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^2} (m^2 k^\lambda k^\nu g^{\kappa\mu} - p^2 k^\lambda k^\nu g^{\kappa\mu} \\
&- m^2 k^\kappa k^\nu g^{\lambda\mu} + p^2 k^\kappa k^\nu g^{\lambda\mu} - m^2 k^\lambda k^\mu g^{\kappa\nu} + p^2 k^\lambda k^\mu g^{\kappa\nu} \\
&+ m^2 k^\kappa k^\mu g^{\lambda\nu} - p^2 k^\kappa k^\mu g^{\lambda\nu} + 2k^\lambda k^\nu p^\kappa p^\mu - 2k^\kappa k^\nu p^\lambda p^\mu \\
&- 2k^\lambda k^\mu p^\kappa p^\nu + 2k^\kappa k^\mu p^\lambda p^\nu).
\end{aligned} \tag{3.146}$$

O próximo passo é realizar a integração, porém por contagem de potências nos momentos verificamos que a integral acima é divergente e devemos utilizar o procedimento de regularização dimensional convencional que foi mostrada no capítulo anterior. Após regularizarmos a integral acima, efetuar a integração e expandirmos em séries em torno de $D \rightarrow 4$, vamos obter

$$\Pi_{ss}^{\kappa\lambda\mu\nu} = 0. \tag{3.147}$$

Realizando o cálculo do traço para a contribuição com três propagadores

obtemos,

$$\begin{aligned}
\Pi_{sss}^{\kappa\lambda\mu\nu} &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^3} \left(-2m^2 k^\nu p^\lambda g^{\kappa\mu} k \cdot p + 2m^2 k^\nu p^\kappa g^{\lambda\mu} k \cdot p \right. \\
&+ 2p^2 k^\nu p^\lambda g^{\kappa\mu} k \cdot p - 2p^2 k^\nu p^\kappa g^{\lambda\mu} k \cdot p + 2m^2 k^\mu p^\lambda g^{\kappa\nu} k \cdot p - 2m^2 k^\mu p^\kappa g^{\lambda\nu} k \cdot p \\
&- 2p^2 k^\mu p^\lambda g^{\kappa\nu} k \cdot p + 2p^2 k^\mu p^\kappa g^{\lambda\nu} k \cdot p - 2m^2 k^\lambda p^\nu g^{\kappa\mu} k \cdot p + 2m^2 k^\lambda p^\mu g^{\kappa\nu} k \cdot p \\
&+ 2p^2 k^\lambda p^\nu g^{\kappa\mu} k \cdot p - 2p^2 k^\lambda p^\mu g^{\kappa\nu} k \cdot p + 2m^2 k^\kappa p^\nu g^{\lambda\mu} k \cdot p - 2m^2 k^\kappa p^\mu g^{\lambda\nu} k \cdot p \\
&- 2p^2 k^\kappa p^\nu g^{\lambda\mu} k \cdot p + 2p^2 k^\kappa p^\mu g^{\lambda\nu} k \cdot p + 4m^2 k^\lambda k^\nu p^\kappa p^\mu - 4p^2 k^\lambda k^\nu p^\kappa p^\mu \\
&- 4m^2 k^\kappa k^\nu p^\lambda p^\mu + 4p^2 k^\kappa k^\nu p^\lambda p^\mu - 4m^2 k^\lambda k^\mu p^\kappa p^\nu \\
&+ \left. 4p^2 k^\lambda k^\mu p^\kappa p^\nu + 4m^2 k^\kappa k^\mu p^\lambda p^\nu - 4p^2 k^\kappa k^\mu p^\lambda p^\nu \right), \tag{3.148}
\end{aligned}$$

após realizarmos o processo regularização dimensional, promovendo as grandezas envolvidas do espaço quadrimensional para um espaço D-dimensional e realizarmos as devidas contrações vamos obter $\Pi_{sss}^{\kappa\lambda\mu\nu} = 0$.

Porém, para a contribuição $\Pi_{ssss}^{\kappa\lambda\mu\nu}$ o resultado obtido é não nulo. E a expressão que precisamos resolver é

$$\begin{aligned}
\Pi_{ssss}^{\kappa\lambda\mu\nu} &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^4} \left[4k^2 m^4 p^\lambda p^\nu g^{\kappa\mu} - 4k^2 m^4 p^\kappa p^\nu g^{\lambda\mu} \right. \\
&- 4k^2 m^4 p^\lambda p^\mu g^{\kappa\nu} + 4k^2 m^4 p^\kappa p^\mu g^{\lambda\nu} - 8k^2 m^2 p^2 p^\lambda p^\nu g^{\kappa\mu} + 8k^2 m^2 p^2 p^\kappa p^\nu g^{\lambda\mu} \\
&+ 8k^2 m^2 p^2 p^\lambda p^\mu g^{\kappa\nu} - 8k^2 m^2 p^2 p^\kappa p^\mu g^{\lambda\nu} + 4k^2 (p^2)^2 p^\lambda p^\nu g^{\kappa\mu} - 4k^2 (p^2)^2 p^\kappa p^\nu g^{\lambda\mu} \\
&- 4k^2 (p^2)^2 p^\lambda p^\mu g^{\kappa\nu} + 4k^2 (p^2)^2 p^\kappa p^\mu g^{\lambda\nu} + 8m^2 p^\lambda p^\nu g^{\kappa\mu} (k \cdot p)^2 \\
&- 8m^2 p^\kappa p^\nu g^{\lambda\mu} (k \cdot p)^2 - 8m^2 p^\lambda p^\mu g^{\kappa\nu} (k \cdot p)^2 + 8m^2 p^\kappa p^\mu g^{\lambda\nu} (k \cdot p)^2 \\
&- 8p^2 p^\lambda p^\nu g^{\kappa\mu} (k \cdot p)^2 + 8p^2 p^\kappa p^\nu g^{\lambda\mu} (k \cdot p)^2 + 8p^2 p^\lambda p^\mu g^{\kappa\nu} (k \cdot p)^2 \\
&\left. - 8p^2 p^\kappa p^\mu g^{\lambda\nu} (k \cdot p)^2 \right], \tag{3.149}
\end{aligned}$$

esta é a única contribuição diferente de zero. Ao promovermos os produtos entre quatro momentos em D dimensões com auxílio da forma

$$p_\kappa p_\lambda p_\mu p_\nu \rightarrow \frac{p^4 (g_{\kappa\lambda} g_{\mu\nu} + g_{\kappa\mu} g_{\nu\lambda} + g_{\kappa\nu} g_{\mu\lambda})}{D(D+2)}, \quad (3.150)$$

e novamente realizarmos uma expansão em séries em torno de $D \rightarrow 4$, chegamos no resultado

$$\begin{aligned} \Pi_{ssss}^{\kappa\lambda\mu\nu} &= \frac{im^2 (k^\kappa (k^\mu g^{\lambda\nu} - k^\nu g^{\lambda\mu}) + g^{\kappa\mu} (k^\lambda k^\nu - k^2 g^{\lambda\nu}) + g^{\kappa\nu} (k^2 g^{\lambda\mu} - k^\lambda k^\mu))}{4\pi^2(D-4)} \\ &+ \frac{im^2}{8\pi^2} \left(\log \frac{m^2 e^\gamma}{\mu^2 4\pi} - 1 \right) \\ &\times (k^\kappa (k^\mu g^{\lambda\nu} - k^\nu g^{\lambda\mu}) + g^{\kappa\mu} (k^\lambda k^\nu - k^2 g^{\lambda\nu}) + g^{\kappa\nu} (k^2 g^{\lambda\mu} - k^\lambda k^\mu)) \\ &= -\frac{im^2}{4\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{1}{2} \right) (k^\kappa (k^\mu g^{\lambda\nu} - k^\nu g^{\lambda\mu}) + g^{\kappa\mu} (k^\lambda k^\nu - k^2 g^{\lambda\nu}) + g^{\kappa\nu} (k^2 g^{\lambda\mu} - k^\lambda k^\mu)). \end{aligned} \quad (3.151)$$

Assim, ao realizarmos a substituição do resultado acima na equação (3.138), vamos obter

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ef}^{(2)} &= \frac{e^2 m^2}{8\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{1}{2} \right) B_{\kappa\lambda} (4k^\kappa k_\alpha B^{\mu\alpha} - 2k^2 B^{\kappa\lambda}) \\ &= \frac{e^2 m^2}{4\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{1}{2} \right) B_{\kappa\lambda} (2k^\kappa k_\alpha B^{\mu\alpha} - k^2 B^{\kappa\lambda}), \end{aligned} \quad (3.152)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ef}^{(2)} &= \frac{e^2 m^2}{8\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{1}{2} \right) B_{\kappa\lambda} (4k^\kappa k_\alpha B^{\mu\alpha} - 2k^2 B^{\kappa\lambda}) \\ &= \frac{1}{4Z_3} B_{\kappa\lambda} (2k^\kappa k_\alpha B^{\mu\alpha} - k^2 B^{\kappa\lambda}), \end{aligned} \quad (3.153)$$

em que usamos $Z_3 = \frac{e^2 m^2}{\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{1}{2} \right)$. Poderemos escrever a equação acima em termos das derivadas como

$$\mathcal{L}_{ef}^{(2)} = \frac{1}{4Z_3} B_{\kappa\lambda} \left(\partial^2 B^{\kappa\lambda} - 2\partial^\kappa \partial_\alpha B^{\mu\alpha} \right), \quad (3.154)$$

e ao usarmos a definição de campo renormalizado $B_R^{\mu\nu} = Z_3^{-1/2} B^{\mu\nu}$, chegaremos na expressão para o termo cinético

$$\mathcal{L}_{ef}^{(2)} = -\frac{1}{12} H_{R\mu\nu} H_R^{\mu\nu}, \quad (3.155)$$

que é análoga expressão obtida sem a derivada direcional. A equação (3.152) difere do obtido em [74] por uma constante que pode ser incluída na massa renormalizada m_R .

Capítulo 4

Conclusões e perspectivas

Nesta dissertação estudamos como correções quânticas podem gerar um potencial do tipo bumblebee com quebra espontânea da simetria de Lorentz para um modelo de quatro férmions antissimétrico, no qual o termo de corrente é do tipo $J_{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma_{[\mu}\partial_{\nu]}\psi$.

No capítulo 2, realizamos uma breve discussão sobre o Modelo Padrão da física de partículas, quais são os seus principais ingredientes e suas características. Também mostramos quais são as motivações que nos levam à investigar a violação da invariância de Lorentz no contexto do MP.

Além disso, analisamos como pode ocorrer essa violação no grupo de Lorentz, em que consideramos o caso das rotações que sem a presença de campos de fundo mantém a invariância de Lorentz preservada, porém ao incluirmos campos de fundo as transformações de partícula são violadas, enquanto que as transformações de

observador são preservadas. Dado esse fato, contextualizamos a Eletrodinâmica Quântica Estendida que engloba em seu arcabouço termos que consideram a violação de simetria de Lorentz e CPT.

Estudamos no capítulo 3 as soluções da equação de gap e calculamos o potencial efetivo exatamente, mostrando com isso que em nosso modelo uma violação da simetria é despertada quando o campo decai em um dos mínimos de seu potencial. Inserimos a equação de gap no contexto de um regime termal e averiguamos que com a inclusão de temperatura finita obtemos uma restauração de simetria de nossa teoria. Determinamos também valores de temperaturas críticas T_c e constatamos a existência de dois valores distintos, uma relacionada a solução tipo espaço e outra relacionada a solução tipo tempo.

Examinamos também uma pequena modificação no termo de corrente $J_{\mu\nu}$, de modo que ela passa a ser escrita em termos de uma derivada direcional, e com isso calculamos a correspondente ação efetiva em um laço. Porém nenhuma correção adicional ao modelo foi encontrado, visto que no cálculo da ação efetiva com derivada usual chegamos no mesmo resultado (diferindo apenas por uma constante que pode ser incluída na definição da massa renormalizada m_R), obtido sem a inclusão da derivada direcional.

Como perspectiva de trabalhos futuros, podemos incluir o cálculo do grupo de renormalização para a teoria aqui estudada, investigar a situação com uma derivada e duas matrizes para o campo com três índices $C^{\mu\nu\lambda}$. Podemos também, efetuar os cálculos de temperatura finita sem desconsiderar a parte dual $\tilde{b}^{\mu\nu}$ e analisar se existem correções extras vindas desse termo. Poderemos ainda realizar cálculo das

correções quânticas com operadores de dimensão de massa $d = 6$.

Referências Bibliográficas

- [1] S. T. Thornton, J. B. Marion, "Classical Dynamics of Particles and Systems", 5 Ed. Belmont. EUA: Books/Cole Thomson Learning, Inc. (2004).
- [2] A. Sytma, J. E. van den Berg, O. Böll, D. Chernowitz, E. A. Dijck, J. O. Grasdijk, S. Hoekstra, K. Jungmann, S. C. Mathavan and C. Meinema, *et al.* "Test of Lorentz invariance in β decay of polarized ^{20}Na ," Phys. Rev. C **94**, no.2, 025503 (2016).
- [3] D. Mattingly, "Modern tests of Lorentz invariance," Living Rev. Rel. **8**, 5 (2005).
- [4] V. A. Kostelecky and N. Russell, "Data Tables for Lorentz and CPT Violation," Rev. Mod. Phys. **83**, 11-31 (2011).
- [5] V. A. Kostelecky, "CPT and Lorentz symmetry. Proceedings: 3rd Meeting", Bloomington, USA, Aug 4-7 (2004).
- [6] A. Einstein, "On the electrodynamics of moving bodies", Annalen Phys. **17**, 891 (1905) [Annalen Phys. **14**, 194 (2005)].
- [7] Marcelo O. C. Gomes, "Teoria Quântica dos Campos", 2a ed. Ed.USP, 2015.

- [8] A. F. Ferrari, “A busca por violações da simetria de Lorentz: testando os princípios da relatividade restrita na escala de Planck”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. **41**, n^o 4, e20190092 (2019).
- [9] D. Griffiths, “Introduction to elementary particles,” (Reed Coll.) (2008).
- [10] V. A. Kostelecky and S. Samuel, “Spontaneous Breaking of Lorentz Symmetry in String Theory,” *Phys. Rev. D* **39**, 683 (1989).
- [11] S. M. Carroll, G. B. Field and R. Jackiw, “Limits on a Lorentz and Parity Violating Modification of Electrodynamics,” *Phys. Rev. D* **41**, 1231 (1990).
- [12] D. Colladay and V. A. Kostelecký, “CPT violation and the standard model”, *Phys. Rev. D* **55**, 6760 (1997).
- [13] O. W. Greenberg, “CPT violation implies violation of Lorentz invariance,” *Phys. Rev. Lett.* **89**, 231602 (2002).
- [14] O. W. Greenberg, “Why is CPT fundamental?,” *Found. Phys.* **36**, 1535-1553 (2006).
- [15] R. P. M. Moreira, R. R. Luz e L. R. Silva, “O termo CPT do Modelo Padrão Estendido,” *e-Boletim da Física*, [S. l.], v. 10, n. 1, 2021.
- [16] J. F. Assuncao, T. Mariz, J. R. Nascimento and A. Y. Petrov, “Dynamical Lorentz symmetry breaking in a 4D massless four-fermion model,” *Phys. Rev. D* **96**, no.6, 065021 (2017).
- [17] B. Charneski, M. Gomes, T. Mariz, J. R. Nascimento and A. J. da Silva, “Dynamical Lorentz symmetry breaking in 3D and charge fractionalization,” *Phys. Rev. D* **79**, 065007 (2009).

- [18] M. Gomes, T. Mariz, J. R. Nascimento and A. J. da Silva, “Dynamical Lorentz and CPT symmetry breaking in a 4D four-fermion model,” *Phys. Rev. D* **77**, 105002 (2008).
- [19] T. Mariz, J. R. Nascimento and A. Y. Petrov, “Horava-Lifshitz four-fermion model revisited and dynamical symmetry breaking,” *Phys. Rev. D* **101**, no.10, 105008 (2020).
- [20] VEIGA .C . OTHERS., *Cosmologia: Da Origem ao fim do universo*. Rio de Janeiro: Observatório Nacional, 2015.
- [21] M. D. Schwartz, “Quantum Field Theory and the Standard Model,” Cambridge University Press, 2014, ISBN 978-1-107-03473-0, 978-1-107-03473-0.
- [22] H. Belich and et.al., “Violação da Simetria de Lorentz”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. **29**, n. 1, p. 57-64, (2007).
- [23] Silva. Júlio Rafael, “Violação da Invariância de Lorentz no Regime de Temperatura Finita”. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió. 2012.
- [24] C. Amsler *et al.* [Particle Data Group], “Review of Particle Physics”, *Phys. Lett. B* **667**, 1-1340 (2008).
- [25] C. Adam and F. R. Klinkhamer, “Causality and CPT violation from an Abelian Chern-Simons like term”, *Nucl. Phys. B* **607**, 247-267 (2001).
- [26] C. Adam and F. R. Klinkhamer, “Photon decay in a CPT violating extension of quantum electrodynamics”, *Nucl. Phys. B* **657**, 214-228 (2003).

- [27] J. D. Barrow and J. K. Webb, “Inconstant constants”, *Sci. Am.* **292N6**, 57-63 (2005).
- [28] K. Greisen, “End to the cosmic ray spectrum?”, *Phys. Rev. Lett.* **16**, 748 (1966).
- [29] G. T. Zatsepin and V. A. Kuzmin, “Upper limit of the spectrum of cosmic rays”, *JETP Lett.* **4**, 78 (1966) [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **4**, 114 (1966)].
- [30] P. Adamson *et al.* [MINOS], “Testing Lorentz Invariance and CPT Conservation with NuMI Neutrinos in the MINOS Near Detector,” *Phys. Rev. Lett.* **101**, 151601 (2008).
- [31] P. Adamson *et al.* [MINOS], “A Search for Lorentz Invariance and CPT Violation with the MINOS Far Detector,” *Phys. Rev. Lett.* **105**, 151601 (2010).
- [32] A. A. Aguilar-Arevalo *et al.* [MiniBooNE], “Test of Lorentz and CPT violation with Short Baseline Neutrino Oscillation Excesses,” *Phys. Lett. B* **718**, 1303-1308 (2013).
- [33] Y. Ding and V. A. Kostelecký, “Lorentz-violating spinor electrodynamics and Penning traps,” *Phys. Rev. D* **94**, no.5, 056008 (2016).
- [34] D. Bear, R. E. Stoner, R. L. Walsworth, V. A. Kostelecky and C. D. Lane, “Limit on Lorentz and CPT violation of the neutron using a two species noble gas maser,” *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5038 (2000). [erratum: *Phys. Rev. Lett.* **89**, 209902 (2002)].
- [35] I. Altarev, C. A. Baker, G. Ban, G. Bison, K. Bodek, M. Daum, P. Fierlinger, P. Geltenbort, K. Green and M. G. D. van der Grinten, *et al.* “Test of Lorentz

- invariance with spin precession of ultracold neutrons,” *Phys. Rev. Lett.* **103**, 081602 (2009).
- [36] M. Smiciklas, J. M. Brown, L. W. Cheuk and M. V. Romalis, “A new test of local Lorentz invariance using ^{21}Ne -Rb-K comagnetometer,” *Phys. Rev. Lett.* **107**, 171604 (2011).
- [37] P. Cabella, P. Natoli and J. Silk, “Constraints on CPT violation from WMAP three year polarization data: a wavelet analysis,” *Phys. Rev. D* **76**, 123014 (2007).
- [38] B. Feng, M. Li, J. Q. Xia, X. Chen and X. Zhang, “Searching for CPT Violation with Cosmic Microwave Background Data from WMAP and BOOMERANG,” *Phys. Rev. Lett.* **96**, 221302 (2006).
- [39] J. Q. Xia, H. Li, X. l. Wang and X. m. Zhang, “Testing CPT Symmetry with CMB Measurements,” *Astron. Astrophys.* **483**, 715-718 (2008).
- [40] J. Q. Xia, H. Li and X. Zhang, “Probing CPT Violation with CMB Polarization Measurements,” *Phys. Lett. B* **687**, 129-132 (2010).
- [41] R. Casana, M. M. Ferreira, Jr. and J. S. Rodrigues, “Lorentz-violating contributions of the Carroll-Field-Jackiw model to the CMB anisotropy,” *Phys. Rev. D* **78**, 125013 (2008).
- [42] D. Colladay and V. A. Kostelecky, “Lorentz violating extension of the standard model,” *Phys. Rev. D* **58**, 116002 (1998).
- [43] V. A. Kostelecky and S. Samuel, “Gravitational Phenomenology in Higher Dimensional Theories and Strings,” *Phys. Rev. D* **40**, 1886-1903 (1989).

- [44] V. A. Kostelecky and R. Potting, “CPT and strings,” Nucl. Phys. B **359**, 545 (1991).
- [45] V. A. Kostelecky and R. Potting, “CPT, strings, and meson factories,” Phys. Rev. D **51**, 3923-3935 (1995).
- [46] V. A. Kostelecky and R. Potting, “Expectation values, Lorentz invariance, and CPT in the open bosonic string,” Phys. Lett. B **381**, 89-96 (1996).
- [47] W. Greiner and J. Reinhardt, “Quantum electrodynamics,” 3^a Edição. Berlin: Springer, 1991.
- [48] S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecky, C. D. Lane and T. Okamoto, “Noncommutative field theory and Lorentz violation,” Phys. Rev. Lett. **87**, 141601 (2001).
- [49] G. V. Dunne, “Aspects of Chern-Simons theory,” [arXiv:hep-th/9902115].
- [50] T. Mariz, J. R. Nascimento and A. Petrov, “Lorentz Symmetry Breaking — Classical and Quantum Aspects,” Springer, 2023.
- [51] V. A. Kostelecky and M. Mewes, “Signals for Lorentz violation in electrodynamics,” Phys. Rev. D **66**, 056005 (2002).
- [52] V. A. Kostelecky and M. Mewes, “Cosmological constraints on Lorentz violation in electrodynamics,” Phys. Rev. Lett. **87**, 251304 (2001).
- [53] N. Seiberg and E. Witten, “String theory and noncommutative geometry,” JHEP **9909**, 032 (1999).

- [54] S. R. Coleman and S. L. Glashow, “High-energy tests of Lorentz invariance,” *Phys. Rev. D* **59**, 116008 (1999).
- [55] S. R. Coleman and S. L. Glashow, “Cosmic ray and neutrino tests of special relativity,” *Phys. Lett. B* **405**, 249-252 (1997).
- [56] P. W. Higgs, “Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons,” *Phys. Rev. Lett.* **13**, 508-509 (1964).
- [57] Carvalho. Eduardo Santos, “Redução Dimensional do setor CPT-par do Modelo Padrão Estendido”. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Maranhão. Centro de Ciências Exatas e Tecnologia. São Luís. 2011.
- [58] F. R. Klinkhamer, “A CPT anomaly,” *Nucl. Phys. B* **578**, 277-289 (2000).
- [59] V. A. Kostelecky, “Gravity, Lorentz violation, and the standard model,” *Phys. Rev. D* **69**, 105009 (2004).
- [60] Belchior. Fernando de Menezes, “Correções radiativas no Modelo Bumblebee-Stueckelberg”. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Ceará. Departamento de Física. Fortaleza. 2021.
- [61] S. R. Coleman and E. J. Weinberg, “Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking,” *Phys. Rev. D* **7**, 1888-1910 (1973).
- [62] Assunção. José Fábio dos Santos de, “Tópicos em teorias de gauge com violação de simetria de Lorentz e CPT”. Tese (Doutorado em Física) - Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió. 2018.
- [63] W. E. Thirring, “A Soluble relativistic field theory?,” *Annals Phys.* **3**, 91-112 (1958).

- [64] J. D. Bjorken, “A Dynamical origin for the electromagnetic field,” *Annals Phys.* **24**, 174-187 (1963).
- [65] R. V. Maluf, J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, “Radiative corrections in bumblebee electrodynamics,” *Phys. Lett. B* **749**, 304-308 (2015).
- [66] R. Casana, A. Cavalcante, F. P. Poulis and E. B. Santos, “Exact Schwarzschild-like solution in a bumblebee gravity model,” *Phys. Rev. D* **97**, no.10, 104001 (2018).
- [67] R. V. Maluf and J. C. S. Neves, “Black holes with a cosmological constant in bumblebee gravity,” *Phys. Rev. D* **103**, no.4, 044002 (2021).
- [68] R. Oliveira, D. M. Dantas, V. Santos and C. A. S. Almeida, “Quasinormal modes of bumblebee wormhole,” *Class. Quant. Grav.* **36**, no.10, 105013 (2019).
- [69] W. D. R. Jesus and A. F. Santos, “Gödel-type universes in bumblebee gravity,” *Int. J. Mod. Phys. A* **35**, no.09, 2050050 (2020).
- [70] R. V. Maluf, V. Santos, W. T. Cruz and C. A. S. Almeida, “Matter-gravity scattering in the presence of spontaneous Lorentz violation,” *Phys. Rev. D* **88**, no.2, 025005 (2013).
- [71] O. Bertolami and J. Paramos, “The Flight of the bumblebee: Vacuum solutions of a gravity model with vector-induced spontaneous Lorentz symmetry breaking,” *Phys. Rev. D* **72**, 044001 (2005).
- [72] L. A. Lessa, R. Oliveira, J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, “Traversable wormhole solution with a background Kalb–Ramond field,” *Annals Phys.* **433**, 168604 (2021).

- [73] M. Kalb and P. Ramond, "Classical direct interstring action," *Phys. Rev. D* **9**, 2273-2284 (1974).
- [74] J. F. Assunção, T. Mariz, J. R. Nascimento and A. Y. Petrov, "Dynamical Lorentz symmetry breaking in a tensor bumblebee model," *Phys. Rev. D* **100**, no.8, 085009 (2019).
- [75] V. A. Kostelecky and S. Samuel, "Phenomenological Gravitational Constraints on Strings and Higher Dimensional Theories," *Phys. Rev. Lett.* **63**, 224 (1989).
- [76] B. Altschul and V. A. Kostelecky, "Spontaneous Lorentz violation and non-polynomial interactions," *Phys. Lett. B* **628**, 106-112 (2005).
- [77] Matsubara, T., "A New Approach to Quantum-Statistical Mechanics", *Prog. Theor. Phys.* 14, 351 (1955).
- [78] L. H. Ford, "Vacuum Polarization in a Nonsimply Connected Space-time", *Phys. Rev. D* **21**, 933 (1980).