

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA

JOSÉ HENRIQUE LOPES DA SILVA

**ELEMENTO “FAN-OUT” PARA GERAÇÃO DE MÚLTIPLOS “SPOTS”
UTILIZANDO UM MODULADOR ESPACIAL DE LUZ**

MACEIÓ
2017

JOSÉ HENRIQUE LOPES DA SILVA

**ELEMENTO “FAN-OUT” PARA GERAÇÃO DE MÚLTIPLOS “SPOTS”
UTILIZANDO UM MODULADOR ESPACIAL DE LUZ**

*Dissertação de Mestrado apresentada ao
Programa de Pós-Graduação do Instituto de
Física da Universidade Federal de Alagoas,
como requisito parcial para obtenção do grau
de Mestre em Ciências.*

Orientador: Prof. Dr. Alcenísio José de Jesus
Silva

MACEIÓ
2017

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central

Bibliotecário Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

S586e Silva, José Henrique Lopes da.
Elemento “fan-out” para geração de múltiplos “spots” utilizando um modulador espacial de luz / José Henrique Lopes da Silva. – 2017.
64 f. : il.

Orientador: Alcenísio José de Jesus Silva.
Dissertação (Mestrado em Física da Matéria Condensada) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2017.

Bibliografia: f. 61-64.

1. Óptica. 2. Difração. 3. Momento angular orbital. 4. Holografia. 5. Fan-out. 6. Modulador espacial de luz. I. Título.

CDU: 535.42



PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

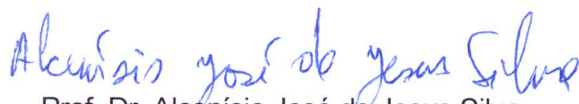
“ELEMENTO “FAN-OUT” PARA GERAÇÃO DE MÚLTIPLOS
“SPOTS” UTILIZANDO UM MODULADOR ESPACIAL DE LUZ”

por


José Henrique Lopes da Silva

A Banca Examinadora composta pelos professores Alcenísio José de Jesus Silva (orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Eduardo Jorge da Silva Fonseca, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas e André de Lima Moura, do Campus Arapiraca da Universidade Federal de Alagoas consideram o candidato aprovado com grau “A”.

Maceió, 28 de julho de 2017


Prof. Dr. Alcenísio José de Jesus Silva


Prof. Dr. Eduardo Jorge da Silva Fonseca


Prof. Dr. André de Lima Moura

Aos meus pais Adelmo Lopes e Márcia Maria.

Agradecimentos

- Primeiramente a Deus, fonte de esperança, conforto e humildade;
- Aos meus pais e irmãos que sempre me incentivaram e apoiaram em cada decisão importante que precisei tomar;
- A toda minha família que sempre me ajudou de alguma forma;
- Ao professor Alcenísio J. Jesus-Silva pela orientação, paciência e todos os ensinamentos essenciais à consolidação deste trabalho;
- Ao Professor Eduardo Jorge S. Fonseca por toda contribuição, críticas e sugestões, e por todo o empenho e dedicação ao GON;
- A todos os amigos e amigas pelo companheirismo ao longo de toda essa caminhada;
- A minha namorada pelo apoio e encorajamento;
- Aos colegas do GON que proporcionam um ambiente de formação dinâmico e divertido;
- Aos meus professores de graduação, Willamys C. S. Silva, Emerson de Lima, André Moura e Henrique Lopes, pelo insistente incentivo na continuidade dos estudos a nível de pós-graduação;
- A todos que contribuíram de forma direta ou indireta para a minha formação.
- A CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Elemento “fan-out” é um dispositivo ótico difrativo que divide um feixe de luz incidente em múltiplos feixes, podendo serem focados por uma lente para gerar uma rede de “spots”. Constituem assim um método efetivo no processo de paralelização de várias operações em aplicações óticas, tais como armadilhas óticas, processamento a laser e microscopia. Para a sua criação, tem ganhado ênfase o uso de hologramas de fase gerados por computador, através do uso de algoritmos Gerchberg-Saxton e suas variações. Neste trabalho propomos um método de criação de elemento “fan-out” para a geração de redes de muitos “spots” de forma simples e direta, sem qualquer algoritmo iterativo de transformada direta e/ou inversa de Fourier, utilizando modulador espacial de luz. Nossos resultados mostram que o elemento “fan-out” produzido é efetivo para a geração de estruturas bidimensionais de muitos “spots” (>50x50), de forma extremamente simples. O elemento “fan-out” é testado tanto para feixes gaussianos como para feixes Laguerre-Gauss que apresentam momento angular orbital.

Palavras-chaves: Difração; Momento Angular Orbital; Holografia; Modulador espacial de Luz; Elemento “fan-out”.

ABSTRACT

Fan-out element is a diffractive optical device that divides a beam of incident light into multiple beams, and can be focused by a lens to generate a network of spots. They are thus an effective method in the process of parallelization of various operations in optical applications, such as optical traps, laser processing and microscopy. For its creation, emphasis has been given on the use of computer-generated phase holograms, using Gerchberg-Saxton algorithms and their variations. In this work we propose a method of creating a fan-out element for the generation of networks of many spots in a simple and direct way, without any iterative algorithm of direct and / or inverse Fourier transform, using spatial light modulator. Our results show that the fan-out element produced is effective for the generation of two-dimensional structures of many spots ($> 50 \times 50$), in an extremely simple way. The fan-out element is tested for both Gaussian beams and Laguerre-Gauss beams which present orbital angular momentum.

Keywords: Diffraction; Orbital Angular Moment; Holography; Spatial Light Modulator; fan-out element.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2. 1 - Geometria de difração.....	15
Figura 2. 2 - Lentes convergente e divergente.....	21
Figura 2. 3 - Transparência imediatamente na frente de uma lente convergente.	22
Figura 2. 4 - Transparência localizada a uma distância d na frente de uma lente convergente.....	24
Figura 2. 5 - Frente de onda, fase e amplitude de feixes com momento angular orbital.....	26
Figura 2. 6 - Feixe Laguerre-Gauss para $m = 3$ e a) $p = 0$, b) $p = 1$, c) $p = 2$ e d) $p = 3$. ..	27
Figura 2. 7 - Métodos de geração do momento angular orbital. a) lentes cilíndricas; b) holograma e c) q-plate.....	29
Figura 2. 8 - Padrão de interferência entre onda plana no regime não colinear e feixes Laguerre-Gauss comp=0e carga topológica a) $m=1$, b) $m=2$ e c) $m=3$	29
Figura 2. 9 - Processo de a) gravação e b) reconstrução de hologramas.	30
Figura 2. 10 - Constituição do modulador espacial de luz.	32
Figura 3. 1 - Elemento “fan-out”.....	33
Figura 3. 2 - Sistema de Imagem 2- f	34
Figura 3. 3 - Representação do kinoform, plano de difração e ligações no plano complexo. ..	35
Figura 3. 4 - (a) holograma de fase para geração de pinças óticas e (b) manipulação de sete esferas de sílica.	42
Figura 3. 5 - Representação esquemática da propagação óptica de Fourier do plano do SLM para o plano focal do sistema ótico.	38
Figura 3. 6 - Distribuição de intensidade obtida usando o elemento “fan-out”para geração de “spots” 3x3 com uma lente (sistema 1) e com uma objetiva (sistema 2).	40
Figura 3. 7 - Padrão de fase na abertura de uma objetiva e correspondentes distribuição de intensidade no plano focal. (a) e (c), $\beta = 5$. (b) e (d), $\beta = 15$	43
Figura 4. 1 - Aparato experimental para obtenção da matriz de pontos luminosos pelo método do efeito Talbot fracionário.....	45
Figura 4. 2 - a) Hologramas para geração de matriz de pontos luminosos pelo método do efeito Talbot fracionário e b) distribuição de intensidade no plano focal gerado	

pelos hologramas.....	46
Figura 4. 3 - Amplitude e fase.	50
Figura 4. 4 - Configuração experimental 1.....	51
Figura 4. 5 - Redes de “spots” obtidas experimentalmente com feixe gaussiano usando nosso elemento “fan-out”. a) 5x5; b) 26x26 e c) 41x41.	52
Figura 4. 6 - Múltiplos feixes Laguerre-Gaussianos (32x32) de carga topológica m obtidos experimentalmente usando nosso elemento “fan-out”.	53
Figura 4. 7 - Configuração experimental 2.....	54
Figura 4. 8 - Padrão de interferência entre onda plana e rede de 17x17 feixes Laguerre-Gauss de carga topológica m=2.	55

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 4. 1: Uniformidade experimental dos “spots” versus raiz quadrada do número de “spots”	56
---	----

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
2 TEORIA DA DIFRAÇÃO E MOMENTO ANGULAR ORBITAL.....	14
2.1 Introdução.....	14
2.2.1 A Aproximação de Fresnel	16
2.2.2 Aproximação de Fresnel e o Espectro Angular	18
2.2.3 A Aproximação de Fraunhofer	19
2.2.4 Propriedades da Transformada de Fourier das lentes	21
2.3 Momento Angular Orbital da Luz	25
2.3.1 Feixes Laguerre-Gauss	26
2.3.2 Geração e Caracterização	27
2.4 Holografia.....	30
3 ELEMENTO “FAN-OUT”	33
3.1 Introdução.....	33
3.2 Método do Ângulo de Rotação Ótimo.....	34
3.3 Hologramas Otimizados Para Armadilhas Óticas	37
3.4 Elemento “fan-out” Para Geração de “spots” de Subdifração.....	39
3.5 Pinças Óticas Multifuncionais Usando Hologramas Gerados por Computador.....	40
3.6 Matriz de Pontos Luminosos Gerada por Efeito Talbot Fracionário.....	42
4 ELEMENTO “FAN-OUT” PARA GERAÇÃO DE MÚLTIPLOS “SPOTS” UTILIZANDO UM MODULADOR ESPACIAL DE LUZ.....	44
4.1 Introdução.....	44
4.2 Realização Experimental da Matriz de Pontos Luminosos Gerada por Efeito Talbot Fracionário.....	44
4.3 Teoria do Elemento “fan-out” para Geração de Múltiplos “Spots”	47
4.4 Experimento	51

4.5 Resultados e Discussões	55
5 CONCLUSÃO.....	56
REFERÊNCIAS	58

1 INTRODUÇÃO

Um fenômeno de vasta exploração científica e que foi crucial para a constatação da natureza ondulatória da luz é o chamado fenômeno da difração. Os efeitos da difração foram primeiramente analisados pelo cientista italiano Francesco Grimaldi, em 1665. Grimaldi percebeu que ao iluminar um pequeno orifício num anteparo opaco, em um anteparo de observação localizado suficientemente longe a luz penetra na região de sombra geométrica, com o aparecimento de franjas claras e escuras na vizinhança do limite da sombra.

A difração teve como passo inicial na evolução de sua teoria o princípio de Huygens¹, o qual explica a propagação de uma onda estabelecendo que cada ponto da frente de onda comporta-se como fonte de novas ondas secundárias que se propagam em todas as direções, sendo o envoltório dessas ondas secundárias a nova frente de onda. Em 1804, o médico e físico inglês Thomas Young utilizou o conceito de difração no seu experimento da dupla fenda para comprovar a natureza ondulatória da luz, constatando que luz sofre interferência. Augustin Fresnel combinou, em 1818, o princípio de Huygens com o conceito de interferência de Young, aplicando-os à propagação de ondas monocromáticas e foi capaz de calcular a distribuição da luz em padrões de difração com excelente precisão.

Em 1860 Maxwell identificou a luz como um fenômeno eletromagnético, um passo de enorme importância. Mas foi apenas em 1882 que as ideias de Huygens e Fresnel foram colocadas em um fundamento matemático sólido por Kirchhoff, que mostrou que as amplitudes e fases descritas para as ondas secundárias por Fresnel eram de fato consequências lógicas da natureza ondulatória da luz. Kirchhoff baseou sua formulação matemática sobre duas suposições acerca do valor de contorno da luz incidente na superfície de um obstáculo colocado no caminho de propagação da luz. Estas suposições foram depois provadas serem inconsistentes uma em relação a outra, por Poincaré em 1892 e por Sommerfeld em 1894. A formulação de Kirchhoff é então chamada de princípio de Huygens-Fresnel e é considerada como uma primeira aproximação do fenômeno de difração. A teoria de Kirchhoff foi modificada por Sommerfeld, que eliminou uma das suposições acerca da amplitude da luz no contorno fazendo uso da função de Green. Esse tratamento é então chamado de teoria da difração de Rayleigh-Sommerfeld, constituindo uma expressão mais geral para estudar o fenômeno de difração na aproximação escalar.

O fenômeno de difração foi explorado por diversas aberturas revelando padrões característicos e tem sido fortemente empregado na exploração científica de outros fenômenos

na Ótica e na Física em geral. A difração constitui o princípio básico de técnicas como a holografia e métodos de caracterização do momento angular orbital da luz.

Allen² constatou em 1992 que feixes de luz com uma estrutura de fase azimutal de $\exp(im\phi)$, onde ϕ é a coordenada azimutal e m é um número inteiro referido como índice azimutal ou carga topológica, transportam momento angular orbital (MAO) bem definido de $m\hbar$ por fóton, com \hbar sendo a constante de Planck dividida por 2π . Diferentemente do momento de spin do fóton que apresenta apenas dois possíveis estados, o MAO possui um ilimitado espaço de estados acessíveis associados aos ilimitados valores que m pode assumir. Tal fato fornece um grande potencial em capacidade de informação, encontrando aplicações em comunicação e informação quântica, criptografia quântica, pinças óticas. Diversos métodos para a caracterização do MAO empregam o fenômeno de difração^{3; 4; 5; 6}.

Vários métodos têm sido desenvolvidos para a geração de feixes com MAO^{7; 8}. Um deles que é bastante utilizado é o método holográfico, no qual é gravado um padrão característico que ao ser iluminado por um feixe gaussiano, gera na primeira ordem de difração feixes com MAO. Com o surgimento do dispositivo ótico chamado Modulador Espacial de Luz (SLM) é dispensada a impressão dos hologramas em filmes fotográficos, podendo estes serem gerados computacionalmente e seu código inserido diretamente no SLM.

O SLM trouxe uma série de vantagens para a exploração da luz, com a possibilidade de controlar dinamicamente amplitude ou fase da luz, estados de polarização⁹, correção de aberrações da frente de onda¹⁰ e até mesmo arbitrária manipulação de amplitude e fase usando uma cascata de SLM¹¹.

Nesse cenário de luz modulada e aplicações surge um importante elemento ótico difrativo chamado elemento “fan-out”. Elemento “fan-out” é um dispositivo ótico que divide um feixe de luz incidente em múltiplos feixes propagando-se em diferentes direções¹², o que gera um arranjo de “spots” luminosos num plano de observação^{13; 14}. Constituem um método efetivo na paralelização de várias operações em aplicações óticas, tais como armadilhas óticas^{15; 16; 17}, processamento a laser^{18; 19} e microscopia^{20; 21}. Primeiramente produzidos utilizando grades de difração²², hoje em dia tem se tornado comum o uso de hologramas de fase gerados por computador e inserção de moduladores espaciais de luz para geração de elemento “fan-out”²³. A maioria dos métodos baseiam-se em algoritmos iterativos^{24; 25; 26; 27} demandando uma certa complexidade e custo computacional, apesar de se conseguir excelentes resultados para redes de até 10×10 “spots”¹³. Contudo, estes métodos geralmente requerem um grande número de iterações e podem não conduzir a uma única solução.

Neste trabalho estamos interessados na criação de elemento “fan-out” utilizando um modulador espacial de luz para geração de muitos “spots”, de forma simples e direta sem qualquer algoritmo iterativo. Para isso tomamos um somatório de ondas planas multiplicadas por fases constantes e utilizamos a fase desse somatório como elemento “fan-out”, conseguindo estruturas bidimensionais com grande quantidade de “spots” de maneira muito simples. Nosso método é comprovado experimentalmente, gerando tanto réplicas de feixes gaussianos, sem momento angular orbital, como de feixes Laguerre-Gauss que apresentam momento angular orbital. O elemento “fan-out” proposto e demonstrado neste trabalho tem a vantagem, para além da simplicidade do método, de gerar estruturas bidimensionais com grande quantidade de “spots” ($>50 \times 50$) possuindo completo controle do número, bem como da fase entre os “spots”.

Para melhor compreensão da teoria envolvida e dos resultados obtidos, desenvolveremos este trabalho em quatro capítulos seguintes. No capítulo 2, fazemos um resumo dos assuntos fundamentais para o trabalho como difração, momento angular orbital, holografia e modulador espacial da luz.

No capítulo 3, fazemos um apanhado dos principais trabalhos que tratam de elemento “fan-out”, mostrando método de criação, vantagens e desvantagens em termos da análise da eficiência e uniformidade, bem como de alguns outros parâmetros relevantes da estrutura de “spots” gerada.

Os resultados principais deste trabalho estão apresentados no capítulo 4. Inicialmente, faremos a descrição teórica do método de criação do elemento “fan-out”, apresentando suas principais propriedades. Na sequência detalharemos a realização experimental, apontando resultados e discussões. Mostraremos que o elemento proposto gera redes de muitos “spots” de forma simples e direta.

Por fim, no capítulo 5, destacamos os principais resultados dos estudos realizados na dissertação. Apresentaremos ainda a conclusão geral do trabalho, bem como as perspectivas futuras, dando margem a novos estudos que possam complementar ou surgir a partir deste.

2 TEORIA DA DIFRAÇÃO E MOMENTO ANGULAR ORBITAL

2.1 Introdução

Antes de iniciar uma discussão de difração, é interessante mencionar outros fenômenos com os quais difração não deve ser confundida, nomeadamente refração e reflexão. Refração pode ser definida como a curvatura dos raios de luz que ocorre quando eles passam através de uma região em que há um gradiente local de velocidades de propagação da onda. O exemplo mais comum ocorre quando uma onda luminosa encontra uma fronteira nítida entre duas regiões tendo diferentes índices de refração. A velocidade de propagação no primeiro meio, tendo índice de refração n_1 , é $v_1 = c/n_1$, onde c é a velocidade da luz no vácuo. A velocidade de propagação no segundo meio é $v_2 = c/n_2$, com n_2 o índice de refração do segundo meio. Os raios de luz incidente são curvados na interface. Os ângulos de incidência e refração (θ_1 e θ_2 , respectivamente) relacionam-se com os índices de refração dos meios através da lei de Snell, dada por $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$.

Os raios de luz são também curvados sobre reflexão, que pode ocorrer em uma interface metálica ou dielétrica. A relação fundamental que governa este fenômeno é que o ângulo de reflexão é sempre igual ao ângulo de incidência. Diferentemente da refração onde há uma passagem dos raios de luz de um meio para outro, na reflexão os raios de luz incidente voltam a propagar-se no meio no qual estavam antes de incidirem na interface. Neste sentido, o termo difração tem sido definida como qualquer desvio da propagação retilínea dos raios de luz que não possa ser interpretada como reflexão ou refração. Na prática os fenômenos de difração são divididos em dois tipos, referidos como difração de Fraunhofer e difração de Fresnel. Qualitativamente falando, ocorre difração de Fraunhofer quando as ondas incidentes e difratadas são planas. Este é o caso quando a distância da fonte à abertura de difração e da abertura ao ponto de observação é grande o suficiente para que a curvatura da onda incidente e difratada seja desprezada. Se tanto a fonte quanto o ponto de observação estão próximos da abertura de difração de modo que a curvatura da frente de onda seja significativa, então as ondas incidente e difratada são esféricas e temos uma difração do tipo Fresnel.

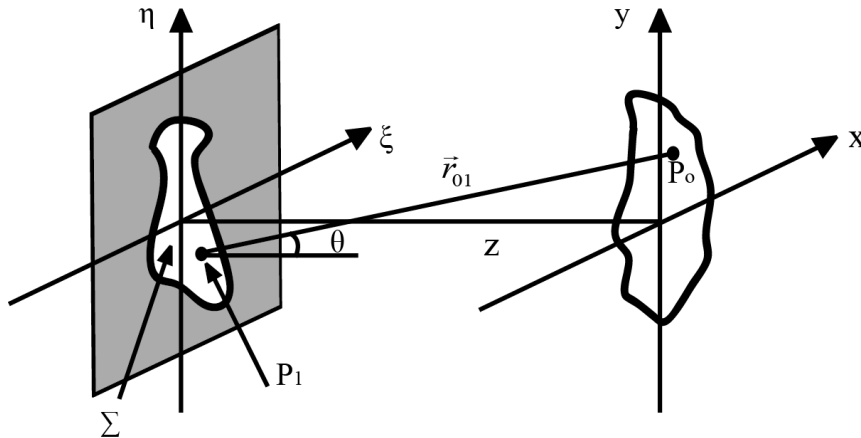
Nesta seção analisaremos o fenômeno da difração partindo do princípio de Huygens-Fresnel e centrado nossa atenção em duas aproximações de fundamental interesse, nomeadamente a aproximação de Fresnel e aproximação de Fraunhofer. Devido à grande importância que a ótica de Fourier desempenha na descrição de sinais e sistemas, analisaremos a difração sob o ponto de vista análise de Fourier. No tratamento da difração

utilizaremos a linha de raciocínio presente em Goodman¹. Faremos ainda um breve estudo do momento angular orbital da luz gerado por feixes com estrutura de fase azimutal, nos limitando ao feixe Laguerre-Gauss. Apresentaremos alguns métodos de geração do momento angular orbital, em especial o método holográfico que será o método utilizado por nós em nosso trabalho. Por fim exploraremos brevemente a holografia, contemplando a geração de hologramas utilizando o dispositivo chamado modulador de luz espacial, de vastas aplicações em ótica moderna.

2.2 O Princípio de Huygens-Fresnel

Vamos considerar uma abertura de difração no plano (ξ, η) , iluminada na direção z positiva. Iremos calcular o campo no plano (x, y) paralelo ao plano (ξ, η) , a uma distância z deste como mostrado na Figura (2.1). O princípio de Huygens-Fresnel pode ser enunciado matematicamente pela seguinte expressão:

Figura 2. 1 - Geometria de difração.



Fonte: Autor, 2017.

$$U(P_0) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \cos\theta ds, \quad (2.1)$$

onde θ é o ângulo entre a normal n e o vetor posicional apontando de P_1 a P_0 , \vec{r}_{01} , P_0 e P_1 são pontos nos planos (x, y) e (ξ, η) , respectivamente, e $U(P_0)$ e $U(P_1)$ são os campos nesses pontos. j é a unidade imaginária, λ é o comprimento de onda da radiação incidente,

$k = 2\pi/\lambda$ é o número de onda e Σ é a abertura de difração ao longo da qual as integrais são realizadas. O termo $\cos\theta$ é dado por $\cos\theta = z/r_{01}$, e o princípio de Huygens-Fresnel pode ser reescrito como

$$U(x, y) = \frac{z}{j\lambda} \iint U(\xi, \eta) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}^2} d\xi d\eta, \quad (2.2)$$

onde a distância r_{01} é dada por:

$$r_{01} = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \quad (2.3)$$

Para estes resultados temos assumido a teoria escalar dos campos eletromagnéticos e a suposição de que o plano de observação está a muitos comprimentos de onda da abertura, $r_{01} \gg \lambda$. Na sequência analisaremos uma série de aproximações adicionais para chegarmos a duas expressões de grande utilidade no estudo da difração, nomeadamente a difração do tipo Fresnel e a difração do tipo Fraunhofer.

2.2.1 A Aproximação de Fresnel

Para reduzir o princípio de Huygens-Fresnel a uma expressão mais simples e útil, introduzimos aproximações para a distância r_{01} entre P_1 e P_0 . As aproximações são baseadas na expansão binomial da raiz quadrada na Eq.(2.3). Tomemos b como sendo um número menor que a unidade, e consideremos a expansão de $\sqrt{1+b}$. A expansão binomial da raiz quadrada é dada por

$$\sqrt{1+b} = 1 + \frac{1}{2}b + \frac{1}{8}b^2 \dots \quad (2.4)$$

onde o número de termos necessários para tornar a expansão precisa depende da magnitude de b .

Para aplicar a expansão binomial à Eq. (2.3) fatoramos z na expressão para r_{01} , conduzindo a

$$r_{01} = z \sqrt{1 + \left(\frac{x - \xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{y - \eta}{z}\right)^2}. \quad (2.5)$$

Identificando b na Eq. (2.4) como sendo o segundo e terceiro termo sobre a raiz quadrada na Eq. (2.5). Então, retendo apenas os primeiros dois termos da expansão (2.4), temos:

$$r_{01} = z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x-\xi}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y-\eta}{z} \right)^2 \right]. \quad (2.6)$$

A questão que surge agora é se precisamos de todos os termos na aproximação (2.6), ou se apenas o primeiro termo é suficiente. Para o r_{01}^2 aparecendo no denominador da Eq. (2.2), o erro introduzido desprezando todos os termos, exceto o primeiro, é geralmente pequeno. Contudo, para o r_{01} aparecendo na exponencial, os erros são muito mais críticos. Primeiro, eles são multiplicados por um número muito grande k , um valor típico para o qual pode ser maior que 10^7 na região do espectro visível (e.g., $\lambda = 5 \times 10^{-7}$ metros). Segundo, mudanças de fase de poucas frações de radianos podem mudar o valor da exponencial significativamente. Por estas razões mantemos ambos os termos da aproximação binomial na exponencial. A expressão resultante para o campo em (x, y) desta forma torna-se:

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi, \eta) \exp \left\{ j \frac{k}{2z} \left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \right] \right\} d\xi d\eta, \quad (2.7)$$

onde temos incorporado os limites finitos da abertura na definição de $U(\xi, \eta)$.

A equação (2.7) pode ser identificada como uma convolução, expressa na forma

$$U(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi, \eta) h(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta, \quad (2.8)$$

onde o núcleo da convolução é

$$h(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \exp \left[\frac{jk}{2z} (x^2 + y^2) \right]. \quad (2.9)$$

Outra forma do resultado (2.7) é encontrada se o termo

$$\exp \left[\frac{jk}{2z} (x^2 + y^2) \right]$$

for fatorado para fora da integral, conduzindo a seguinte expressão:

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ U(\xi, \eta) e^{j\frac{k}{2z}(\xi^2+\eta^2)} \right\} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta, \quad (2.10)$$

que reconhecemos ser a transformada de Fourier do produto do campo complexo à direita da abertura e uma exponencial de fase quadrática. A transformada de Fourier (também chamada de espectro de Fourier e espectro de frequências) de uma função g (em geral, complexa) de duas variáveis independentes x e y pode ser representada por $\mathfrak{F}\{g\}$ e definida da seguinte forma:

$$\mathfrak{F}\{g\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) \exp[-j2\pi(f_x x + f_y y)] dx dy. \quad (2.11)$$

A transformada assim definida é ela própria uma função complexa de duas variáveis independentes f_x e f_y , referidas como frequências espaciais.

Tanto o resultado (2.7) como (2.10) são referidos como *integrais de difração de Fresnel*. Quando essa aproximação é válida, dizemos que o observador está na região da difração de Fresnel.

2.2.2 Aproximação de Fresnel e o Espectro Angular

É interessante entender as implicações da aproximação de Fresnel do ponto de vista do método de análise do espectro angular. Tal entendimento pode ser desenvolvido iniciando com a seguinte equação que expressa a função transferência de propagação através do espaço livre¹:

$$H(f_x, f_y) = \begin{cases} \exp\left[j2\pi \frac{z}{\lambda} \sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2} \right] & \sqrt{f_x^2 + f_y^2} < \frac{1}{\lambda}, \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases} \quad (2.12)$$

Este resultado, que é válido apenas na aproximação escalar, pode agora ser comparado com a função transferência previsto pelos resultados da análise de Fresnel. Realizando a transformada de Fourier da resposta ao impulso da difração de Fresnel Eq.(2.9), encontramos a função de transferência válida para difração de Fresnel,

$$\begin{aligned}
H(f_x, f_y) &= \mathfrak{F} \left\{ \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \right] \right\} \\
&= e^{jkz} \exp \left[-j\pi\lambda z (f_x^2 + f_y^2) \right].
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Assim na aproximação de Fresnel, a dispersão espacial de fase geral representando a propagação é reduzida a uma dispersão de fase quadrática. O fator e^{jkz} a direita dessa equação representa um atraso de fase constante sofrido por toda componente de onda plana viajando entre dois planos paralelos separados por uma distância normal z . O segundo termo representa os diferentes atrasos de fase sofridos pelas componentes de onda plana viajando em diferentes direções.

A expressão (2.13) é claramente uma aproximação para a função transferência mais geral Eq. (2.12). Podemos obter o resultado aproximado do resultado geral aplicando uma expansão binomial para o expoente da Eq. (2.12),

$$\sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2} \approx 1 - \frac{(\lambda f_x)^2}{2} - \frac{(\lambda f_y)^2}{2}, \tag{2.14}$$

que é válido para $|\lambda f_x| \ll 1$ e $|\lambda f_y| \ll 1$. Tais restrições em f_x e f_y são simplesmente restrições para ângulos pequenos. Então vemos que, da perspectiva do espectro angular, a aproximação de Fresnel é precisa desde que apenas pequenos ângulos de difração estejam envolvidos.

2.2.3 A Aproximação de Fraunhofer

Vamos agora considerar outra forte aproximação que, quando válida, simplifica grandemente os cálculos. Foi visto na Eq.(2.10) que na região de difração de Fresnel o campo observado $U(x, y)$ pode ser encontrado de uma transformada de Fourier do produto da distribuição na abertura $U(\xi, \eta)$ e uma função de fase quadrática $\exp \left[j(k/2z)(\xi^2 + \eta^2) \right]$. Se em adição a aproximação de Fresnel a forte aproximação (Fraunhofer)

$$z \gg \frac{k(\xi^2 + \eta^2) \max}{2} \tag{2.15}$$

é satisfeita, então o fator de fase quadrática sob a integral na Eq.(2.10) é aproximadamente 1 sobre toda a abertura, e o campo observado pode ser encontrado diretamente de uma transformada de Fourier da própria distribuição da abertura. Assim, na região de difração de Fraunhofer (ou equivalentemente, no campo distante),

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz} e^{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{j\lambda z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi, \eta) \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi + y\eta)\right] d\xi d\eta. \quad (2.16)$$

À parte do fator de fase multiplicativo antes da integral na equação acima, esta expressão é simplesmente a transformada de Fourier da distribuição da abertura, avaliada nas frequências

$$\begin{aligned} f_x &= x/\lambda z \\ f_y &= y/\lambda z \end{aligned} \quad (2.17)$$

Em frequências óticas, a condição requerida para validade da aproximação de Fraunhofer é sempre satisfeita. Por exemplo, em um comprimento de onda de $0,6 \mu m$ (luz vermelha) e uma abertura de largura $2,5 \text{ cm}$, a distância de observação deve satisfazer $z \gg 1.600$ metros. Uma condição alternativa menos rigorosa, conhecida como a “fórmula do projetor de antena”, garante que para uma abertura de dimensão linear D , a aproximação de Fraunhofer será válida para

$$z > \frac{2D^2}{\lambda}, \quad (2.18)$$

onde a inequação usa $>$ em vez de \gg . Contudo, para este exemplo ainda será necessário que a distância z seja maior que 2.000 metros. No entanto, as condições exigidas são satisfeitas em vários problemas importantes. Além disso, padrões de difração de Fraunhofer podem ser observados em distâncias muito mais próximas do que implicado pela Eq. (2.15) desde que a abertura seja iluminada por uma onda esférica convergindo para o observador ou se uma lente positiva é apropriadamente colocada entre o observador e a abertura, como será explicado mais adiante.

A difração de Fraunhofer pode ser óticamente implementada de maneira muito simples utilizando uma lente. As lentes são compostas de um material denso, geralmente vidro com índice de refração de aproximadamente 1.5, em que a velocidade de propagação da luz é menor que a velocidade no ar. Passaremos a analisar agora de que forma podemos utilizar lentes para obter a difração de Fraunhofer.

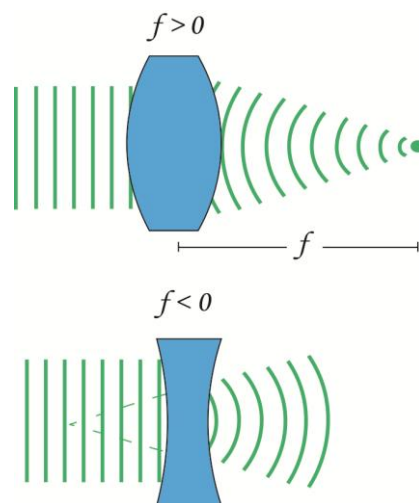
2.2.4 Propriedades da Transformada de Fourier das lentes

Uma lente atrasa uma frente de onda incidente por uma quantidade proporcional a espessura da lente em cada ponto. Adotando a convenção de sinal de que para raios viajando da esquerda para a direita, cada superfície convexa encontrada é assumida ter o raio de curvatura positivo, enquanto cada superfície côncava é assumida ter o raio de curvatura negativo. As propriedades físicas da lente, nomeadamente o índice de refração e os raios R_1 e R_2 , podem ser combinadas em um único número f chamado comprimento focal, definido por

$$\frac{1}{f} \equiv (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (2.19)$$

Se o comprimento focal de uma lente for positivo a lente é dita ser convergente, uma vez que esta faz com que uma onda plana incidindo normal a ela convirja para um ponto no eixo da lente a uma distância f atrás dela. Por outro lado, se o comprimento focal de uma lente for negativo a lente é dita ser divergente e uma onda plana incidindo normal a ela diverge de um ponto no eixo da lente localizado a uma distância f na frente da lente. Essas situações são mostradas na Fig. 2.2.

Figura 2. 2 - Lentes convergente e divergente.



Fonte: Autor, 2017.

A lente pode ser representada por uma função de transformação de fase $t_l(x, y)$, que para uma onda monocromática na aproximação paraxial e negligenciando a extensão finita da lente, pode ser dada pela expressão

$$t_l(x, y) = \exp\left[-j \frac{k}{2f}(x^2 + y^2)\right]. \quad (2.20)$$

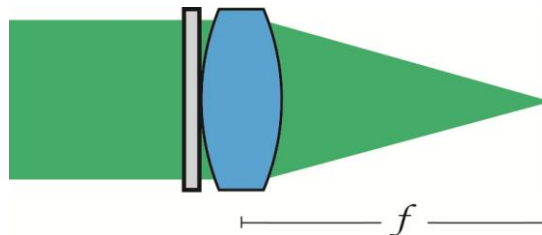
O campo complexo $U_l'(x, y)$ através de um plano imediatamente atrás da lente é então relacionado ao campo complexo $U_l(x, y)$ incidente no plano imediatamente na frente da lente por

$$U_l'(x, y) = t_l(x, y)U_l(x, y). \quad (2.21)$$

Uma das propriedades mais notáveis e úteis de uma lente convergente é sua capacidade inerente de realizar transformadas de Fourier bidimensionais. Considere uma onda plana colimada de amplitude A , com incidência normal a uma transparência (objeto) com amplitude de transmissão $t_A(x, y)$ localizada imediatamente na frente de uma lente convergente de comprimento focal f , como mostrado na Fig. 2.3. Assumindo que a transparência é uniformemente iluminada pelo campo, a distribuição de amplitude incidente na lente é

$$U_l(x, y) = At_A(x, y). \quad (2.22)$$

Figura 2.3 - Transparência imediatamente na frente de uma lente convergente.



Fonte: Autor, 2017.

A extensão finita da lente pode ser levada em conta associando a função pupil à lente $P(x, y)$, definida por

$$P(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dentro da abertura da lente} \\ 0 & \text{outros casos.} \end{cases}$$

Então a distribuição de amplitude atrás da lente torna-se, usando (2.21),

$$U'_l(x, y) = U_l(x, y)P(x, y)\exp\left[-j\frac{k}{2f}(x^2 + y^2)\right]. \quad (2.23)$$

Para encontrar a distribuição $U_f(u, v)$ no plano focal posterior da lente, a fórmula de difração de Fresnel, Eq. (2.10), é aplicada. Assim, substituindo $z = f$,

$$U_f(u, v) = \frac{\exp\left[j\frac{k}{2f}(u^2 + v^2)\right]}{j\lambda f} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U'_l(x, y)\exp\left[j\frac{k}{2f}(x^2 + y^2)\right]\exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda f}(xu + yv)\right]dxdy, \quad (2.24)$$

onde um fator de fase constante tem sido desprezado. Quando a extensão física da transparência é menor que a abertura da lente, o fator $P(x, y)$ pode ser desprezado. Assim, deixando $P = 1$ e substituindo a Eq. (2.23) na Eq. (2.24), ficamos com

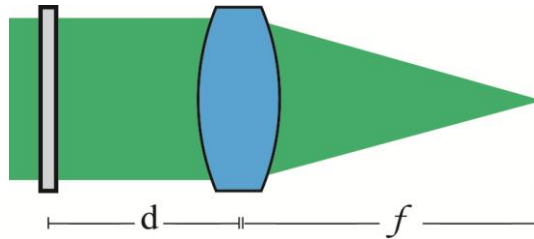
$$U_f(u, v) = \frac{\exp\left[j\frac{k}{2f}(u^2 + v^2)\right]}{j\lambda f} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_l(x, y)\exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda f}(xu + yv)\right]dxdy. \quad (2.25)$$

Vemos portanto que a distribuição de amplitude complexa do campo no plano focal da lente é o padrão de difração de Fraunhofer do campo incidente na lente, embora a distância ao plano de observação seja igual ao comprimento focal da lente, ao invés de satisfazer o critério de distância padrão para observar difração de Fraunhofer. Note que a amplitude e fase da luz nas coordenadas (u, v) no plano focal são determinadas pela amplitude e fase das componentes de Fourier de entrada nas frequências $(f_x = u/\lambda f, f_y = v/\lambda f)$.

A relação da transformada de Fourier entre a transmissão de amplitude de entrada e a distribuição de amplitude no plano focal não é completa, devido a presença do fator de fase quadrática que precede a integral. Contudo, na maioria das vezes o real interesse está em determinar a intensidade no plano focal da lente. Uma vez que a intensidade é obtida pelo módulo quadrado da distribuição de amplitude, a fase quadrática não tem importância.

Consideremos agora uma onda plana colimada de amplitude A , incidindo sobre uma transparência com transmissão de amplitude $t_A(x, y)$ localizada a uma distância d na frente de uma lente convergente de comprimento focal f , como mostrado na Fig. 2.4.

Figura 2. 4 - Transparência localizada a uma distância d na frente de uma lente convergente.



Fonte: Autor, 2017.

Representando o espectro de Fourier da luz transmitida pela transparência por $F_o(f_x, f_y) = \mathfrak{T}\{At_A\}$, e o espectro de Fourier da luz incidente na lente por $F_l(f_x, f_y) = \mathfrak{T}\{U_l\}$. Assumindo que a aproximação de Fresnel ou a aproximação paraxial é válida para a propagação sobre a distância d , então F_o e F_l são relacionados pela equação (2.13), dando

$$F_l(f_x, f_y) = F_o(f_x, f_y) \exp[-j\pi\lambda d(f_x^2 + f_y^2)], \quad (2.26)$$

onde temos desprezado um atraso de fase constante.

Quando a extensão física da transparência é menor que a abertura da lente, o fator $P(x, y)$ pode ser desprezado. Assim, deixando $P = 1$, a Eq. (2.25) pode ser reescrita como

$$U_f(u, v) = \frac{\exp\left[j\frac{k}{2f}(u^2 + v^2)\right]}{j\lambda f} F_l\left(\frac{u}{\lambda f}, \frac{v}{\lambda f}\right). \quad (2.27)$$

Substituindo a Eq. (2.26) na Eq. (2.27), temos

$$U_f(u, v) = \frac{\exp\left[j\frac{k}{2f}\left(1 - \frac{d}{f}\right)(u^2 + v^2)\right]}{j\lambda f} F_o\left(\frac{u}{\lambda f}, \frac{v}{\lambda f}\right), \quad (2.28)$$

ou

$$U_f(u, v) = \frac{A \exp \left[j \frac{k}{2f} \left(1 - \frac{d}{f} \right) (u^2 + v^2) \right]}{j \lambda f} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t_A(\xi, \eta) \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda f} (\xi u + \eta v) \right] d\xi d\eta. \quad (2.29)$$

Assim a amplitude e fase da luz nas coordenadas (u, v) são novamente relacionados a amplitude e fase do espectro de frequências de entrada $(u/\lambda f, v/\lambda f)$. Note que o fator de fase quadrática que precede a integral desaparece para o caso especial $d = f$. Evidentemente, quando a transparência é colocada no plano focal frontal da lente, a curvatura de fase desaparece, conduzindo a exata relação da transformada de Fourier. Portanto, quando um objeto é colocado no plano focal frontal de uma lente convergente e iluminado por uma onda colimada, o padrão de difração de Fraunhofer do objeto é formado no plano focal posterior da lente.

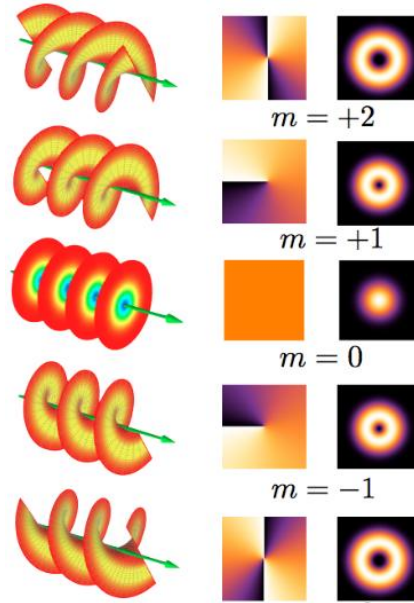
2.3 Momento Angular Orbital da Luz

É conhecido das equações de Maxwell que a radiação eletromagnética transporta tanto energia quanto momento²⁸. O momento tem contribuições linear e angular. Por sua vez, o momento angular pode apresentar duas componentes, o momento angular de spin (ou intrínseco) associado com os estados de polarização da luz, e o momento angular orbital (ou extrínseco) associado com a distribuição espacial do campo eletromagnético.

Em 1992, Allen e colaboradores² constataram que feixes de luz com uma estrutura de fase azimutal de $\exp(im\phi)$, onde ϕ é a coordenada azimutal e m é um número inteiro referido como índice azimutal ou carga topológica, transportam momento angular orbital bem definido de $m\hbar$ por fóton, com \hbar sendo a constante de Planck dividida por 2π . Tal momento angular não depende dos estados de polarização, como é o caso do momento angular de spin. Feixes que apresentam a estrutura de fase azimutal possuem uma singularidade de fase, isso implica que no eixo do feixe a fase é indeterminada e sua intensidade é nula. Na ótica, tais singularidades são chamadas de vórtices óticos. Feixes que transportam momento angular orbital viajam descrevendo uma frente de onda helicoidal, definindo assim um perfil anelar.

A Fig. 2.5 ilustra o perfil da frente de onda, fase e intensidade de feixes com momento angular orbital para alguns valores da carga topológica.

Figura 2.5 - Frente de onda, fase e amplitude de feixes com momento angular orbital.



Fonte: Retirado da Ref.⁷

Os autores mostraram ainda que feixes Laguerre-Gauss possuem uma distribuição de fase de $\exp(im\phi)$ e, conseqüentemente, possuem momento angular orbital bem definido. Passaremos agora a detalhar mais sobre os feixes Laguerre-Gauss, bastante explorados na literatura.

2.3.1 Feixes Laguerre-Gauss

Os feixes Laguerre-Gauss constituem uma família completa de soluções da equação de Helmholtz na aproximação paraxial em coordenadas cilíndricas²⁹. São obtidos utilizando a técnica de separação de variáveis. A descrição matemática dos modos Laguerre-Gauss pode ser dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 u_{pm}(r, \phi, z) \propto & (-1)^p \left(\frac{r\sqrt{2}}{w(z)} \right)^m \exp\left[-\frac{r^2}{w^2(z)}\right] \exp\left[-\frac{ikr^2}{2R(z)}\right] \exp(im\phi) \\
 & \times L_p^m\left(\frac{2r^2}{w^2(z)}\right) \exp\left[-i(2p+m+1)\tan^{-1}\left(\frac{z}{z_R}\right)\right],
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

onde $w(z)$ é o raio do feixe, $R(z)$ é o raio de curvatura da frente de onda no plano z , $z_R = k w_0^2/2$ é o comprimento de Rayleigh, w_0 é a cintura mínima do feixe, L_p^m é o

polinômio generalizado de Laguerre e o termo $(2p + m + 1) \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_R} \right)$ é a fase de Gouy do modo. O raio do feixe e o raio de curvatura da frente de onda são dados, respectivamente, por:

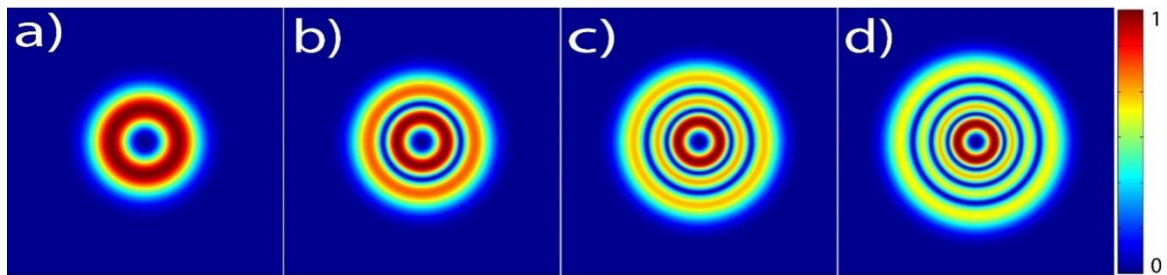
$$w(z) = w_0 \sqrt{\left[1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2 \right]} \quad (2.31)$$

e

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right]. \quad (2.32)$$

Os índices p e m são inteiros que definem a ordem dos modos. p está associado com o número de anéis através da distribuição radial do campo. Para um modo Laguerre-Gauss com $p = 0$ e qualquer valor de $m \neq 0$, o feixe possui o perfil espacial com a forma de um anel luminoso que aumenta de tamanho à medida que se propaga. Para um dado valor de z , o raio do anel aumenta conforme cresce o valor de m , conforme ilustrado na figura 2.5. Para $m = 0$ o feixe Laguerre-Gauss tem o perfil de um feixe gaussiano.

Figura 2. 6 - Feixe Laguerre-Gauss para $m = 3$ e a) $p = 0$, b) $p = 1$, c) $p = 2$ e d) $p = 3$.



Fonte: Autor, 2017.

Feixes Laguerre-Gauss não são os únicos a possuírem estrutura de fase azimutal e consequentemente momento angular orbital. Feixes Bessel^{30; 31}, Feixes de Mathieu³² e Feixes Hermite-Gaussianos³³ são alguns dos feixes que também possuem frente de onda helicoidal transportando momento angular orbital.

2.3.2 Geração e Caracterização

Feixes que transportam momento angular de spin são facilmente produzidos usando uma placa de quarto de onda para converter luz linearmente em circularmente polarizada. Um

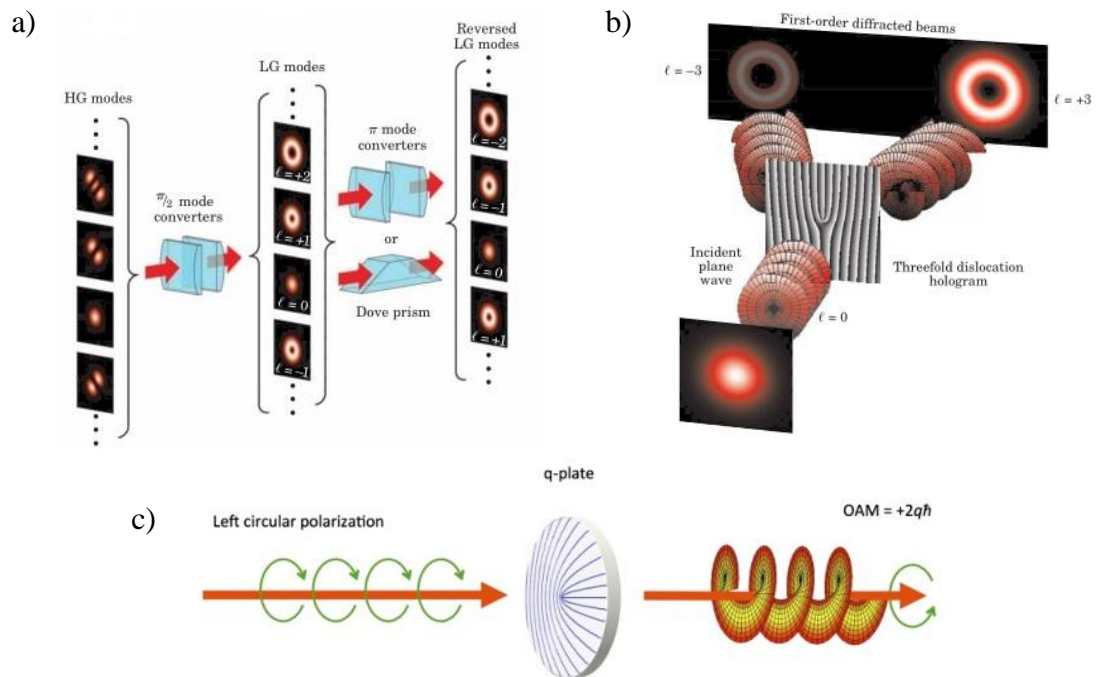
método semelhante com lentes cilíndricas para transformar um feixe Hermite-Gauss, que não possui momento angular orbital, em um feixe Laguerre-Gauss com momento angular orbital foi introduzido por Allen et al². A este método dá-se o nome de conversor de modos. Embora este processo de conversão seja eficiente, cada modo Laguerre-Gauss exige um modo Hermite-Gauss particular, o que limita a gama de modos Laguerre-Gauss que podem ser produzidos.

Outra maneira mais utilizada para criar feixes helicoidais tem sido o uso de hologramas calculados numericamente⁷. Tais hologramas podem gerar feixes com qualquer valor de momento angular orbital a partir do mesmo feixe inicial. O holograma pode ser tanto a gravação numa película fotográfica do padrão de interferência entre uma onda plana e o feixe que se procura produzir, como o padrão de fase do feixe desejado inserido num modulador espacial de luz. Ao iluminar o holograma com o feixe de referência (a onda plana), produz o feixe que se deseja pela difração da luz.

Um método mais recente de gerar tanto momento angular de spin quanto orbital tem surgido nos últimos anos com os chamados “q-plates”. O “q-plate” é essencialmente um fino filme de cristal líquido situado entre dois vidros, com um padrão peculiar de alinhamento molecular⁸. O padrão é principalmente definido por um número característico, nomeado carga topológica e caracterizando a singularidade central, que é usualmente denotado pelo símbolo matemático q , de onde vem o nome do dispositivo. Em adicional, como o efeito ótico do cristal líquido pode ser controlado eletricamente, o “q-plate” pode ser ajustado para ter um efeito parcial, se desejado, ou mesmo ligado e desligado.

Estes métodos de geração de feixes de luz possuindo momento angular orbital estão ilustrados nas Fig. 2.7. Na Fig. 2.7(a) são mostrados os modos Hermite-Gauss que ao passarem pelo conjunto de lentes cilíndricas são convertidos em modos Laguerre-Gauss. Na Fig. 2.7(b) está representado o holograma que ao ser incidido por uma onda plana gera dois feixes com o mesmo valor de momento angular orbital, mas de sinais contrários na primeira ordem de difração, e na Fig. 2.7(c) está ilustrado o q-plate que insere momento angular orbital num feixe incidente.

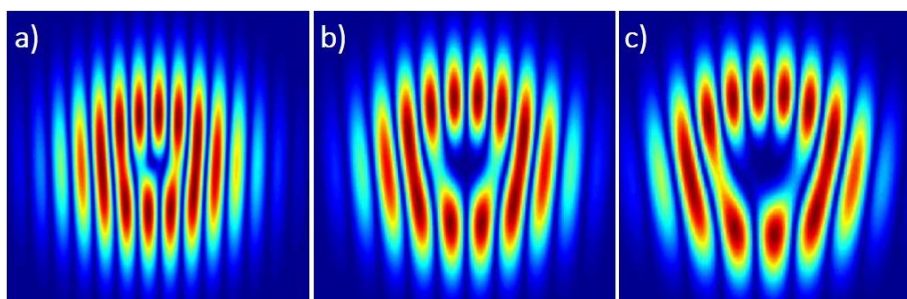
Figura 2. 7 - Métodos de geração do momento angular orbital. a) lentes cilíndricas; b) holograma e c) q-plate.



Fonte: Retirado das Ref.^{7; 8}

Vários métodos têm sido estudados para medir estados de MAO da luz nos últimos anos, tais como elementos óticos difrativos incluindo fenda simples³, dupla fenda^{4; 6}, fenda triangular⁵, e grades bifurcadas^{34; 35}. No campo distante, feixes com MAO propagando-se através desses elementos apresentará características particulares. Métodos baseados no interferômetro de Mach-Zehnder também são propostos^{36; 37}, assim como métodos interferométricos no regime colinear e não colinear³⁸. De particular interesse está o método interferométrico no regime não colinear de feixes com MAO e uma onda plana, no qual o valor da carga topológica pode ser identificado por um padrão característico de bifurcações no padrão de interferência, como mostrado na Fig. 2.8.

Figura 2. 8 - Padrão de interferência entre onda plana no regime não colinear e feixes Laguerre-Gauss com $p=0$ e carga topológica a) $m=1$, b) $m=2$ e c) $m=3$.



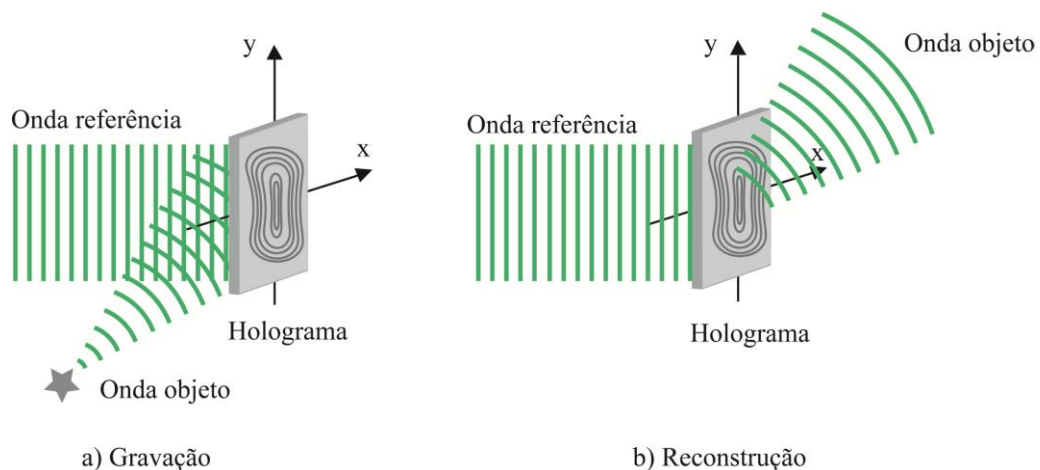
Fonte: Autor, 2017.

2.4 Holografia

Holografia é a técnica de gerar hologramas e envolve a gravação e reconstrução de ondas óticas. A holografia foi inventada em 1948 por Dennis Gabor com o objetivo de melhorar a resolução do microscópio eletrônico³⁹, mas foi apenas a partir da descoberta do laser em 1960 que passou a atrair maior interesse e ser fortemente explorada. Embora a holografia não tenha demonstrado ser útil na microscopia eletrônica, ela propiciou inúmeras aplicações e Gabor foi agraciado com o prêmio Nobel em 1971 por seu invento⁴⁰.

Com o desenvolvimento da técnica de gravação fora do eixo (off-axis) por Leith e Upatnieks⁴¹, tornou-se possível produzir imagens tridimensionais. A qualidade e realismo das imagens tridimensionais obtidas por holografia foram largamente responsáveis pelo desenvolvimento de um grande interesse popular no campo. Nos dias atuais é comum encontrar museus, galerias, teatros e parques temáticos especializadas em holografia em muitas das grandes cidades do mundo. Mas a holografia não se restringiu ao entretenimento, estendendo-se a várias aplicações incluindo imagem de alta resolução, processamento de informação, codificação de segurança, elementos óticos holográficos, armadilhas óticas, codificação de campo escalar complexo arbitrário, modulação de luz estruturada, entre outras⁴².

Figura 2.9 - Processo de a) gravação e b) reconstrução de hologramas.



Fonte: Autor, 2017.

A holografia se resume em duas operações: a gravação do padrão de interferência entre uma onda objeto U_o , que traz a informação que desejamos reproduzir, e uma onda referência U_r , e a reconstrução da onda objeto como ilustrado na Fig.2.9. Diferentemente da fotografia que grava apenas informação de intensidade, a holografia grava tanto amplitude

como fase de uma onda ótica vinda de um objeto iluminado por luz coerente. Todo meio de gravação responde apenas a intensidade da luz, de modo que se desejamos gravar também informação da fase é necessário convertê-la em variação de intensidade.

Se as ondas objeto e referência forem dadas, respectivamente, por

$$U_o = a(x, y) \exp[j\phi(x, y)] \quad (2.33)$$

e

$$U_r = A(x, y) \exp[j\psi(x, y)], \quad (2.34)$$

o padrão de interferência num plano de observação que escolhemos ser $z = 0$ é dado por

$$\begin{aligned} I(x, y) &\propto |U_o + U_r|^2 = |U_o|^2 + |U_r|^2 + U_o U_r^* + U_o^* U_r \\ &= |a|^2 + |A|^2 + 2|a||A| \cos(\psi - \phi) \\ &= I_o + I_r + 2\sqrt{I_o I_r} \cos(\psi - \phi). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Enquanto os dois primeiros termos na última igualdade desta expressão dependem apenas das intensidades individuais das ondas, o terceiro depende da fase relativa. Desta forma informação de amplitude e fase é gravada.

Usualmente a gravação do padrão de interferência descrito acima é feita num filme fotográfico ou transparência e leva o nome de holograma. O material assumido para gravação fornece um mapeamento linear da intensidade incidente durante o processo de detecção em amplitude transmitida ou refletida do material durante o processo de reconstrução¹. Desta forma, o holograma é representado pela transmitância de amplitude complexa dada por $t = I(x, y)$.

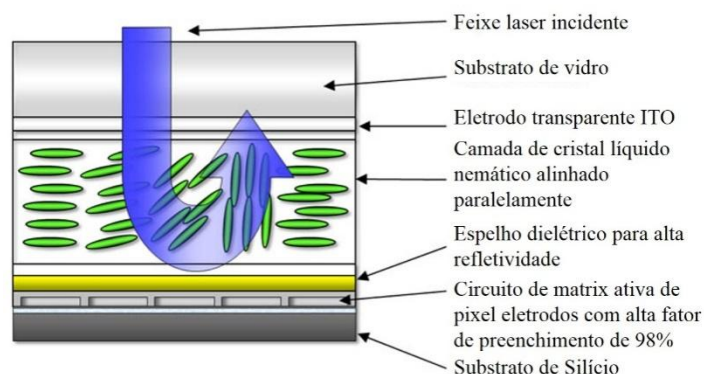
Para a reconstrução da onda objeto, iluminamos o holograma novamente com a onda referência U_r . A luz transmitida pela transparência é evidentemente

$$U_r t = U_r I_o + U_r I_r + U_o I_r + U_o^* U_r^2. \quad (2.36)$$

O terceiro termo no lado direito é a onda original multiplicada pela intensidade I_r da onda referência. Se I_r é uniforme, esse termo constitui a reconstrução de onda desejada. Mas ele deve ser separado dos outros três termos. O quarto termo é uma versão conjugada da onda original modulada por U_r^2 . Os dois primeiros termos representam a onda referência, modulada pela soma das intensidades das duas ondas.

Com a evolução do método de gerar hologramas, ganhou destaque os chamados hologramas gerados por computador (CGH), que são criados por meio de cálculos numéricos e então transferidos para uma transparência por meio de um dispositivo de plotagem ou impressão. Esse processo pode se tornar ainda mais prático com o uso de modulador espacial de luz (SLM), dispositivo capaz de alterar a luz transmitida em tempo real em resposta a um controle de sinal ótico ou elétrico. Com o uso do SLM (do inglês, Spatial Light Modulator) é possível controlar amplitude ou fase de um campo incidente, ou ainda utilizar mais de um SLM para controlar amplitude e fase ao mesmo tempo¹¹. Devido ao fato dos SLM's serem pixelado, existem certas discontinuidades na modulação de fase que eles fornecem, o que contribui para uma luz não modulada na ordem zero de difração do SLM, que constitui uma perda na eficiência do processo ótico envolvido. Quanto maior a quantidade de pixels e menor o afastamento entre pixels consecutivos (pixel pitch) do SLM, maior será a eficiência do processo e, portanto, menor a quantidade de luz não modulada.

Figura 2. 10 - Constituição do modulador espacial de luz.



Fonte: Retirado da Ref.⁴³

Há vários tipos de SLM que se classificam de acordo com o princípio de funcionamento destes. Um caso particular é o SLM de cristal líquido em Silício (LCOS-SLM) que pode modular apenas a fase da luz incidente. Estes dispositivos são formados de um substrato de vidro, um eletrodo transparente, filmes de alinhamento, uma camada de cristal líquido alinhada paralelamente, um espelho dielétrico e um substrato de Silício⁴³. Um circuito de matriz ativa é formado no substrato de Silício para aplicar tensões a pixel eletrodos. A fase é modulada pela camada de cristal líquido, mas a quantidade de modulação de fase varia de acordo com o nível de tensão aplicada. O espelho dielétrico serve para aumentar a eficiência da utilização da luz. A figura 2.10 mostra a configuração do LCOS-SLM.

3 ELEMENTO “FAN-OUT”

3.1 Introdução

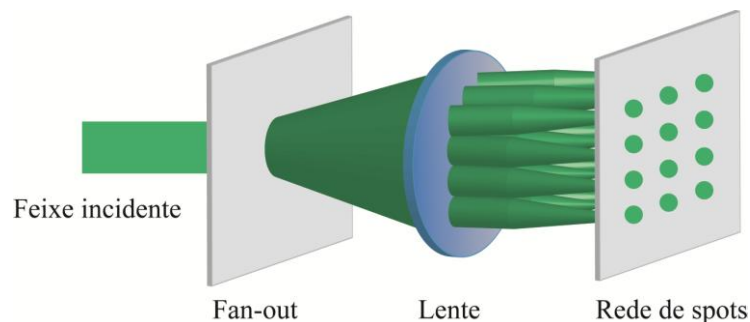
Elemento “fan-out” é um dispositivo ótico que divide um feixe de luz incidente em múltiplos feixes propagando-se em diferentes direções¹², o que gera um arranjo de “spots” luminosos num plano de observação como mostrado na figura 3.1. Constituem um método efetivo na paralelização de várias operações em aplicações óticas, tais como pinças óticas¹⁵, processamento a laser^{18; 19} e microscopia^{20; 21}. O desempenho de elementos “fan-out” se dá pela análise da eficiência e uniformidade dos “spots” gerados, que são calculados, respectivamente, por

$$e = \frac{\sum_n I_n}{\text{intensidade total da luz incidente}}, \quad (2.37)$$

$$u = 1 - \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (2.38)$$

onde I_n é a intensidade em um ponto n no plano de difração na área dos “spots”, I_{\max} é a intensidade no ponto máximo do spot mais intenso e I_{\min} é a intensidade no ponto de mínimo do “spot” menos intenso.

Figura 3. 1 - Elemento “fan-out”.



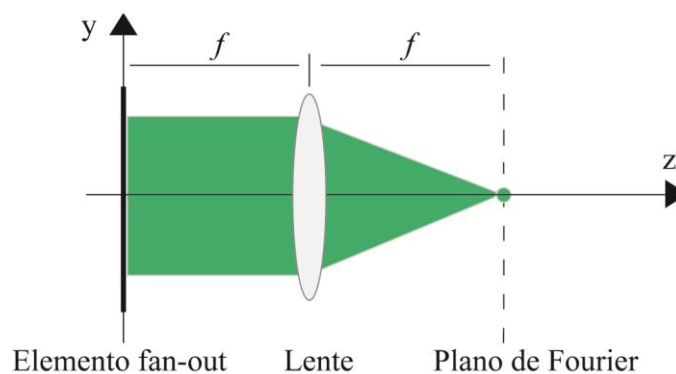
Fonte: Autor, 2017.

Grades de fase binária, também chamadas grades Dammann²², representam uma técnica útil para fabricar elementos “fan-out” com boa uniformidade do arranjo de feixes gerados, mas com moderada eficiência (60-70%)⁴⁴. Mais recentemente, esforços foram concentrados nos kinoforms (hologramas de fase gerados por computador) para aumentar a eficiência de difração. Hoje em dia, tais grades também são fabricadas sinteticamente usando técnicas de microfabricação.

Um elemento “fan-out” pode ser considerado como o holograma de campo distante de um arranjo unidimensional ou bidimensional de fontes de luz coerente, gravados com uma onda de referência plana ou esférica. As fontes de luz do arranjo são caracterizadas por suas amplitudes e fases, A_i e ϕ_i , respectivamente. A fase da grade correspondendo a este holograma torna-se eficiente apenas se os termos de intermodulação entre as fontes coerentes são minimizados; caso contrário, parte da energia incidente é difratada em feixes não desejados. Isto pode ser alcançado pela escolha apropriada das fases ϕ_i , usando otimização numérica.

Neste capítulo focaremos nossa atenção num resumo dos principais métodos utilizados para gerar estruturas de “spots”, ou seja, métodos de geração de elemento “fan-out”. Os três primeiros métodos que serão apresentados se baseiam na utilização de algoritmos iterativos que otimizam o holograma de fase gerado por computador para se ter uma maior eficiência e uniformidade dos “spots” gerados. Já os dois últimos métodos não utilizam algoritmos iterativos. Em todos os trabalhos que serão apresentados, os elementos “fan-out” são empregados num sistema imagem como ilustrado pela Fig. 3.2.

Figura 3. 2 - Sistema de Imagem 2-f.



Fonte: Autor, 2017.

3.2 Método do Ângulo de Rotação Ótimo

Em 1994, Bengtsson²³ propôs um algoritmo baseado no método do ângulo de rotação ótimo (ORA) utilizando kinoforms (hologramas de fase gerados por computador) para gerar um arranjo bidimensional de “spots”. Um kinoform muda a distribuição de fase da luz incidente sobre ele. No domínio paraxial a distribuição de amplitude da luz no plano de difração pode ser obtida pela transformada de Fourier da distribuição de amplitude complexa

no plano imediatamente atrás do kinoform. Desta forma, em cada ponto discreto no plano de difração a amplitude complexa, $\tilde{A}(n_1, n_2)$, é a soma das contribuições de cada pixel no plano do kinoform como dado pela transformada de Fourier discreta:

$$\tilde{A}(n_1, n_2) = \sum_{(i_1, i_2)} A(i_1, i_2) \exp[j\phi(i_1, i_2)] \exp\left[j \frac{2\pi}{N} (n_1 i_1 + n_2 i_2)\right], \quad (2.39)$$

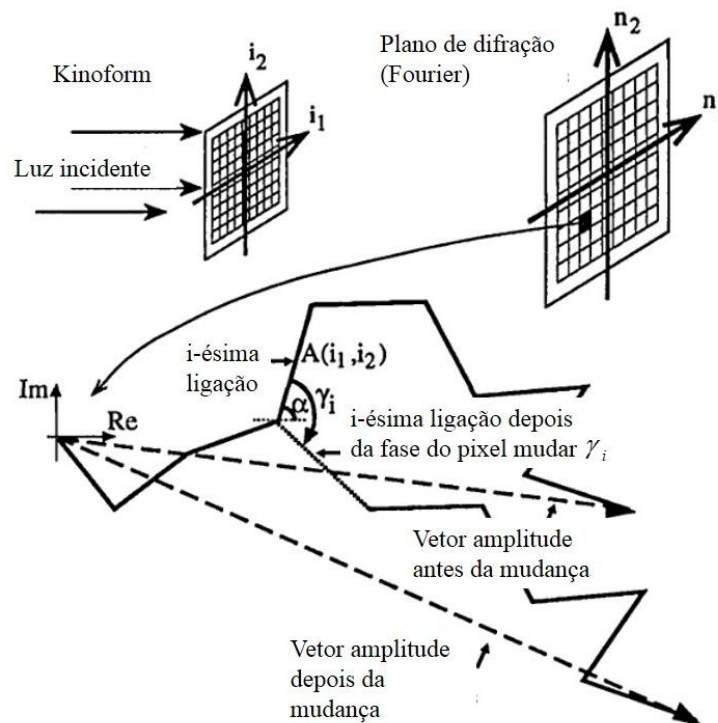
onde $A(i_1, i_2)$ denota a amplitude incidente no pixel (i_1, i_2) do kinoform, $\phi(i_1, i_2)$ é a fase no pixel do kinoform, e $N \times N$ é o número de pixel na matriz utilizada para o cálculo.

No plano complexo o número $\tilde{A}(n_1, n_2)$ pode ser pensado como uma corrente em que cada ligação da corrente é a contribuição de um pixel específico (i_1, i_2) do kinoform, como esquematizado na figura 3.3. O comprimento da articulação da corrente é dado por $A(i_1, i_2)$, e o ângulo α é dado pela fase e a localização do pixel como

$$\alpha = \phi(i_1, i_1) + \frac{2\pi}{N} (n_1 i_1 + n_2 i_2). \quad (2.40)$$

O resultado de todas as ligações na corrente é o vetor de amplitude complexa no ponto (n_1, n_2) , como mostrado na Fig.3.3 pelas linhas tracejadas.

Figura 3.3 - Representação do kinoform, plano de difração e ligações no plano complexo.



O autor pretende desenvolver o cálculo de um kinoform que dá origem ao “fan-out”, ou seja, que gera um número n de pontos no plano de difração em que luz é desejada. O objetivo é ter tanto mais luz quanto possível nesses pontos, isto é, seus vetores de amplitude complexa devem ser tão longos quanto possível. Para isso inicia-se com uma fase aleatória no plano do kinoform. Contudo, nenhum padrão “fan-out” é formado devido a aleatoriedade da distribuição da luz sobre o plano de difração, o que faz com que as contribuições dos pixels do kinoform mais ou menos se cancelem entre si em cada ponto no plano de difração.

A ideia principal do método ORA é estender cada corrente n na direção de seu vetor amplitude. Isso é feito por uma mudança na fase do kinoform no i -ésimo pixel por um ângulo γ_i e assim uma rotação da i -ésima ligação em cada corrente pelo mesmo ângulo, como está representado na Fig. 3.3 para um ponto no plano de difração. Em geral não há ângulo de rotação para o qual todo vetor de amplitude fique mais comprido, mas há um ângulo de rotação para o qual a soma dos comprimentos é maximizada, e a i -ésima fase do kinoform é então substituída por este ângulo. Esse processo é realizado para todos os pixels no plano do kinoform, com as direções dos vetores amplitudes ξ_n fixas, antes de se tomar a transformada de Fourier do novo plano kinoform e assim receber a nova amplitude no plano de difração com os vetores amplitudes apontando em direções ξ_n ligeiramente deslocadas.

O método ORA em geral conduz a alta eficiência teórica, mas o erro de uniformidade pode ser considerável. Para superar isso, o autor introduz um procedimento de ponderação quando alta eficiência é obtida. Como valores iniciais, todos os pesos são considerados iguais a um. Eles são então aumentados ou diminuídos. Desta forma, o autor consegue produzir kinoforms tendo uma uniformidade maior que 90%, sendo considerados virtualmente uniformes. O método é simulado para arranjos de “spots” 1x10, 3x3, 6x6, 8x8 e 10x10.

Portanto, o algoritmo de ângulo de rotação ótimo (ORA) foi usado para projetar kinoforms com bom desempenho. No geral, padrões “fan-out” com eficiência teórica maior que 93% e perfeita uniformidade virtual foram obtidos. Enfatiza-se ainda que, como outros métodos, os resultados dependem das condições de partida. Como discutido acima, o método exige a análise da fase que cada pixel deve adquirir para fazer com que o somatório das amplitudes complexas num ponto específico do plano de difração, vindo de todos os pontos do kinoform, seja rotacionado pelo melhor ângulo a fim de se ter uma maior contribuição desse somatório de amplitudes complexas nesse ponto, o que no geral não é simples de se fazer. Além disso, numa realização experimental esses desempenhos são bastante afetados.

3.3 Hogramas Otimizados Para Armadilhas Óticas

Em 2007, Di Leonardo e colaboradores¹³ fizeram uma análise dos principais algoritmos para obtenção de hologramas destinados a geração de estruturas tridimensionais de armadilhas óticas, isto é, uma coleção de pontos com alta intensidade luminosa (“spots”). Os autores desenvolveram um algoritmo tido como o melhor na sequência dos algoritmos precedentes para a geração do holograma de fase para aplicação em pinças óticas.

O algoritmo Gerchberg-Saxton²⁴ e suas variações^{25; 26; 27}, referidos como algoritmo de transformada de Fourier iterativo, são frequentemente aplicados à otimização de fase para geração de distribuição de intensidade desejada pelo processo de repetição de um ciclo de transformadas de Fourier direta e inversa, com imposições nos planos de entrada e saída.

No experimento, o holograma de fase gerado por computador é inserido num SLM que é então iluminado uniformemente, gerando a armadilha ótica desejada no plano de difração do SLM, focado por uma lente. Assumindo que a amplitude complexa do campo refletido pelo j -ésimo pixel do SLM é dada por $u_j = |u| \exp(j\phi_j)$, onde ϕ_j é o deslocamento de fase correspondente. A amplitude complexa no m -ésimo “spot” no plano de Fourier devido a todos os N pixels do SLM pode ser determinada utilizando a teoria da difração escalar, que numa notação adimensional simplificada pode ser escrita como

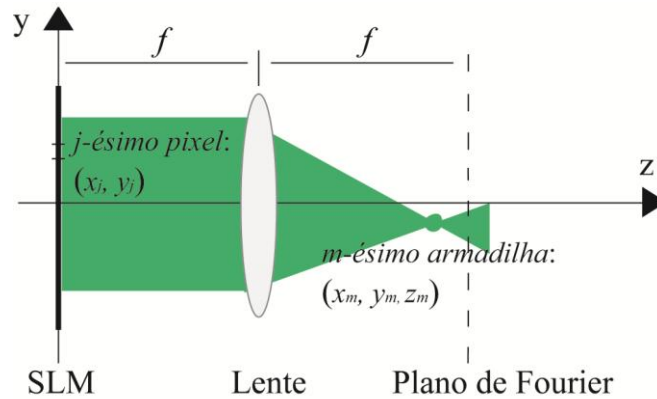
$$V_m = \sum_{j=1, N} \frac{1}{N} e^{i(\phi_j - \Delta_j^m)}, \quad (2.41)$$

onde

$$\Delta_j^m = \frac{2\pi}{\lambda f} (x_j x_m + y_j y_m), \quad (2.42)$$

x_j, y_j são as coordenadas dos j -ésimos pixels no plano do SLM e x_m, y_m são as coordenadas do m -ésimo “spot” no plano de Fourier; i é a unidade imaginária, λ o comprimento de onda da luz incidente e f é o comprimento focal da lente.

Figura 3. 4 - Representação esquemática da propagação óptica de Fourier do plano do SLM para o plano focal do sistema óptico.



Fonte: Adaptado da Ref. ¹³

Para a criação do holograma a tarefa é determinar, para um dado conjunto de Δ_j^m , a melhor escolha dos ϕ_j que maximizam o módulo de V_m em todos os “spots”. O melhor passo consiste de introduzir um novo algoritmo Gerchberg-Saxton iterativo tendo ótimo desempenho com respeito tanto a eficiência como a uniformidade. Para isso, é introduzido M graus extras de liberdade w_m , que maximizam a soma ponderada $\sum_m w_m |V_m|$ com a restrição de que todos $|V_m|$ são iguais. Diferenciando com respeito a ϕ_j , os autores obtiveram a condição que maximiza a soma, cujas soluções são dadas por

$$\phi_j = \arg \left[\sum_m e^{i\Delta_j^m} \frac{w_m V_m}{|V_m|} \right]. \quad (2.43)$$

Em cada iteração o peso w_m é ajustado de forma a reduzir desvios de $|V_m|$ em relação à média $\langle |V| \rangle$.

O algoritmo acima é chamado de Gerchberg-Saxton Ponderado (GSW) e converge com uma velocidade típica de algoritmos Gerchberg-Saxton^{26; 27}. Para uma armadilha ótica na forma de uma rede quadrada com 10x10 pontos luminosos, o holograma tem performance quase ótima $e = 0.93$, $u = 0.90$ com poucas dezenas de iterações. Desta forma, os autores desenvolveram um algoritmo para alcançar quase que perfeita eficiência e uniformidade usando hologramas apenas de fase e com um modesto tempo computacional.

3.4 Elemento “fan-out” Para Geração de “spots” de Subdifração

Em 2014, Ogura e colaboradores¹⁴ apresentaram um método para elemento difrativo “fan-out” que gera estruturas de “spots” de subdifração empregando um algoritmo Gerchberg-Saxton (GS) modificado num sistema imagem (Fig. 3.2). A dispersão da energia luminosa e a fase dos pontos luminosos gerados são controlados pela restrição imposta a cada iteração do GS. Uma estrutura de “spots” de subdifração 3x3 é gerada com o elemento “fan-out” inserido num modulador espacial de luz e a relação sinal-ruído (SNR) é analisada.

Sendo o elemento “fan-out” iluminado por uma onda plana de comprimento de onda λ , a distribuição de intensidade no plano de saída (plano de Fourier) pode ser escrita por

$$I(x, y) \propto \left| \iint t(\xi, \eta) \exp \left[-\frac{j2\pi}{\lambda f} (x\xi + y\eta) \right] d\xi d\eta \right|^2, \quad (2.44)$$

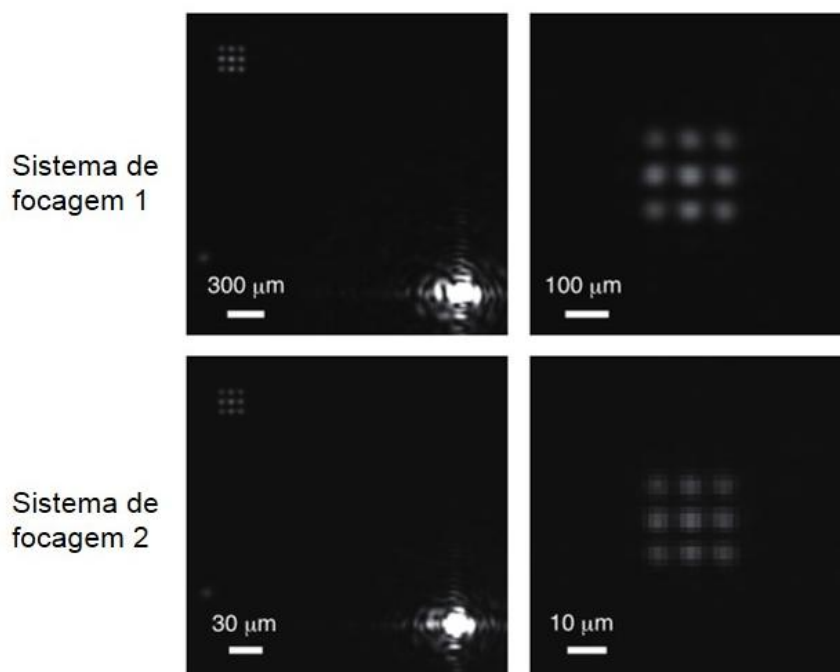
onde j é a unidade imaginária, f o comprimento focal da lente, e $t(\xi, \eta)$ é a amplitude complexa imediatamente depois do elemento “fan-out”.

Duas operações são requeridas na restrição no plano de saída para gerar “spots” de subdifração. A primeira é dispersar a energia luminosa para a área circundante dos “spots” para remover o excesso de energia dos “spots”. A outra é separar “spots” adjacentes de modo a não se fundirem num único “spot”. Quando a diferença de fase entre os “spots” adjacentes é zero, a intensidade entre os “spots” torna-se grande em comparação a intensidade dos “spots” individuais devido a interferência. Os “spots” podem, conseqüentemente, se fundirem. Por outro lado, quando a diferença de fase é π , a intensidade entre os “spots” é baixa comparada a intensidade de cada spot sozinho, e a área onde a intensidade é aproximadamente zero aparece. Isto sugere que o controle da distribuição de fase no plano de saída é importante para gerar uma rede de pequenos “spots”.

Uma grade de “spots” de subdifração 3x3 é gerada por dois sistemas de focagem, com uma lente e com uma objetiva, como mostrado na Fig. 3.6. A maior parte da luz está concentrada na ordem zero de difração, no canto inferior direito da primeira coluna da Fig. 3.6 e está associada com a luz não modulada pelo SLM. Para o sistema utilizando a lente foi conseguido uma diminuição de 21% na largura dos “spots” comparado com a largura dos “spots” limitados por difração, e 20% utilizando o sistema com a objetiva. A relação da eficiência, definida como razão da potência na área dos “spots” pela potência total incidente, com o tamanho do “spot” é obtida teoricamente como sendo aproximadamente 10% para

“spots” cujo tamanho é cerca de 80% do tamanho dos “spots” limitados por difração. No cálculo do sinal-ruído (SNR), a luz no entorno dos “spots” individuais, desde o seu pico de intensidade até o primeiro mínimo local em todas as direções, é considerada sinal, e as outras luzes são consideradas ruídos. O SNR obtido foi 10.3 para o sistema com a lente e 8.0 com a objetiva.

Figura 3. 5 - Distribuição de intensidade obtida usando o elemento “fan-out” para geração de “spots” 3x3 com uma lente (sistema 1) e com uma objetiva (sistema 2).



Fonte: Retirado da Ref.¹⁴

Desta forma, os autores apresentaram um método para geração de elemento “fan-out” que gera uma estrutura de “spots” de subdifração com uma diminuição dos “spots” de 20% em relação aos “spots” limitados por difração. Para esse propósito é utilizado um algoritmo Gerchberg-Saxton com certas imposições. O elemento “fan-out” apresenta um desempenho muito baixo em termos da eficiência e uniformidade dos “spots” gerados. Porém, como o objetivo do trabalho é a geração de “spots” de subdifração, esses quantificadores não são levados em conta pelos autores.

3.3 Pinças Óticas Multifuncionais Usando Hologramas Gerados por Computador

Com o intuito de gerar pinças óticas para o aprisionamento e manipulação tridimensional de micropartículas, J. Liesener et al.¹⁶ apresentaram uma configuração de pinça ótica holográfica em que os hologramas gerados por computador escritos em um display de

crystal líquido (LCD) foram usados para controlar o número, as posições e as formas das armadilhas óticas em duas e três dimensões.

O cálculo dos hologramas de Fourier é direto e os hologramas gerados são úteis para a manipulação em duas dimensões. Neste caso, a reconstrução é apenas a transformada de Fourier do holograma. Portanto, um ponto central capaz de capturar uma partícula é gerado se o holograma consiste em uma fase uniforme ϕ . Um deslocamento lateral desta armadilha pode ser alcançado se o holograma for escolhido como uma fase linear:

$$\phi(x, y) = \left(\frac{2\pi}{\Lambda_x} x + \frac{2\pi}{\Lambda_y} y \right) \text{mod}(2\pi), \quad (2.45)$$

Λ_x e Λ_y são os períodos na direção x e y , mod é a função módulo. Para moduladores de luz com um deslocamento máximo de fase de 2π a eficiência é reduzida e parte da intensidade permanece no ponto luminoso central (ordem zero). Múltiplas armadilhas podem ser realizadas somando as funções complexas $e^{i\phi_j}$ e então calculando o argumento desta função complexa:

$$\phi(x, y) = \arg \left(\sum_j e^{i\phi_j(x, y)} \right). \quad (2.46)$$

Considerando apenas a fase da soma complexa, variações de intensidade das armadilhas podem ocorrer.

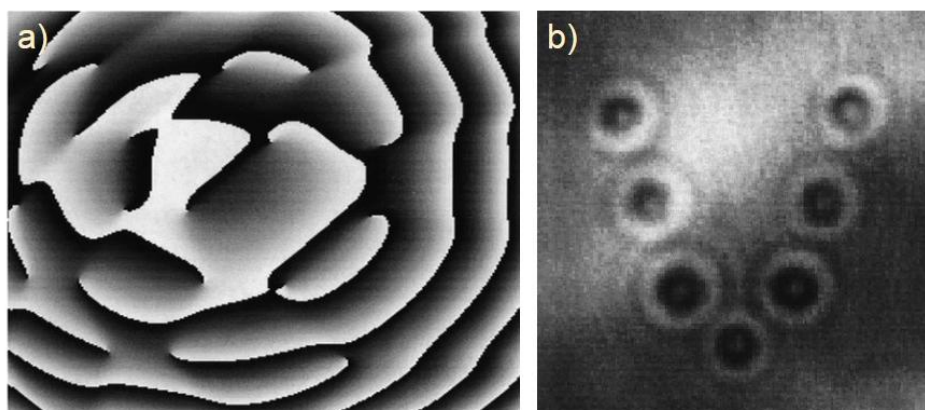
Adicionando um termo de lente para as grades, o foco do feixe pode ser deslocado para cima e para baixo paralelamente ao eixo ótico:

$$\phi(x, y) = \left(\frac{2\pi}{\Lambda_x} x + \frac{2\pi}{\Lambda_y} y + \Gamma(x^2 + y^2) \right) \text{mod}(2\pi), \quad (2.47)$$

em que Γ controla a posição axial da armadilha, proporcionando a manipulação tridimensional.

A Fig. 3.4(a) ilustra o holograma de fase que gera as pinças óticas para manipulação tridimensional. Na Fig. 3.4(b) está mostrado o resultado experimental da manipulação arbitrária de sete esferas de sílica, posicionadas na forma de V.

Figura 3. 6 - (a) holograma de fase para geração de pinças óticas e (b) manipulação de sete esferas de sílica.



Fonte: Retirado da Ref.¹⁶

Desta forma os autores conseguiram aprisionar e mover, de forma independente, sete esferas de sílica de $1\ \mu\text{m}$. É um método bastante rápido e direto, embora tenha baixa eficiência e uniformidade, e produza uma quantidade bastante reduzida de pontos luminosos.

3.6 Matriz de Pontos Luminosos Gerada por Efeito Talbot Fracionário

Zhu et al.⁴⁵ desenvolveram um trabalho baseando-se na geração de estruturas de pontos luminosos, por meio de funções que modulam apenas fase, características do efeito Talbot fracionário. Para isso, os autores utilizaram alguns trabalhos teóricos anteriores^{46; 47} que exploraram a criação de arranjos luminosos baseado no efeito Talbot e efeito Talbot fracionário e fornecem algumas funções específicas.

O efeito Talbot é um fenômeno difrativo no campo próximo tipicamente resultante da iluminação com luz coerente de uma grade periódica, resultando em imagens características da grade que se repete em distâncias regulares a partir desta. Tais distâncias recebem o nome de comprimento de Talbot. O efeito Talbot fracionário ocorre em distâncias fracionárias do comprimento de Talbot. Este efeito pode ser produzido por uma distribuição apenas de fase de estruturas de grade, que converte uma onda plana uniforme em muitos pontos de luz de igual intensidade, com pouco ou nenhuma perda na conversão. Tendo em vista esse fato, os autores produzem arranjos de pontos luminosos na região focal de uma objetiva com grande abertura numérica.

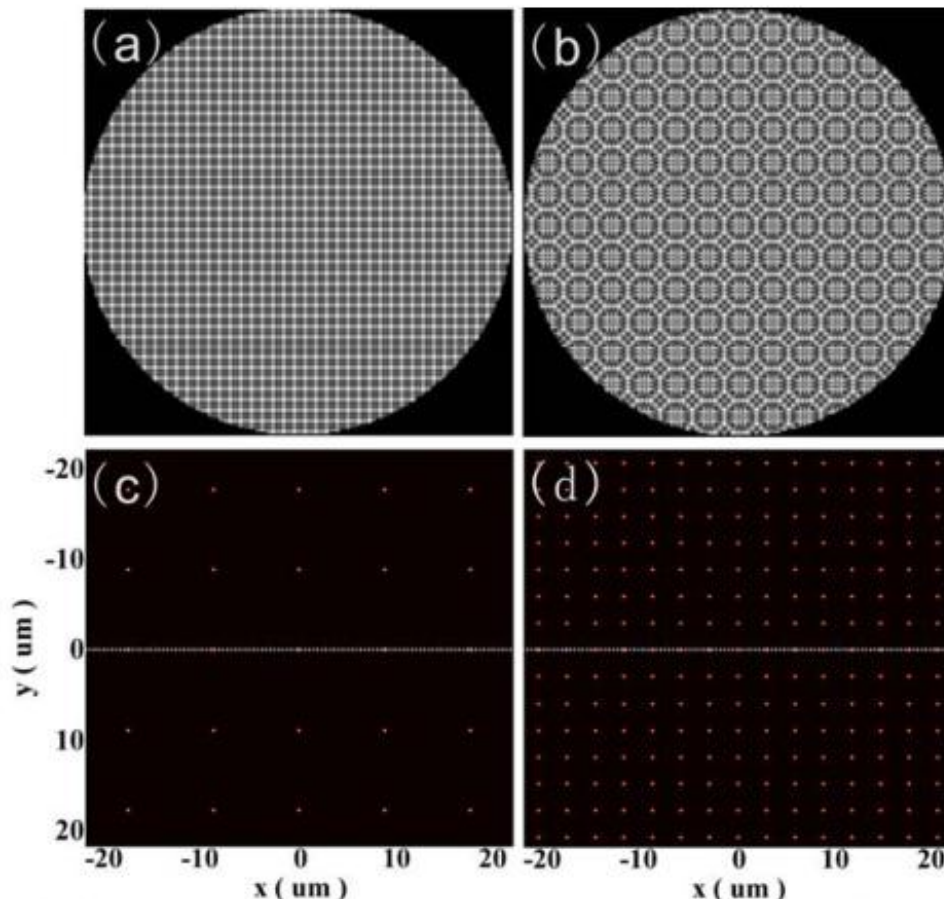
Uma simples equação do padrão de fase de uma estrutura quadrática em distâncias Talbot fracionárias pode ser expressa como

$$\Phi(m, n, \beta) = \frac{\pi}{2} \left(\gamma - \frac{1}{\beta} \right) (m^2 + n^2), \quad (2.48)$$

onde m, n são inteiros, números ordinários dos pixels no SLM. β é o parâmetro Talbot fracionário e γ é uma constante dependente de β ⁴⁷.

Na Fig. 3.7 é mostrado o padrão de fase dentro da abertura da objetiva com modulação apenas de fase do efeito Talbot fracionário para $\beta = 5$ e $\beta = 15$, bem como a simulação das correspondentes distribuições de intensidades no plano focal. A simulação mostra ótimos resultados para as estruturas geradas, tanto em termos de eficiência quando de uniformidade dos pontos luminosos.

Figura 3. 7 - Padrão de fase na abertura de uma objetiva e correspondentes distribuição de intensidade no plano focal. (a) e (c), $\beta = 5$. (b) e (d), $\beta = 15$.



Fonte: Retirado da Ref.⁴⁵

4 ELEMENTO “FAN-OUT” PARA GERAÇÃO DE MÚLTIPLOS “SPOTS” UTILIZANDO UM MODULADOR ESPACIAL DE LUZ

4.1 Introdução

Como discutido no capítulo anterior, elemento “fan-out” é um dispositivo ótico que replica um feixe incidente, podendo essas réplicas serem focadas através de uma lente para formar uma estrutura de “spots”, ou seja, uma estrutura de pontos de intensidade luminosa. Tais estruturas de pontos luminosos representam um método efetivo na paralelização de várias operações em aplicações óticas, como nas chamadas armadilhas e pinças óticas em microbiologia, onde se analisa o aprisionamento e manipulação de micropartículas com a luz. Também no processamento a laser e microfabricação.

Vimos no capítulo 2 que os moduladores espaciais de luz constituem uma ferramenta bastante útil para pesquisas em ótica, possibilitando a modulação de campos óticos complexos pela simples inserção de hologramas gerados por computador. Os SLM's representam a modernização da holografia, permitindo controle de amplitude, fase, estados de polarização⁹ e até mesmo correção de aberrações da frente de onda¹⁰ do campo ótico.

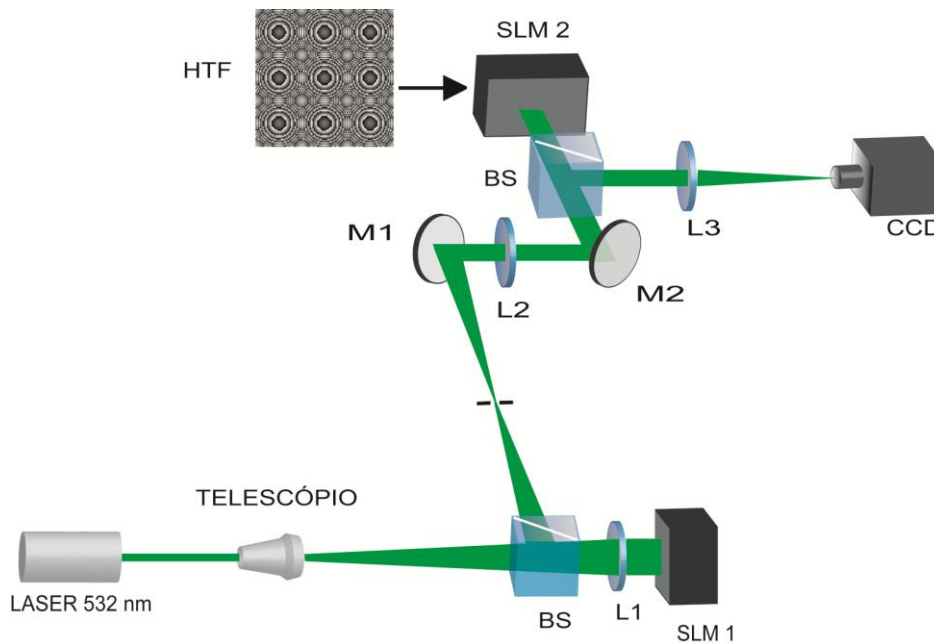
Neste capítulo nós propomos um método “fan-out” simples e direto, consistindo de um holograma de fase gerado por computador, para a obtenção de redes quadradas de muitos “spots” utilizando um modulador espacial de luz (SLM). O método “fan-out” em questão é testado tanto numericamente como experimentalmente. Adicionalmente, fazemos a realização experimental do último método de geração de redes de “spots” discutido no capítulo anterior para verificarmos se os resultados concordam com a simulação realizada pelos autores. Essa realização experimental e os resultados obtidos serão primeiramente detalhados na seção seguinte.

4.2 Realização Experimental da Matriz de Pontos Luminosos Gerada por Efeito Talbot Fracionário

Para melhor entendimento do método de geração de matrizes de pontos luminosos por meio de funções com modulação apenas de fase, obtidas do efeito Talbot fracionário, e para verificação dos resultados simulados por Zhu⁴⁵, executamos a realização experimental. O aparato experimental utilizado está ilustrado na Fig. 4.1 para melhor compreensão. O feixe de um laser Finesse com comprimento de onda de 532nm , operando em 250mW , é expandido

por uma lente objetiva. A lente L1 (comprimento focal $f = 250\text{mm}$) colima o feixe que é então incidido no SLM 1 (Modulador Espacial de Luz da Hamamatsu, modelo X10468, que modula apenas fase). Além disso, a lente L1 também focaliza a luz vinda desse SLM. A lente L2 ($f = 250\text{mm}$) colima o feixe que incide no SLM 2 (Modulador Espacial de Luz da marca Holoeye, modelo Leto, que modula apenas fase), no qual é inserido o holograma com a modulação de fase obtida pelo efeito Talbot fracionário (HTF) e que gera a matriz de pontos luminosos na região focal da lente L3 ($f = 100\text{mm}$). O padrão é capturado por uma câmera Pixelink PL-B781F Monocromática. Dois divisores de feixe (BS) e dois espelhos (M1 e M2) são empregados para possibilitar a melhor configuração do aparato experimental. O SLM 1 é empregado para perfeita modulação gaussiana do feixe e a íris funciona como filtro espacial para eliminar ruídos e ordens de difração indesejadas.

Figura 4.1 - Aparato experimental para obtenção da matriz de pontos luminosos pelo método do efeito Talbot fracionário.



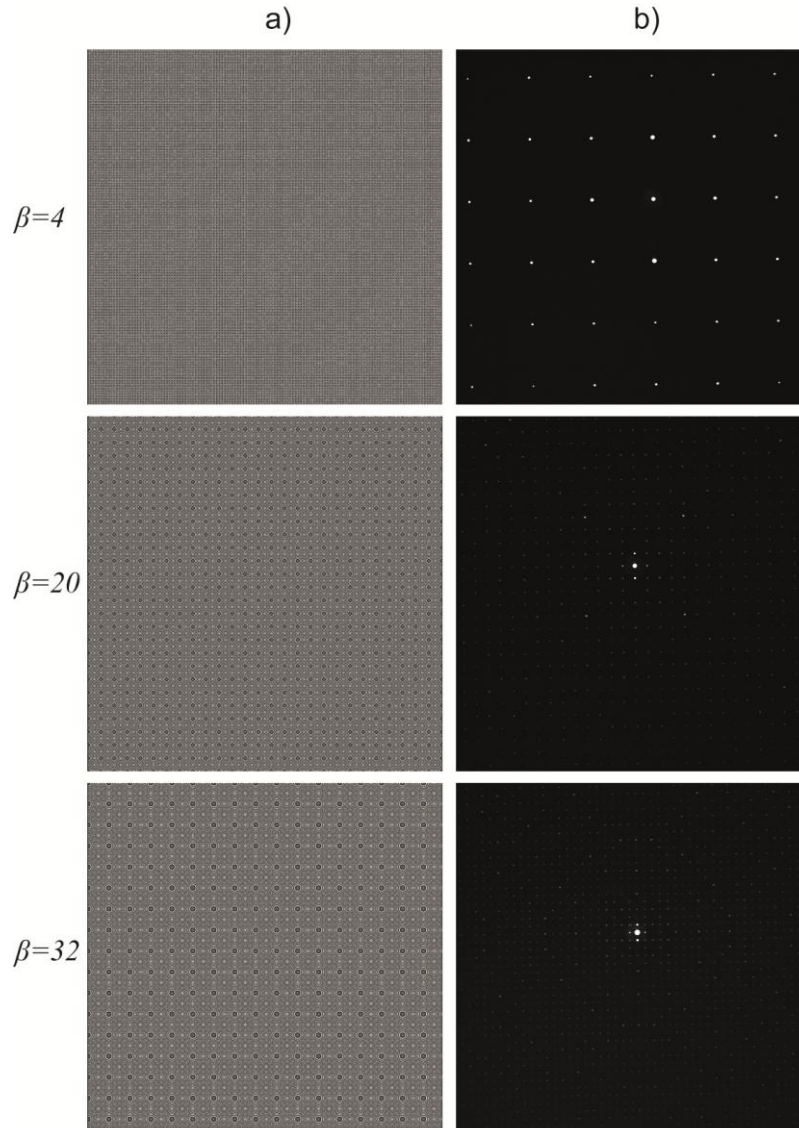
Fonte: Autor, 2017.

Utilizando a Eq. (3.12) geramos os hologramas para obtenção da matriz de pontos luminosos. De acordo com a Ref.⁴⁷, $\gamma = 0$ para valores de β múltiplos de 4. Os valores de m e n são tomados assumindo uma região quadrada do SLM de 1080×1080 pixels. Os hologramas gerados para alguns valores específicos de β são mostrados na Fig. 4.2(a).

Na Fig. 4.2(b) são mostradas as distribuições de intensidade no plano focal da lente L3 para os hologramas da Fig. 4.2(a). As imagens mostradas são apenas parte das matrizes de pontos luminosos geradas, pois o holograma não gera o padrão apenas numa pequena região

em torno do ponto focal mas sim em todo o plano focal, não sendo possível captar todo o padrão pela câmara. Das imagens vemos um ponto central mais intenso que é devido ao fato do SLM não modular completamente a luz que nele incide. Percebe-se também que a uniformidade é bastante comprometida na prática, apresentando “spots” com maior ou menor intensidade. Isso porque o método não gera uma estrutura de pontos luminosos focalizados em uma pequena região, mas sim em todo o plano focal, de modo que precisaria de uma energia infinita para cobrir todo o plano focal e que esta se distribuisse uniformemente em toda região do plano, o que na prática é impossível. Não é possível também ter controle do número de pontos luminosos gerados, o que impossibilita a aplicação em processos que necessitem ter esse controle.

Figura 4. 2 - a) Hologramas para geração de matriz de pontos luminosos pelo método do efeito Talbot fracionário e b) distribuição de intensidade no plano focal gerado pelos hologramas.



Fonte: Autor (2017)

4.3 Teoria do Elemento “fan-out” para Geração de Múltiplos “Spots”

Passaremos agora a descrever a teoria do elemento “fan-out” para geração de redes de muitos “spots” o que estamos propondo como um método alternativo para esse propósito.

A onda plana tem amplitude complexa dada por²⁹

$$U = A \exp \left[-j (k_x x + k_y y + k_z z) \right], \quad (4.1)$$

onde j é a unidade imaginária, A é uma constante chamada envelope complexo e $\mathbf{K} = (k_x, k_y, k_z)$ é o vetor de onda cujo módulo quadrado é $K^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. Podemos generalizar para um somatório de ondas planas, cuja propagação ao longo do eixo z , é escrita da seguinte forma

$$S = \sum_i^N \exp \left[-j \left(k_{xi} x + k_{yi} y + \sqrt{K^2 - (k_{xi})^2 - (k_{yi})^2} z \right) \right], \quad (4.2)$$

reconhecendo a componente do vetor de onda $k_z = \sqrt{K^2 - k_x^2 - k_y^2}$ e desprezando o envelope complexo A .

Na aproximação paraxial temos que $k_x \ll K$ e $k_y \ll K$, de modo que a seguinte aproximação é válida

$$\sqrt{K^2 - (k_x)^2 - (k_y)^2} = K \sqrt{1 - \left(\frac{k_x}{K} \right)^2 - \left(\frac{k_y}{K} \right)^2} = K \left[1 - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{k_x}{K} \right)^2 + \left(\frac{k_y}{K} \right)^2 \right) \right]. \quad (4.3)$$

Substituindo a Eq. (4.3) na Eq. (4.2), ficamos com

$$S = \sum_i^N \exp \left[-j \left(k_{xi} x + k_{yi} y + Kz - \left(\frac{(k_{xi})^2 + (k_{yi})^2}{2K} \right) z \right) \right], \quad (4.4)$$

como o termo Kz não depende do índice i , podemos colocá-lo para fora do somatório e como se trata apenas de uma fase global, vamos desprezá-lo por conveniência. Portanto, a Eq. (4.4) fica

$$\begin{aligned}
S &= \sum_i^N \exp \left[-j \left(k_{xi}x + k_{yi}y - \left(\frac{(k_{xi})^2 + (k_{yi})^2}{w^2} \right) \right) \right] \\
&= \sum_i^N \exp(j\phi_i) \exp \left[-j(k_{xi}x + k_{yi}y) \right],
\end{aligned} \tag{4.5}$$

onde definimos

$$w^2 = \frac{2K}{z} \tag{4.6}$$

e

$$\phi_i = \frac{(k_{xi})^2 + (k_{yi})^2}{w^2}. \tag{4.7}$$

Portanto, a Eq. (4.5) pode ser entendida como um somatório de ondas planas cada uma multiplicada por uma fase constante para z fixo, traduzindo o efeito de propagação ao longo do eixo z .

É conhecido do teorema do shift, da ótica de Fourier, que uma onda plana funciona como um transportador (“carrier”), deslocando uma onda objeto ao longo de um plano de observação após a realização de uma transformada de Fourier do produto dessas duas ondas¹, onde tal deslocamento é governado pelas componentes do vetor de onda. Tendo em vista este fato, um somatório de ondas planas deslocará uma onda objeto para várias posições ao longo do plano de observação, dividindo a energia da onda objeto entre as várias ondas geradas nas diferentes posições.

Considerando o somatório de ondas planas dado pela Eq. (4.5) com N indicando a raiz quadrada do número de pontos luminosos que desejamos criar, a uma constante real associada com a separação das ondas e ϕ a função quadrática representada na Eq. (4.7), desenvolvemos nosso elemento “fan-out” através da criação de hologramas com o padrão de fase desse somatório. Para se ter maior transmissão da luz incidente pelo holograma e, consequentemente, uma maior eficiência do elemento “fan-out” e uniformidade dos “spots” gerados é importante que a amplitude desse somatório de ondas planas seja uniformemente distribuída. Portanto, desejamos que para toda região em que o somatório de ondas planas é definido a seguinte equação seja satisfeita

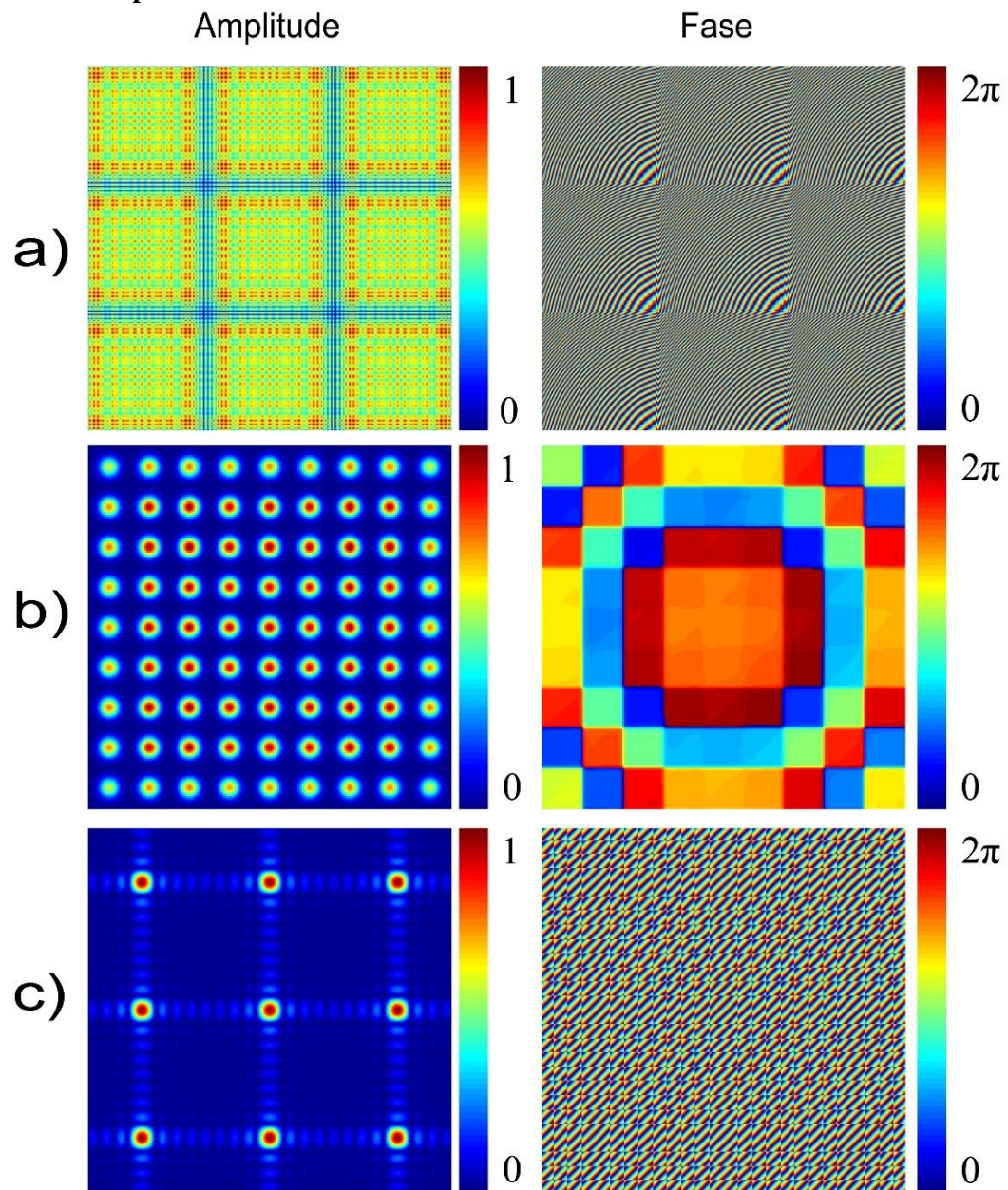
$$D = \min \sum_{i,j} \left| \frac{|S(x_i, y_j)|}{\sum_{i,j} |S(x_i, y_j)|} - \frac{1}{N^2} \right|. \quad (4.8)$$

A Eq. (4.8) minimiza a diferença de intensidade normalizada do somatório de ondas planas e uma constante. Este mínimo é encontrado variando-se o parâmetro w associado para encontrar o que otimiza a amplitude do somatório das ondas planas tal que a intensidade é a mais constante possível. Calculamos numericamente a Eq. (4.8) para valores de N variando de 5 à 59 em intervalos de 3 e obtivemos a seguinte equação para w_{opt} como função do número de “spots”:

$$w_{opt} = 0,85 + 0,09N - (5,37 \times 10^{-4})N^2. \quad (4.9)$$

A Fig.4.3 ilustra um recorte da região principal do padrão de amplitude e fase normalizados tanto do holograma como da sua transformada de Fourier, que gera a rede de “spots”. Na Fig. 4.3(a) está representado o padrão de amplitude e fase da soma $S(x, y)$ gerada com $N = 35$. A Fig. 4.3(b) mostra o padrão de amplitude e fase no plano de Fourier do holograma gerado com $N = 9$, e na Fig. 4.3(c) está ilustrado o padrão de amplitude e fase da soma $S(x, y)$ gerada com $N = 9$ mas com a função $\phi_i = 0$.

Figura 4.3 - Amplitude e fase.



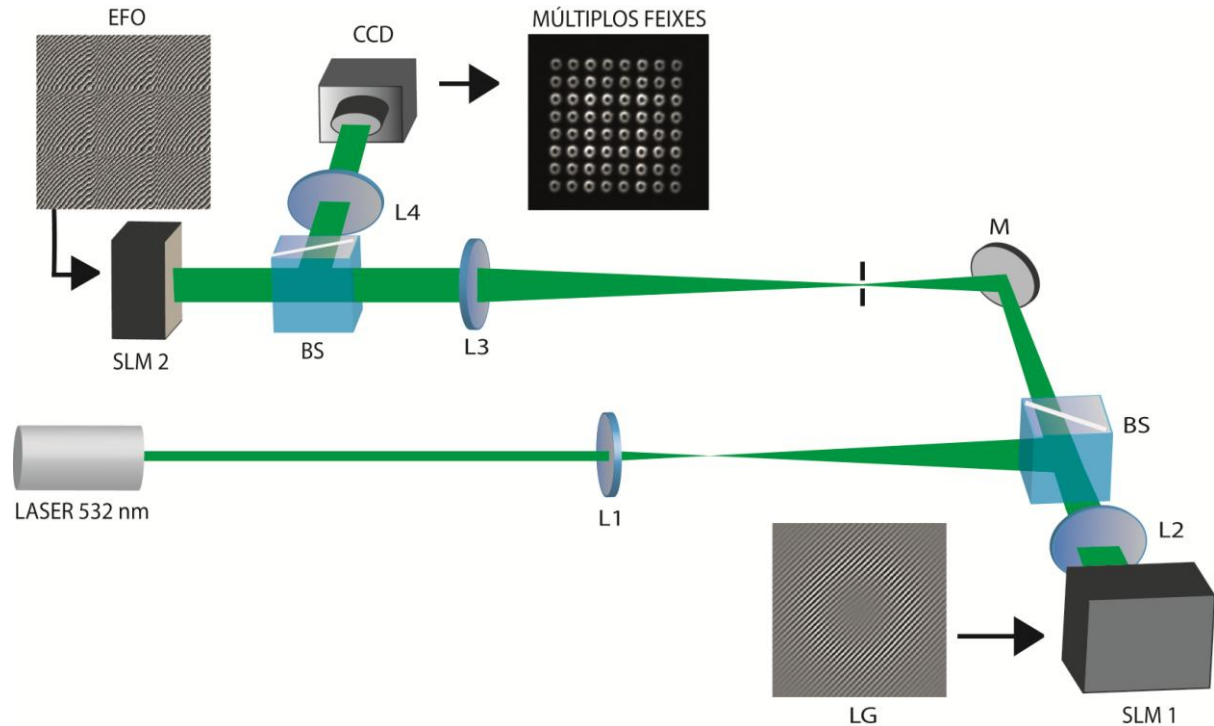
Fonte: Autor, 2017.

Da Fig. 4.3(b) vemos que é possível gerar a rede de “spots” de maneira simples e direta, sem precisar de nenhum algoritmo iterativo, através da criação de holograma com a fase de um somatório de ondas planas e utilizando esse holograma como elemento “fan-out”. Além disso, vemos que a fase entre “spots” é conhecida, variando de forma quadrática. Para comprovar nossa teoria realizamos o experimento, que será detalhado na seção seguinte.

4.4 Experimento

Nesta seção detalharemos a realização experimental feita para constatar nossa teoria. O aparato experimental utilizado está esquematizado na Fig. 4.4.

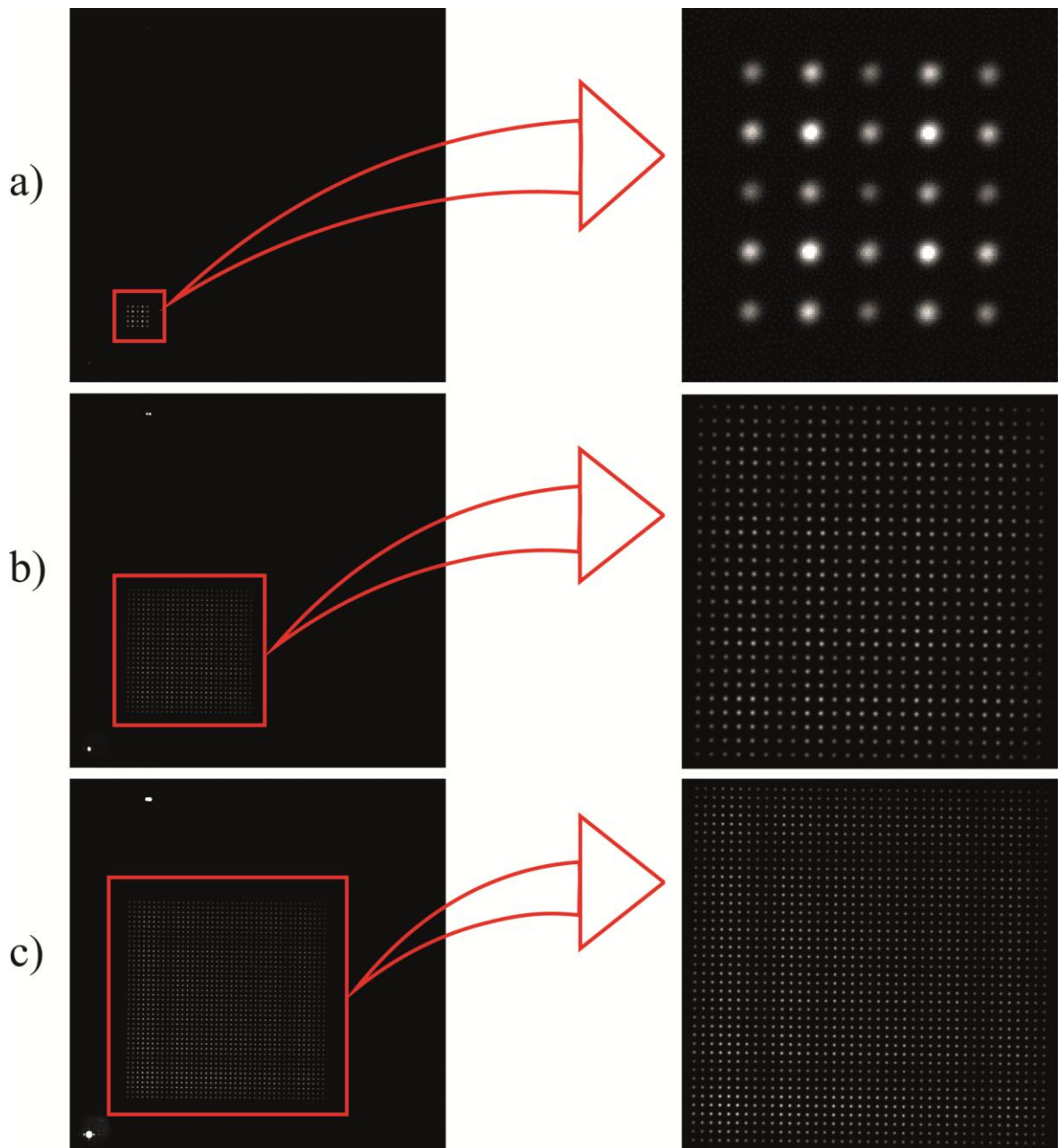
Figura 4. 4 - Configuração experimental 1.



Fonte: Autor, 2017.

No experimento, um feixe de luz gerado por um laser Finesse de comprimento de onda 532 nm é expandido por um par de lentes de comprimento focal $L1=30$ mm e $L2=500$ mm incidindo sobre o SLM 1 (Modulador Espacial de Luz da Hamamatsu, modelo X10468, que modula apenas fase), no qual é inserido um holograma (LG) para gerar feixes Laguerre-Gauss. Feixes Laguerre-Gauss de diferentes cargas topológicas são gerados na primeira ordem de difração do holograma, que é filtrado pela íris, colimado pela lente $L3=500$ mm e então incidido no SLM 2 (Modulador Espacial de Luz da marca Holoeye, modelo Leto, que modula apenas fase). No SLM 2 é introduzido o holograma com a fase das ondas planas constituindo o elemento “fan-out”(EFO). A rede de “spots” é formada no plano de Fourier da lente $L4=300$ mm e capturada por uma câmera Pixelink PL-B781F Monocromática. Dois divisores de feixe (BS), e um espelho (M) são empregados para possibilitar a melhor configuração do aparato experimental.

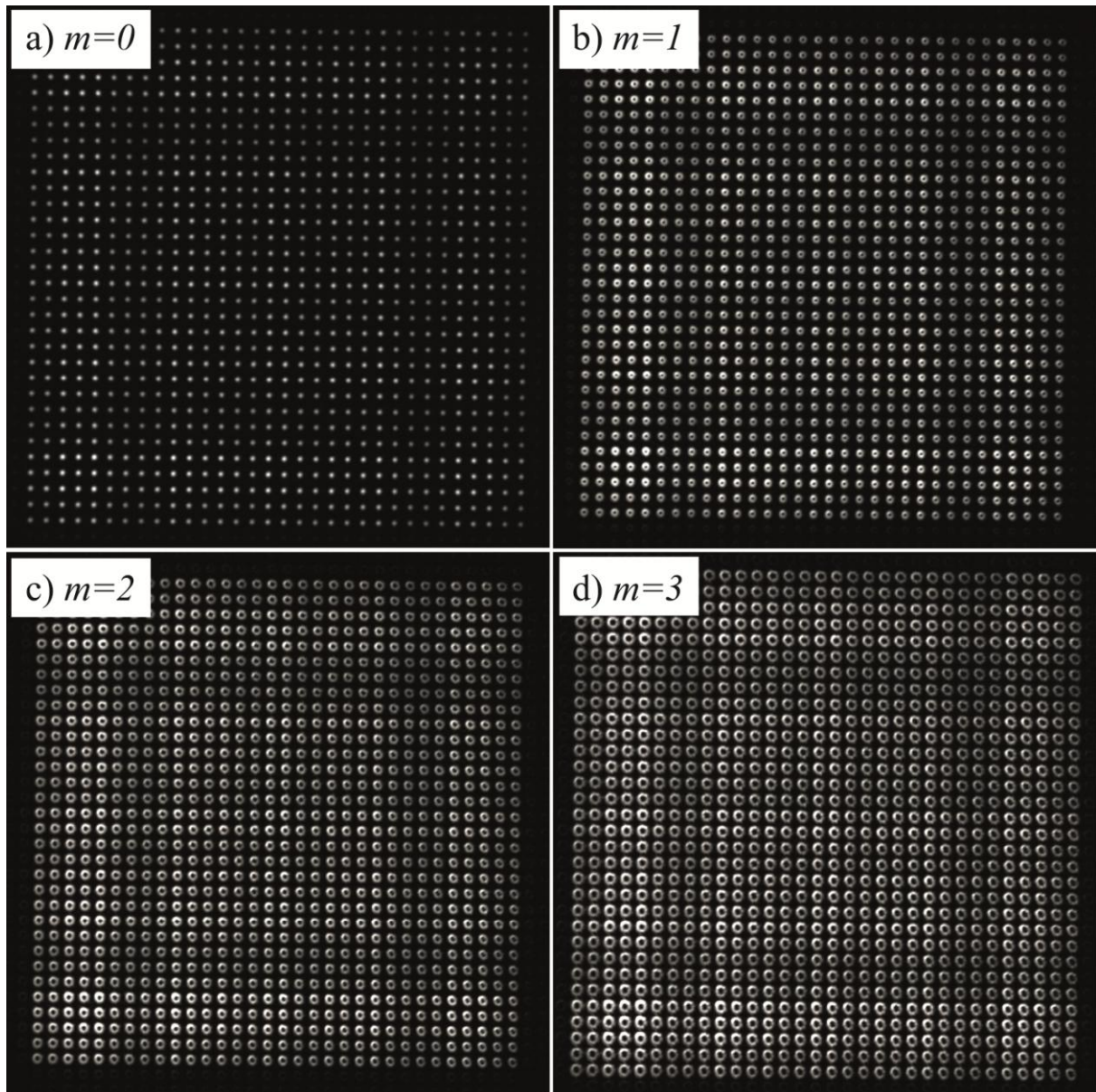
Figura 4. 5 - Redes de “spots” obtidas experimentalmente com feixe gaussiano usando nosso elemento “fan-out”. a) 5x5; b) 26x26 e c) 41x41.



Fonte: Autor, 2017.

São criados 4 hologramas para a geração de feixes Laguerre-Gauss, correspondendo a carga topológica m variando de 1 à 3, e também para $m=0$ que é equivalente a um feixe gaussiano como discutido na seção 2.3.1. Para o elemento “fan-out” são criados 19 hologramas variando a quantidade de “spots” gerados, para valores de N variando de 5 a 59 em intervalos de 3. Testamos os 4 feixes para cada um dos elementos “fan-out”, totalizando 76 medidas. O padrão capturado pela câmera, bem como um “zoom” na rede de “spots” gerada para o feixe gaussiano e $N=5, 26$ e 41 está representado na fig. 4.5.

Figura 4. 6 - Múltiplos feixes Laguerre-Gaussianos (32x32) de carga topológica m obtidos experimentalmente usando nosso elemento “fan-out”.

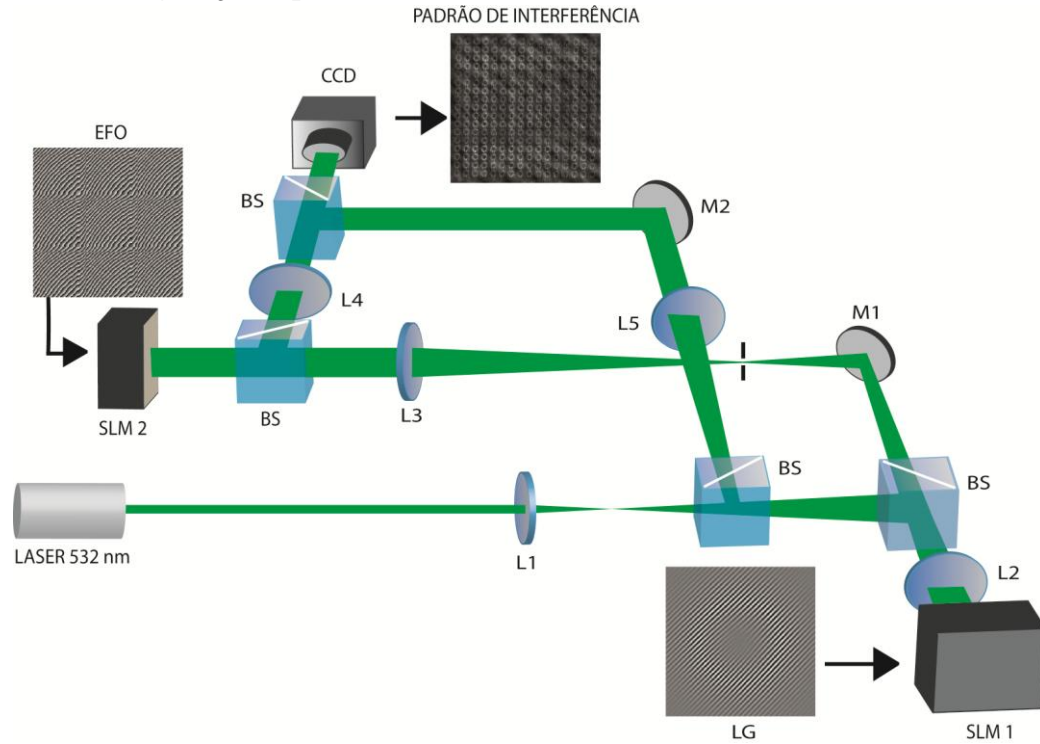


Fonte: Autor, 2017.

Na Fig. 4.6 são mostrados múltiplas cópias do feixe Laguerre-Gauss geradas com o elemento “fan-out” tomando $N = 32$ e variando a carga topológica. Para comprovar que nosso holograma é de fato elemento “fan-out” e gera cópias de qualquer feixe incidente, inclusive conservando suas características como o momento angular orbital para o caso do feixe Laguerre-Gauss com $m \neq 0$ analisado por nós, produzimos interferência entre uma rede de “spots” e uma onda plana e verificamos o surgimento do padrão de interferência característico. Esse padrão de interferência é obtido incluindo no aparato experimental 1 mais dois divisores de feixe, uma lente L5 (500 mm) e um espelho como ilustrado na Fig. 4.7. O padrão de

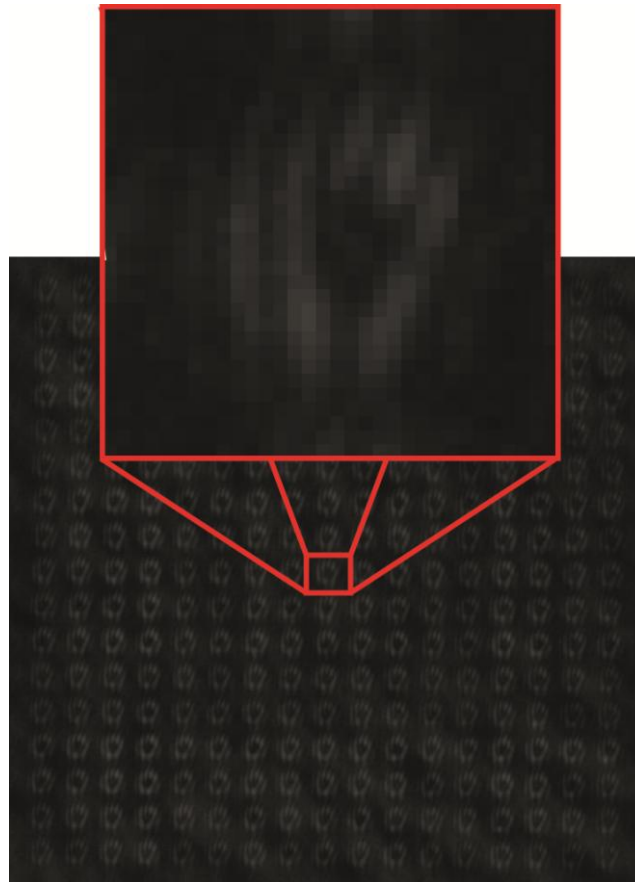
interferência obtido para uma rede de “spots” com $N=17$ de múltiplos feixes Laguerre-Gauss de carga topológica $m=2$ está mostrado na Fig. 4.8 com um dos “spots” ampliado para melhor visualização.

Figura 4.7 - Configuração experimental 2.



Fonte: Autor, 2017.

Figura 4. 8 - Padrão de interferência entre onda plana e rede de 17x17 feixes Laguerre-Gauss de carga topológica $m=2$.



Fonte: Autor (2017)

4.5 Resultados e Discussões

Estudamos o elemento “fan-out” proposto para geração de múltiplos “spots” com a criação de redes 5x5 até 59x59, tanto com feixe gaussiano como com feixes Laguerre-Gauss de diferentes cargas topológicas. Da Fig. 4.5 vemos que além da rede de pontos luminosos gerada existem mais dois pontos luminosos, um na parte inferior esquerda e o outro na parte superior esquerda. O primeiro se dá pelo fato do SLM não modular toda a luz que nele incide, de modo que na ordem zero do SLM aparece essa luz mais intensa; O segundo ponto luminoso é uma luz não desejada gerada na realização experimental, geralmente devido a reflexões nas óticas e que gera essa luz não desejada capturada na câmera.

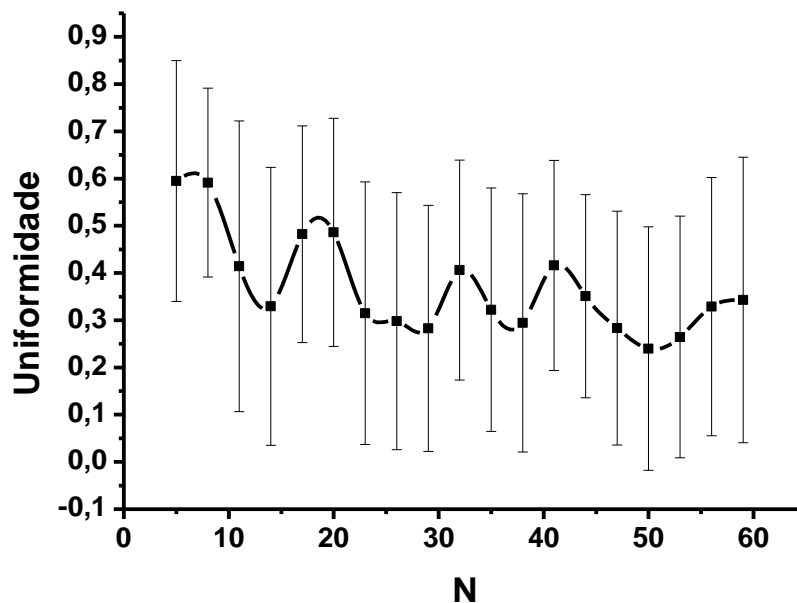
Conseguimos uma eficiência teórica de 60% com o elemento “fan-out” proposto. Calculamos a uniformidade definida pela Eq. (3.2) da rede de pontos luminosos gerada, o que indica a intensidade relativa entre o “spot” mais intenso e o “spot” menos intenso da rede gerada. A uniformidade em função da raiz quadrada do número de “spots”, N , está representada no gráfico 4.1. Ao calcularmos a uniformidade levando em conta

simplesmente os valores dos “spots” mais e menos intenso há uma imprecisão na medida feita. Para analisarmos a dispersão nos valores de uniformidade, isto é, o intervalo de valores dentro do qual o valor da uniformidade pode variar, plotamos junto à curva da uniformidade os valores do desvio padrão relativo em barras como mostrado no gráfico 4.1. O desvio padrão relativo é definido como

$$\sigma = \sqrt{\langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle} / \langle I \rangle. \quad (4.10)$$

Do gráfico vemos que a uniformidade alcança seu valor máximo (0,6) para a menor rede testada, ou seja, para uma rede quadrada 5x5. Para as demais grades testadas a uniformidade diminui de forma aproximadamente exponencial, assumindo seu menor valor para $N = 50$.

Gráfico 4. 1 - Uniformidade experimental dos “spots” versus raiz quadrada do número de “spots”.



Fonte: Autor (2017)

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho fizemos um breve apanhado de temas de bastante importância para a física e, de modo mais restrito, para a ótica como a difração da luz, feixes de luz com momento angular orbital e holografia. Centramos nossa atenção no dispositivo ótico chamado

elemento “fan-out”, com a apresentação de alguns principais trabalhos que trata do tema, elucidando diferentes formas de criação. Em seguida propomos um método alternativo para a geração de redes de muitos pontos luminosos ($>50 \times 50$) de modo simples e direto.

Realizamos o experimento para verificar o método de geração de muitos pontos luminosos utilizando o efeito Talbot fracionário, que apresenta excelentes resultados na simulação. Contudo, percebemos que na prática esse método apresenta algumas complicações, principalmente por não formar a rede de “spots” numa pequena região junto ao ponto focal mas sim em todo o plano focal. Isso afeta diretamente na uniformidade dos pontos luminosos gerados. Também não se tem o controle do número de “spots” gerados, o que impossibilita a sua aplicação em processos que necessitam desse controle.

Constatamos que o elemento “fan-out” proposto gera redes de muitos pontos luminosos de forma simples e direta, sem qualquer custo computacional devido a algoritmos iterativos. Para comprovar nosso método geramos desde rede 5×5 até 59×59 , tanto com feixe gaussiano como com feixes Laguerre-Gauss de diferentes cargas topológicas. Analisamos também a interferência entre a rede de múltiplos feixes Laguerre-Gauss e uma onda plana, constatando o padrão de interferência característico para feixes com momento angular orbital, atestando assim que de fato o holograma gerado funciona como elemento “fan-out” produzindo cópias do feixe incidente. Tal método se mostra interessante dada a simplicidade, a grande quantidade de “spots” gerada de forma controlável, e ao fato de se ter conhecimento, diferentemente dos métodos iterativos, da fase entre os “spots”.

Como perspectivas futuras, pretendemos melhorar a eficiência e uniformidade do método proposto e produzir redes de muitos “spots” de subdifração também de forma simples, sem a necessidade de algoritmos iterativos. Pretendemos ainda utilizar esse elemento “fan-out” num método que temos estudado para a separação não destrutiva de estados de momento angular orbital da luz utilizando SLM.

REFERÊNCIAS

- 1 GOODMAN, J. W. **Introduction to Fourier optics**. Roberts and Company Publishers, 2005. ISBN 0974707724.
- 2 ALLEN, L. et al. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. **Physical Review A**, v. 45, n. 11, p. 8185, 1992.
- 3 GHAI, D. P.; SENTHILKUMARAN, P.; SIROHI, R. Single-slit diffraction of an optical beam with phase singularity. **Optics and Lasers in Engineering**, v. 47, n. 1, p. 123-126, 2009. ISSN 0143-8166.
- 4 SZTUL, H.; ALFANO, R. Double-slit interference with Laguerre-Gaussian beams. **Optics letters**, v. 31, n. 7, p. 999-1001, 2006. ISSN 1539-4794.
- 5 HICKMANN, J. et al. Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using light's orbital angular momentum. **Physical review letters**, v. 105, n. 5, p. 053904, 2010.
- 6 ZHOU, H. et al. Double metal subwavelength slit arrays interference to measure the orbital angular momentum and the polarization of light. **Optics letters**, v. 39, n. 11, p. 3173-3176, 2014. ISSN 1539-4794.
- 7 PADGETT, M.; COURTIAL, J.; ALLEN, L. Light's orbital angular momentum. **Physics Today**, v. 57, n. 5, p. 35-40, 2004. ISSN 0031-9228.
- 8 MARRUCCI, L. The q-plate and its future. **Journal of Nanophotonics**, v. 7, n. 1, p. 078598-078598, 2013. ISSN 1934-2608.
- 9 ERIKSEN, R. L.; MOGENSEN, P. C.; GLÜCKSTAD, J. Elliptical polarisation encoding in two dimensions using phase-only spatial light modulators. **Optics communications**, v. 187, n. 4, p. 325-336, 2001. ISSN 0030-4018.
- 10 HU, L. et al. Phase-only liquid-crystal spatial light modulator for wave-front correction with high precision. **Optics express**, v. 12, n. 26, p. 6403-6409, 2004. ISSN 1094-4087.

- ¹¹ ZHU, L.; WANG, J. Arbitrary manipulation of spatial amplitude and phase using phase-only spatial light modulators. **Scientific reports**, v. 4, p. 7441, 2014. ISSN 2045-2322.
- ¹² HERZIG, H. P. **Micro-optics: elements, systems and applications**. CRC Press, 1997. ISBN 0748404813.
- ¹³ DI LEONARDO, R.; IANNI, F.; RUOCCO, G. Computer generation of optimal holograms for optical trap arrays. **Optics Express**, v. 15, n. 4, p. 1913-1922, 2007. ISSN 1094-4087.
- ¹⁴ OGURA, Y.; AINO, M.; TANIDA, J. Design and demonstration of fan-out elements generating an array of subdiffraction spots. **Optics express**, v. 22, n. 21, p. 25196-25207, 2014. ISSN 1094-4087.
- ¹⁵ CURTIS, J. E.; KOSS, B. A.; GRIER, D. G. Dynamic holographic optical tweezers. **Optics communications**, v. 207, n. 1, p. 169-175, 2002. ISSN 0030-4018.
- ¹⁶ LIESENER, J. et al. Multi-functional optical tweezers using computer-generated holograms. **Optics Communications**, v. 185, n. 1, p. 77-82, 2000. ISSN 0030-4018.
- ¹⁷ REICHERTER, M. et al. Fast digital hologram generation and adaptive force measurement in liquid-crystal-display-based holographic tweezers. **Applied optics**, v. 45, n. 5, p. 888-896, 2006. ISSN 1539-4522.
- ¹⁸ HAYASAKI, Y. et al. Variable holographic femtosecond laser processing by use of a spatial light modulator. **Applied Physics Letters**, v. 87, n. 3, p. 031101, 2005. ISSN 0003-6951.
- ¹⁹ TORRES-PEIRÓ, S. et al. Parallel laser micromachining based on diffractive optical elements with dispersion compensated femtosecond pulses. **Optics express**, v. 21, n. 26, p. 31830-31836, 2013. ISSN 1094-4087.
- ²⁰ BLOM, H. et al. Parallel fluorescence detection of single biomolecules in microarrays by a diffractive-optical-designed 2×2 fan-out element. **Applied optics**, v. 41, n. 16, p. 3336-3342, 2002. ISSN 1539-4522.
- ²¹ ABRAHAMSSON, S. et al. Fast multicolor 3D imaging using aberration-corrected multifocus microscopy. **Nature methods**, v. 10, n. 1, p. 60-63, 2013. ISSN 1548-7091.

- 22 DAMMANN, H.; GÖRTLER, K. High-efficiency in-line multiple imaging by means of multiple phase holograms. **Optics communications**, v. 3, n. 5, p. 312-315, 1971. ISSN 0030-4018.
- 23 BENGTTSSON, J. Kinoform design with an optimal-rotation-angle method. **Applied optics**, v. 33, n. 29, p. 6879-6884, 1994. ISSN 1539-4522.
- 24 GERCHBERG, R. W. A practical algorithm for the determination of the phase from image and diffraction plane pictures. **Optik**, v. 35, n. 2, p. 237-246, 1972.
- 25 KIM, H.; YANG, B.; LEE, B. Iterative Fourier transform algorithm with regularization for the optimal design of diffractive optical elements. **JOSA A**, v. 21, n. 12, p. 2353-2365, 2004. ISSN 1520-8532.
- 26 HAIST, T.; SCHÖNLEBER, M.; TIZIANI, H. Computer-generated holograms from 3D-objects written on twisted-nematic liquid crystal displays. **Optics communications**, v. 140, n. 4-6, p. 299-308, 1997. ISSN 0030-4018.
- 27 SINCLAIR, G. et al. Interactive application in holographic optical tweezers of a multi-plane Gerchberg-Saxton algorithm for three-dimensional light shaping. **Optics Express**, v. 12, n. 8, p. 1665-1670, 2004. ISSN 1094-4087.
- 28 JACKSON, J. D. **Electrodynamics**. Wiley Online Library, 1975. ISBN 3527600442.
- 29 SALEH, B. E.; TEICH, M. C.; SALEH, B. E. **Fundamentals of photonics**. Wiley New York, 1991.
- 30 DURNIN, J. Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory. **JOSA A**, v. 4, n. 4, p. 651-654, 1987. ISSN 1520-8532.
- 31 DURNIN, J.; MICELI JR, J.; EBERLY, J. Diffraction-free beams. **Physical review letters**, v. 58, n. 15, p. 1499, 1987.
- 32 CHÁVEZ-CERDA, S. et al. Holographic generation and orbital angular momentum of high-order Mathieu beams. **Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics**, v. 4, n. 2, p. S52, 2002. ISSN 1464-4266.

- 33 KOTLYAR, V.; KOVALEV, A.; PORFIREV, A. Vortex Hermite–Gaussian laser beams. **Optics letters**, v. 40, n. 5, p. 701-704, 2015. ISSN 1539-4794.
- 34 SAITOH, K. et al. Measuring the orbital angular momentum of electron vortex beams using a forked grating. **Physical review letters**, v. 111, n. 7, p. 074801, 2013.
- 35 GUZZINATI, G. et al. Measuring the orbital angular momentum of electron beams. **Physical Review A**, v. 89, n. 2, p. 025803, 2014.
- 36 LEACH, J. et al. Measuring the orbital angular momentum of a single photon. **Physical review letters**, v. 88, n. 25, p. 257901, 2002.
- 37 GAO, C. et al. Sorting and detecting orbital angular momentum states by using a Dove prism embedded Mach–Zehnder interferometer and amplitude gratings. **Optics Communications**, v. 284, n. 1, p. 48-51, 2011. ISSN 0030-4018.
- 38 SILVA, W. C. S. **Geração e Caracterização de Feixes Possuindo Momento Angular**. 2015. 76
- 39 GUENTHER, R. *Modern Optics*. John Wiley & Sons. **Inc, Canada**, 1990.
- 40 GABOR, D. Holography, 1948-1971. **Proceedings of the IEEE**, v. 60, n. 6, p. 655-668, 1972. ISSN 0018-9219.
- 41 LEITH, E. N.; UPATNIEKS, J. Wavefront reconstruction with diffused illumination and three-dimensional objects. **Josa**, v. 54, n. 11, p. 1295-1301, 1964.
- 42 HARIHARAN, P. **Optical Holography: Principles, techniques and applications**. Cambridge University Press, 1996. ISBN 0521439655.
- 43 HAMAMATSU PHOTONICS, K. **LCOS-SLM (Optical Phase Modulators)**.
- 44 WOLF, E. **International Trends in Optics**, ed. JW Goodman: Academic Press, New York 1991.
- 45 ZHU, L. et al. Multifocal spot array generated by fractional Talbot effect phase-only modulation. **Optics express**, v. 22, n. 8, p. 9798-9808, 2014. ISSN 1094-4087.

- ⁴⁶ LOHMANN, A. W.; THOMAS, J. A. Making an array illuminator based on the Talbot effect. **Applied optics**, v. 29, n. 29, p. 4337-4340, 1990. ISSN 1539-4522.
- ⁴⁷ ZHU, L.-W. et al. Reciprocal vector theory for diffractive self-imaging. **JOSA A**, v. 25, n. 1, p. 203-210, 2008. ISSN 1520-8532.

