

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE FÍSICA  
DISSERTAÇÃO EM FÍSICA TEÓRICA

Fagner Justiniano de Andrade Santos

Uma Discussão da Acústica de Fluidos como Modelo  
Análogo da Gravidade

Maceió-AL

2019

---

FAGNER JUSTINIANO DE ANDRADE SANTOS

Uma Discussão da Acústica de Fluidos como Modelo Análogo da Gravidade

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física. Área de Concentração: Física Teórica.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Manoel de Moraes Carvalho

Maceió-AL

2019

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho

S237d Santos, Fagner Justiniano de Andrade.  
Uma discussão da acústica de fluidos como modelo análogo da gravidade /  
Fagner Justiniano de Andrade Santos. – 2019.  
51 f. : il. color.

Orientador: Alexandre Manoel de Moraes Carvalho.  
Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto  
de Física. Programa de Pós Graduação em Física. Maceió, 2019.

Bibliografia: f. 48-51.

1. Acústica de fluidos. 2. Dinâmica dos fluidos. 3. Gravidade (Física). I. Título.

CDU:531.3-522

**Fagner Justiniano de Andrade Santos**

A Banca Examinadora composta pelos professores Alexandre Manoel de Morais Carvalho (orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Francisco Anacleto de Barros Fidelis de Moura, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas e Samuel Silva de Albuquerque, da Universidade Federal de Alagoas (Campus Arapiraca) consideram o candidato aprovado com grau " A ".

Maceió, 18 de março de 2019



Prof. Alexandre Manoel de Morais Carvalho



Prof. Francisco Anacleto de Barros Fidelis de Moura



Prof. Samuel Silva de Albuquerque

À minha irmã Déborah Maria de Andrade  
Santos.

Dedico.

# Agradecimentos

Aos meus pais, Denise de Andrade Santos e Erinaldo Alves dos Santos, pelo apoio incondicional.

Ao prof. Dr. Alexandre Manoel de Moraes Carvalho pela dedicação ao orientar este trabalho.

# Lista de Figuras

3.1	Um fluido em movimento pode formar "superfícies presas" quando o fluxo supersônico inclina os cones sonoros para além da vertical, [34]. . . . .	22
3.2	Um fluido em movimento pode formar um "horizonte acústico" quando o fluxo supersônico impede o movimento de ondas sonoras, [34]. . . . .	23
3.3	Uma geometria de vórtice em colápio, [36] . . . . .	30
4.1	Escoamento de Fonte; a partir da origem, [38]. . . . .	38
4.2	Escoamento de Sorvedouro; em direção a origem, [38]. . . . .	39
4.3	Fonte + Sorvedouro: mesma intensidade, [38]. . . . .	39
4.4	Famílias de Círculos, [37]. . . . .	41
4.5	Dipolo: Centro na origem, ponto singular, [37]. . . . .	42
4.6	Configuração do Dipolo: Fonte e Sorvedouro superpostos, [37]. . .	43

# Sumário

Agradecimentos	vi
Lista de Figuras	vii
Resumo	x
Abstract	xi
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 A Acústica de Fluidos</b>	<b>4</b>
2.1 Geometria Acústica . . . . .	6
2.2 Física Acústica e Dinâmica de Fluidos . . . . .	7
2.2.1 Equação da Continuidade . . . . .	7
2.2.2 Equação de Euler . . . . .	8
2.2.3 Flutuações . . . . .	11
<b>3 Características Gerais da Métrica Acústica</b>	<b>18</b>
3.1 Horizontes e Ergo-Regiões . . . . .	20
3.2 Superfície de Gravidade . . . . .	22
3.2.1 Espaços Acústicos estacionários (Não-Estáticos) . . . . .	27
3.3 Fluxo de Vórtice . . . . .	29
3.3.1 Zero vorticidade/Zero torque . . . . .	33
3.3.2 Força radial zero . . . . .	33
3.3.3 Força externa zero . . . . .	34
<b>4 Aplicação da Métrica Acústica</b>	<b>35</b>
4.1 Construção do Intervalo Acústico . . . . .	36



4.2	Exemplo: Fonte + Sorvedouro . . . . .	38
4.2.1	Combinação Linear: Fonte + Sorvedouro . . . . .	39
4.2.2	Superposição: Fonte + Sorvedouro . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>45</b>

# Resumo

Modelos análogos da gravidade é um programa de pesquisa que investiga análogos de campos gravitacionais na relatividade geral, considerando outros sistemas físicos não relativísticos. A motivação se dá, principalmente, pelo fato de não ser possível verificar experimentalmente a radiação Hawking (radiação emitida por um buraco negro). Isso implica dizer que o buraco negro não é completamente negro, ele emite alguma coisa, e do ponto de vista físico leva a questão se eu posso detectar essa emissão, a resposta é não, e não porque ainda não se tem tecnologia suficientemente sofisticada para tal, não se pode porque não é possível nunca, pois as propriedades dessa radiação é proporcional ao inverso do quadrado da massa do buraco negro, o qual tem massa fantástica. Então, qualquer sinal tipo a radiação Hawking que venha desse buraco negro, estará tão atenuada que não se consegue medir, comparando, por exemplo, com a radiação de fundo que já é bastante atenuada.

Nessa dissertação trazemos uma discussão acerca de análogos acústicos, estudo que trata de modelos provenientes da propagação de ondas em meio fluido. Uma abordagem clássica que captura aspectos inerentes da gravidade relativística, especialmente a existência daquilo que define um buraco negro, o horizonte de eventos.

**Palavras-chave:** Acústica de fluidos - Horizonte acústico - Métrica acústica - Modelo análogo

# Abstract

Analogous models of gravity is a research program that investigates analogues of gravitational fields in general relativity, considering other non-relativistic physical systems. The motivation is mainly due to the fact that it is not possible to experimentally verify the Hawking radiation (radiation emitted by a black hole). This implies that the black hole is not completely black, it emits something, and from the physical point of view it raises the question if I can detect that emission, the answer is no, and not because technology is still not sophisticated enough for that, can not because it is never possible, because the properties of this radiation is proportional to the inverse of the square of the mass of the black hole, which has fantastic mass. So any signal type Hawking radiation coming from that black hole will be so attenuated that it can not be measured, comparing, for example, with background radiation that is already greatly attenuated.

In this dissertation we bring a discussion about acoustic analogs, a study that deals with models from the propagation of waves in fluid medium. A classical approach that captures inherent aspects of relativistic gravity, especially the existence of what defines a black hole, the event horizon.

**Keyword:** Fluid Acoustics - Acoustic Horizon - Acoustic Metrics - Analog Model

# Capítulo 1

## Introdução

O estudo da gravidade é um dos mais essenciais da física, uma vez que estamos falando de uma das forças fundamentais da natureza. Inicialmente formulada como a lei da gravitação universal, pelo físico inglês Isaac Newton em sua obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, publicada em 1687, que descreve a lei da gravitação universal e as Leis de Newton, postula que, se dois corpos possuem massa, ambos sofrerão uma força de atração mútua proporcional às suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que separa seus centros de gravidade. No entanto, essa lei, como parte da mecânica, embora fundamental, não é completa (não é válida para corpos muito densos e super velocidades). Surge, no ano de 1915, uma teoria que viria a preencher essa lacuna, a teoria da relatividade geral publicada pelo popular físico alemão Albert Einstein. É a teoria aceita hoje como a descrição mais completa da gravidade. Com ela, a gravidade passa a ser interpretada como uma deformação da geometria do espaço-tempo, associando a ele uma curvatura que influencia na trajetória de qualquer partícula.

Algo interessante ocorre meses depois da publicação do trabalho de Einstein, o físico alemão Schwarzschild obteve sua primeira solução das equações de Einstein que assumia um objeto massivo e esférico na origem das coordenadas. Ele demonstrou a existência de uma singularidade na sua métrica, onde toda a matéria poderia vir a se concentrar em um único ponto criando uma região de volume nulo e densidade infinita. Esse resultado somado a esforços simultâneos de outros físicos traria o surgimento do conceito de buraco negro na física, nome este que só começou a ser utilizado em 1967 pelo físico estadunidense John Wheeler durante uma palestra. Este nome ilustra o fato de que estes objetos altamente densos não seriam visíveis para nós por não conseguirem emitir sinal luminoso

devido a existência do horizonte de eventos.

A partir daí muitas características dos buracos negros começam a ser apresentadas à comunidade científica, bem como outras soluções das equações de Einstein (não será abordado aqui). Essa difusão foi de extrema relevância e hoje se sabe que todas as características e propriedades do buraco negro podem ser descritas pela sua massa, carga e momento angular, já que todo o tipo de massa ou radiação que possa interagir com ele desaparece no horizonte de eventos se tornando inacessível para nós. Porém, ao menos teoricamente, um fenômeno peculiar pode ocorrer nas proximidades do horizonte de eventos, fazendo com que ele não seja totalmente "negro": ele emitiria uma certa radiação conhecida como radiação Hawking. Foi o físico Stephen Hawking que fez esta descoberta no início da década de setenta quando aplicou os conceitos da mecânica quântica.

O vácuo, no mundo quântico, não é totalmente vazio, ele contém pares de partículas virtuais que se manifestam como um fóton e um anti-fóton, surgindo e se aniquilando muito rapidamente, respeitando o princípio da incerteza de Heisenberg. Acontece o seguinte, se essas partículas surgem muito próximo ao horizonte de eventos de um buraco negro, o campo gravitacional ali pode separá-las com a captura do anti-fóton, emitindo um fóton para o infinito. Deste modo, haveria uma radiação sendo emitida no horizonte de eventos. Este fenômeno implica em um gasto de energia pelo buraco negro para separar as partículas do vácuo, o que acaba resultando em um processo de evaporação, isto é, na diminuição do seu tamanho com o passar do tempo. Além disso, a radiação Hawking tem um espectro tal como o emitido por um corpo negro, permitindo que seja associado ao buraco negro uma temperatura conhecida como temperatura Hawking.

Apesar de toda essa gama de novas descobertas e informações que veio com a teoria de Hawking, ela nunca passou por uma verificação empírica. Isso porque a radiação prevista por ele é extremamente fraca, sendo praticamente impossível de ser detectada com as técnicas usadas pela comunidade científica atualmente. Ainda mais, porque ainda não existe uma teoria quântica da gravitação, ou seja, Hawking utilizou de uma física desconhecida como base de sua teoria, visto que a transformação da partícula virtual em real no estado de vácuo ocorreria devido a ação da gravidade em nível quântico. Diversos trabalhos foram desenvolvidos desde então, tanto na tentativa de unificar a relatividade geral com a mecânica quântica quanto na investigação da radiação Hawking numa tentativa de obter informações acerca de sua validade teórica.

A partir deste momento, na tentativa de obter alternativas que proporcionem verificações empíricas da radiação Hawking, nascem os chamados modelos análogos da gravidade, mais especificamente, modelos análogos de buracos negros. Nascem de especulações teóricas no início da década de 80, quando o físico canadense William George Unruh percebeu que determinados aspectos da gravidade se relacionam com aspectos da hidrodinâmica, o que deu origem aos "buracos negros acústicos" (análogos de buracos negros). Ele notou que ondas sonoras em um fluido móvel se comporta semelhante à luz sob influência de um campo gravitacional (espaço-tempo curvo). Ou seja, se tivermos um sistema acústico em que o fluido ultrapasse a velocidade do som, criaremos um horizonte de eventos acústico. Isso possibilitou a criação de modelos acústicos análogos aos buracos negros da relatividade geral e a idealização de experimentos para os fenômenos previstos pela teoria de Hawking.

O fluxo de fluido supersônico pode gerar um "buraco", o análogo acústico de um "buraco negro", e a analogia pode ser estendida para demonstrar matematicamente a presença de radiação Hawking fonônica do horizonte acústico. Este exemplo particular fornece, pelo menos em princípio, um modelo de laboratório concreto para teoria do campo quântico de espaço curvo em um meio que é tecnologicamente acessível para verificação empírica. As primeiras verificações empíricas iniciaram a partir dos anos 2000, [35], [34], [28].

O objetivo dessa dissertação é abordar os conceitos mais relevantes para compreender como esta analogia é feita na dinâmica de fluidos.

No capítulo 2 deduzimos, a partir dos conceitos mais básicos, as equações fundamentais da dinâmica de fluidos (equação de Euler e equação da Continuidade), posteriormente unimos essas equações à perturbações acústicas no meio fluido e representamos a equação final da onda em termos da métrica acústica (a métrica física da relatividade com parâmetros adequados de ondas sonoras).

No capítulo 3 abordamos as características gerais da métrica acústica: os conceitos de horizontes e ergo-regiões, superfície de gravidade e espaços acústicos estacionários (não-estáticos).

No último capítulo, o capítulo 4, fazemos duas aplicações, um fluxo de vórtice com uma fonte na origem e um escoamento bidimensional na configuração de um dipolo, resultante de uma fonte e um sorvedouro superpostos.

# Capítulo 2

## A Acústica de Fluidos

Após o papel hidrodinâmico pioneiro de White em 1973 [23], que estudou o traçado de raios acústicos em fluidos móveis não relativísticos, houve vários trabalhos na década de 1980 usando uma analogia acústica para investigar a propagação de ondas de choque em situações astrofísicas, mais notavelmente as de Moncrief [24] e Matarrese [25], [26], [27]. Em particular, no trabalho de Moncrief [24] as perturbações lineares de um fluido relativista perfeito em um fundo de Schwarzschild foram estudadas, e foi mostrado que a equação de onda para tais perturbações pode ser expressa como uma equação de onda relativística em alguma métrica efetiva (acústica) que pode admitir horizontes acústicos. Nesse sentido [24] pode ser visto como um precursor dos trabalhos posteriores sobre geometrias acústicas e horizontes acústicos. Na verdade, como eles também permitem um histórico relativista geral de Schwarzschild, os resultados de Moncrief [24] são, em certo sentido, mais gerais do que os considerados nos principais artigos sobre a gravidade acústica que se seguiram.

Apesar desses resultados impressionantes, consideramos que esses artigos fazem parte do período histórico pela principal razão de que tais obras são filosoficamente ortogonais aos desenvolvimentos modernos em gravidade análoga. De fato, a principal motivação para tais trabalhos foi o estudo da dinâmica de fluidos perfeitos em fluxos de acreção em torno de buracos negros, ou em expansão cosmológica, e neste contexto a descrição através de um fundo acústico efetivo foi apenas uma ferramenta para derivar resultados relativos a leis de conservação e estabilidade. É por isso que, mesmo que temporalmente, [24] anteceda o artigo de Unruh de 1981 por um ano, enquanto que [25], [26], [27] pós-datado de Unruh de 1981 por alguns anos, parece não ter havido nenhuma conexão cruzada.

Um pouco ironicamente, 1983 marcou o surgimento de alguns resultados puramente experimentais em ondas de superfície em água obtidas por Badulin et al. [29]. Na época, esses resultados passaram despercebidos pela comunidade da relatividade, mas agora são de crescente interesse, e são vistos como precursores do trabalho teórico relatado em [31], [30] e do trabalho experimental moderno relatado em [32], [33].

A acústica na dinâmica de fluidos é um dos exemplos mais simples de um modelo análogo (quicá o mais simples). A física e sua estrutura conceitual são simples e os cálculos são razoavelmente simples, i.e., não são impossivelmente difíceis (o arranjo conceitual baseia-se num fluido em movimento arrastando ondas sonoras junto com ele. Se a velocidade do fluido se tornar uma velocidade supersônica<sup>1</sup>, então nessa região supersônica as ondas sonoras nunca serão capazes de lutar contra seu curso, resultando num "buraco mudo", região da qual o som não pode escapar). Pensando em nível de uma analogia verbal não-matemática, soa muito similar à noção de um "buraco negro" em relatividade geral.

A pauta em questão é se essa analogia verbal pode ser embasada (ou transformada) numa afirmação "físico-matemática" precisa. Só depois de uma conexão "físico-matemática" entre a física acústica (no fluxo de fluido) e pelo menos algumas características da relatividade geral é que poderemos afirmar ter um modelo análogo de alguns aspectos da gravidade.

As características da relatividade geral que são absorvidas em um modelo análogo, são as características cinemáticas que têm a ver com como campos (clássicos e quânticos) são definidos no espaço-tempo curvo, e a condição "Sem ela não" (Sine qua non) de qualquer modelo análogo é a existência de alguma "métrica efetiva" que capta a noção dos espaços-tempos curvos que surgem na relatividade geral (ou pelo menos, capta a noção da geometria de Minkowski da relatividade especial). Essa descrição verbal pode ser convertida em uma afirmação "físico-matemática" precisa, que em última análise é a razão pela qual os modelos análogos são de interesse físico (desmembrados em dois níveis: *geometria acústica* e *física acústica*), [34].

---

<sup>1</sup>Velocidade supersônica: Refere-se a qualquer velocidade acima de 1,2 vezes a velocidade do som.



## 2.1 Geometria Acústica

As virtudes da abordagem geométrica são sua extrema simplicidade e o fato de que a estrutura básica é independente de dimensão. Além disso, esta lógica rapidamente generaliza para situações físicas mais complexas.

Ao nível dessa geometria, precisamos assumir apenas que: A velocidade do som, "c", em relação ao fluido, está bem definida. Assim como a velocidade do fluido, "v", relativa ao laboratório, está bem definida. Então, em relação ao laboratório, a velocidade de um raio sonoro se propagando, em relação ao fluido, ao longo da direção definida pelo vetor normal unitário,  $\mathbf{n}$ , é

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = c\mathbf{n} + \mathbf{v}. \quad (2.1)$$

Isso define um cone sonoro no espaço-tempo dado pela condição  $\mathbf{n}^2 = 1$ , i.e.,

$$-c^2 dt^2 + (d\mathbf{x} - \mathbf{v}dt)^2 = 0. \quad (2.2)$$

Ou ainda,

$$-(c^2 - v^2)dt^2 - 2(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{x})dt + d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = 0. \quad (2.3)$$

Resolver essa equação quadrática para  $d\mathbf{x}$  como uma função de  $dt$  fornece um cone duplo associado a cada ponto no espaço e no tempo, uma vez que é uma geodésica de medida nula. Isso está associado a uma classe de métricas conformes à métrica lorentziana<sup>2</sup>.

$$g = \Omega^2 \begin{pmatrix} -(c^2 - v^2) & -\mathbf{v}^T \\ -\mathbf{v} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

Na geometria acústica a derivação precisa da forma matemática da analogia é tão simples que é quase trivial, além de ser extremamente geral. Porém há uma desvantagem

---

<sup>2</sup>Em um espaço-tempo quadridimensional qualquer, a métrica euclidiana tem assinatura (+ + + +) enquanto que a métrica de Minkowski, por satisfazer às transformações de Lorentz, tem assinatura (+ - - -) ou (- + + +). Há uma métrica que possui assinatura semelhante à métrica de Minkowski, ou seja, com sinais diferentes em seus termos não importando se é (+ - - -) ou (- + + +), damos o nome de métrica pseudo-euclidiana (métrica lorentziana).

em seu uso: No limite dessa geometria, pode-se deduzir apenas a estrutura causal do espaço-tempo, e não se obtém uma única métrica efetiva [34].

## 2.2 Física Acústica e Dinâmica de Fluidos

A física acústica tem uma vantagem significativa; enquanto a "derivação da analogia" se mantém em um regime mais restrito, a "analogia" pode, agora, determinar, unicamente, uma métrica efetiva específica e acomodar uma equação de onda para ondas sonoras.

O objetivo dessa seção é propor uma relação inerente entre espaços curvos e a acústica de fluidos. Em busca desse objetivo serão estudadas as chamadas (Equações fundamentais da dinâmica de fluidos), a saber, *equação da Continuidade* e *equação de Euler*.

### 2.2.1 Equação da Continuidade

Considere uma porção de um fluido não viscoso que, num dado instante  $t$ , ocupa uma região  $R(t)$  do espaço e que se desloca segundo um campo de velocidade  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = (v_{x_1}, v_{x_2}, v_{x_3})$ . Qualquer uma de suas partículas individuais descreve uma trajetória  $l(t)$ , de modo que:  $\frac{dl}{dt} = \mathbf{v}(t, \mathbf{s})$ . Se  $\rho(t, \mathbf{x})$  representa a densidade do fluido na posição  $\mathbf{x}$  e no instante  $t$ , então a massa do fluido que ocupa a região  $R(t)$  é dada por

$$m(t) = \int_{R(t)} \rho(t, \mathbf{x}) d^3x. \quad (2.5)$$

Segundo a lei de conservação de massa,  $m(t)$  é constante no tempo, isto é,  $\frac{dm(t)}{dt} = 0$  para quaisquer  $t$ . Assim, resulta da derivação de Euler

$$\frac{d}{dt} \int_{R(t)} \rho(t, \mathbf{x}) d^3x = \int_{R(t)} \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, \mathbf{x}) d^3x + \int_{\partial R(t)} \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0, \quad (2.6)$$

onde  $\partial R(t)$  denota a superfície que delimita  $R(t)$  e  $\hat{\mathbf{n}}$  denota o vetor unitário normal exterior a  $\partial R(t)$  no ponto  $\mathbf{x} \in \partial R(t)$ . Aplicando o teorema de Gauss (ou teorema da divergência) nessa expressão, i.e.,

$$\int_{\partial R(t)} \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{R(t)} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) d^3x, \quad (2.7)$$

obtemos

$$\int_{R(t)} \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{R(t)} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) d^3x = 0. \quad (2.8)$$

O que resulta em

$$\int_{R(t)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right\} d^3x = 0. \quad (2.9)$$

Visto que a igualdade em (2.9) deve ser válida para qualquer volume, o integrando deve se anular. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.10)$$

Essa equação reflete os princípios de conservação para determinados fenômenos de difusão<sup>3</sup>. Nesse caso específico em que tratamos da dinâmica de fluidos, ela exprime a lei de conservação da massa do fluido, é a denominada *Equação da Continuidade*.

### 2.2.2 Equação de Euler

Considere uma região  $R(t)$  delimitada por  $\partial R(t)$  no fluido. Se  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  é uma força externa por unidade de massa que atua no fluido, a força externa resultante que atua em  $R(t)$  é [1]

$$\mathbf{F}_{ext} = \int_{R(t)} \rho \mathbf{F}(\mathbf{x}) d^3x, \quad (2.11)$$

na qual  $\rho = \rho(t, \mathbf{x})$  é a densidade do fluido. Seja  $p(t, \mathbf{x})$  a pressão do fluido, então a força resultante devido a essa pressão é

$$\mathbf{F}_p = - \int_{\partial R(t)} p d\mathbf{S}. \quad (2.12)$$

Observe que esta integral de superfície pode ser transformada numa integral de volume ao aplicar o teorema do gradiente<sup>4</sup>, i.e.,

---

<sup>3</sup>Fenômenos de difusão: São casos particulares dos denominados processos de transporte - aqueles em que há transferências direcionadas de energia interna (como na condução térmica), de massa (tal qual ocorre na difusão de um gás), de momento linear (caso dos fluidos), etc., em meios hipoteticamente contínuos (ou quase contínuos).

<sup>4</sup>Teorema do Gradiente:  $(\int_R \nabla \phi d^3x = \int_{\partial R} \phi d\mathbf{S})$

$$\mathbf{F}_p = - \int_{\partial R(t)} p d\mathbf{S} = - \int_{R(t)} \nabla p d^3x. \quad (2.13)$$

Agora, podemos estruturar uma relação conveniente utilizando a segunda lei de Newton, que afirma que a variação do momento linear com o tempo é igual a resultante das forças externas que atuam em  $R(t)$ , i.e.,

$$\mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_p = \frac{d}{dt} \int_{R(t)} \rho \mathbf{v} d^3x. \quad (2.14)$$

O membro direito da expressão acima indica a taxa de variação da quantidade total de momento associado com o fluido que está no interior de uma superfície  $\partial R(t)$  que delimita  $R(t)$ . Se transformarmos a integral de volume numa integral de massa, escrevendo  $\rho d^3x = dm$ , então  $dm$  é invariável quando  $\partial R(t)$  se desloca com o fluido. Logo,

$$\frac{d}{dt} \int_{R(t)} \rho \mathbf{v} d^3x = \int_{R(t)} \frac{d\mathbf{v}}{dt} dm = \int_{R(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d^3x. \quad (2.15)$$

Em consequência,

$$\mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_p = \int_{R(t)} \rho \mathbf{F} d^3x - \int_{R(t)} \nabla p d^3x = \int_{R(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d^3x. \quad (2.16)$$

Resultando em

$$\int_{R(t)} \left\{ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{F} + \nabla p \right\} d^3x = 0. \quad (2.17)$$

Como  $R(t)$  é uma região arbitrária no fluido, temos

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{F} + \nabla p = 0.$$

Ou ainda,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (2.18)$$

Essa expressão descreve o movimento do fluido, nesse caso, compressível<sup>5</sup> e não viscoso<sup>6</sup>. É a chamada *Equação de Euler*.

O que faremos a seguir é manipular convenientemente esta equação, de modo a

---

<sup>5</sup>Compressibilidade: Capacidade de um fluido variar seu volume como resposta a uma pressão.

<sup>6</sup>Viscosidade: Resistência de um fluido ao escoamento, por meio de componentes de atrito.

explicitarmos ela na forma de *Bernoulli*. Sabemos que a velocidade depende do tempo e da posição  $(x_1, x_2, x_3)$ . Diferenciando-a, temos

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt = dx_1 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_2} + dx_3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} + dt \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \quad (2.19)$$

Consequentemente,

$$d\mathbf{v} = (d\mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt. \quad (2.20)$$

Assim,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \quad (2.21)$$

Deste modo, a Eq. (2.18) se torna

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (2.22)$$

Sejam  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$  funções vetoriais, tal que satisfaçam a seguinte identidade:

$$\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = \mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g}) + \mathbf{g} \times (\nabla \times \mathbf{f}) + (\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{g} + (\mathbf{g} \cdot \nabla) \mathbf{f}. \quad (2.23)$$

Se  $\mathbf{f} = \mathbf{g} = \mathbf{v}$ , então

$$\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \nabla(v^2) = 2\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + 2(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (2.24)$$

Resultando em

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla(v^2) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}). \quad (2.25)$$

Substituindo essa expressão na Eq. de Euler (2.22), resulta

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) - \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{2} \nabla(v^2) + \mathbf{F}. \quad (2.26)$$

Consideremos agora que o fluido seja irrotacional<sup>7</sup>, o que implica afirmar que  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ . Essa consideração nos traz uma lembrança muito conveniente da análise vetorial, i.e., qualquer campo vetorial, tendo rotacional nulo, pode ser expresso como o gradiente de

---

<sup>7</sup>Fluido irrotacional: Esse fluido flui sem que suas partículas sofram deformações (ou seja, seu fluxo é livre de vorticidade), desprezando a influência da viscosidade.

uma função escalar. Isso nos permite descrever o campo de velocidade  $\mathbf{v}$  como o gradiente de um potencial de velocidade  $\psi$ ,  $\mathbf{v} = -\nabla\psi$ . Consideremos também que o fluido seja barotrópico, i.e., que a densidade depende exclusivamente da pressão,  $\rho = \rho(p)$ . Assim, obtemos uma nova cara para equação de Euler

$$\nabla \left( -\frac{d\psi}{dt} \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{2} \nabla (|\nabla\psi|^2) + \mathbf{F}. \quad (2.27)$$

Agora, assumindo que o campo de força externo  $\mathbf{F}$  seja conservativo, podemos escrever  $\mathbf{F}$  como um gradiente arbitrário de um potencial escalar  $\varphi$ , tal que  $\mathbf{F} = -\nabla\varphi$ . Assim, ao substituirmos na Eq. (2.27), obtemos

$$\nabla \left\{ -\frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{\rho} p + \frac{1}{2} |\nabla\psi|^2 + \varphi \right\} = 0. \quad (2.28)$$

Logo,

$$-\frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{\rho} p + \frac{1}{2} |\nabla\psi|^2 + \varphi = 0. \quad (2.29)$$

Seja uma função  $h(p)$ , definida por  $h(p) = \int_0^p \frac{dp'}{\rho}$ , de modo que seu gradiente seja dado por  $\nabla h = \frac{1}{\rho} \nabla p \Rightarrow h = \frac{1}{\rho} p$ . Logo, podemos escrever a equação de Euler (2.29) na forma de Bernoulli:

$$-\frac{d\psi}{dt} + h + \frac{1}{2} |\nabla\psi|^2 + \varphi = 0. \quad (2.30)$$

Essa equação, como uma derivação da equação de Euler, descreve o comportamento dinâmico do fluido. Neste caso em que tratamos, para um fluido compressível, irrotacional e não viscoso. É atribuída ao matemático neerlandês-suíço Daniel Bernoulli, denominada, portanto, *Equação de Bernoulli*. O princípio de Bernoulli afirma que para um fluxo sem viscosidade, um aumento na velocidade do fluido ocorre simultaneamente com uma diminuição na pressão ou uma diminuição na energia potencial do fluido.

### 2.2.3 Flutuações

Nessa seção trataremos das flutuações de algumas grandezas que ocorrem nas equações da dinâmica de fluidos. Aqui iremos linearizar essas equações em torno do *background*  $(\rho_0, p_0, \psi_0)$ . O que iremos fazer é separar o movimento exato do fluido, descrito pelas variáveis  $(\rho, p, \psi)$ , no movimento médio da massa do fluido,  $(\rho_0, p_0, \psi_0)$ , além

de perturbações acústicas de baixa amplitude,  $(\epsilon\rho_1, \epsilon p_1, \epsilon\psi_1)$ . Deste modo, definimos as seguintes flutuações

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + \epsilon\rho_1 + o(\epsilon)^2, \\ p &= p_0 + \epsilon p_1 + o(\epsilon)^2, \\ \psi &= \psi_0 + \epsilon\psi_1 + o(\epsilon)^2.\end{aligned}\tag{2.31}$$

O programa de linearização baseia-se na hipótese subjacente de uma suposição física específica, que restringe a validade de nossa análise à exigência de que a amplitude das perturbações de curto comprimento de onda e alta frequência seja pequena (É por essa razão que as ondas sonoras de amplitudes suficientemente altas devem ser tratadas pela solução direta das equações completas da dinâmica de fluidos). Esse processo consiste em aplicar essas flutuações nas equações de movimento, Eq. (2.10) e Eq. (2.30), [34].

### Linearização da Equação da Continuidade

Aplicando as flutuações, (2.31), na equação da continuidade, Eq. (2.10), obtemos

$$\nabla \cdot [(\rho_0 + \epsilon\rho_1 + o(\epsilon)^2)\mathbf{v}] + \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \epsilon\rho_1 + o(\epsilon)^2) = 0.\tag{2.32}$$

Lembremos que o campo de velocidade,  $\mathbf{v}$ , foi definido como sendo o gradiente de um potencial de velocidade,  $\mathbf{v} = -\nabla\psi$ . Assim, observando a terceira linha de (2.31), concluímos que o campo de velocidade pode ser linearizado e reescrito como  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \epsilon\mathbf{v}_1 + o(\epsilon)^2$ . Substituindo essa linearização em (2.32) e desconsiderando os termos de segunda ordem, obtemos

$$\left[ \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) + \frac{\partial \rho_0}{\partial t} \right] + \left[ \nabla \cdot (\epsilon\rho_0 \mathbf{v}_1 + \epsilon\rho_1 \mathbf{v}_0) + \epsilon \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right] = 0.\tag{2.33}$$

Para que a igualdade na expressão (2.33) seja válida, os termos entre colchetes devem ser nulos. Assim,

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) + \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0\tag{2.34}$$

e

$$\nabla \cdot (\epsilon\rho_0 \mathbf{v}_1 + \epsilon\rho_1 \mathbf{v}_0) + \epsilon \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0.\tag{2.35}$$

Essas equações, (2.34) e (2.35), representam a linearização da equação da continuidade, [34].

### Linearização da Equação de Euler

Partindo da condição barotrópica, i.e., que a densidade do fluido é dependente apenas da pressão ( $\rho = \rho(p)$ ), explicitamos

$$h(p) = h(p_0 + \epsilon p_1 + o(\epsilon)^2) = h_0 + \epsilon \frac{p_1}{\rho_0} + o(\epsilon)^2. \quad (2.36)$$

Substituindo esse  $h(p)$  linearizado e aplicando as flutuações (2.31) na equação de Euler, obtemos

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\psi_0 + \epsilon \psi_1 + o(\epsilon)^2) + (h_0 + \epsilon \frac{p_1}{\rho_0} + o(\epsilon)^2) + \frac{1}{2} |\nabla(\psi_0 + \epsilon \psi_1 + o(\epsilon)^2)|^2 + \varphi = 0. \quad (2.37)$$

Após algumas manipulações algébricas e desconsiderando os termos de segunda ordem, chegamos ao seguinte resultado

$$\left[ -\frac{\partial \psi_0}{\partial t} + h_0 + \frac{1}{2}(\nabla \psi_0)^2 + \varphi \right] + \epsilon \left[ -\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho_0} + (\nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_1) \right] = 0. \quad (2.38)$$

Novamente, a igualdade acima é válida somente se os termos entre colchetes forem nulos, resultando em

$$-\frac{\partial \psi_0}{\partial t} + h_0 + \frac{1}{2}(\nabla \psi_0)^2 + \varphi = 0 \quad (2.39)$$

e

$$-\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho_0} - \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_1 = 0. \quad (2.40)$$

Essas equações representam a linearização da equação de Euler. Note que a partir da equação (2.40) podemos extrair o seguinte resultado

$$p_1 = \rho_0 \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_1 \right). \quad (2.41)$$

Agora, ainda munidos da condição barotrópica, podemos, de modo conveniente, fazer a derivada total de  $\rho$ , o que nos fornece



$$d\rho = \frac{\partial\rho}{\partial p} dp. \quad (2.42)$$

Isso nos possibilita expressar

$$\rho_1 = \frac{\partial\rho}{\partial p} p_1. \quad (2.43)$$

Assim,

$$\rho_1 = \frac{\partial\rho}{\partial p} \rho_0 \left( \frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla\psi_1 \right). \quad (2.44)$$

Agora, apanharemos essa consequência da equação linearizada de Euler e substituiremos na equação linearizada da Continuidade. Deste modo, chegamos a equação da onda

$$\nabla \cdot \left[ \rho_0 \nabla\psi_1 - \frac{\partial\rho}{\partial p} \rho_0 \left( \frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla\psi_1 \right) \mathbf{v}_0 \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial\rho}{\partial p} \rho_0 \left( \frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla\psi_1 \right) \right] = 0. \quad (2.45)$$

Essa equação de onda descreve a propagação do potencial escalar linearizado  $\psi_1$ . Uma vez que  $\psi_1$  é determinado, a Eq. (2.41) determina  $p_1$ , em seguida a Eq. (2.44) determina  $\rho_1$ . Assim, essa equação de onda determina por completo as perturbações do meio acústico. Os campos de fundo (background),  $p_0$ ,  $\rho_0$  e  $\mathbf{v}_0 = -\nabla\psi_0$ , que aparecem como coeficientes dependentes do tempo e da posição nessa equação de onda, são limitados para resolver as equações de movimento do fluido para um fluxo externo, barotrópico, invíscido<sup>8</sup> e irrotacional. Além disso, eles podem ter dependências temporais e espaciais arbitrárias [6].

Vamos agora construir uma álgebra mais simples para representar essa equação de onda. Essa construção se dará, a princípio, com a dedução da equação de ondas sonoras num fluido estático, homogêneo e invíscido, a fim de encontrar a expressão da velocidade de propagação dessa onda (sem adentrar em muitos detalhes físico-matemáticos), [34].

Seja  $u(x, t)$  uma variável de deslocamento do fluido. Um deslocamento  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , produz uma variação de densidade  $\delta$ , tal que

$$\delta = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.46)$$

---

<sup>8</sup>Invíscido: O fluxo de um fluido que não apresenta viscosidade é chamado de fluxo invíscido ou escoamento invíscido.

onde  $\rho_0$  é a densidade inicial. Essa variação,  $\delta$ , produz uma variação de pressão

$$p = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_0 \delta = -\rho_0 \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_0 \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.47)$$

Os deslocamentos gerados pela variação de pressão obedecem a equação de movimento (Segunda Lei de Newton)

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.48)$$

o que leva à equação de ondas

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (2.49)$$

onde  $c = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_0^{\frac{1}{2}}$  é a velocidade de propagação da onda sonora no fluido. De forma genérica

$$\partial_t^2 u = c^2 \nabla^2 u. \quad (2.50)$$

Observe que a Eq. (2.45) é uma generalização de (2.50), para um fluido não homogêneo, ou para um fluido que está em movimento, possivelmente mesmo em movimento não estável. Essa generalização, com todas as suposições adotadas, serve como prova para o seguinte teorema:

*Se um fluido é barotrópico e invíscido e o fluxo é irrotacional (embora possivelmente dependente do tempo), então a equação de movimento para o potencial de velocidade descrevendo uma perturbação acústica é idêntica à equação de movimento d'Alembertiana para um campo escalar sem massa minimamente acoplado, propagando em uma geometria Lorentziana (3 + 1)-dimensional*

$$\Delta \psi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \psi), \quad (2.51)$$

*Com os índices gregos de (0 – 3) e os índices romanos de (1 – 3). Sob essas condições, a propagação do som é governada por uma métrica acústica -  $g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x})$ . Esta métrica acústica descreve uma geometria Lorentziana (pseudo-Riemanniana) (3 + 1) - dimensional. A métrica depende algebricamente da densidade, velocidade do fluxo e velocidade local do som no fluido. Especificamente*

$$g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{\rho}{c} \begin{pmatrix} -(c^2 - v^2) & -\mathbf{v}^T \\ -\mathbf{v} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

(Aqui, a matriz identidade é  $3 \times 3$ .) Em geral quando o fluido não é homogêneo e flui, o tensor acústico de Riemann associado a essa métrica Lotentziana será diferente de zero.

Construamos, agora, uma matriz simétrica ( $4 \times 4$ )

$$f^{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{\rho_0}{c^2} \begin{pmatrix} -(c^2 - v^2) & -\mathbf{v}_0^j \\ -\mathbf{v}_0^i & (c^2 \delta^{ij} - v_0^i v_0^j) \end{pmatrix}$$

Note que podemos indicar  $f^{\mu\nu}$  como

$$f^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}. \quad (2.54)$$

Em que  $g^{\mu\nu}(t, \mathbf{x})$  é a inversa da matriz  $g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x})$  e  $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$ . Escremos da seguinte forma

$$g^{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\rho_0 c} \begin{pmatrix} -(c^2 - v^2) & -\mathbf{v}_0^j \\ -\mathbf{v}_0^i & (c^2 \delta^{ij} - v_0^i v_0^j) \end{pmatrix}$$

Por um lado, implica em

$$\det(f^{\mu\nu}) = (\sqrt{-g})^4 g^{-1} = g. \quad (2.56)$$

Por outro lado, a partir de (2.53), temos

$$\det(f^{\mu\nu}) = \left(\frac{\rho_0}{c^2}\right)^4 [(-1)(c^2 - v_0^2) - (-v_0^2)](c^2)(c^2) = -\frac{\rho_0^4}{c^2}. \quad (2.57)$$

Conseqüentemente

$$g = -\frac{\rho_0^4}{c^2} \Rightarrow \sqrt{-g} = \frac{\rho_0^2}{c} \quad (2.58)$$

Assim, substituindo (2.54) e (2.58) na Eq. (2.51), obtemos

$$\Delta\psi \equiv \frac{c}{\rho^2} \partial_\mu (f^{\mu\nu} \partial_\nu \psi). \quad (2.59)$$

Igualando a zero, resulta

$$\partial_\mu (f^{\mu\nu} \partial_\nu \psi) = 0. \quad (2.60)$$

Portanto, introduzindo as coordenadas do espaço-tempo (3 + 1)-dimensional,  $x_\mu \equiv (t; x^i)$ , podemos reescrever a equação de onda (2.45) em termos do d'Alembertiano, obtendo a Eq. (2.60) que é totalmente equivalente à Eq. (2.45).

Dessa construção algébrica mais simples, podemos descrever o intervalo acústico

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{\rho_0}{c} [-c^2 dt^2 + (dx^i - v_0^i dt) \delta_{ij} (dx^j - v_0^j dt)] \quad (2.61)$$

É notável que, embora a dinâmica subjacente dos fluidos seja newtoniana, não-relativística, e ocorre em espaço plano-mais-tempo, as flutuações (ondas sonoras) são governadas por uma geometria curvada de espaço-tempo Lorentziana (pseudo-Riemanniana) (3 + 1)- dimensional. Para os estudiosos da relatividade geral, esta observação descreve um modelo físico muito simples e concreto para certas classes de espaços-tempos de Lorentz, incluindo buracos negros. Por outro lado, essa discussão também é potencialmente de interesse para os praticantes da mecânica do contínuo e dinâmica de fluidos, na medida em que fornece uma introdução concreta simples às técnicas geométricas diferenciais de Lorentz, [34].

# Capítulo 3

## Característica Gerais da Métrica Acústica

Neste capítulo serão tratadas as características principais e peculiares da métrica acústica (ou métrica efetiva para esse estudo). Vale ressaltar que existem duas métricas distintas e relevantes para a discussão:

A métrica do espaço-tempo físico é, neste caso, apenas a métrica plana usual do espaço de Minkowski

$$\eta_{\mu\nu} \equiv (\text{diag}[-c_{\text{luz}}^2, 1, 1, 1])_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

onde  $c_{\text{luz}}$  é a velocidade da luz no vácuo. O movimento acústico é não-relativístico, de modo que  $\|v_0\| \ll c_{\text{luz}}$ , e é suficiente considerar a relatividade de Galileu para a mecânica dos fluidos subjacente (as partículas do fluido acoplam-se apenas à métrica física  $\eta_{\mu\nu}$ ).

Por outro lado, as ondas sonoras não convergem à métrica física. As perturbações acústicas acoplam-se apenas à métrica acústica efetiva  $g_{\mu\nu}$  (com uma base Lorentziana,  $[-, +, +, +]$ ).

Entretanto, a geometria determinada pela métrica acústica herda algumas propriedades chave da existência da métrica física. A topologia, por exemplo, não depende da métrica efetiva considerada. A geometria acústica herda a topologia<sup>1</sup> subjacente da mé-

---

<sup>1</sup>Topologia: É um ramo da matemática, cuja finalidade é estudar a estrutura dos objetos sem preocupação com seu tamanho e formato, assim como a geometria. A geometria descreve matematicamente uma figura, enquanto a topologia analisa as possibilidades das figuras. Vamos pensar em uma circunferência. Por sua vez, é uma figura em que todos os pontos se encontram à mesma distância do centro. Se

trica física-de ordem  $\mathfrak{R}^4$ -com possivelmente algumas regiões extirpadas (devido a quaisquer condições de contorno que se deseje impor ao fluido). Além disso, a geometria acústica herda automaticamente do parâmetro do tempo newtoniano, a propriedade importante da causalidade estável [9], [10], [12], [11], [34]. Observe que

$$g^{\mu\nu}(\nabla_\mu t) \cdot (\nabla_\nu t) = -\frac{1}{\rho_0 c} < 0. \quad (3.2)$$

Isso impede algumas das mais interessantes patologias relacionadas à causalidade que as vezes surgem na relatividade geral (para um aprofundamento sobre patologias causais na relatividade geral, ver [10], [22]).

As métricas integrais do campo de velocidade do fluido são ortogonais (na métrica de Lorentz) para as superfícies de tempo constante. Assim, a quadrivelocidade normalizada do fluido é

$$V^\mu = \frac{(1; v_0^i)}{\sqrt{\rho_0 c}}, \quad (3.3)$$

de modo que

$$g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = g(V, V) = -1. \quad (3.4)$$

Essa quadrivelocidade está relacionada com o gradiente do parâmetro de tempo

$$\nabla_\mu t = (1, 0, 0, 0); \quad \nabla^\mu t = -\frac{(1; v_0^i)}{\rho_0 c} = -\frac{V^\mu}{\sqrt{\rho_0 c}}. \quad (3.5)$$

O tempo acústico adequado ao longo das linhas de fluxo do fluido (linhas de corrente) é

$$\tau = \int \sqrt{\rho_0 c} dt, \quad (3.6)$$

e as curvas integrais são geodésicas da métrica acústica se e somente se  $\rho_0 c$  é independente da posição.

Em uma geometria Lorentziana geral (3 + 1)-dimensional, a métrica têm 6 graus de liberdade por ponto no espaço-tempo (uma matriz simétrica  $[4 \times 4]$  implica 10 componentes independentes; subtraindo 4 condições de coordenadas). Em contraste, a métrica a circunferência estivesse em três dimensões e fosse uma bola poderia tornar-se um cubo. A topologia entende os objetos como se fossem de borracha e pudessem ser transformados. De fato, as propriedades dos objetos se mantêm invariáveis embora sua forma possa ser alterada.

acústica é mais restrita, sendo descrita completamente por três escalares  $\phi_0(t, \mathbf{x})$ ,  $\rho_0(t, \mathbf{x})$  e  $c(t, \mathbf{x})$ , tendo, no máximo, 3 graus de liberdade por ponto no espaço-tempo. A equação da continuidade ainda consegue reduzir para 2 graus de liberdade, o que pode ser considerado como  $\phi_0(t, \mathbf{x})$  e  $c(t, \mathbf{x})$ . Deste modo, a métrica acústica, pode, na melhor das hipóteses, reproduzir algum subconjunto das métricas genéricas de interesse na relatividade geral.

Por fim, devemos ressaltar que, na gravidade de Einstein, a métrica do espaço-tempo está relacionada à distribuição da métrica pelas equações diferenciais não-lineares de Einstein-Hilbert. Entretanto, em oposição, a métrica acústica está relacionada à distribuição da matéria de uma forma algebricamente simples.

Outros conceitos que traduzem imediatamente são os de *Ergo-Region* (*ergo-região*); *Surface Trapped* (*superfície aprisionada*); *Gravidade superficial*; *Horizonte Aparente* e *Horizonte de Eventos*. Nas próximas seções estabeleceremos o compromisso de explicá-los mais detalhadamente, uma vez que são características importantes da relatividade geral padrão, e as analogias são úteis apenas na medida em que preservam essas noções, [34].

### 3.1 Horizontes e Ergo-Regiões

Começemos introduzindo o conceito de uma *Ergo-Região*. Considere curvas integrais do seguinte vetor

$$K^\mu \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^\mu = (1, 0, 0, 0)^\mu. \quad (3.7)$$

Se o fluxo é constante, então esse é o *vetor de Killing*<sup>2</sup> de translação do tempo. Se o fluxo não é constante, a métrica de Minkowski de fundo (background) nos fornece uma definição natural de "em repouso". Assim,

$$g_{\mu\nu} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^\mu \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^\nu = g_{tt} = -[c^2 - v^2]. \quad (3.8)$$

Esta quantidade muda de sinal quando  $\|v\| > c$ . Logo, qualquer região supersônica no fluido é uma *Ergo-Região*. (E o limite da ergo-região pode ser considerada a *Ergo-Superfície*.) O análogo deste comportamento na relatividade geral é a ergosfera que circunda qualquer buraco negro giratório—é uma região onde o espaço se move com velocidade

---

<sup>2</sup>É um campo vetorial em uma variedade de Riemann que preserva a métrica. Campos de Killing são campos que direcionam a simetria.

superluminal, relativa para as estrelas fixas [13].

Uma superfície aprisionada em acústica é definida da seguinte maneira: Considere qualquer superfície fechada de duas faces. Se a velocidade do fluido está em toda parte apontando para dentro e a componente normal da velocidade do fluido é maior que a velocidade local do som, então não importa a direção que uma onda sonora se propaga, ela será absorvida pelo fluxo de fluido e ficará presa dentro da superfície. Diz-se, portanto, que a superfície é aprisionada externamente. Uma superfície aprisionada internamente (superfície anti-armadilhas), em contrapartida, pode ser definida exigindo que o fluxo de fluido está, com sua componente normal supersônica, apontando para fora em todas as direções [14], [15]. É somente pelo fato de que a métrica de Minkowski fornece uma definição natural de "em repouso", que podemos adotar uma definição tão simples e direta. Na relatividade geral, precisamos desenvolver mecanismos técnicos adicionais, como a noção de expansão de pacotes de geodésicas nulas, de entrada e de saída, antes de definir superfícies aprisionadas.

A região acústica aprisionada é agora definida como a região que contém as superfícies externas aprisionadas e o horizonte aparente acústico (futuro) como o limite da região aprisionada. Isto é, o horizonte aparente acústico é a superfícies de duas faces para a qual a componente normal da velocidade do fluido é, em toda parte, igual à velocidade local do som. (Também é possível definir regiões anti-armadilhas e horizontes aparentes (passados), mas essas noções tem pouca utilidade na relatividade geral).

O horizonte de eventos (horizonte absoluto) é definido, como na relatividade geral, exigindo-se que seja o limite da região da qual geodésicas nulas (fônons) não podem escapar. Este é de fato o horizonte de eventos (futuro). Um horizonte de eventos (passado) pode ser definido em termos do limite (fronteira) da região que não pode ser alcançado por fônons (recebidos)-estritamente falando, isso requer que definamos noções de infinitos nulos passados e futuros, mas simplesmente tomaremos tudo isso como entendido. Em particular, o horizonte de eventos é uma superfície nula, cujos geradores são geodésicas nulas.

Em todas as geometrias estacionárias, os horizontes aparente e de eventos coincidem e a distinção é imaterial. Já em geometrias com dependência temporal, a distinção é relevante. Ao calcular a gravidade superficial, devemos restringir a atenção às geometrias estacionárias (fluxo constante).



Nos fluxos de fluido de alta simetria (simetria esférica, simetria plana), a ergosfera pode coincidir com o horizonte aparente acústico, ou até mesmo com o horizonte de eventos acústico. Este é o análogo do resultado na relatividade geral de que, para buracos negros estáticos (em oposição a estacionários), a ergosfera e o horizonte de eventos coincidem [16], [34].

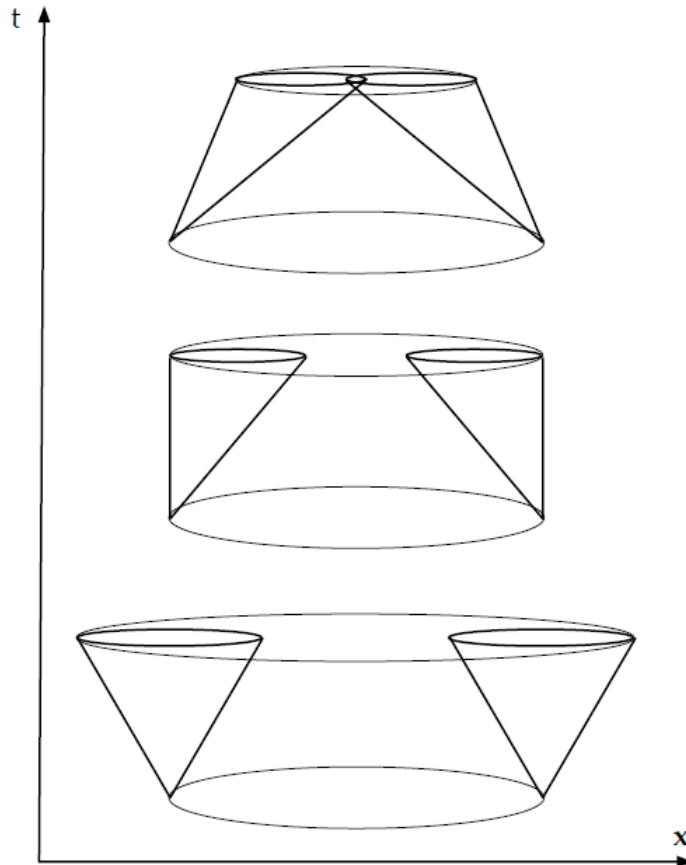


Figura 3.1: Um fluido em movimento pode formar "superfícies presas" quando o fluxo supersônico inclina os cones sonoros para além da vertical, [34].

## 3.2 Superfície de Gravidade

Como já discutido na seção anterior, o horizonte de eventos é definido em termos dos fônons (geodésicas nulas) que escapam do buraco negro acústico, devido a isso o horizonte de eventos é uma superfície nula, cujos geradores são automaticamente geodésicas

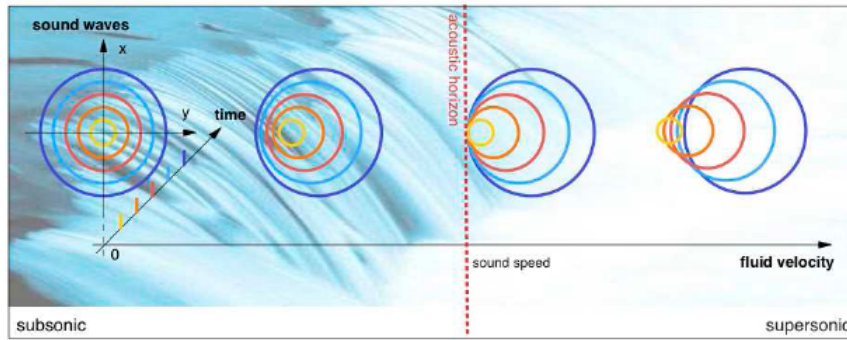


Figura 3.2: Um fluido em movimento pode formar um "horizonte acústico" quando o fluxo supersônico impede o movimento de ondas sonoras, [34].

nulas. No caso da acústica, há uma parametrização particular dessas geodésicas nulas, que é a parametrização em termos da coordenada de tempo newtoniano da métrica física subjacente. Isso nos permite definir inequivocamente uma *gravidade superficial* mesmo para horizontes de eventos não-estacionários (dependentes do tempo), calculando a extensão em que este parâmetro de tempo natural deixa de ser um parâmetro afim para os geradores nulos do horizonte (esta parte falha na relatividade geral, onde não há coordenadas de tempo naturais e universais, a menos que exista um *vetor Killing* do tipo temporal. Por essa razão que é tão difícil entender a noção de gravidade superficial com geometrias não-estacionárias na relatividade geral.)

Quando se trata de calcular explicitamente a gravidade superficial em termos de gradientes específicos do fluxo de fluido, é útil limitar a atenção a situações de fluxo constante, de modo que a métrica acústica seja estacionária. Isso tem a vantagem adicional de que, para geometrias estacionárias, a noção de gravidade superficial em acústica é inequivocamente equivalente à definição da relatividade geral. Também é útil tomar conhecimento do fato de que a situação simplifica para consideravelmente para métricas acústicas estáticas (em oposição a meramente estacionárias).

Para configurar o quadro apropriado, escrevemos a métrica acústica estacionária geral na forma

$$ds^2 = \frac{\rho}{c} [-c^2 dt^2 + (d\mathbf{x} - \mathbf{v}dt)^2]. \quad (3.9)$$

O vetor de Killing de translação é simplesmente  $K^\mu = (1; \mathbf{0})$ , com

$$K^2 \equiv g_{\mu\nu} K^\mu K^\nu \equiv - \|\mathbf{K}\|^2 = -\frac{\rho}{c} [c^2 - v^2]. \quad (3.10)$$

Espaços-tempo acústicos estáticos: Suponhamos agora que o vetor  $\frac{\mathbf{v}}{(c^2-v^2)}$  seja integrável, então podemos definir uma nova coordenada do tempo por

$$d\tau = dt + \frac{\mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}}{c^2 - v^2}. \quad (3.11)$$

Substituindo isso de volta no intervalo acústico,

$$ds^2 = \frac{\rho}{c} \left[ -(c^2 - v^2) d\tau^2 + \left\{ \delta_{ij} + \frac{v^i v^j}{c^2 - v^2} \right\} dx^i dx^j \right]. \quad (3.12)$$

Nesse sistema de coordenadas, a ausência de termos cruzados do espaço-tempo torna manifesto que a geometria acústica é, de fato, estática (existe uma família de hipersuperfícies espaciais ortogonais ao vetor Killing temporal). A condição de que uma geometria acústica seja estática, ao invés de meramente estacionária, é vista como sendo

$$\nabla \times \left\{ \frac{\mathbf{v}}{(c^2 - v^2)} \right\} = 0. \quad (3.13)$$

Isto é, (já que, ao derivar a existência da métrica efetiva, já assumimos que o fluido é irrotacional),

$$\mathbf{v} \times \nabla(c^2 - v^2) = 0. \quad (3.14)$$

Isso requer que o fluxo de fluido seja paralelo a outro vetor que não é exatamente a aceleração, mas está intimamente relacionado a ele. Note que devido a suposição barotrópica, temos

$$\nabla c^2 = \left( \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \nabla p = \left( \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \rho \mathbf{a}. \quad (3.15)$$

Ou seja,

$$\nabla(c^2 - v^2) = \left( \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial p} \rho - 2 \right) \mathbf{a}. \quad (3.16)$$

Assim, dado que a geometria já é estacionária, a condição para uma geometria acústica estática reduz-se a

$$\left( \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial p} \rho - 2 \right) \mathbf{v} \times \mathbf{a} = 0. \quad (3.17)$$

Essa condição pode ser satisfeita de duas maneiras, seja por ter  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{a}$ , ou por ter a equação de estado muito específica (e não particularmente realista)

$$p = \frac{1}{3}k\rho^3 + C; \quad c^2 = k\rho^2. \quad (3.18)$$

Uma vez que tenhamos uma geometria estática, podemos aplicar diretamente todos os truques padrões para calcular a gravidade superficial desenvolvida na relatividade geral [17]. Criamos um sistema de observadores fiduciais (FIDOS) através da normalização adequada do vetor de Killing de translação temporal

$$\mathbf{V}_{FIDO} \equiv \frac{\mathbf{K}}{\|\mathbf{K}\|} = \frac{\mathbf{K}}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{c}\right) [c^2 - v^2]}}. \quad (3.19)$$

A quadriaceleração de FIDOS é definida como

$$\mathbf{A}_{FIDO} \equiv (\mathbf{V}_{FIDO} \cdot \nabla) \mathbf{V}_{FIDO}, \quad (3.20)$$

e usando o fato de que  $\mathbf{K}$  é um vetor de Killing, ele pode ser calculado da maneira padrão

$$\mathbf{A}_{FIDO} = +\frac{1}{2} \frac{\nabla \|\mathbf{K}\|^2}{\|\mathbf{K}\|^2}. \quad (3.21)$$

Isto é,

$$\mathbf{A}_{FIDO} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\nabla(c^2 - v^2)}{(c^2 - v^2)} + \frac{\nabla\left(\frac{\rho}{c}\right)}{\left(\frac{\rho}{c}\right)} \right]. \quad (3.22)$$

A gravidade superficial é agora definida tomando-se a norma  $\|\mathbf{A}_{FIDO}\|$ , multiplicando por uma função de lapso,  $\|\mathbf{K}\| \equiv \sqrt{\left(\frac{\rho}{c}\right) [c^2 - v^2]}$ , e tomando o limite quando se aproxima do horizonte:  $\|\mathbf{v}\| \rightarrow c$  (lembrando que estamos lidando com o caso estático). O resultado líquido é

$$\|\mathbf{A}_{FIDO}\| \cdot \|\mathbf{K}\| = \frac{1}{2} \mathbf{n} \cdot \nabla (c^2 - v^2) + o(c^2 - v^2), \quad (3.23)$$

de modo que a gravidade superficial é dada em termos de uma derivada normal por

$$g_H = \frac{1}{2} \frac{\partial(c^2 - v^2)}{\partial_n} \Big|_H = c_H \frac{\partial |c - v|}{\partial_n} \Big|_H. \quad (3.24)$$

O fato de que o prefator  $\left(\frac{\rho}{c}\right)$  cai fora do resultado final para a gravidade superficial pode ser justificado apelando para invariância conforme conhecida da gravidade superficial [18]. Embora derivado de uma maneira totalmente diferente, este resultado também é compatível com a expressão para gravidade superficial obtida nos buracos negros do estado sólido

de Reznik [19], onde um índice de refração dependente da posição desempenha um papel análogo para a métrica acústica. Finalmente, note que podemos escrever a expressão para gravidade superficial como

$$g_H = \left| 1 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right| \| \mathbf{a} \|, \quad (3.25)$$

demonstrando que (em um espaço-tempo acústico estático) a gravidade superficial é (até um fator adimensional dependendo da equação de estado) diretamente relacionada à aceleração do fluido à medida que ele atravessa o horizonte. Para a água  $p = k\rho + C$ ,  $c^2 = k$ , e  $g_H = \| \mathbf{a} \|$ ; para um condensado de Bose-Einstein (CBE)  $p = \frac{1}{2}k\rho^2 + C$ , implicando  $c^2 = k\rho$ , que então leva ao resultado simples

$$g_H = \frac{1}{2} \| \mathbf{a} \| . \quad (3.26)$$

Uma vez que essa é uma geometria estática, a relação entre a temperatura de Hawking e a gravidade superficial pode ser verificada da *fast-track* (faixa-rápida), usando o truque de rotação wick para continuar analiticamente ao espaço euclidiano, [20].

Devemos enfatizar que a fórmula para a temperatura de Hawking contém tanto a gravidade superficial,  $g_H$ , quanto a velocidade do som,  $c_H$ , no horizonte, [6]. Especificamente

$$kT_H = \frac{\hbar g_H}{2\pi c_H}. \quad (3.27)$$

Conseqüentemente

$$kT_H = \frac{\hbar}{2\pi} \frac{\partial |c - v|}{\partial n} \Big|_H, \quad (3.28)$$

que está mais próximo da forma original fornecida por Unruh [21] (que corresponde a  $c$  ser constante). Em bases dimensionais é uma derivada espacial da velocidade (que tem a mesma dimensão de frequência) que é um fator determinante na especificação da temperatura de Hawking fisicamente normalizada. É bem comum na relatividade geral e nesses modelos analógicos adtoddarmos ( $c \rightarrow 1$ ) e ( $c_H \rightarrow 1$ ), respectivamente. Isso tem o potencial de levar a determinadas confusões. É necessário escolher unidades para medir a gravidade superficial como uma aceleração física, então é a quantidade  $\left( \frac{g_H}{c_H} \right)$  que tem as dimensões de frequência e governam o fluxo de Hawking.

A transformação de coordenadas que usamos para colocar a métrica acústica na forma explicitamente estática é uma matemática perfeitamente aceitável, e do ponto de vista da relatividade geral é até uma simplificação. Entretanto, do ponto de vista da física newtoniana subjacente do fluido, esta é uma maneira deliberadamente sem nexos de dessincronizar seus relógios para pegar uma região perfeitamente razoável-o limite da região do fluxo supersônico-e empurrá-la para fora (Tempo: mais infinito). Do ponto de vista da dinâmica dos fluidos, essa transformação de coordenadas está correta, porém é mais perversa e é mais simples manter uma boa compreensão da física, permanecendo com a coordenada de tempo newtoniana, [34].

### 3.2.1 Espaços Acústicos estacionários (Não-Estáticos)

Se o fluxo de fluido não satisfizer a condição de integrabilidade, o que nos permite introduzir um sistema de coordenadas explicitamente estático, a definição da gravidade superficial fica mais complexa. Lembremos que, por construção, o horizonte aparente acústico é, em geral, definido como sendo uma superfície dupla para a qual a componente normal da velocidade do fluido é, em qualquer lugar, igual à velocidade local do som, enquanto o horizonte de eventos acústico (horizonte absoluto) é caracterizado pelo limite dessas geodésicas nulas (os fônons) que não escapam ao infinito.

No caso estacionário, essas noções coincidem, e ainda é verdade que o horizonte é uma superfície nula e pode ser governado por um conjunto apropriado de curvas nulas. Suponhamos que de alguma forma tenhamos isolado a localização do horizonte acústico, então, na vizinhança do horizonte, podemos dividir o fluxo de fluido em componentes normais e tangenciais, [34].

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel, \quad (3.29)$$

onde  $\mathbf{v}_\perp = v \perp \hat{n}$ .

É essencial que usemos a coordenada de tempo newtoniana, herdada do *background* do fluido. Além disso,  $\hat{n}$  é um campo vetorial unitário que, no horizonte, é perpendicular a ele, e longe do horizonte há uma extensão adequada. (Por exemplo, pegue a distância geodésica até o horizonte e considere seu gradiente.) Só precisamos dessa dessa decomposição para manter algum conjunto aberto abrangendo o horizonte. Além disso, por definição, sabemos que  $v_\perp = c$  no horizonte. Consideremos, agora, o campo vetorial

$$\mathbf{L}^\mu = (1; v_{\parallel}^i). \quad (3.30)$$

Como as componentes espaciais desse campo vetorial são, por definição, tangentes ao horizonte, as curvas integrais desse campo vetorial serão geradoras para o horizonte. Além disso, a norma desse vetor, na métrica acústica, é

$$\|\mathbf{L}\|^2 = -\frac{\rho}{c}[-(c^2 - v^2) - 2\mathbf{v}_{\parallel} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}_{\parallel} \cdot \mathbf{v}_{\parallel}] = \frac{\rho}{c}(c^2 - v_{\perp}^2). \quad (3.31)$$

Em particular, no horizonte acústico,  $\mathbf{L}^\mu$  define um campo vetorial nulo, cujas curvas integrais são geradoras do horizonte acústico. Verificamos agora que esses geradores são geodésicas, embora o campo vetorial,  $\mathbf{L}$ , não seja normalizado com um parâmetro afim e, desse modo, deve-se calcular a gravidade superficial.

Considere a quantidade  $(\mathbf{L} \cdot \nabla)\mathbf{L}$  e calcule

$$L^\alpha \nabla_\alpha L^\mu = L^\alpha (\nabla_\alpha L_\beta - \nabla_\beta L_\alpha) g^{\beta\mu} + \frac{1}{2} \nabla_\beta (L^2) g^{\beta\mu}. \quad (3.32)$$

Para calcular o primeiro termo, note que

$$L_\mu = \frac{\rho}{c}[-(c^2 - v_{\perp}^2); \mathbf{v}_{\perp}]. \quad (3.33)$$

Assim,

$$L_{[\alpha, \beta]} = - \begin{pmatrix} 0 & -\nabla_i \left[ \frac{\rho}{c}(c^2 - v_{\perp}^2) \right] \\ +\nabla_j \left[ \frac{\rho}{c}(c^2 - v_{\perp}^2) \right] & \left( \frac{\rho}{c} v_{\perp}^i \right)_{[i, j]} \end{pmatrix}$$

E então

$$L^\alpha L_{[\beta, \alpha]} = \left\{ \mathbf{v}_{\parallel} \cdot \nabla \left[ \frac{\rho}{c}(c^2 - v_{\perp}^2) \right]; \nabla_j \left[ \frac{\rho}{c}(c^2 - v_{\perp}^2) \right] + v_{\parallel}^i \left( \frac{\rho}{c} |v_{\perp}^i| \hat{n} \right)_{[j, i]} \right\}. \quad (3.35)$$

No horizonte, onde  $c = v_{\perp}$ , e assumindo adicionalmente  $\mathbf{v}_{\parallel} \cdot \nabla \rho = 0$  para que a densidade seja constante no horizonte, implica

$$(L^\alpha L_{[\beta, \alpha]}) \Big|_{\text{horizonte}} = -\frac{\rho}{c} [0; \nabla_j (c^2 - v_{\perp}^2)] = -\frac{\rho}{c} \frac{\partial (c^2 - v_{\perp}^2)}{\partial n} (0; \hat{n}_j). \quad (3.36)$$

Similarmente, para o segundo termo, temos

$$\nabla_\beta(L^2) = \left[ 0; \nabla_j \left( \frac{\rho}{c} (c^2 - v_\perp^2) \right) \right]. \quad (3.37)$$

No horizonte isso novamente simplifica

$$\nabla_\beta(L^2) \Big|_{horizonte} = +\frac{\rho}{c} [0; \nabla_j (c^2 - v_\perp^2)] = +\frac{\rho}{c} \frac{\partial(c^2 - v_\perp^2)}{\partial n} (0; \hat{n}_j). \quad (3.38)$$

Existe um cancelamento parcial entre os dois termo. Assim,

$$(L^\alpha \nabla_\alpha L_\mu)_{horizonte} = +\frac{1}{2} \frac{\rho}{c} \frac{\partial(c^2 - v_\perp^2)}{\partial n} (0; \hat{n}_j), \quad (3.39)$$

enquanto

$$(L_\mu)_{horizonte} = \frac{\rho}{c} (0; \hat{n}_j). \quad (3.40)$$

Comparando esse resultado com a definição padrão da gravidade superficial, [9], temos

$$(L^\alpha \nabla_\alpha L_\mu)_{horizonte} = +\frac{g_H}{c} (L_\mu)_{horizonte}, \quad (3.41)$$

temos, assim

$$g_H = \frac{1}{2} \frac{\partial(c^2 - v_\perp^2)}{\partial n} = c \frac{\partial(c - v_\perp)}{\partial n}. \quad (3.42)$$

Portanto,

$$g_H = c \frac{\partial(c - v_\perp)}{\partial n}. \quad (3.43)$$

Esse resultado está de acordo com o cálculo para buracos negros acústicos estáticos.

### 3.3 Fluxo de Vórtice

O fluxo de fluido, no qual as ondas sonoras são impostas, é governado por três equações chaves já descritas anteriormente, a equação de Euler, a equação da Continuidade e a equação barotrópica ( $p = p(\rho)$ ).

Consideremos a situação em que o vórtice contém uma pia ou uma fonte na origem. (Um exemplo concreto pode ser a geometria da banheira de drenagem onde o



fluido é sistematicamente extraído de um dreno localizado no centro) [36].

Assumindo um fluxo de fluido independente do tempo, de forma cilíndricamente simétrica com uma linha de vórtice alinhada ao longo do eixo  $z$  (ver Fig. 3.3), a velocidade do fluido é

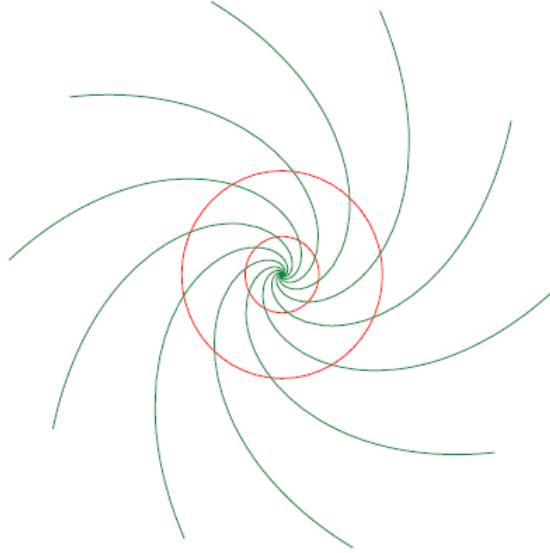


Figura 3.3: Uma geometria de vórtice em colapso, [36]

$$\mathbf{v} = v_r(r)\hat{r} + v_\theta(r)\hat{\theta}. \quad (3.44)$$

Sempre que  $v_r(r)$  for não nulo, todo vórtice deve ser pensado como colapsando ou expandindo.

A equação da Continuidade para esse problema cilíndricamente simétrico é

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.45)$$

e a equação de Euler rearranjada para uma pressão  $p$  que depende apenas da coordenada radial,  $r$ , é

$$\mathbf{f} = \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + c^2 \frac{\partial \rho}{\partial r} \hat{r}. \quad (3.46)$$

Notamos, portanto, que  $\rho$  não é, em geral, uma variável independente. Como (3.45) corresponde a uma equação com campo livre de divergência, a integração em qualquer círculo fechado no plano bidimensional, produz

$$\int_C \rho(r) \mathbf{v}(r) \cdot \hat{r} ds = 2\pi \rho(r) v_r(r) r = 2\pi k_1, \quad (3.47)$$

onde  $v_r(r) \neq 0$  e  $k_1$  é um número inteiro. Assim,

$$\rho(r) = \frac{k_1}{r v_r(r)}. \quad (3.48)$$

Deste modo, concluímos que

$$\rho(r) v_r(r) \propto \frac{1}{r} \quad (3.49)$$

Substituindo na equação rearranjada de Euler, obtemos

$$\mathbf{f} = \frac{k_1}{r v_r} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + c^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{k_1}{r v_r} \right), \quad (3.50)$$

onde  $c$  é uma função de  $\rho$ , e, portanto, uma função de  $v_r$ . Agora, especificamos o perfil da força em termos do perfil de velocidade desejado,  $v_r$ ,  $v_\theta$ , a equação de estado e uma única constante de integração  $k_1$ .

O cálculo da aceleração do fluido leva a

$$\mathbf{a} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla(v^2) - \mathbf{v} \times (\nabla \mathbf{v}). \quad (3.51)$$

Sabemos que  $\mathbf{v} = v_r(r) \hat{r} + v_\theta(r) \hat{\theta}$ . Estamos numa situação de simetria cilíndrica, então o gradiente e o rotacional devem ser utilizados em coordenadas cilíndricas. Assim,

$$\frac{1}{2} \nabla(v^2) = v_r \partial_r v_r \hat{r} + v_\theta \partial_r v_\theta \hat{r}. \quad (3.52)$$

e

$$\nabla \times \mathbf{v} = \partial_r v_\theta \hat{z} + \frac{v_\theta}{r} \hat{z}. \quad (3.53)$$

Consequentemente

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -v_r \partial_r v_\theta \hat{\theta} - \frac{v_r v_\theta}{r} \hat{\theta} + v_\theta \partial_r v_\theta \hat{r} + \frac{v_\theta^2}{r} \hat{r}. \quad (3.54)$$

Deste modo, ganhamos a seguinte aceleração

$$\mathbf{a} = \left[ \frac{1}{2} \partial_r(v_r^2) - \frac{v_\theta^2}{r} \right] \hat{r} + \left[ \frac{v_r}{r} \partial_r(r v_\theta) \right] \hat{\theta}. \quad (3.55)$$

Logo, obtemos a força externa decomposta na direção radial e tangencial

$$\mathbf{f} = f_r \hat{r} + f_\theta \hat{\theta}, \quad (3.56)$$

onde

$$f_r = \mathbf{f} \cdot \hat{r} = k_1 \left\{ \frac{1}{rv_r} \left[ \frac{1}{2} \partial_r (v_r^2) - \frac{v_\theta^2}{r} \right] + c^2 \partial_r \left( \frac{1}{rv_r} \right) \right\} \quad (3.57)$$

e

$$f_\theta = \mathbf{f} \cdot \hat{\theta} = k_1 \left\{ \frac{1}{r^2} \partial_r (rv_\theta) \right\}. \quad (3.58)$$

No regime da geometria acústica, o elemento de linha acústica para o vórtice de linha mais geral (independente do tempo, simetria cilíndrica, colapso/expansão) é

$$ds^2 \propto - (c^2 - v^2) dt^2 - 2v_r dr dt - 2v_\theta r d\theta dt + dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2. \quad (3.59)$$

Reiterando, dada uma equação barotrópica de estado,  $p(\rho)$ , uma vez que os perfis de velocidade  $v_r$  e  $v_\theta$ , são especificados, então, até uma única constante de integração  $k_1$ , a densidade e a velocidade do som não são mais livres, mas são fixadas pela equação da continuidade e a equação de estado. Além disso, a equação de Euler nos diz exatamente quanta força externa é necessária para configurar o fluxo de fluido, [36].

No regime da física acústica, o elemento de linha acústica é

$$ds^2 = \frac{\rho}{c} \left\{ - (c^2 - v^2) dt^2 - 2v_r dr dt - 2v_\theta r d\theta dt + dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \right\}. \quad (3.60)$$

A principal peculiaridade da física acústica é que, por razões técnicas, a equação de Klein-Gordon com espaço curvo sem massa (equação de onda de d'Alembert) só pode ser derivada se o fluxo tiver vorticidade zero. Isso requer  $v_\theta(r) = \frac{k_2}{r}$  e, portanto,  $f_\theta = 0$ , de modo que não haja fluxo. Mais precisamente, a equação d'Alembetiana é uma boa aproximação, desde que a frequência da onda seja alta em comparação com a vorticidade. No entanto, na presença de vorticidade e torque significativo, uma equação de onda mais complicada é válida (consultar [8]), mas essa equação de onda requer uma estrutura geométrica adicional além da métrica efetiva e, portanto, não é adequada para o desenvolvimento de modelos analógicos da relatividade geral, [36].

Vamos agora explorar alguns casos particulares.

### 3.3.1 Zero vorticidade/Zero torque

Se assumimos vorticidade zero,  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ , o cálculo do intervalo métrico simplifica consideravelmente, desde que  $v_\theta = \frac{k_2}{r}$ , o que implica  $f_\theta = 0$ . Inversamente, se assumimos torque zero, então (assumindo  $k_1 = 0$ ) a vorticidade é zero.

Note que a relação simples (torque zero, se e somente se, vorticidade zero) requer a hipótese de fluxo radial não nulo. Com o fluxo radial nulo, o torque é sempre zero para um fluxo independente do tempo, independentemente de o fluxo estar ou não livre de vorticidade.

Por outro lado, assumindo a conservação do momento angular, assumimos  $\rho v_\theta \propto \frac{1}{r}$  (ao assumir torques externos, estamos colocando uma restrição nas forças externas do fluido), isto é, a densidade de fundo,  $\rho$ , deve ser constante ao longo do fluxo (o que implica automaticamente que a pressão de fundo,  $p$ , e a velocidade do som,  $c$ , também são constantes em todo fluxo de fluido), [36].

### 3.3.2 Força radial zero

Supondo a força radial nula,  $f_r = 0$ , e assumindo  $k_1 \neq 0$ , encontramos

$$\frac{1}{rv_r} \left[ \frac{1}{2} \partial_r (v_r^2) - \frac{v_\theta^2}{r} \right] + c^2(r) \partial_r \left( \frac{1}{rv_r} \right) = 0. \quad (3.61)$$

Assim, agora, as partes angular e radial da velocidade de fundo dependem uma da outra. Uma vez escolhido, por exemplo,  $v_\theta$  e  $c(r)$ , uma equação diferencial restringe  $v_r$ :

$$v_r \partial_r v_r \left\{ 1 - \frac{c^2}{v_r^2} \right\} = \frac{c^2 + v_\theta^2}{r}. \quad (3.62)$$

### 3.3.3 Força externa zero

Se assumimos força externa zero,  $\mathbf{f} = 0$ , ambas as forças externas (angular e radial) são zero. Então, assumindo  $k_1 \neq 0$ ,  $v_\theta = \frac{k_2}{r}$ ,

$$v_r \partial_r v_r \left\{ 1 - \frac{c^2}{v_r^2} \right\} = \frac{c^2}{r} + \frac{k_2^2}{r^3}. \quad (3.63)$$

Como  $c$  depende de  $\rho$  através da equação barotrópica e  $\rho$  depende de  $v_r$  através da equação da continuidade, esta é uma EDO não-linear para  $v_r(r)$  (muito complexa). (Para o fluxo radial zero essa equação se reduz à tautologia  $0 = 0$  e devemos adotar a análise do ítem anterior.)

Em geral, a ergosuperfície é definida pela região supersônica do fluxo de fluido,

$$v_r^2 + v_\theta^2 = c^2, \quad (3.64)$$

enquanto o horizonte de eventos é definido pela região onde

$$v_r^2 = c^2. \quad (3.65)$$

Os horizontes podem ser formados de três formas diferentes:

- 1)  $v_r = -c \neq 0$  é um horizonte de buraco negro
- 2)  $v_r = +c \neq 0$  é um horizonte de buraco branco
- 3)  $v_r = \pm c = 0$  é um horizonte bifurcado, [36].

# Capítulo 4

## Aplicação da Métrica Acústica

Queremos nesse capítulo fazer uma aplicação utilizando a métrica acústica. O objetivo é retomar o exemplo de um fluxo de fluido independente do tempo, com uma geometria de simetria cilíndrica e uma linha de vórtice alinhada ao longo do eixo  $z$ , de modo que o potencial gere, ao invés de um campo de velocidade proporcional a  $\frac{1}{r}$ , um campo de velocidade proporcional a  $\frac{1}{r^2}$ , e assim, analogamente, satisfaça a equação da Continuidade. Para tanto, iremos demonstrar que qualquer campo vetorial proporcional a  $\frac{1}{r^2}$  é livre de divergência.

Seja  $f$  uma função escalar de  $r$  contínua (exceto, possivelmente, em  $r = 0$ ), onde  $\mathbf{r}$  é o vetor posição e  $r = |\mathbf{r}|$ , tal que  $\mathbf{v} = f(r)\mathbf{r}$ . Calculemos o divergente de  $[f(r)\mathbf{r}]$ :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot [f(r)\mathbf{r}] &= f(r)(\nabla \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{r} \cdot (\nabla f(r)) \\ &= 3f(r) + \mathbf{r} \cdot [f'(r)\nabla r].\end{aligned}\tag{4.1}$$

Sabemos que  $dr = (\nabla r) \cdot d\mathbf{r}$ . Desse modo, como  $\nabla r$  é paralelo a  $\mathbf{r}$ , temos

$$\nabla r = \alpha \mathbf{r},\tag{4.2}$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro de proporcionalidade. Assim,

$$dr = (\alpha \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \alpha r dr.\tag{4.3}$$

Consequentemente,

$$\alpha = \frac{1}{r} \Rightarrow \nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{e}_r.\tag{4.4}$$

Substituindo (4.4) em (4.1), obtemos

$$\nabla \times \times \times [f(r)\mathbf{r}] = 3f(r) + rf'(r). \quad (4.5)$$

Como  $f(r)$  é contínua, porém arbitrária, escolhamos ela convenientemente, fazendo  $f(r) = r^n$ , tal que  $n$  é um número inteiro. Agora, substituindo-a em (4.5), chegamos a seguinte expressão:

$$\nabla \times \times \times [r^n \mathbf{r}] = 3(r^n) + r(nr^{n-1}). \quad (4.6)$$

Assim,

$$\nabla \times \times \times [r^n \mathbf{r}] = (n+3)r^n. \quad (4.7)$$

Note que se  $n = -3$ , então

$$\nabla \times \times \times [r^{-3} \mathbf{r}] = (-3+3)r^{-3} = 0. \quad (4.8)$$

Portanto,

$$\nabla \cdot \left[ \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right] = \nabla \cdot \left[ \frac{1}{r^2} \hat{e}_r \right] = 0. \quad (4.9)$$

Toda a aplicação obedecerá a (4.9).

## 4.1 Construção do Intervalo Acústico

Munidos da métrica lorentziana (vide seção 2.1), construíamos a métrica acústica efetiva de acordo com o requerido acima:

$$g = \frac{\rho_0}{c} \begin{pmatrix} -(c^2 - v^2) & -v_r & -v_\theta & -v_z \\ -v_r & 1 & 0 & 0 \\ -v_\theta & 0 & 1 & 0 \\ -v_z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Agora podemos construir o intervalo acústico como se segue:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (4.11)$$

Observe que  $dx^0 \equiv dt$ ;  $dx^1 \equiv dx$ ;  $dx^2 \equiv dy$ ;  $dx^3 \equiv dz$ . Queremos essa construção em termos das coordenadas cilíndricas:  $x = r \cos \theta$ ;  $y = r \sin \theta$ ;  $z = z$ , em que  $\theta = 2\pi$ . Logo,

$$\begin{aligned} dx^0 &= -cdt \\ dx^1 &= dr \\ dx^2 &= r d\theta. \\ dx^3 &= dz \end{aligned} \quad (4.12)$$

Além disso, note que  $g_{12} = g_{13} = g_{21} = g_{23} = g_{31} = g_{32} = 0$ . Assim,

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c} \{ -(c^2 - v^2) dt^2 - 2(v_r dr + v_\theta r d\theta + v_z dz) dt + dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \}. \quad (4.13)$$

Esse intervalo acústico é genérico para o propósito desse capítulo e servirá para tratar toda aplicação a ser realizada aqui.

Na próxima seção abordaremos fluxos de fluidos em configurações com potenciais elementares, os quais geram campos de velocidades livres de divergência. Muitos deles são resultantes de potenciais superpostos. Todo o arcabouço será feito em escoamento potencial bidimensional.

O fato de trabalhar em  $2D$  nos permite utilizar uma técnica típica dessa configuração, ela consiste em definir um potencial complexo em termos das funções potencial e corrente [38], [39], [37]:

$$F(Z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (4.14)$$

onde  $\phi$  é a função potencial e  $\psi$  é a função corrente.

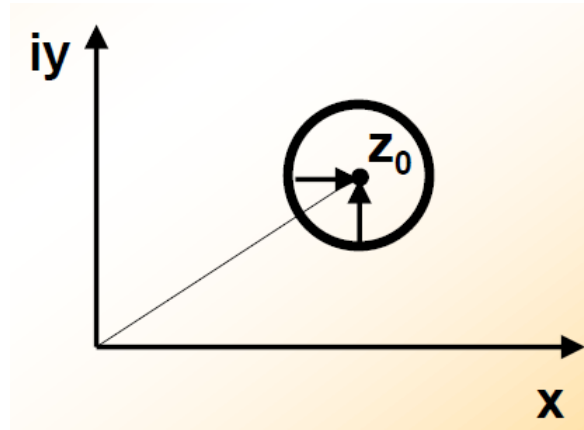
Para utilizar  $F(Z)$  precisamos que ela seja analítica, isto é, que  $\phi$  e  $\psi$  satisfaçam as seguintes condições de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4.15)$$

Além disso, se  $F(Z)$  é analítica, sua derivada existe:



$$\frac{dF}{dZ} = \lim_{\delta Z \rightarrow 0} \frac{F(Z + \delta Z) - F(Z)}{\delta Z} \quad (4.16)$$



e independe da direção que  $\delta Z$  se aproxima de  $Z_0$ .

## 4.2 Exemplo: Fonte + Sorvedouro

A combinação linear de potenciais elementares que são soluções da equação de Laplace também é solução de Laplace, já que a equação de Laplace é linear.

Nessa seção faremos a superposição dos potenciais de uma fonte e um sorvedouro:

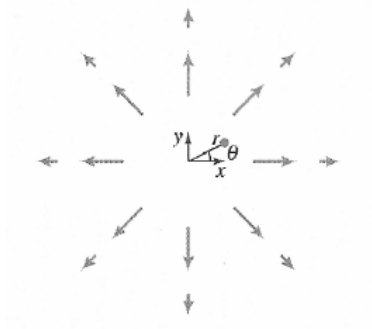


Figura 4.1: **Escoamento de Fonte; a partir da origem**, [38].

em que

$$\phi_F = +\frac{q}{2\pi} \ln(r); \quad \psi_F = +\frac{q}{2\pi} \theta. \quad (4.17)$$

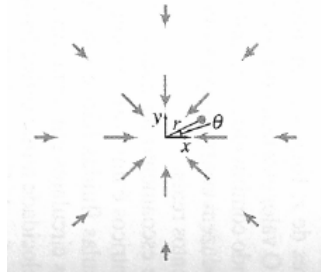


Figura 4.2: **Escoamento de Sorvedouro; em direção a origem**, [38].

em que

$$\phi_S = -\frac{q}{2\pi} \ln r; \quad \psi_S = -\frac{q}{2\pi} \theta. \quad (4.18)$$

#### 4.2.1 Combinação Linear: Fonte + Sorvedouro

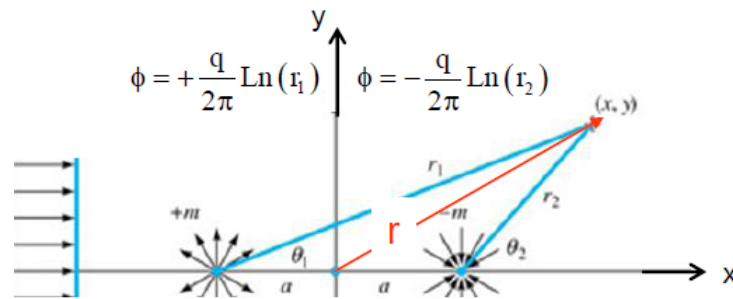


Figura 4.3: **Fonte + Sorvedouro: mesma intensidade**, [38].

$$\Phi = \phi_F + \phi_S; \quad \Psi = \psi_F + \psi_S. \quad (4.19)$$

Observe que na figura (4.3) é apresentada uma ilustração de uma fonte e um sorvedouro de mesma intensidade, e que estão deslocados de  $2a$  ao longo do eixo  $x$  com centro na origem. Nessa configuração temos os potenciais da fonte  $\phi_F = +\frac{q}{2\pi} \ln r_1$  e do sorvedouro  $\phi_S = -\frac{q}{2\pi} \ln r_2$  e as funções corrente  $\psi_F = +\frac{q}{2\pi} \theta_1$  e  $\psi_S = -\frac{q}{2\pi} \theta_2$ . Deste modo, podemos escrever as seguintes combinações lineares:

$$\Phi = \frac{q}{2\pi} \ln r_1 - \frac{q}{2\pi} \ln r_2 = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad (4.20)$$

e

$$\Psi = \frac{q}{2\pi}\theta_1 - \frac{q}{2\pi}\theta_2 = \frac{q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2). \quad (4.21)$$

Note que após uma análise geométrica da figura (4.3), concluímos que

$$r_1 = [y^2 + (x + a)^2]^{\frac{1}{2}}; \quad r_2 = [y^2 + (x - a)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (4.22)$$

e

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{y}{x + a}\right); \quad \theta_2 = \arctan\left(\frac{y}{x - a}\right). \quad (4.23)$$

Logo,

$$\Phi = \frac{q}{4\pi} \ln \left[ \frac{(x + a)^2 + y^2}{(x - a)^2 + y^2} \right] \quad (4.24)$$

e

$$\Psi = -\frac{q}{2\pi} \left[ \arctan\left(\frac{y}{x + a}\right) - \arctan\left(\frac{y}{x - a}\right) \right]. \quad (4.25)$$

Lembremos, lá da trigonometria, que:  $\arctan(a) - \arctan(b) \equiv \arctan\left[\frac{a-b}{1+ab}\right]$ . Deste modo,

$$\Psi = -\frac{q}{2\pi} \arctan\left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}\right). \quad (4.26)$$

Agora iremos apresentar as equações que definem as linhas  $(\Phi, \Psi)$  constantes, a fim de ilustrarmos essas linhas graficamente. Para tanto, manipulamos algebricamente as equações (4.24) e (4.26) e obtemos

$$\left[ x - a \coth\left(\frac{\pi\Phi}{q}\right) \right]^2 + y^2 = a^2 \csc^2\left(\frac{\pi\Phi}{q}\right) \quad (4.27)$$

e

$$\left[ y - a \cot\left(\frac{2\pi\Psi}{q}\right) \right]^2 + x^2 = a^2 \csc^2\left(\frac{2\pi\Psi}{q}\right). \quad (4.28)$$

Faremos  $q = \pi$  e  $a = 1$ . Deste modo, as linhas de  $(\Phi, \Psi)$  constantes são famílias de círculos com centros ao longo de  $(x, 0)$  e  $(0, y)$ , tendo os raios definidos por  $a \csc h\left(\frac{\pi\Phi}{q}\right)$  e  $a \csc\left(\frac{\pi\Psi}{q}\right)$ , respectivamente.

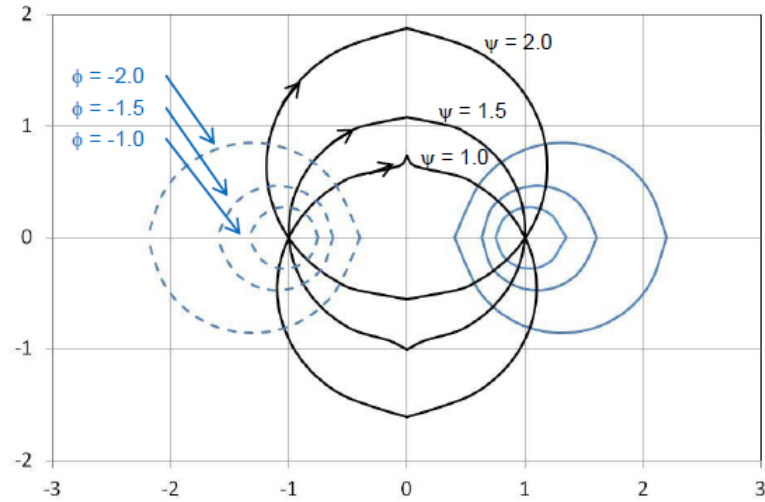


Figura 4.4: **Famílias de Círculos**, [37].

Essa configuração ilustrada na figura (4.4) representa o resultado da combinação linear das funções potenciais e das funções correntes da fonte com o sorvedouro, deslocados de  $2a$ .

Na próxima subseção faremos  $a \rightarrow 0$ , isto é, fonte e sorvedouro superpostos.

#### 4.2.2 Superposição: Fonte + Sorvedouro

Aqui tomaremos o limite das funções potencial e corrente (resultantes da combinação linear, Eq 3.24 e Eq 3.26) quando  $a \rightarrow 0$ , o que caracteriza a fonte e o sorvedouro superpostos. Desta forma, calculemos

$$\Phi = \frac{q}{4\pi} \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \ln \left[ \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \right] \right\} \quad (4.29)$$

e

$$\Psi = -\frac{q}{2\pi} \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \arctan \left( \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right) \right]. \quad (4.30)$$

Lembremos das seguintes identidades:  $\lim_{u \rightarrow 0} \left[ \ln \left( \frac{1+u}{1-u} \right) \right] = 2p$  e  $\lim_{p \rightarrow 0} \arctan p = p$ . Aplicando-as nas expressões (4.29) e (4.30), obtemos

$$\Phi = \frac{q}{4\pi} \lim_{u \rightarrow 0} \left[ \ln \left( \frac{1+u}{1-u} \right) \right] = \frac{q}{4\pi} 2p \quad (4.31)$$

e

$$\Psi = -\frac{q}{2\pi} \lim_{p \rightarrow 0} \arctan p = -\frac{q}{2\pi} p, \quad (4.32)$$

onde  $u = \frac{2ax}{x^2+y^2}$  e  $p = \frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}$ . Logo, desconsiderando o termo  $a^2$ , já que é muito próximo de zero, temos

$$\Phi = \frac{q}{4\pi} 2 \left( \frac{2ax}{x^2+y^2} \right) \equiv \frac{qa}{\pi} \left( \frac{\cos \theta}{r} \right) \quad (4.33)$$

e

$$\Psi = -\frac{q}{2\pi} \left( \frac{2ay}{x^2+y^2} \right) \equiv -\frac{qa}{\pi} \left( \frac{\sin \theta}{r} \right). \quad (4.34)$$

Note que esse resultado fornece as funções potencial  $\Phi$  e corrente  $\Psi$  de um dipolo, cuja intensidade é o produto entre a intensidade da fonte  $\frac{q}{\pi}$  e a distância  $a$ . Chamaremos essa intensidade de  $\eta = \frac{qa}{\pi} = \text{constante}$ . Assim,

$$\Phi = \eta \frac{\cos \theta}{r} \quad (4.35)$$

e

$$\Psi = -\eta \frac{\sin \theta}{r}. \quad (4.36)$$

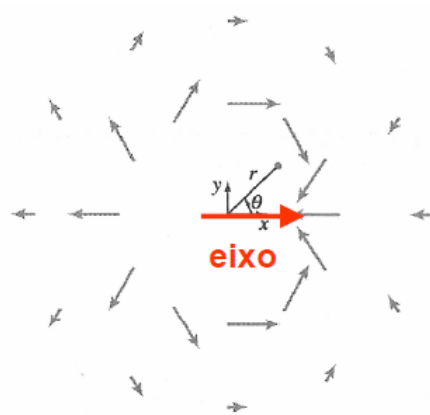


Figura 4.5: **Dipolo: Centro na origem, ponto singular**, [37].

O potencial de velocidade deve ser interpretado como sendo definido nas regiões sobrepostas ao redor da origem do dipolo em  $r = 0$  (ponto singular).

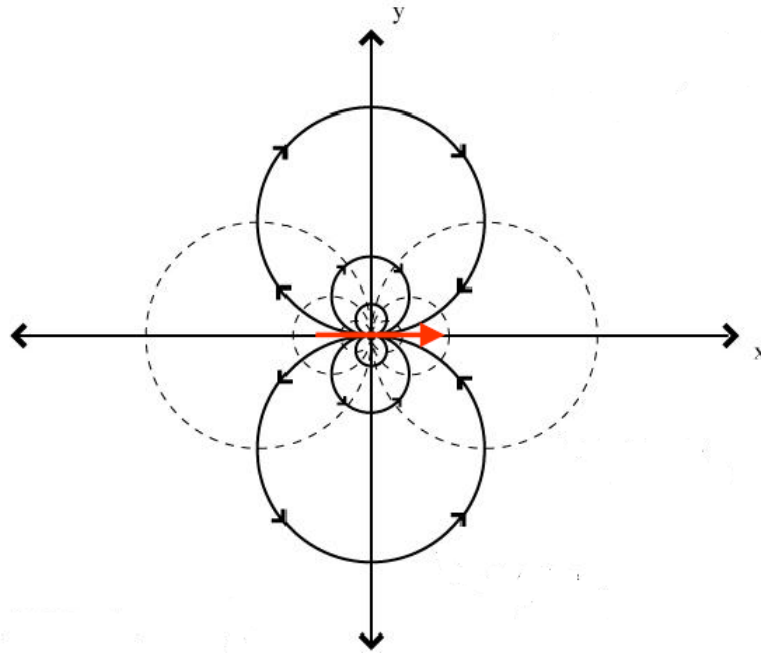


Figura 4.6: **Configuração do Dipolo: Fonte e Sorvedouro superpostos**, [37].

A figura (4.6) representa um dipolo resultante da superposição de uma fonte e um sorvedouro centrado na origem. A origem é o ponto singular.

O eixo do dipolo indica a posição relativa da fonte e do sorvedouro. Na figura a fonte está à esquerda do sorvedouro, ambos posicionados ao longo do eixo  $x$ . As linhas de potencial e corrente são constantes.

Agora iremos calcular o campo de velocidade do fluxo de fluido desse dipolo e posteriormente escrever o intervalo acústico que representará esta configuração.

O campo de velocidade possui duas componentes, uma radial  $v_r$  e uma angular  $v_\theta$ , de modo que  $\mathbf{v} = v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta}$ . O cálculo é feito de forma direta, através das seguintes derivadas parciais (Condições de Cauchy-Riemann):

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}; \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (4.37)$$

Assim,

$$\mathbf{v} = -\eta \left( \frac{\cos \theta}{r^2} \hat{r} + \frac{\sin \theta}{r^2} \hat{\theta} \right). \quad (4.38)$$

Portanto, o intervalo acústico para a configuração de um dipolo é dado, explicitamente,

por

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c} \left\{ - \left( c^2 - \frac{\eta^2}{r^4} \right) dt^2 + 2\eta \left( \frac{\cos \theta}{r^2} dr + \frac{\sin \theta}{r} d\theta \right) dt + dr^2 + r^2 d\theta^2 \right\}. \quad (4.39)$$

Esse intervalo acústico é a representação métrica do fluxo de fluido na configuração de um dipolo.

# Capítulo 5

## Considerações Finais

Essa dissertação apresentou uma revisão teórica acerca de modelos análogos acústicos da gravidade relativística, mais especificamente uma discussão e desenvolvimento das ferramentas que constroem esses modelos análogos. Apresentamos também alguns exemplos que servem como aplicações dessas ferramentas.

As analogias desempenharam um papel muito importante na física e na matemática - elas fornecem novas formas de olhar para problemas que permitem a fertilização cruzada de ideias entre diferentes Ciências. Uma analogia cuidadosamente escolhida pode ser extremamente útil ao focalizar a atenção em um problema, e sugerindo rotas inesperadas para uma possível solução. Neste trabalho, nos concentramos na "gravidade análoga", o desenvolvimento de analogias para sondar aspectos da física do espaço-tempo curvo.

Existem muitos outros "modelos análogos" que podem ser úteis por esta ou por outras razões - alguns dos modelos análogos são interessantes por razões experimentais, outros são úteis para a forma como fornecer uma nova luz sobre questões teóricas desconcertantes. O fluxo de informação é, em princípio, bidirecional e, às vezes, insights desenvolvidos dentro do contexto da relatividade geral podem ser usados para compreender aspectos do modelo análogo.

Claro, analogia não é identidade, e não estamos de forma alguma afirmando que os modelos análogos são completamente equivalentes à relatividade geral - apenas que o modelo análogo deve capturar e refletir com precisão um número suficiente de características importantes da relatividade geral (ou às vezes relatividade especial). A lista de modelos análogos já estudados é bem extensa.

O interesse em modelos análogos, espaço-tempos análogos e gravidade análoga é



intenso e não mostra sinais de diminuir. O interesse nessas idéias agora se estende muito além da comunidade da relatividade geral, e há uma promessa significativa para a entrada experimental direta em laboratório. Nós particularmente desejamos encorajar o leitor a ficar de olho nos futuros desenvolvimentos em relação à possível verificação experimental da existência da radiação de Hawking ou da radiação Unruh intimamente relacionada [34], [35].

# Referências Bibliográficas

- [1] Hwei P. Hsu, *Análise Vetorial*, Sedegra Sociedade Editora e Gráfica LTDA, (1972).
- [2] William E. Boyce, Richard C. Di Prima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Guanabara Koogan S. A., 5 ed. (1991).
- [3] Osmar S. Silva Jr., *Métodos de Física Teórica II*, (2010).
- [4] Suetin, P.K., Ultraspherical polynomials, in Hazewinkel, Michiel, *Encyclopedia of Mathematics*, Springer, ISBN 978-1-55608-010-4, (2001).
- [5] Valéria Iório, *EDP - Um Curso de Graduação*, SBM, 2012.
- [6] Visser, M., "Acoustic black holes: Horizons, ergospheres, and Hawking radiation", *Class. Quantum Grav.*, 15, 1767-1791, (1998)..
- [7] J. Lópes Gondar, R. Cipolatti, *Iniciação à Física Matemática*, IMPA, (2011).
- [8] Perez Bergliaffa S E, Hibberd K, Stone M and Visser M 2004 Wave equation for sound in fluids with vorticity *Physica D* 191 121-36 (Preprint cond-mat/0106255)
- [9] Wald, R.M., *General Relativity*, (University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [10] Hawking, S.W. and Ellis, G.F.R., *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
- [11] Hawking, S.W., Chronology protection conjecture, *Phys. Rev. D*, 46, 603-611, (1992).
- [12] Visser, M., "The quantum physics of chronology protection", in Gibbons, G.W., Shelard, E.P.S. and Rankin, S.J., eds., *The Future of Theoretical Physics and Cosmology: Celebrating Stephen Hawking's 60th Birthday*, pp. 161-175, (Cambridge University Press, Cambridge; New York, 2003).

- [13] Misner, C.W., Thorne, K.S. and Wheeler, J.A., *Gravitation*, (W.H. Freeman, San Francisco, 1973).
- [14] Gu, Zheng-Cheng and Wen, Xiao-Gang, "A lattice bosonic model as a quantum theory of gravity", arXiv e-print, (2006).
- [15] Gu, Z. C. and Wen, X. G., "Emergence of helicity  $\pm 2$  modes (gravitons) from qubit models", arXiv e-print, (2009).
- [16] Barcel'o, C., Liberati, S., Sonego, S. and Visser, M., "Causal structure of analogue spacetimes", *New J. Phys.*, 6, 186, (2004).
- [17] Thorne, K.S., Price, R.H. and Macdonald, D.A., eds., *Black Holes: The Membrane Paradigm*, (Yale University Press, New Haven, CT; London, 1986).
- [18] Jacobson, T.A. and Kang, G., "Conformal invariance of black hole temperature", *Class. Quantum Grav.*, 10, L201-L206, (1993).
- [19] Reznik, B., "Origin of the thermal radiation in a solid-state analogue of a black hole", *Phys. Rev. D*, 62, 044044, 1-7, (2000).
- [20] Gibbons, G.W. and Hawking, S.W., "Action integrals and partition functions in quantum gravity", *Phys. Rev. D*, 15, 2752-2756, (1977).
- [21] Unruh, W.G., "Experimental black hole evaporation", *Phys. Rev. Lett.*, 46, 1351-1353, (1981).
- [22] Cassidy, M.J. and Hawking, S.W., "Models for chronology selection", *Phys. Rev. D*, 57, 2372-2380, (1998). [DOI], [hep-th/9709066].
- [23] White, R.W., "Acoustic ray tracing in moving inhomogeneous fluids", *J. Acoust. Soc. Am.*, 53, 1700-1704, (1973). [DOI].
- [24] Moncrief, V., "Stability of stationary, spherical accretion onto a Schwarzschild black hole", *Astrophys. J.*, 235, 1038-1046, (1980). [DOI], [ADS].
- [25] Matarrese, S., "On the classical and quantum irrotational motions of a relativistic perfect fluid: I. Classical Theory", *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 401, 53-66, (1985).

- [26] Matarrese, S., "Perturbations of an irrotational perfect fluid", in Fabbri, R. and Modugno, M., eds., *Atti del VI Convegno Nazionale di Relatività Generale e Fisica della Gravitazione, Proceedings of the 4th Italian Conference on General Relativity and the Physics of Gravitation*, Florence, Italy, 10 - 13 October 1984, pp. 283-287, (Pitagora Editrice, Bologna, 1986).
- [27] Matarrese, S., "Phonons in a relativistic perfect fluid", in Ruffini, R., ed., *The Fourth Marcel Grossmann Meeting on recent developments in theoretical and experimental general relativity, gravitation and relativistic field theories*, Proceedings of the meeting held at the University of Rome 'La Sapienza', 17 - 21 June, 1985, pp. 1591-1595, (North-Holland; Elsevier, Amsterdam; New York, 1986).
- [28] J. D. Toniato, "Modelo Acústico Análogo ao Buraco Negro de Schwarzschild", *Dissertação*, Universidade Federal do Espírito Santo, 2010.
- [29] Badulin, S.I., Pokazayev, K.V. and Rozenberg, A.D., "A laboratory study of the transformation of regular gravity-capillary waves in inhomogeneous flows", *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* 19(10), 782-787 (1983).
- [30] Rousseaux, G., Maissa, P., Mathis, C., Couillet, P., Philbin, T.G. and Leonhardt, U., "Horizon effects with surface waves on moving water", *New J. Phys.*, 12, 095018, (2010).
- [31] Schützhold, R. and Unruh, W.G., "Gravity wave analogues of black holes", *Phys. Rev. D*, 66, 044019, 1-13, (2002).
- [32] Rousseaux, G., Mathis, C., Maissa, P., Philbin, T.G. and Leonhardt, U., "Observation of negative-frequency waves in a water tank: a classical analogue to the Hawking effect?", *New J. Phys.*, 10, 053015, (2008).
- [33] Weinfurtner, S., Tedford, E.W., Penrice, M.C.J., Unruh, W.G. and Lawrence, G.A., "Measurement of stimulated Hawking emission in an analogue system", *Phys. Rev. Lett.*, 106, 021302, (2011).
- [34] Carlos Barceló, Stefano Liberati, Matt Visser, "Analogue Gravity", Instituto de Astrofísica de Andalucía (IAA-CSIC) Glorieta de la Astronomía, 18008 Granada, Spain; International School for Advanced Studies Via Bonomea 265, I-34136 Trieste, Italy;

School of Mathematics, Statistics, and Operations Research Victoria University of Wellington; PO Box 600 Wellington 6140, New Zealand., (2011)

- [35] Matt Visser, "Acoustic black holes: horizons, ergospheres, Physics Department Washington University Saint Louis Missouri 63130-4899 USA and Hawking radiation", (1997).
- [36] Matt Visser, Silke Weinfurtner, "Vortex analogue for the equatorial geometry of the Kerr black hole", School of Mathematics, Statistics, and Computer Science, Victoria University of Wellington, PO Box 600, Wellington, New Zealand, (2005).
- [37] Shapiro AH, The NCFMF book of film notes, MIT Press, (1972).
- [38] Currie, I.G, Fundamental Mechanics of Fluids, McGraw Hill, (1975).
- [39] Lighthill, J., An informal introduction to theoretical fluid mechanics, Oxford Press, (1986).