

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE FÍSICA

LEANDRO DE ARAÚJO MELO

**DIFRAÇÃO DE FEIXES COM SIMETRIA ELÍPTICA E POSSUINDO MOMENTO  
ANGULAR ORBITAL POR UMA ABERTURA TRIANGULAR ISÓSCELES**

Maceió

2017

LEANDRO DE ARAÚJO MELO

**DIFRAÇÃO DE FEIXES COM SIMETRIA ELÍPTICA E POSSUINDO MOMENTO  
ANGULAR ORBITAL POR UMA ABERTURA TRIANGULAR ISÓSCELES**

*Dissertação apresentada ao  
Departamento de Física da  
Universidade Federal de Alagoas  
como requisito parcial para obtenção  
do Título de Mestre em Ciências.*

*Orientador: Prof. Dr. Alcenísio José de Jesus Silva  
Co-Orientador: Prof. Dr. Willamys Cristiano Soares Silva*

Maceió

2017

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**

Bibliotecário Responsável: Janaina Xisto de Barros Lima

M528d Melo, Leandro de Araújo.

Difração de feixes com simetria elíptica e possuindo momento angular orbital por uma abertura triangular isósceles / Leandro de Araújo Melo. – 2017.  
72 f. : il.

Orientador: Alcenísio José de Jesus Silva.

Coorientador: Willamys Cristiano Soares Silva.

Dissertação (Mestrado em Física da Matéria Condensada) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2017.

Bibliografia: f. 70-72.

1. Óptica. 2. Difração. 3. Momento angular orbital. 4. Feixes Hermite-Gaussianos com vórtices. 5. Feixes Ince-Gaussianos. 6. Feixes Mathieu. I. Título.

CDU: 535.43



**Universidade Federal de Alagoas**  
**Instituto de Física**  
Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14, Campus A.C. Simões  
Cidade Universitária  
Tabuleiro dos Martins  
57072-970 Maceió - AL, Brasil  
FONE: (82) 3214-1423/FAX 3214-1648

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE**  
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**"DIFRAÇÃO DE FEIXES COM SIMETRIA ELÍPTICA E POSSUINDO**  
**MOMENTO ANGULAR ORBITAL POR UMA ABERTURA**  
**TRIANGULAR ISÓSCELES"**

por

Leandro de Araújo Melo

A Banca Examinadora composta pelos professores Alcenísio José de Jesus Silva (orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Samuel Teixeira de Souza, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas e José Henrique Araújo Lopes de Andrade, do Campus Arapiraca da Universidade Federal de Alagoas consideram o candidato aprovado com grau "A".

Maceió, 21 de julho de 2017

  
Prof. Dr. Alcenísio José de Jesus Silva

  
Prof. Dr. Samuel Teixeira de Souza

  
Prof. Dr. José Henrique Araújo Lopes de Andrade

## AGRADECIMENTOS

- A Deus pelo dom da vida.
- Aos meus pais e minha família, especialmente à minha mãe e irmã pelo incentivo constante.
- Ao meu orientador, professor *Alcenísio José de Jesus Silva*, pelo apoio, confiança e oportunidade de desenvolver esse trabalho.
- Ao professor *Eduardo Jorge da Fonseca* pelas suas críticas e sugestões para execução desse trabalho.
- Ao meu co-orientador, professor *Willamys Cristiano Soares Silva* pela colaboração para execução deste trabalho.
- Aos meus colegas do grupo GON por toda a força, sugestões e alegrias proporcionadas durante a execução desse trabalho.
- Aos meus colegas da sala da pós-graduação por todas as sugestões durante a execução deste trabalho.
- À minha namorada *Aline Ferreira* pelo companheirismo e incentivo.
- À todas as pessoas que me ajudaram quando eu estava prestes a vir ao mestrado.
- A CAPES pelo apoio financeiro.
- A todos que contribuíram diretamente ou indiretamente neste trabalho.

## RESUMO

Neste trabalho foi investigado através do padrão de difração de Fraunhofer, como encontrar a carga topológica de feixes com simetria elíptica que possuem momento angular orbital. Para realizar tal procedimento foram utilizados os feixes Mathieu, feixes Ince-Gaussianos e os feixes Hermite-Gaussianos com vórtices utilizando variados valores de carga topológica  $l$  e diferentes graus de elipsidade, incidindo o feixe em uma abertura triangular isósceles. Os resultados numéricos e experimentais concordaram mostrando que para um caso de simetria mais complexa, cuja fase nas bordas do triângulo ainda possuem um crescimento quase-linear, a técnica do padrão de difração por uma fenda triangular possibilita determinar o módulo e o sinal da carga topológica de forma simples.

**Palavras-chave:** Carga Topológica. Difração. Feixes Ince-Gaussianos. Feixes Mathieu. Feixes Hermite-Gaussianos com vórtices. Momento Angular Orbital.

## ABSTRACT

In this work it was investigated through the Fraunhofer diffraction pattern how to find the topological charge of beams possessing orbital angular momentum with elliptical symmetry. In order to perform such a procedure, the Mathieu beams, Ince-Gaussian beams and the Hermite-Gaussian vortex beams were used along with various topological charge values  $l$  and different degrees of ellipticity, with the beam impinging on an isosceles triangular aperture. The numerical and experimental results agreed for a more complex symmetry case, in which the phase at the edges of the triangle instill has a quasi-linear growth, showing that the technique of the diffraction pattern by a triangular aperture make it possible to find the module and the signal of the topological charge in a simple way.

**Key-words:** Topological Charge. Diffraction. Ince-Gaussian Beams. Mathieu Beams. Hermite-Gaussian vortex beams. Orbital Angular Momentum.

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO GERAL</b> .....	10
<b>2 FEIXES POSSUINDO MOMENTO ANGULAR ORBITAL</b> .....	13
2.1 Equação de Helmholtz .....	13
2.1.1 Equação paraxial de Helmholtz .....	14
2.2 Feixes possuindo fase azimutal $\exp(-il\varphi)$ .....	15
2.2.1 Feixes Laguerre-Gauss .....	16
2.2.2 Feixes Bessel .....	19
2.3 Feixes com simetria elíptica .....	20
2.3.1 Feixes Mathieu.....	20
2.3.2 Feixes Ince-Gaussianos .....	26
2.3.3 Feixes Hermite-Gaussianos com vórtices.....	30
<b>3 DIFRAÇÃO DE FEIXES DE LUZ POSSUINDO MOMENTO ANGULAR ORBITAL</b> .....	34
3.1 Aspectos gerais da teoria da difração .....	34
3.2 Difração de Fresnel.....	36
3.3 Difração de Fraunhofer .....	37
3.4 Transformada de Fourier .....	38
3.4.1 Transformada de Fourier realizada por uma lente .....	38
3.5 Padrão de difração de feixes possuindo momento angular orbital.....	42
3.5.1 Padrão de difração de Fraunhofer de um feixe Laguerre-Gauss por uma fenda simples.....	42
3.5.2 Padrão de difração de Fraunhofer de um feixe Laguerre-Gauss por uma abertura quadrada .....	46
3.5.3 Padrão de difração de Fraunhofer de feixes de simetria cilíndrica com momento angular orbital utilizando uma abertura triangular.....	48
3.5.4 Breve estudo comparativo entre o padrão de difração da abertura triangular e retangular com feixes de simetria cilíndrica possuindo momento angular orbital.....	52
<b>4 RELAÇÃO ENTRE A CARGA TOPOLÓGICA E A FORMAÇÃO DO PADRÃO DE DIFRAÇÃO DE FEIXES ELÍPTICOS POSSUINDO MOMENTO ANGULAR ORBITAL</b> .....	55



4.1 Análise da simulação numérica dos padrões de difração de feixes elípticos por uma abertura triangular .....	55
4.2 Resultados experimentais .....	64
<b>5 CONCLUSÕES .....</b>	<b>71</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>73</b>

## 1 INTRODUÇÃO GERAL

A teoria eletromagnética de Maxwell possibilitou à ciência uma enorme abrangência em seus estudos, contribuindo com uma nova visão para o estudo da luz. Dessas contribuições podemos destacar a descrição de propriedades, em particular, o fato de a luz transportar energia, momento linear e momento angular<sup>1</sup>, proporcionando aos pesquisadores ferramentas para explicações dos fenômenos da natureza.

Dentre essas características da luz será dada uma maior ênfase no estudo sobre o momento angular, em particular o momento angular orbital. O momento angular da luz pode ser dividido em duas partes, o momento angular de spin ou intrínseco, associado aos estados de polarização do campo elétrico podendo ser circular no sentido horário ou anti-horário. E o momento angular orbital, associado à distribuição transversal do campo eletromagnético.

Em 1909, Poynting<sup>2</sup> observou que era transferido um momento angular de  $\pm\hbar$  por fóton incidindo uma luz circularmente polarizada em uma placa de quarto de onda. Em 1992, Allen *et. al.*<sup>3</sup> demonstraram que feixes de luz com a fase azimutal  $\exp(-il\varphi)$ , onde  $\varphi$  é a coordenada azimutal e  $l$  é um número inteiro denominado de carga topológica, possuem momento angular orbital dado por  $l\hbar$  por fóton e diferentemente do spin ele não necessita de polarização circular para existir. Isso despertou o interesse em várias áreas de pesquisa como, por exemplo, informação quântica<sup>4</sup> e biofísica<sup>5</sup>.

Uma característica de suma importância nos estudos de feixes com tal fase azimutal é a singularidade de fase no centro do feixe, sendo indeterminada a fase no centro de feixe e sua intensidade no centro nula, onde tais singularidades, em óptica, são conhecidas como vórtices ópticos<sup>6</sup>.

Outra característica de alta relevância é o fato de a fase azimutal proporcionar uma frente de onda helicoidal, disso decorre o fato de que existe um momento angular orbital na direção de propagação do feixe proporcionado pelo vetor de Poynting. O feixe pioneiro com tais características é denominado Laguerre-Gauss, que é solução da equação paraxial de Helmholtz em coordenadas circulares cilíndricas, podendo ser decomposto em termos dos feixes Hermite-Gauss<sup>7</sup>.

Uma família de feixes conhecidos como feixes Bessel<sup>8</sup>, pelo fato da função que descreve simetria radial do feixe ser a função de Bessel, despertou a atenção

da comunidade científica por ele ser um feixe não-difratante, ou seja, seu perfil transversal não muda durante a propagação, pois até então os feixes modulados pela função gaussiana não possuíam tal propriedade. Feixes Bessel de alta ordem<sup>9</sup>, que são feixes Bessel possuindo a fase azimutal  $\exp(-il\varphi)$ , que foram bastante expressivos para pesquisas vinculadas com pinças ópticas<sup>10</sup> por não apresentarem um fator limitante, no caso a difração, para a manipulação de partículas.

Existem outras classes de feixes possuindo momento angular orbital, que são os feixes que possuem simetria elíptica. Feixes Bessel e Laguerre-Gauss são formas mais particulares de tais feixes, pois quando tomamos a excentricidade de feixes elípticos tendendo a zero eles retornam a simetria circular cilíndrica.

O feixe Mathieu<sup>11; 12</sup> foi o pioneiro dos feixes de simetria elíptica estudado. Ele contém os vetores de onda formando um cone lhe caracterizando como um feixe não-difratante. Logo em seguida foram descobertos que os feixes Mathieu possuíam altas ordens que continham singularidades de fase lhe caracterizando como vórtices ópticos<sup>13</sup> e que com o aumento do parâmetro  $q$ , atrelado a elipsidade do feixe, o momento angular orbital diferia de  $l\hbar$ <sup>14</sup> por fóton.

Em 2004, Brandes *et. al*, percebeu que havia uma família de feixes que surgia como mais uma família de feixes moduladas de forma gaussiana, denominados feixes Ince-Gaussianos<sup>15</sup>. Além disso, ele também notou que fazendo uma combinação linear entre os modos pares e ímpares do feixe, sem necessitar da fase azimutal  $\exp(-il\varphi)$ , ele consegue criar um feixe com frente de onda helicoidal, análogo aos feixes Mathieu de altas ordens<sup>16</sup>.

Pouco mais de uma década depois, em 2015, foi descoberta outra classe de feixes de simetria elíptica contendo momento angular orbital, chamados de Hermite-Gaussianos com vórtices<sup>17</sup>, surgindo como uma superposição das amplitudes complexas na  $n$ -ésima ordem de feixes Hermite-Gauss, cujo argumento é controlado pelo parâmetro real  $a$ .

O primeiro estudo de difração usando feixes possuindo momento angular orbital foi realizado por Sztul e Alfano<sup>18</sup> onde se notou que a carga topológica tinha relação com o padrão de difração através de uma fenda dupla. Assim, surgiram vários estudos sobre difração com feixes possuindo momento angular orbital<sup>19; 20; 21;</sup>

No capítulo 2 iniciaremos pelas equações de Maxwell, passando pela equação de Helmholtz, chegando a uma breve análise nos feixes Laguerre-Gauss, Hermite-Gauss e Bessel. Depois aprofundando os estudos abordando as principais características dos feixes de simetria elíptica, no caso os feixes Mathieu, Ince-Gaussianos e Hermite-Gaussianos com vórtices.

No capítulo 3, será abordada a teoria da difração, tendo foco na difração de Fraunhofer e suas principais características. Logo após serão estudados trabalhos envolvendo a difração com feixes de simetria circular cilíndrica possuindo momento angular orbital, pelas fendas simples, aberturas quadrada e triangular. Finalizaremos com um estudo comparativo entre as fendas triangular e quadradas.

No capítulo 4, faz-se um estudo teórico e experimental sobre o padrão de difração de feixes com simetria elíptica possuindo momento angular orbital. Fazendo o feixe incidir em uma fenda triangular isósceles e vendo como o valor da carga topológica e a elipsidade do feixe se relacionam com o padrão de difração obtido na zona de Fraunhofer.

No capítulo 5, faz-se uma discussão dos principais resultados obtidos na realização dessa dissertação.

## 2 FEIXES POSSUINDO MOMENTO ANGULAR ORBITAL

### 2.1 Equação de Helmholtz

Partindo das equações de Maxwell<sup>1</sup> na sua forma diferencial em uma região onde há ausência de cargas ( $\rho = 0$ ) e correntes ( $j = 0$ ), tem-se:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \text{ (Lei de Gauss)} \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \text{ (Lei de Gauss para o magnetismo)} \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \text{ (Lei de Faraday)} \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \text{ (Lei de Ampère-Maxwell)} \quad (2.4)$$

onde  $\vec{E}$  é o vetor campo elétrico,  $\vec{B}$  é o vetor indução magnética,  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética no vácuo e  $\varepsilon_0$  é a permeabilidade elétrica no vácuo.

Manipulando as equações de Maxwell utilizando a identidade  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$ , sabendo que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$  pela equação (2.1) e substituindo a equação (2.3) na identidade, tem-se:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (2.6)$$

onde  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ , é a velocidade da luz no vácuo. A equação encontrada é a equação de onda da luz que faz a descrição do campo elétrico no vácuo, dependendo da forma como foi realizada a junção das equações de Maxwell pode-se encontrar a mesma equação em termos da indução magnética.

Adotamos o campo elétrico escrito na forma  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{\kappa} u(\vec{r}) \exp(-i\omega t)$ , onde  $\exp(-i\omega t)$  é a fase espacial dependente do tempo,  $\hat{\kappa}$  é o vetor de polarização e  $u(\vec{r})$  é a amplitude complexa da onda; inserindo o campo na equação de onda encontra-se:

$$\nabla^2 u(\vec{r}) + k^2 u(\vec{r}) = 0, \quad (2.7)$$

onde o resultado acima é a equação de Helmholtz, em que  $k$  é o número de onda dado por  $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $\lambda$  é o comprimento de onda e  $\omega$  é a frequência angular.

A equação de Helmholtz descreve os fenômenos de propagação de ondas acústicas, eletromagnéticas e elásticas, em meios contínuos. A equação de Helmholtz pode ser separada em 11 sistemas de coordenadas<sup>11</sup>, mas, somente as coordenadas cilíndricas, elípticas, parabólicas e cartesianas têm translação de simetria permitindo que as equações sejam separadas em partes longitudinais e transversais.

### 2.1.1 Equação paraxial de Helmholtz

Admitindo que o feixe se propague ao longo da direção  $z$ , escrevemos a amplitude da onda da seguinte forma<sup>23</sup>:

$$u(\vec{r}) = u_0(\vec{r}) \exp(ikz), \quad (2.8)$$

onde  $u_0(\vec{r})$  especifica o perfil transversal feixe e muda ao longo do eixo  $z$  devido a difração,  $\exp(ikz)$  é a dependência espacial rápida, como o próprio nome sugere muda mais rapidamente que se comparada a  $u_0(\vec{r})$ , aplicando a equação (2.8) na equação (2.7) temos o seguinte resultado:

$$\frac{\partial^2 u_0(\vec{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0(\vec{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0(\vec{r})}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial u_0(\vec{r})}{\partial z} = 0, \quad (2.9)$$

tomando a concepção de que  $u_0$  varia lentamente em relação a  $z$ , compreende-se que em uma mudança de  $\Delta z = \lambda$ , tem-se  $\Delta u_0 \ll u_0$ , dessa forma tanto a primeira derivada como a segunda variam mais rapidamente do que a amplitude  $u_0$ , significando que  $\frac{\partial u_0}{\partial z} \ll k u_0$  e  $\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \ll k^2 u_0$  encontrando a chamada aproximação paraxial. Ignorando o terceiro termo devido à aproximação paraxial e sabendo que o laplaciano transversal de  $u_0$  é dado por  $\nabla_t^2 u_0 = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}$ , obtem-se a seguinte equação:

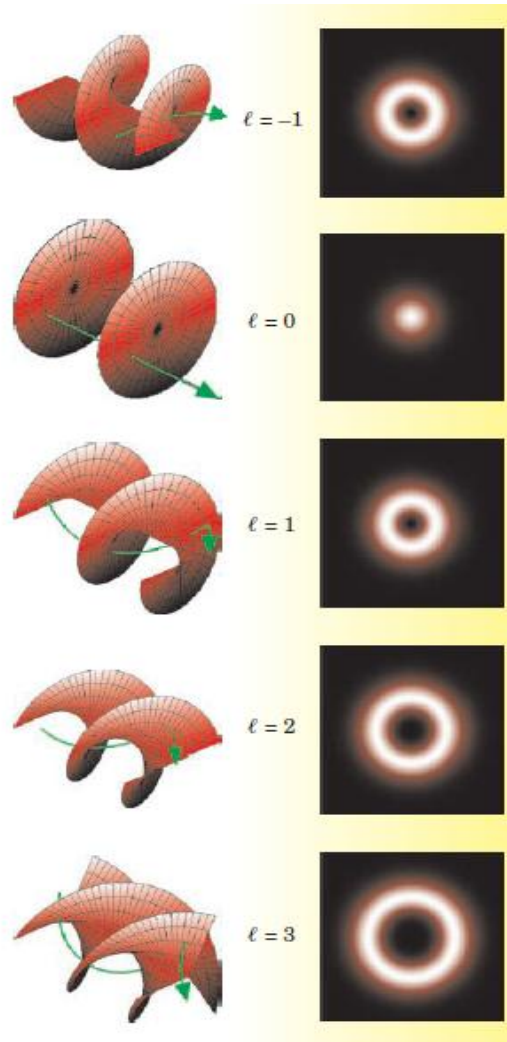
$$\nabla_t^2 u_0 + 2ik \frac{\partial u_0(\vec{r})}{\partial z} = 0, \quad (2.10)$$

onde a equação (2.10) é a equação paraxial de Helmholtz. A equação de Helmholtz, no regime paraxial ou não, possui soluções em distintas coordenadas, neste trabalho será dado ênfase nas coordenadas elípticas, como por exemplo, os feixes de Mathieu, porém antes será feito um breve estudo sobre as soluções em coordenadas cilíndricas, feixes Laguerre-Gauss e Bessel, pois tais feixes foram os pioneiros em destaque nos estudos de feixes de luz com momento angular orbital.

## 2.2 Feixes possuindo fase azimutal $\exp(-il\varphi)$

Os feixes Laguerre-Gauss e Bessel apresentam um elemento em comum em suas equações, que é a presença de uma fase azimutal dada por  $\exp(-il\varphi)$ <sup>3</sup>, onde tais feixes transportam momento angular orbital de valor  $l\hbar$  por fóton, independentemente dos estados de polarização; onde  $l$  é um número inteiro chamado de carga topológica, que é todo o valor da mudança sofrida pela fase, ao longo de uma volta em torno do centro do vórtice, dividido por  $2\pi$ , e  $\varphi$  é o ângulo azimutal do feixe. Devido à presença dessa fase azimutal em sua estrutura, quando  $l \neq 0$ , tais feixes apresentam características em comum, como o fato da onda durante a propagação ter uma estrutura helicoidal<sup>24</sup>, assim como possui singularidade de fase e com isso a intensidade no centro do feixe será nula. De acordo com o aumento do módulo do valor dessa carga topológica, o tamanho do feixe também aumenta; e em relação ao sinal da carga topológica o feixe pode se propagar helicoidalmente no sentido anti-horário para  $l < 0$  ou no sentido horário quando  $l > 0$ . É importante observar que quando invertemos o sinal da exponencial o sentido do giro também se inverte. A figura (2.1) ilustra as características citadas acima, utilizando como exemplo um feixe Laguerre-Gauss. Note que o vetor de Poynting simbolizado pela linha verde, no espaço livre, também segue a direção do fluxo do momento.

Figura 2.1 - Características de feixes possuindo fase azimutal  $\exp(-il\varphi)$ , utilizando como exemplo o feixe Laguerre-Gauss.



Fonte: Padgett, 2004, p.36.

### 2.2.1 Feixes Laguerre-Gauss

A solução da equação paraxial de Helmholtz em coordenadas cilíndricas é chamada de Feixe Laguerre-Gauss, onde sua amplitude complexa é dada por<sup>23</sup>:

$$\begin{aligned}
 U_{pl}(r, \varphi, z) \propto & (-1)^p \left( \frac{r\sqrt{2}}{w(z)} \right)^l \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \exp\left(-i\frac{kr^2}{2R(z)}\right) \exp(il\varphi) \\
 & \times L_p^l\left(\frac{2r^2}{w^2(z)}\right) \exp\left[-i(2p+l+1)\arctan\left(\frac{z}{z_r}\right)\right]
 \end{aligned} \quad , \quad (2.11)$$

onde as funções:



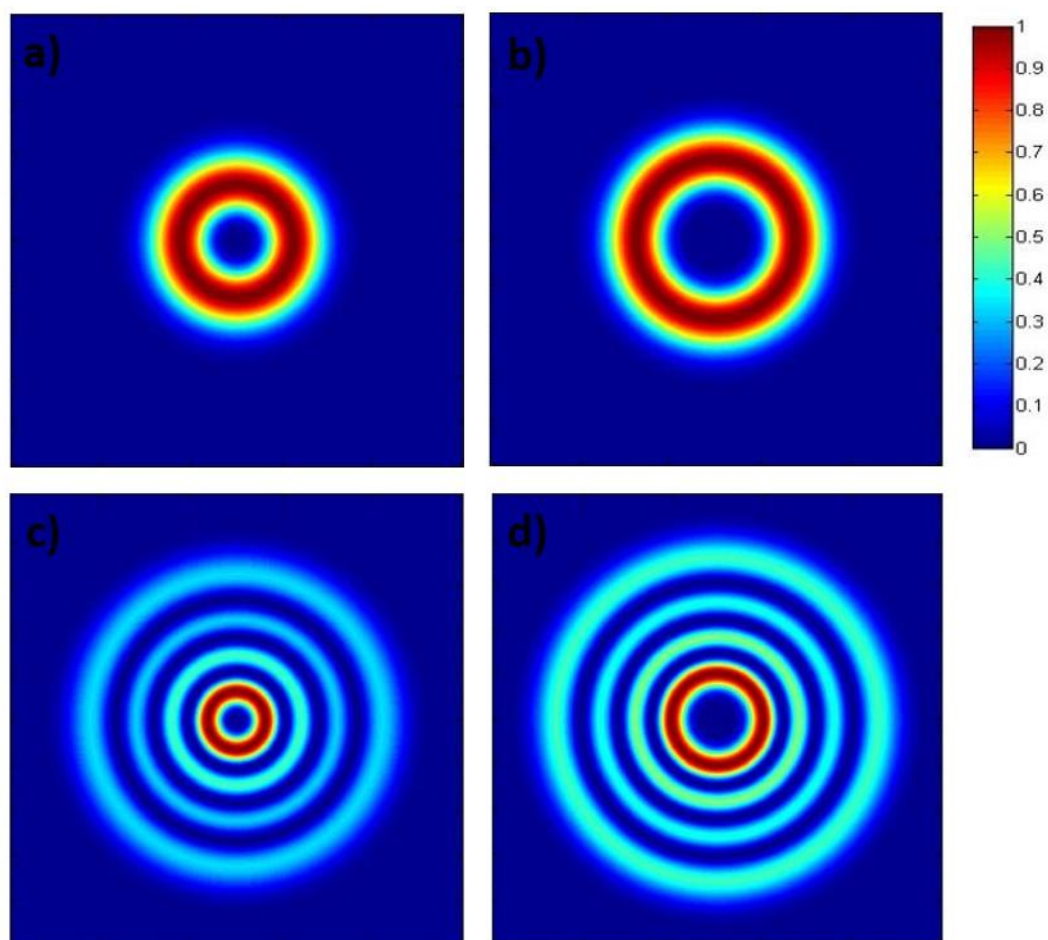
$$R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{z_r}{z} \right)^2 \right],$$

e

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_r} \right)^2},$$

são respectivamente o raio de curvatura da frente de onda no plano  $z$  e o raio do feixe,  $z_r = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$  é chamado comprimento de Rayleigh,  $w_0$  é a cintura mínima do feixe,  $L_p^l$  é o polinômio generalizado de Laguerre, o termo  $\arctan\left(\frac{z}{z_r}\right)$  é a fase de Gouy e o número de anéis na distribuição radial é dado pela relação  $p+1$ .

**Figura 2.2 - Perfis de intensidade de feixes Laguerre-Gauss a)  $p=0$  e  $l=2$ , b)  $p=0$  e  $l=4$ , c)  $p=3$  e  $l=2$ , d)  $p=3$  e  $l=4$ .**



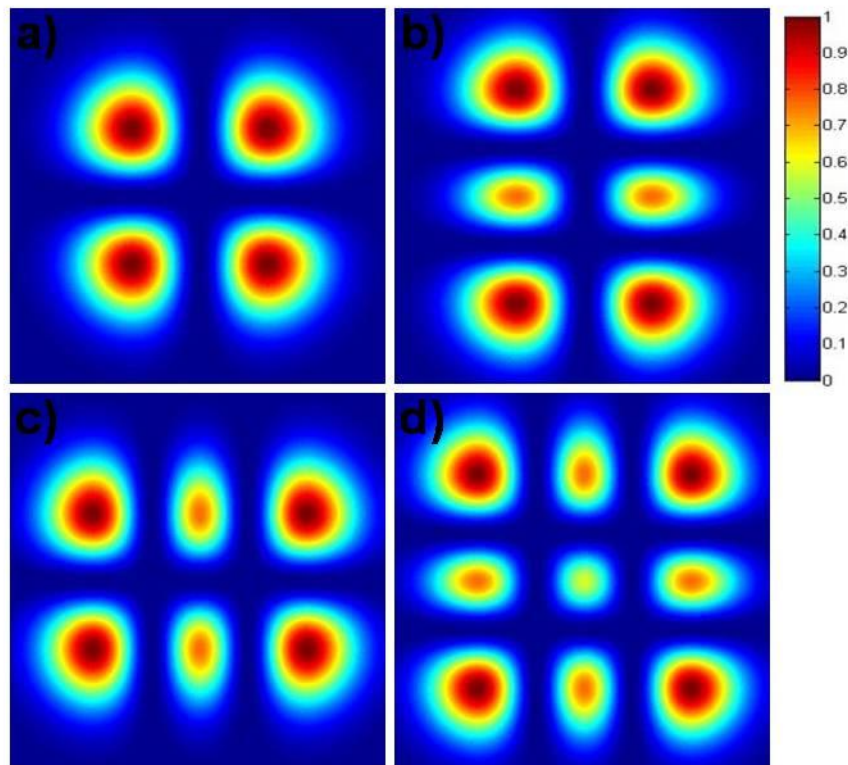
Fonte: Autor, 2017.

Os Feixes Laguerre-Gauss podem ser decompostos em termos dos feixes Hermite-Gauss<sup>7</sup>, que são soluções da equação paraxial de Helmholtz em coordenadas cartesianas e não possuem momento angular orbital diferentemente dos feixes Laguerre-Gauss. Sua amplitude complexa é escrita da seguinte forma:

$$H_{mn}(x, y, z) \propto \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)}\right] H_m\left(\sqrt{2}\frac{x}{w(z)}\right) H_n\left(\sqrt{2}\frac{y}{w(z)}\right) \exp(ikz) \\ \times \exp\left[-i\frac{k(x^2 + y^2)z}{2(z_r^2 + z^2)}\right] \exp\left[-i(m+n+1)\arctan\left(\frac{z}{z_r}\right)\right], \quad (2.12)$$

Onde  $H_m(\delta)$  é o polinômio de Hermite de ordem  $m$ . A ordem do feixe de Hermite-Gauss é dado por  $N$ , onde  $N = m + n$ . Os índices  $(p, l)$  são correlacionados com os índices  $(m, n)$  da seguinte forma:  $p = \min(m, n)$  e  $l = |m - n|$ . A figura (2.3) mostra algumas ordens dos feixes Hermite-Gauss:

**Figura 2.3 - Perfis de intensidade de Feixes Hermite-Gauss: a)  $H_{11}$ , b)  $H_{12}$ , c)  $H_{21}$  e d)  $H_{22}$ .**



Fonte: Autor, 2017.

### 2.2.2 Feixes Bessel

Em 1987, Durnin<sup>8</sup> proporcionou uma nova visão para os estudos dos feixes, pois surgiram os feixes não difratantes. Neste tipo de feixe, diferentemente de um feixe Laguerre-Gauss, não há variação do padrão transversal do feixe ao longo do eixo  $z$  propagação. Dessa forma:

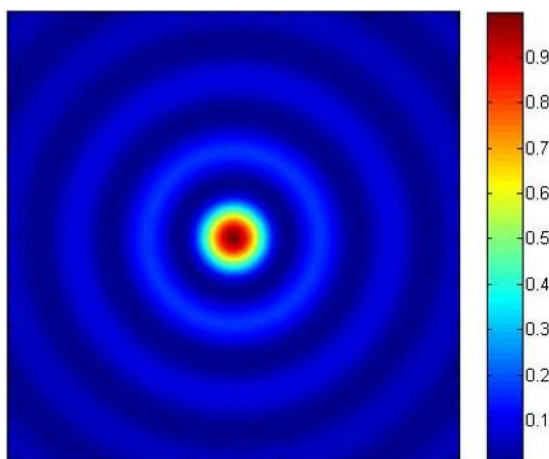
$$I(r, \varphi, z > 0) = I(r, \varphi, z = 0), \quad (2.13)$$

assim, Durnin encontra uma solução para tal equação onde o fator difrativo é limitado. A solução para um feixe de ordem zero onde a intensidade é máxima no centro é dado pela seguinte expressão:

$$E(r, \varphi, z) = E_0 J_0(\alpha r) \exp(i\beta z), \quad (2.14)$$

onde  $E_0$  é uma constante,  $J_0$  é a função de Bessel de ordem zero,  $\exp(i\beta z)$  é o termo conhecido como propagador,  $\alpha$  e  $\beta$  são os vetores de onda transversais e longitudinais respectivamente, que obedecem a relação  $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$ , onde  $r$ ,  $\varphi$ , e  $z$  são coordenadas de simetria cilíndrica. Essa família de feixes é chamada de feixes Bessel. A figura (2.4) a seguir mostra um feixe Bessel de ordem zero, ou seja,  $l = 0$ .

**Figura 2.4 - Perfil de intensidade de um Feixe Bessel de ordem zero.**



Fonte: Autor, 2017.

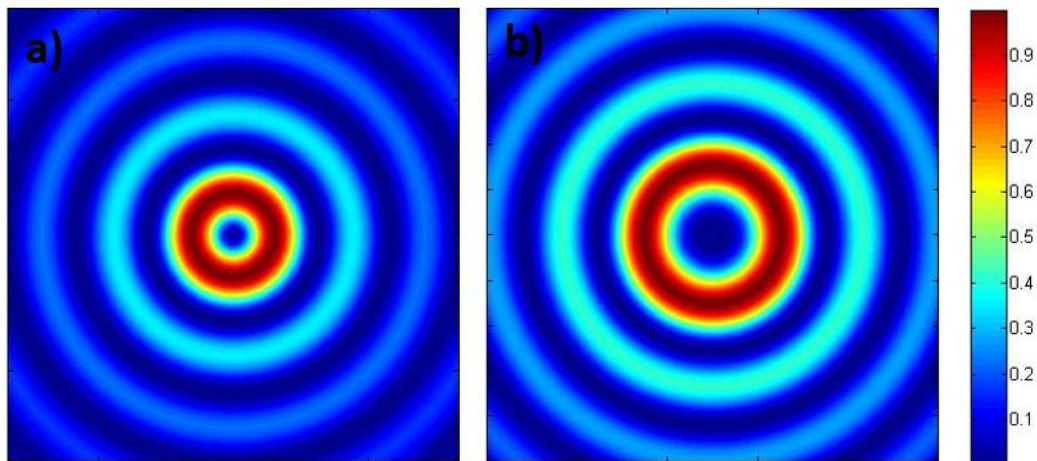
Feixes Bessel em teoria precisam de energia infinita, porém, como isso não é possível experimentalmente, é feita uma aproximação onde o feixe é truncado, ou seja, ele existe em uma região determinada do espaço transversal logo, ele mantém o padrão de intensidade no perfil transversal por uma distância longitudinal limitada.

Feixes Bessel também podem ter ordens diferentes de zero, também conhecidos como feixes Bessel de alta ordem<sup>9</sup>, eles possuem a fase azimutal  $\exp(il\varphi)$ , apresentando momento angular orbital dado por  $l\hbar$ , sendo caracterizados como vórtices ópticos e possuindo frente de onda helicoidal. A sua amplitude complexa é dada pela seguinte expressão:

$$E(r, \varphi, z) = E_0 J_l(\alpha r) \exp(i\beta z) \exp(il\varphi), \quad (2.15)$$

As figuras a seguir mostram alguns feixes Bessel de alta ordem diferentes valores de  $l$ :

**Figura 2.5 - Perfis de intensidade de feixes Bessel de alta ordem: a)  $l = 1$  e b)  $l = 2$ .**



Fonte: Autor, 2017.

## 2.3 Feixes com simetria elíptica

### 2.3.1 Feixes Mathieu

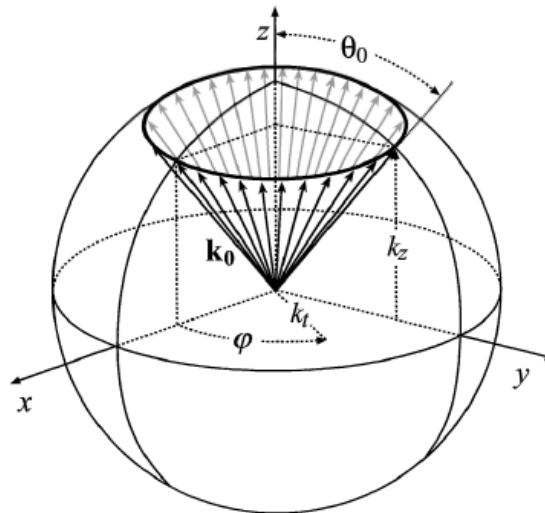
Os feixes Mathieu representam a solução da equação de Helmholtz em coordenadas elípticas, e surgiram como uma forma alternativa de campos ópticos que não variam durante a propagação<sup>11</sup>, ou seja, em condições ideais, eles se propagam indefinidamente sem mudança no seu perfil de intensidade transversal. Tais feixes são descritos em termos das funções de Mathieu. Para que estes feixes sejam invariantes na propagação, ou seja, não difrativos, seus vetores de onda têm que ser contidos na superfície de um cone e obedecer às condições impostas pela

esfera de McCutchen, exibida na figura (2.6). Uma função que obedece a tais condições, em termos do espectro angular, é dada por:

$$u(x, y, z) = \exp(ik_z z) \int_0^{2\pi} A(\varphi) \times \exp[ik_t(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] d\varphi, \quad (2.16)$$

onde  $\varphi$  é a variável angular,  $k_z = k_0 \cos \theta_0$  é o vetor de onda longitudinal,  $k_t = k_0 \sin \theta_0$  é o vetor de onda transversal e  $A(\varphi)$  é uma função arbitrária complexa. Note que o termo integral relata a superposição de ondas planas inscritas em um cone contido na esfera de McCutchen, onde o cone é descrito na relação  $\theta_0 = \arctan\left(\frac{k_t}{k_z}\right)$ . No caso dos feixes Bessel de ordem zero, sua equação é encontrada resolvendo a integral acima e tomando  $A(\varphi)$  como uma constante sendo o seu perfil transversal modulado pela função de Bessel de ordem zero dada por  $J_0(k_t r)$ .

**Figura 2.6 - Esfera de McCutchen e os vetores de onda formando um cone dentro da mesma.**



Fonte: Gutiérrez-Veja, 2000, p.1494.

Já para ter uma melhor compreensão de qual função modela o padrão transversal dos feixes Mathieu, primeiramente resolve-se a equação de Helmholtz em coordenadas elípticas. Fazendo as substituições das variáveis  $x = f \cosh(\zeta) \cos(\eta)$ ,  $y = f \sinh(\zeta) \sin(\eta)$  e  $z = z$ , onde  $\zeta$  é a coordenada radial no intervalo  $0 \leq \zeta < \infty$  e  $\eta$  é a coordenada azimutal no intervalo  $0 \leq \eta < 2\pi$ ,  $f$  é o foco

da elipse. Inserindo a mudança de coordenadas na equação de Helmholtz encontra-se a seguinte expressão:

$$\frac{\partial^2 u(\zeta, \eta, z)}{\partial z^2} + \frac{2}{f^2 (\cosh 2\zeta - \cos 2\eta)} \left( \frac{\partial^2 u(\zeta, \eta, z)}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 u(\zeta, \eta, z)}{\partial \eta^2} \right) + k^2 u(\zeta, \eta, z) = 0, \quad (2.17)$$

admitindo a dependência longitudinal do feixe ser da forma  $\exp(ik_z z)$ , utilizando a técnica de separação das variáveis tomando a amplitude complexa da forma

$$u(\zeta, \eta, z) = R(\zeta)\Theta(\eta)\exp(ik_z z), \text{ posteriormente multiplicando por } \frac{1}{R(\zeta)\Theta(\eta)\exp(ik_z z)} \text{ e}$$

sabendo que os vetores de onda obedecem a relação  $k^2 = k_t^2 + k_z^2$ , encontra-se a seguinte equação:

$$\left( \frac{\partial^2 R(\zeta)}{\partial \zeta^2} \frac{1}{R(\zeta)} + \frac{\partial^2 \Theta(\eta)}{\partial \eta^2} \frac{1}{\Theta(\eta)} \right) + \frac{f^2 k_t^2}{2} (\cosh 2\zeta - \cos 2\eta) = 0, \quad (2.18)$$

separando os termos radiais e angulares em lados opostos da equação e adotando uma constante de separação  $t$ , tem-se:

$$\frac{\partial^2 R(\zeta)}{\partial \zeta^2} - (t - 2q \cosh 2\zeta) R(\zeta) = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta(\eta)}{\partial \eta^2} + (t - 2q \cos 2\eta) \Theta(\eta) = 0, \quad (2.20)$$

essas equações são respectivamente as equações radiais e angulares de Mathieu, o parâmetro  $q = \frac{k_t^2 f^2}{4}$  contém informações sobre o vetor de onda transversal  $k_t$  e o foco da elipse  $f$ , ou seja, quanto maior o valor de  $q$  mais elíptico será o feixe.

As soluções da equação (2.18) são desenvolvidas por forma análoga às utilizadas nas funções de Hankel<sup>25</sup> escritas em termos de combinações lineares. Desta forma, as soluções dos feixes Mathieu na ordem zero são dadas por:

$$u^{(1)}(\zeta, \eta, z; q) = [R_{e_0}(\zeta; q) + iF_{e_0}(\zeta; q)]ce_0(\eta; q)\exp(ik_z z), \quad (2.21)$$

$$u^{(2)}(\zeta, \eta, z; q) = [R_{e_0}(\zeta; q) - iF_{e_0}(\zeta; q)]ce_0(\eta; q)\exp(ik_z z), \quad (2.22)$$

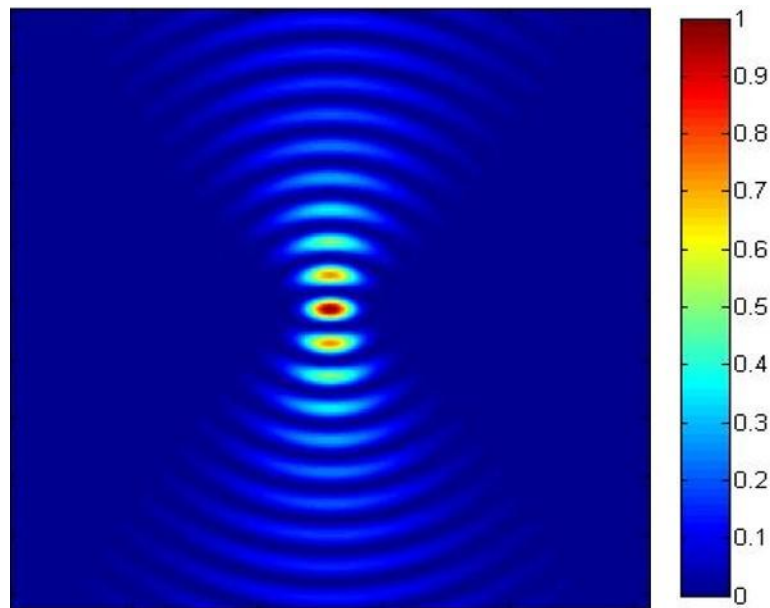
onde  $R_{e_0}(\zeta; q)$  e  $F_{e_0}(\zeta; q)$  são funções de Mathieu radiais pares de primeiro e segundo tipo respectivamente, e  $ce_0(\eta; q)$  é a função angular par de Mathieu. Essas equações representam a trajetória das ondas planas, em que seus vetores de onda constituem um formato de um cone, a equação (2.21) representa a abertura cônica

divergindo e a equação (2.22) o cone convergindo para um ponto. Em um espaço infinito as ondas se sobrepõem, surgindo:

$$u(\zeta, \eta, z; q) = R_{e_0}(\zeta; q) ce_0(\eta; q) \exp(ik_z z), \quad (2.23)$$

onde essa é a amplitude complexa do Feixe Mathieu de ordem zero. Seu perfil de intensidade transversal, em  $z = 0$ , é mostrado na figura (2.7).

**Figura 2.7 - Perfil de intensidade de um feixe Mathieu,  $q = 5$  e  $l = 0$ .**



Fonte: Autor, 2017.

Fixando um valor do arbitrário para  $k_z$ , tendo  $q \rightarrow 0$  os focos da elipse colapsam em um único ponto, o feixe adquire um perfil circular tornando-se um feixe Bessel de ordem zero. Quando  $q \rightarrow \infty$ , torna-se uma grande coluna com a intensidade quase proporcional em todos os máximos. E  $l$  para os feixes Mathieu é o valor do módulo da carga topológica.

Analisando feixes Mathieu através da solução via equação de Helmholtz observando a equação (2.23) e comparando termo a termo com a equação (2.16), observa-se que o termo integral tem uma relação de proporcionalidade com os termos  $R_{e_0}(\zeta; q) ce_0(\eta; q)$ . De fato, aplicando  $A(\varphi) = ce_0(\varphi; q)$  na equação (2.16), fazendo a transformação em coordenadas polares com  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  e  $z = z$ , utilizando a relação de Euler obtém-se:

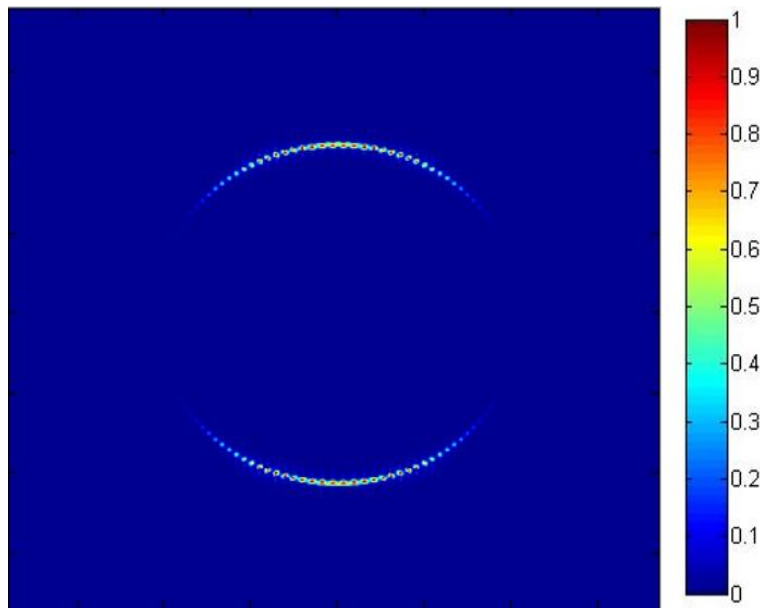
$$u(r, \theta, z) = \exp(ik_z z) \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} ce_0(\varphi; q) \cos[k_r r \cos(\varphi - \theta)] d\varphi \\ + \int_0^{2\pi} ce_0(\varphi; q) isen[k_r r \cos(\varphi - \theta)] d\varphi \end{array} \right\}. \quad (2.24)$$

De acordo com a tabela de integrais<sup>26</sup>, a segunda integral tem valor nulo e o resultado final do campo tem a seguinte relação de proporcionalidade:

$$u(\zeta, \eta, z; q) \propto R_{e_0}(\zeta; q) ce_0(\eta; q) \exp(ik_z z). \quad (2.25)$$

Com isso, infere-se que  $ce_0(\varphi; q)$  modula o cone formado pelos vetores de onda para a equação de Mathieu de ordem zero.

**Figura 2.8 - Transformada de Fourier de um feixe Mathieu de ordem zero e  $q = 5$ .**



Fonte: Autor, 2017.

Para os feixes Mathieu de alta ordem, ou seja,  $l > 0$ , o espectro angular do campo será escrito como uma combinação linear das soluções angulares na forma  $A(\varphi) = ee_l(\varphi; q) = ce_l(\varphi; q) + ise_l(\varphi; q)$ . Substituindo esta expressão na equação (2.16) tem-se o seguinte resultado:

$$u(x, y, z) = \exp(ik_z z) \int_0^{2\pi} [ce_l(\varphi; q) + ise_l(\varphi; q)] \times \exp[ik_l(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] d\varphi. \quad (2.26)$$

Novamente aplicando coordenadas polares e a relação de Euler tem-se:



$$u(r, \theta, z) = \exp(ik_z z) \int_0^{2\pi} \{ [ce_l(\varphi; q) + ise_l(\varphi; q)] \times \{ \cos[k_l r \cos(\varphi - \theta)] + isen[k_l r \cos(\varphi - \theta)] \} \} d\varphi .:$$

$$u(r, \theta, z) = \exp(ik_z z) \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{aligned} &ce_l(\varphi; q) \cos[k_l r \cos(\varphi - \theta)] + ice_l(\varphi; q) sen[k_l r \cos(\varphi - \theta)] \\ &+ ise_l(\varphi; q) \cos[k_l r \cos(\varphi - \theta)] + ise_l(\varphi; q) isen[k_l r \cos(\varphi - \theta)] \end{aligned} \right\} d\varphi .:$$

Utilizando a tabela de integrais<sup>26</sup>, o segundo e o terceiro termo se anulam resultando na amplitude complexa do feixe Mathieu de alta ordem, dada por:

$$u(\zeta, \eta, z; q) = [A_l(q)R_{e_l}(\zeta; q)ce_l(\eta; q) + iB_l(q)S_{e_l}(\zeta; q)se_l(\eta; q)] \exp(ik_z z), \quad (2.27)$$

onde  $S_{e_l}(\zeta; q)$  é a função radial ímpar de primeira espécie,  $se_l(\eta; q)$  é a função angular ímpar de Mathieu,  $A_l(q)$  em que  $(l=0,1,2,\dots)$  e  $B_l(q)$  em que  $(l=1,2,\dots)$  são os coeficientes pares e ímpares respectivamente. No caso particular em que  $l \geq 2$  e  $q \leq \frac{l^2}{2} - 1$ , os coeficientes  $A_l(q)$  e  $B_l(q)$  se tornam constantes podendo ser postos em evidência na equação. Na figura (2.9) têm-se alguns feixes de Mathieu de alta ordem e seus padrões de intensidade e fase.

Note que similarmente aos feixes Bessel, esta família de feixes possui infinitos anéis, porém agora com uma estrutura elíptica e que quanto maior o valor do parâmetro  $q$ , mais elíptico será o feixe, e percebe-se a separação do vórtice concentrado no centro se distribuir em cargas topológicas unitárias ao longo do eixo maior. Quanto maior o valor de  $l$ , maior o vórtice óptico. É importante observar que na estrutura de fase do feixe para  $l=1$  a fase é formada por um simples anel de forma elíptica, mas quando  $l \geq 2$  se formam vórtices distintos no decorrer de uma linha cada uma contendo um valor unitário de carga topológica.

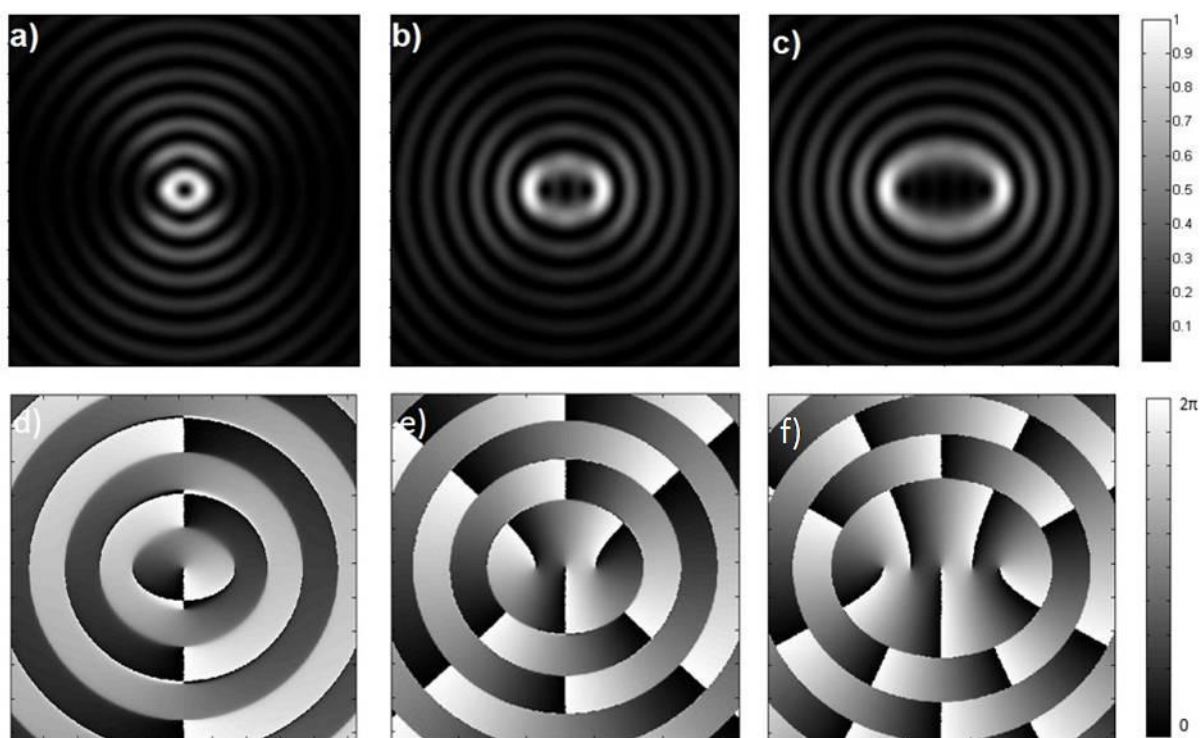
Um aspecto relevante para essa família de feixe é que o momento angular orbital por fóton do feixe não mantém um valor de  $l\hbar$  para  $q > 0$ <sup>14</sup>. O caso  $q=0$  corresponde a uma subclasse específica dos feixes de Mathieu, que são os feixes Bessel. Porém, quando  $q > 0$  para determinar o valor do momento angular orbital do feixe, insere-se um fator de momento angular orbital por fóton local dado por  $\delta l_z$ , que é dada pela razão entre a energia de um fóton e a densidade de energia  $|u(x, y)|^2$ , dado pela seguinte expressão:

$$\delta L_z = \frac{\iint \delta l_z(x, y) |u(x, y)|^2 dx dy}{\iint |u(x, y)|^2 dx dy}, \quad (2.28)$$

descrevendo as integrais em termos dos coeficientes de Fourier  $\tilde{A}_l$ , encontra-se:

$$\delta L_z = \frac{\sum_l l |\tilde{A}_l|^2}{\sum_l |\tilde{A}_l|^2} \cdot \hbar. \quad (2.29)$$

**Figura 2.9 - Perfis de intensidade e fase respectivamente de feixes Mathieu de alta ordem:** a) intensidade e d) fase onde  $l = 1$  e  $q = 3$ , b) intensidade e e) fase onde  $l = 3$  e  $q = 3$ , c) intensidade e f) fase onde  $l = 5$  e  $q = 8$ .



Fonte: Autor, 2017.

### 2.3.2 Feixes Ince-Gaussianos

Feixes Ince-Gaussianos são soluções da equação paraxial de Helmholtz dada na equação (2.10) em coordenadas elípticas<sup>15</sup>, surgindo juntamente com os modos Laguerre-Gauss e Hermite-Gauss como um terceiro membro do conjunto de soluções da equação paraxial de Helmholtz. O modo como ele vai ser modulado dentro da equação paraxial de Helmholtz toma a seguinte forma:

$$U_{IG}(\vec{r}) = E(\zeta)N(\eta)\exp[iZ(z)]\Psi_G(\vec{r}), \quad (2.30)$$

onde o último termo da equação é um feixe gaussiano de baixa ordem dada por

$$\Psi_G(\vec{r}) = \left[ \frac{w_0}{w(z)} \right] \exp \left[ -\frac{r^2}{w^2(z)} \right] \exp \left[ \frac{ikr^2}{2R(z)} \right] \exp[i\psi(z)], \text{ cujo } \psi(z) = \arctan \left( \frac{z}{z_r} \right) \text{ é a fase de}$$

Gouy. Fazendo a transformação de coordenadas da seguinte maneira,

$$x = \sqrt{\frac{\tau}{2}} w(z) \cosh(\zeta) \cos(\eta), \quad y = \sqrt{\frac{\tau}{2}} w(z) \cosh(\zeta) \sin(\eta), \quad z = z, \quad \text{onde } \zeta \in [0, \infty) \text{ e}$$

$\eta \in [0, 2\pi)$  são as variáveis elípticas radiais e angulares respectivamente e  $\tau = \frac{2f^2}{w_0^2}$  é

o fator relacionado à elipsidade do feixe com  $f$  sendo um dos focos da elipse.

Fazendo a substituição das coordenadas e inserindo a equação (2.30) na equação (2.10) encontram-se as seguintes expressões:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \zeta^2} - \tau \sinh 2\zeta \frac{\partial E}{\partial \zeta} - (a - p\tau \cosh 2\zeta)E = 0, \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2} + \tau \sin 2\eta \frac{\partial N}{\partial \eta} + (a - p\tau \cos 2\eta)N = 0, \quad (2.32)$$

$$-\left( \frac{z^2 + z_r^2}{z_r} \right) \frac{\partial Z}{\partial z} = p, \quad (2.33)$$

onde  $a$  e  $p$  são constantes de separação. O excesso de fase é dado por

$$Z(z) = -p \arctan \left( \frac{z}{z_r} \right). \text{ As variáveis elípticas angulares e radiais relacionadas da}$$

forma  $i\zeta \rightarrow \eta$  tornam as equações (2.31) e (2.32) iguais. A solução da equação

(2.31) são os polinômios de Ince que são pares  $C_p^l(\eta, \tau)$  onde  $0 \leq l \leq p$  e os

polinômios ímpares  $S_p^l(\eta, \tau)$  onde  $1 \leq l \leq p$ . A solução da equação (2.32) é

dependente para cada valor de  $a_p^l(\tau)$ , onde  $0 < l < p$  e  $l$  é inteiro, a equação é

expressa por uma série finita de Fourier dada por  $N(\eta) = \sum A_j(a_p^l) \cos(2j)$ . Logo, a

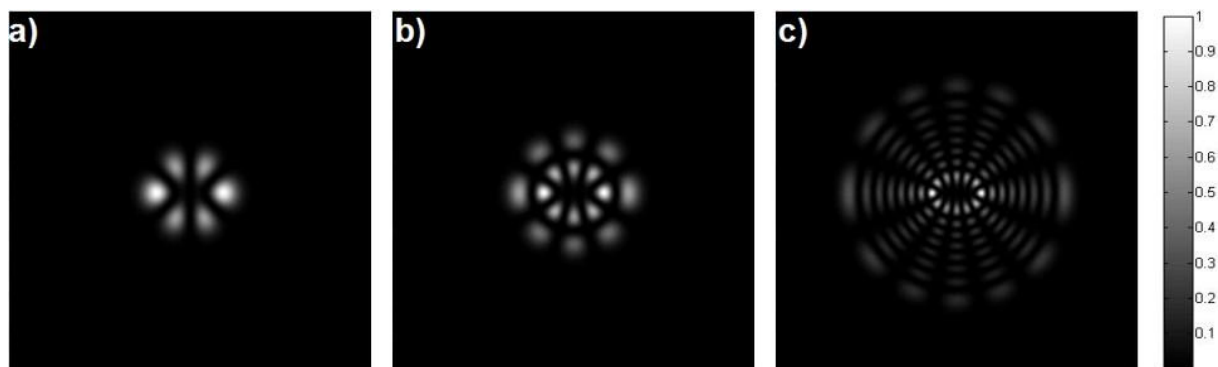
combinação das soluções destas equações resultam em:

$$IG_{p,l}^e(\vec{r}) = \frac{Hw_0}{w(z)} C_p^l(i\zeta, \tau) C_p^l(\eta, \tau) \exp \left[ \frac{-r^2}{w^2(z)} + ikz + \frac{ikr^2}{2R(z)} - i(p+1) \arctan \left( \frac{z}{z_r} \right) \right], \quad (2.34)$$

$$IG_{p,l}^o(\vec{r}) = \frac{Jw_0}{w(z)} S_p^l(i\zeta, \tau) S_p^l(\eta, \tau) \exp \left[ \frac{-r^2}{w^2(z)} + ikz + \frac{ikr^2}{2R(z)} - i(p+1) \arctan \left( \frac{z}{z_r} \right) \right], \quad (2.35)$$

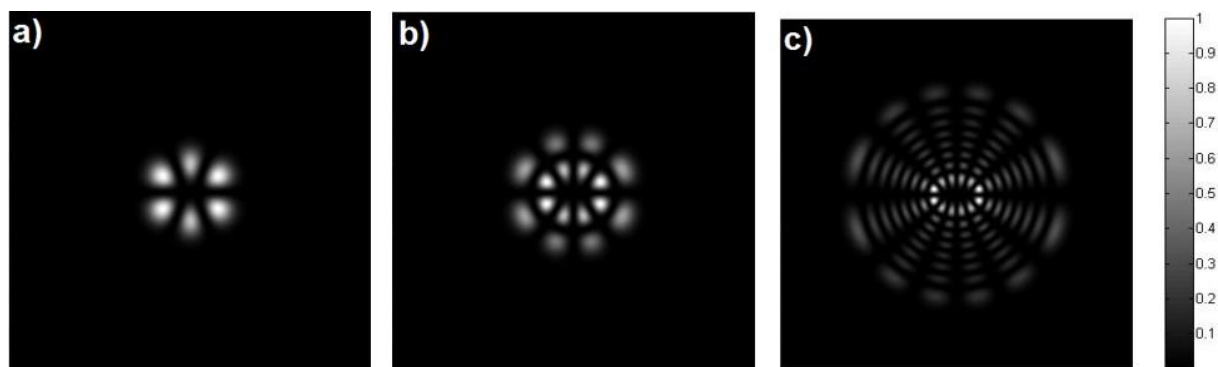
que são as equações dos feixes Ince-Gaussianos, onde o índice  $e$  representa o modo par e  $o$  o modo ímpar  $H$  e  $J$  são constantes de normalização. O perfil transversal dos feixes, em  $z=0$ , com os valores de elipsidade  $\tau=1$  e  $w_0 \approx 0,85$ , são mostrados nas figuras abaixo.

**Figura 2.10 - Perfis de intensidade dos modos pares dos feixes Ince-Gaussianos: a)  $l=3$  e  $p=3$ , b)  $l=4$  e  $p=6$ , c)  $l=6$  e  $p=20$ .**



Fonte: Autor, 2017.

**Figura 2.11 - Perfis de intensidade dos modos ímpares dos feixes Ince-Gaussianos: a)  $l=3$  e  $p=3$ , b)  $l=4$  e  $p=6$ , c)  $l=6$  e  $p=20$ .**



Fonte: Autor, 2017.

Algumas características físicas em particular de tais feixes devem ser ressaltadas. O feixe, independentemente dos índices, tem a largura do feixe proporcional a  $w(z)$  e à proporção que  $z$  aumenta o perfil transversal muda atrelado a um fator  $\frac{w}{w(z)}$ . A fase de Gouy tem uma relação dada por  $\psi_{IG}(z) = (p+1)\psi(z)$ , onde a velocidade de fase aumenta com o acréscimo da ordem do feixe. O número de linhas hiperbólicas coincide com o valor de  $l$ , onde para encontrar o número de

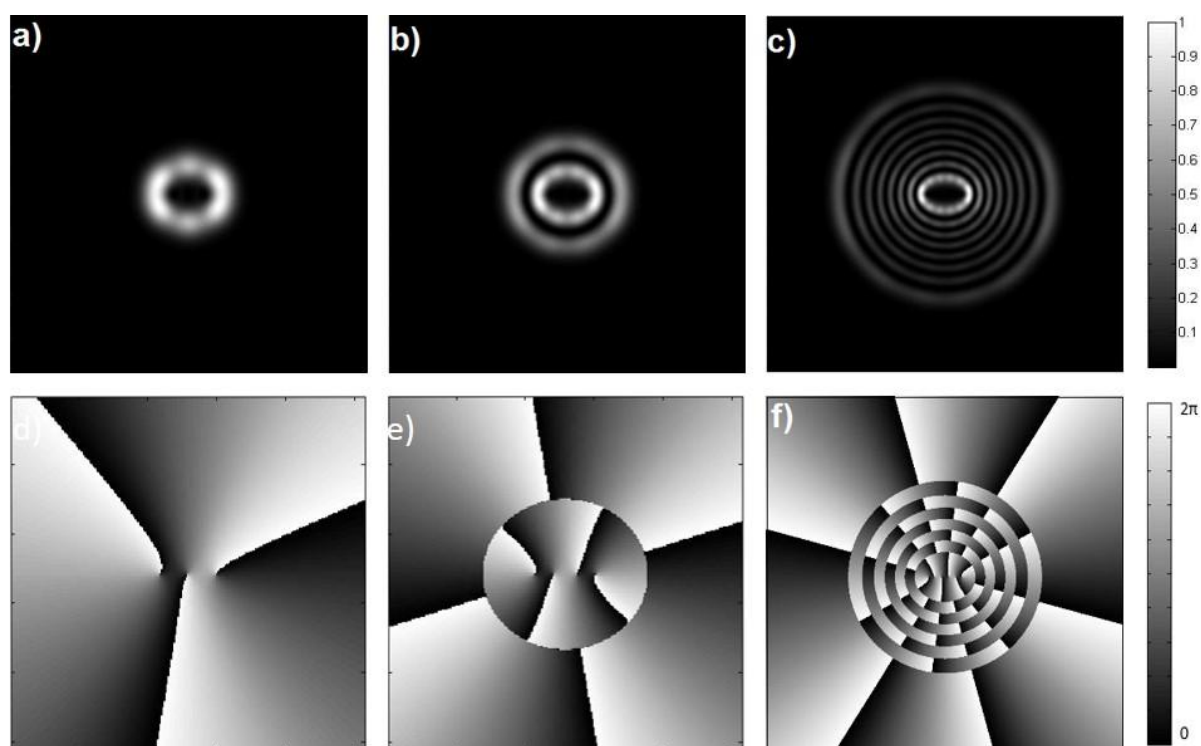
linhas com formato elipsoidal tem-se a relação  $\left(\frac{p-l}{2}\right)$ . Um fato importante de se evidenciar é que quando os feixes Ince-Gaussianos tem  $\tau \rightarrow 0$  adquirem simetria cilíndrica tomando características de um feixe Laguerre-Gauss. Para  $\tau \rightarrow \infty$  os feixes tomam as características dos feixes Hemite-Gauss.

Os feixes Ince-Gaussianos podem também ter frente de onda helicoidal onde sua relação é descrita como uma combinação linear entre os modos pares e ímpares dada por<sup>16</sup>:

$$IG^{\pm} = IG_{p,l}^e \pm iIG_{p,l}^o, \quad (2.36)$$

onde o sinal descreve o sentido de rotação. Analogamente aos feixes Mathieu exibem múltiplos vórtices internos em sua estrutura de fase em diferentes pontos de uma linha. E  $l$  aqui continua sendo o valor do módulo da carga topológica, como nos feixes Mathieu. Abaixo se tem algumas figuras de intensidade e fase das ordens dos feixes Ince-Gaussianos para o sinal positivo entre os modos pares e ímpares que compõem o feixe. Nota-se que o número de anéis é dado pela relação  $\left(\frac{p-l}{2}\right)+1$ .

**Figura 2.12 - Perfis de intensidade e fase respectivamente dos feixes Ince-Gaussianos: a) e d)  $l = 3$  e  $p = 3$ , b) e e)  $l = 4$  e  $p = 6$ , c) e f)  $l = 6$  e  $p = 20$ .**



Fonte: Autor, 2017.

### 2.3.3 Feixes Hermite-Gaussianos com vórtices

Os feixes Hermite-Gaussianos com vórtices são uma superposição de vários feixes Hermite-Gauss, apresentando uma característica distinta do Hermite-Gauss que é a presença de momento angular orbital<sup>17</sup>. Os feixes Hermite-Gaussianos com vórtices tem sua amplitude complexa proporcional à enésima ordem do polinômio de Hermite, sendo uma função do parâmetro  $a$ , que aparecerá mais adiante. Neste trabalho dentre as possíveis formas que esse feixe pode tomar, o foco de estudo serão os feixes elípticos Hermite-Gaussianos com vórtices.

Partindo da forma generalizada dos feixes de Hermite em uma dimensão tem-se na aproximação paraxial utilizando a transformada de Fresnel<sup>27</sup>:

$$U_l(x, z) = \left(\frac{-iz_r}{z}\right)^{\frac{1}{2}} i^l \left(1 - \frac{iz_r}{z}\right)^{-\frac{(l+1)}{2}} \left[\left(\frac{w_0}{c}\right)^2 - 1 + \frac{iz_0}{z}\right]^{\frac{l}{2}} \exp\left[-\left(\frac{x}{w(z)}\right)^2 + \frac{ikx^2}{2R(z)}\right] H_l\left(\frac{x}{c(z)}\right), \quad (2.37)$$

onde  $c(z) = c\left(\frac{z}{z_0}\right)\left(1 - \frac{iz_r}{z}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{w_0}{c}\right)^2 - 1 + \frac{iz_r}{z}\right]^{1/2}$  em que  $c$  é o fator de escala. No caso

de duas dimensões utiliza-se a seguinte multiplicação  $U_{lm}(x, y, z) = U_l(x, z)U_m(y, z)$ , para que o feixe possua momento angular orbital o feixe terá que possuir uma combinação em que os coeficientes assumam valores complexos<sup>27</sup>.

Dessa forma, para  $z=0$ , fazendo  $w_0 = p$  escreve-se combinação linear da seguinte forma:

$$U_l(x, y, z=0) = i^l \exp\left(-\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2}\right) (1+a^2)^{-\frac{l}{2}} \sum_{p=0}^l \frac{l!(ia)^p}{p!(l-p)!} H_p\left(\frac{x}{c}\right) H_{l-p}\left(\frac{y}{d}\right), \quad (2.38)$$

onde  $q$  é a cintura do feixe ao longo do eixo  $y$ ,  $d$  é o fator de escala e  $a$  é um parâmetro real. Utilizando a relação

$\sum_{p=0}^l \frac{l!(t)^p}{p!(l-p)!} H_p(f) H_{l-p}(g) = (1+t^2)^{\frac{l}{2}} H_l\left(\frac{tf+g}{\sqrt{1+t^2}}\right)$ <sup>26</sup>, a amplitude complexa do feixe se

reduz a:

$$U_l(x, y, z=0) = i^l \exp\left(-\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2}\right) \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^{\frac{l}{2}} H_l\left(\frac{iadx+cy}{cd\sqrt{1-a^2}}\right), \quad (2.39)$$

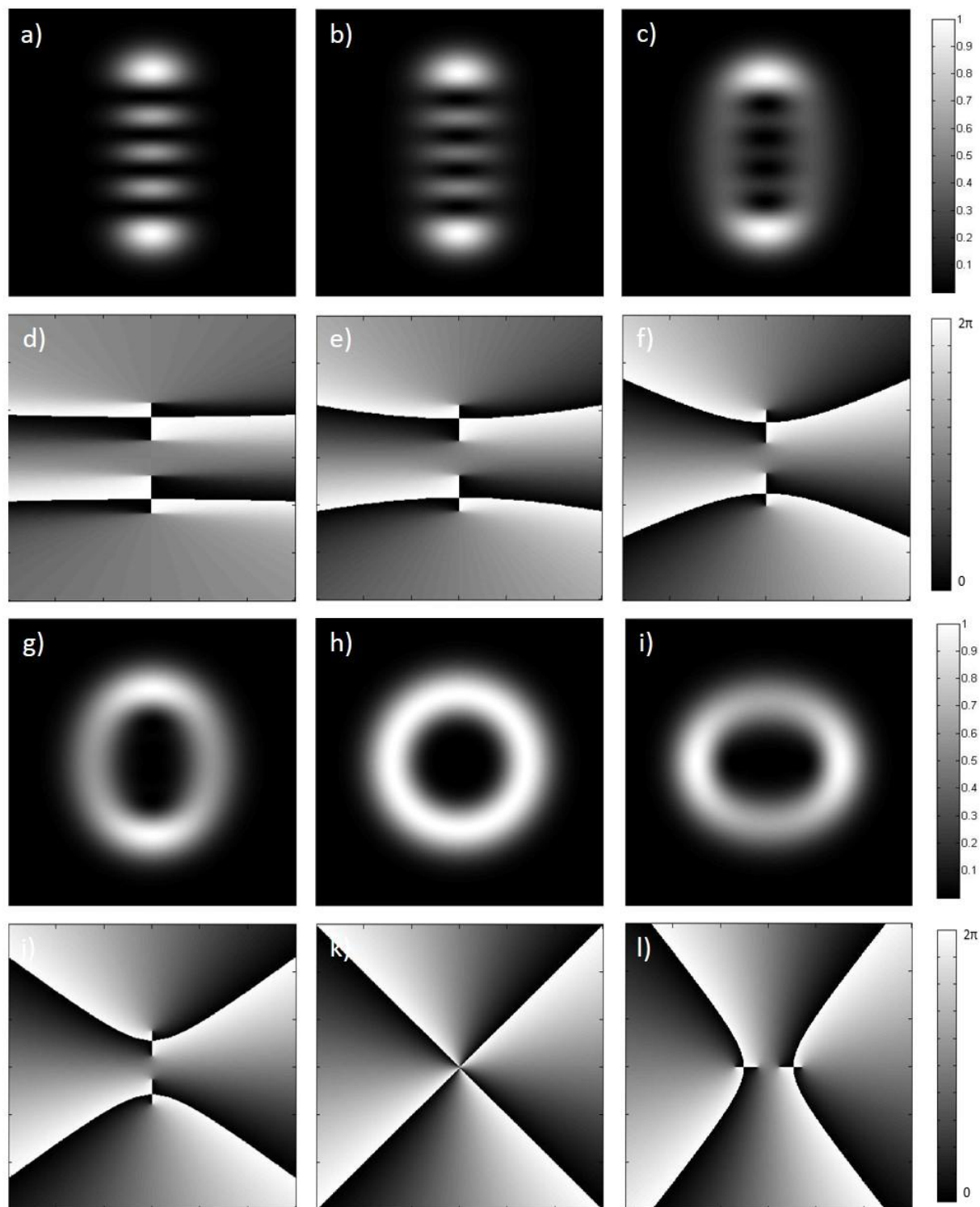
para encontrar-se o feixe em sua forma elíptica, para que se tenha controle da cintura do feixe tanto na direção  $x$  como na direção  $y$ , faz-se as substituições

$p = c\sqrt{2} = w_x$  e  $q = d\sqrt{2} = w_y$ , assim encontra-se a equação do feixe elíptico Hermite-Gaussiano com vórtice dado por:

$$U_l(x, y, z=0) = i^l \exp\left(-\frac{x^2}{w_x^2} - \frac{y^2}{w_y^2}\right) \times \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^{l/2} H_l\left[\sqrt{2} \frac{iaw_y x + w_x y}{w_x w_y \sqrt{1-a^2}}\right], \quad (2.40)$$

quando  $|a| < 1$ , os vórtices com carga topológica unitária que aparecem no centro do feixe estarão na direção vertical. O termo  $l$  é o valor do módulo da carga topológica que para  $a > 0$  as cargas topológicas serão negativas e para  $a < 0$  as mesmas serão positivas, similarmente os sinais de  $l$  em relação a  $a$  acompanham o mesmo raciocínio para  $|a| > 1$ , mas os mesmos vórtices aparecerão na direção horizontal. Quando mais próximo o valor de  $|a| = 1$  o feixe vai tomando proporções circulares e assim quando for exatamente  $|a| \approx 1$  o feixe será aproximadamente um modo Laguerre-Gauss. Para  $a = 0$  o feixe Hermite-Gaussiano com vórtice coincidirá com o feixe Hermite-Gauss.

Figura 2.13 - Perfis de intensidade e fase respectivamente  $l=4$  dos feixes elípticos Hermite-Gaussianos com vórtices: a) e d)  $a = 0,1$ ; b) e e)  $a = 0,25$ ; c) e f)  $a = 0,5$ ; g) e j)  $a = 0,75$ ; h) e k)  $a \approx 1$ ; i) e l)  $a = 1,25$ .



Fonte: Autor, 2017.

Para se encontrar o momento angular orbital de um feixe de luz qualquer<sup>27</sup>, utiliza-se a seguinte relação:



$$J_z = -i \iint U^* \left( x \frac{\partial U}{\partial y} - y \frac{\partial U}{\partial x} \right) dx dy, \quad (2.41)$$

que define o momento angular orbital na direção do eixo óptico. Substituindo a equação (2.40) na equação (2.41), obtém-se:

$$J_z = -\pi 2^{l-1} l! l a (1+a^2)^{-1} (w_x^2 + w_y^2), \quad (2.42)$$

onde essa expressão define o momento angular orbital do feixe Hermite-Gaussiano com vórtices. Para que o mesmo independa da potência do laser, fazemos a normalização  $J_z/I$ , onde  $I$  é dado por:

$$I = \iint E^* E dx dy = \pi 2^{l-1} l! w_x w_y, \quad (2.43)$$

logo a razão torna-se:

$$\frac{J_z}{I} = \left( \frac{-la}{1+a^2} \right) \left( \frac{w_x^2 + w_y^2}{w_x w_y} \right), \quad (2.44)$$

Se  $w = w_x = w_y$ , obtém-se:

$$\frac{J_z}{I} = \frac{-2la}{1+a^2}, \quad (2.45)$$

Note que o sinal do momento angular orbital do feixe Hermite-Gaussiano com vórtices depende do produto  $la$ .

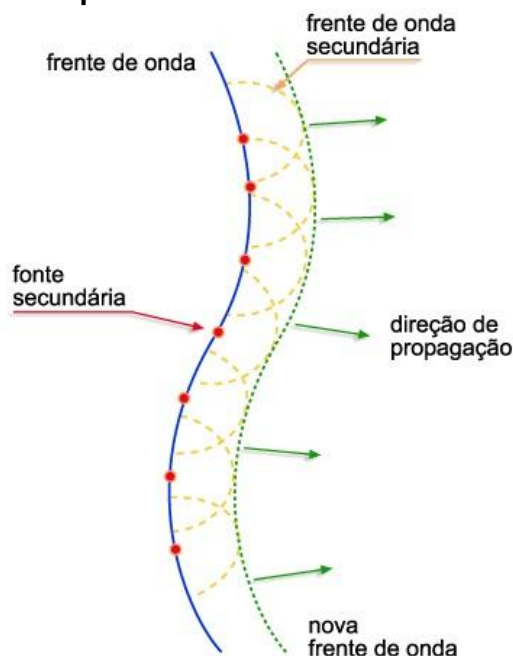
### 3 DIFRAÇÃO DE FEIXES DE LUZ POSSUINDO MOMENTO ANGULAR ORBITAL

#### 3.1 Aspectos gerais da teoria da difração

A descrição do fenômeno da difração<sup>28</sup> surgiu assim que a ótica geométrica foi insuficiente para explicar efeitos ondulatórios que apareciam quando a luz, ao passar por um objeto opaco, na projeção da sombra deste objeto em um anteparo, apareciam nas bordas da sombra, franjas claras e escuras. Esse fenômeno é principalmente evidenciado quando a luz passa por pequenas aberturas, aproximadamente do tamanho do comprimento de onda da luz.

Um princípio expressivo utilizado para descrever tal fenômeno foi o princípio de Huygens, que diz que cada ponto de uma frente de onda gera ondas esféricas secundárias, dessa forma sabe-se a nova posição da frente de onda em instantes posteriores.

**Figura 3.1 - Princípio de Huygens, diferentes pontos de uma frente de onda gerando ondas esféricas secundárias e por sua vez uma nova frente de onda.**

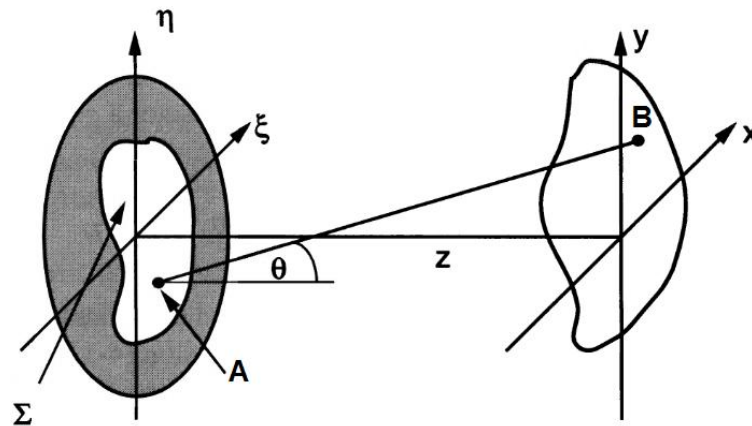


Fonte: Zílio, 2009 p.162.

Posteriormente Fresnel complementou o princípio de Huygens relatando que cada ponto de uma frente de onda não obstruída será uma nova fonte de ondas esféricas secundárias, de mesmo comprimento de onda da anterior, onde sua amplitude e fase será determinada em cada ponto pela interferência de ondas

naquele mesmo ponto, chamado de princípio de Huygens-Fresnel. Para entendermos melhor tal princípio. Tomando como ponto de partida o caso que utiliza coordenadas retangulares<sup>29</sup>, assume-se o feixe difratando em uma abertura exibida no plano  $(\xi, \eta)$ , sendo iluminada no sentido positivo do eixo  $z$ . O propósito é encontrar o valor do campo em um plano  $(x, y)$  que é paralelo ao plano  $(\xi, \eta)$  e o eixo  $z$  é normal aos dois planos, conforme a figura (3.2):

**Figura 3.2 - Geometria da difração**



Fonte: Goodman, 2005, p.65.

Esse princípio pode ser denotado pela seguinte equação:

$$U(B) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(A) \frac{\exp(ikr)}{r} \cos \theta dA, \quad (3.1)$$

$\theta$  é o ângulo entre a normal paralela ao eixo  $z$  e o vetor  $\vec{r}$  que une o ponto **A** ao ponto **B**. Escrevendo o cosseno como  $\cos \theta = \frac{z}{r}$  tem-se:

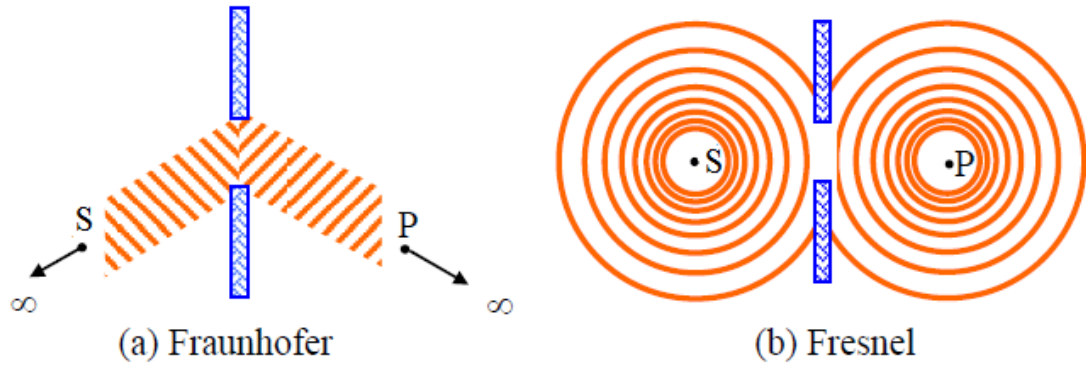
$$U(x, y) = \frac{z}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{\exp(ikr)}{r^2} d\xi d\eta, \quad (3.2)$$

onde a distância de **A** até **B** pode ser escrita como  $r = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ .

A equação (3.2) expressa uma forma geral de obter o padrão de difração, que podem ser divididos em dois tipos de difração: Fresnel e Fraunhofer<sup>30</sup>. Analisando de uma maneira qualitativa a diferença entre tais padrões, utilizando a figura (3.3), a difração para o caso de Fraunhofer é um caso em que tanto a fonte  $S$  está bem distante da abertura como também o ponto de análise do padrão  $P$  está a uma distância tendendo ao infinito, logo o raio da curvatura da frente de onda é tão

grande que a curva é tomada como um plano. No caso de Fresnel,  $S$  e  $P$  estão a uma distância menor da fenda.

**Figura 3.3 - Padrões de difração: (a) Fraunhofer e (b) Fresnel.**



Fonte: Zílio, 2009, p.169.

### 3.2 Difração de Fresnel

Para obter a aproximação de Fresnel, faz-se o seguinte procedimento. Sabendo que  $r = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ , coloca-se  $z^2$  em evidência e fazendo posteriormente uma expansão binomial até a primeira ordem, tem-se a seguinte equação:

$$r \approx z \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x - \xi}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{y - \eta}{z} \right)^2 \right]. \quad (3.3)$$

Tal expansão binomial é possível levando em consideração que a distância  $z$  é grande o suficiente para que esta aproximação seja precisa.

Logo, encontra-se a seguinte expressão para o campo em um plano  $(x, y)$ :

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \exp \left\{ \frac{ik}{2z} \left[ (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \right] \right\} d\xi d\eta. \quad (3.4)$$

Nota-se que foram incorporados limites finitos da abertura na definição de  $U(\xi, \eta)$ . A equação (3.4) é uma convolução, que é escrita como:

$$U(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \quad (3.5)$$

onde

$$h(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp \left[ \frac{ik}{2z} (x^2 + y^2) \right], \quad (3.6)$$

o termo  $\exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right]$  é colocado para fora da integral, pois não depende das variáveis de integração, resultando em:

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ U(\xi, \eta) e^{\frac{ik}{2z}(\xi^2+\eta^2)} \right\} e^{\frac{-i2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta. \quad (3.7)$$

Além do fator multiplicativo fora da integral, observa-se que essa expressão é a transformada de Fourier de um campo complexo modulado por uma exponencial quadrática. Tanto a equação (3.4) como a equação (3.7) são denominadas integrais da difração de Fresnel.

### 3.3 Difração de Fraunhofer

Tomando o plano  $(x, y)$  com uma distância  $z$  muito grande em relação a abertura, encontra-se uma zona onde a frente de onda é constante, que é a zona da aproximação de Fraunhofer. Como o padrão de difração está muito distante da abertura faz-se a seguinte aproximação:  $1 \gg \frac{k(\xi^2 + \eta^2)}{2z}$ . Dessa forma, a equação

(3.7) torna-se:

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \left( e^{\frac{-i2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)} \right) d\xi d\eta, \quad (3.8)$$

onde essa equação representa a transformada de Fourier da distribuição de um campo luminoso incidindo em uma abertura. Tal transformada pode ser calculada transformando as coordenadas  $(x, y)$  nas frequências  $(f_x, f_y)$  com as seguintes

substituições  $f_x = \frac{x}{\lambda z}$  e  $f_y = \frac{y}{\lambda z}$ . Observamos que o padrão de difração de

Fraunhofer é um caso limite da difração de Fresnel, logo a equação (3.7) é válida para os dois tipos de difração.

### 3.4 Transformada de Fourier

A utilização da ferramenta matemática transformada de Fourier consiste em converter o espaço das coordenadas  $(x, y)$  para o espaço das frequências  $(f_x, f_y)$  e sua forma bidimensional é expressa da seguinte maneira:

$$F\{g(x, y)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) \exp[-i2\pi(f_x x + f_y y)] dx dy. \quad (3.9)$$

Neste caso, temos a transformada direta de Fourier. Sua inversa, ou seja, a conversão do espaço das frequências para o espaço das coordenadas, para uma função  $G(f_x, f_y)$  é representada como:

$$F^{-1}\{G(f_x, f_y)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(f_x, f_y) \exp[i2\pi(f_x x + f_y y)] dx dy. \quad (3.10)$$

O espaço das frequências é também conhecido como plano de Fourier. Posteriormente neste trabalho, serão utilizadas lentes que proporcionarão uma visualização experimental da Transformada de Fourier.

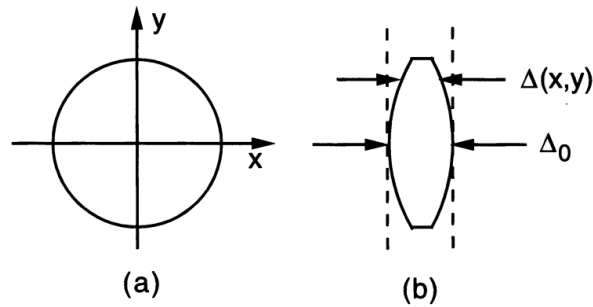
#### 3.4.1 Transformada de Fourier realizada por uma lente

A transformada de Fourier é uma das propriedades úteis que se pode extrair de uma lente convergente, também classificada como lente fina. Afirmar que uma lente é fina, quer dizer que um raio de luz incide e sai da lente aproximadamente no mesmo ponto, ou seja, existe uma translação insignificante no interior da lente. Deste modo, a lente fina atrasa a frente de onda incidente por uma quantidade proporcional à espessura da lente<sup>29</sup>.

Considerando a espessura da lente no ponto  $(x, y)$  sendo  $\Delta(x, y)$ , e uma espessura inicial  $\Delta_0$ . O atraso de fase sofrido pela onda, no ponto  $(x, y)$ , é escrito como:

$$\phi(x, y) = kn\Delta(x, y) + k[\Delta_0 - \Delta(x, y)], \quad (3.11)$$

Figura 3.4 - A função da espessura: (a) visão frontal, (b) visão lateral.



Fonte: Goodman, 2005, p.98.

onde  $n$  é o índice de refração do material da lente,  $kn\Delta(x, y)$  é atraso de fase introduzido pelas lentes, e  $k[\Delta_0 - \Delta(x, y)]$  é o atraso de fase na região restante do espaço livre entre os dois planos. De forma equivalente a lente pode ser também representada na forma:

$$t_1(x, y) = \exp[ik\Delta_0] \exp[ikn\Delta(x, y)] \exp[-ik\Delta(x, y)]. \quad (3.12)$$

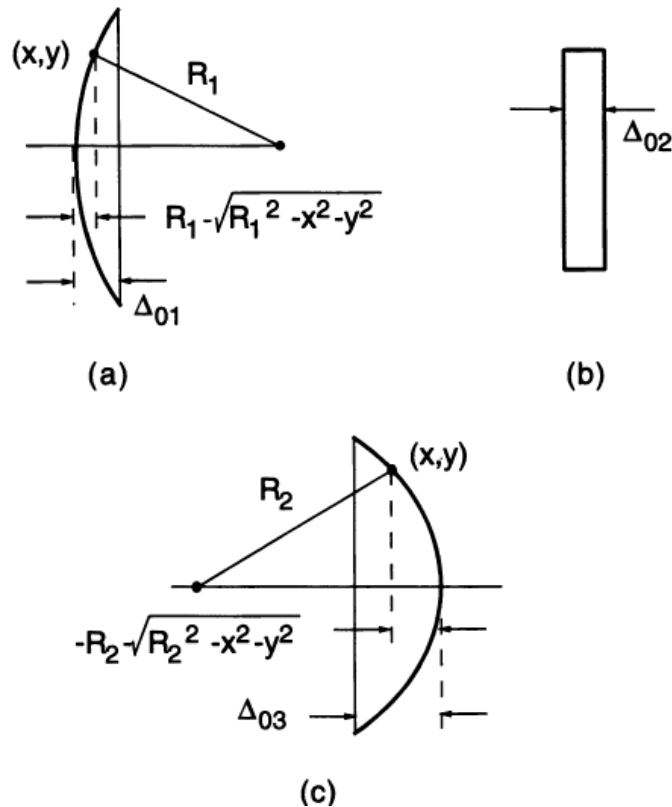
A função  $t_1(x, y)$  consegue ser um parâmetro que relaciona um campo complexo  $U_1'(x, y)$  em um plano imediatamente atrás da lente com um campo complexo  $U_1(x, y)$  imediatamente depois da lente, tendo a seguinte equação:

$$U_1'(x, y) = t_1(x, y)U_1(x, y). \quad (3.13)$$

Para visualizar melhor e resolver o cálculo da espessura da lente, divide-se essa espessura em 3 partes:

$$\Delta(x, y) = \Delta_1(x, y) + \Delta_2(x, y) + \Delta_3(x, y), \quad (3.14)$$

Figura 3.5 - (a) Geometria de  $\Delta_1$ , (b) geometria de  $\Delta_2$  e (c) geometria de  $\Delta_3$ .



Fonte: Goodman, 2005, p.99.

logo, a soma de todas as partes das lentes de acordo com a figura (3.5) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Delta(x, y) = \Delta_{01} - \left( R_1 - \sqrt{R_1^2 - x^2 - y^2} \right) + \Delta_{02} + \Delta_{03} - \left( -R_2 - \sqrt{R_2^2 - x^2 - y^2} \right), \quad (3.15)$$

fazendo a substituição  $\Delta_0 = \Delta_{01} + \Delta_{02} + \Delta_{03}$  encontra-se a seguinte equação:

$$\Delta(x, y) = \Delta_0 - R_1 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} \right) + R_2 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}} \right). \quad (3.16)$$

Admitindo as porções de frente de onda serem bem próximas ao eixo da lente, considera-se os raios paraxiais, desse modo faz-se a seguinte aproximação

$\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2}} \approx 1 - \frac{x^2 + y^2}{2R^2}$  obtendo a seguinte expressão:

$$\Delta(x, y) = \Delta_0 - \frac{x^2 + y^2}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (3.17)$$



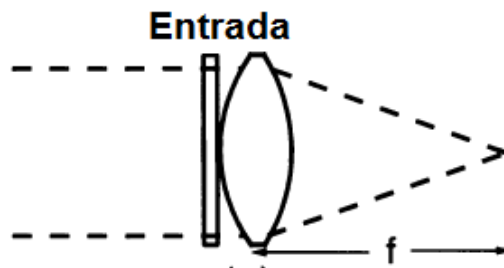
$n$ ,  $R_1$  e  $R_2$  podem ser combinados em um simples número chamado de comprimento focal definido por  $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$ , que juntamente com a equação (3.17) e também negligenciando o fator de fase constante  $\exp[ik\Delta_0]$ , substituindo na equação (3.12) encontra-se:

$$t_1(x, y) = \exp\left[-i\frac{k}{2f}(x^2 + y^2)\right]. \quad (3.18)$$

Desse modo a equação acima expressa quais os efeitos causados por uma lente convergente em uma onda incidente e a transformada de Fourier pode ser realizada mais facilmente com um sistema dentro de um contexto coerente.

Consideramos agora um sistema em que uma onda plana monocromática incide perpendicularmente em uma transparência com transmitância  $t_a(x, y)$  que está imediatamente em frente a uma lente convergente de distância focal  $f$ , veja a figura (3.6).

**Figura 3.6 - Tela imediatamente em frente a lente e o conjunto realizando uma transformada de Fourier.**



Fonte: Goodman, 2005, p.103

O campo incidente é dado por:

$$U_1(x, y) = At_a(x, y), \quad (3.19)$$

onde  $A$  é a amplitude da onda incidente. Pelo fato da lente ter uma extensão finita, ela pode ser associada a uma função pupil, dada por:

$$P(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{fora} \\ 1, & \text{dentro} \end{cases}. \quad (3.20)$$

A distribuição de amplitude da equação (3.13) antes da lente torna-se:

$$U_1'(x, y) = U_1(x, y)P(x, y) \exp\left[\frac{-ik}{2f}(x^2 + y^2)\right]. \quad (3.21)$$

Para encontrar  $U_1(x, y)$  atrás da lente, deve-se utilizar a difração de Fresnel, logo substituindo a equação (3.21) na equação da difração de Fresnel e sabendo que os termos de fase quadráticos se anulam, encontra-se:

$$U(x, y) = \frac{\exp\left[\frac{ik}{2f}(u^2 + v^2)\right]}{i\lambda f} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(x, y)P(x, y) \exp\left[-\frac{i2\pi}{\lambda f}(xu + yv)\right] dx dy, \quad (3.22)$$

note que o campo  $U$  é proporcional a transformada de Fourier bidimensional de uma parte do campo incidente, subentendido pela abertura da lente<sup>29</sup>. Como a extensão física da abertura é muito menor do que a abertura da lente,  $P(x, y)$  pode ser retirado da equação, dessa forma:

$$U(x, y) = \frac{\exp\left[\frac{ik}{2f}(u^2 + v^2)\right]}{i\lambda f} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(x, y) \exp\left[-\frac{i2\pi}{\lambda f}(xu + yv)\right] dx dy. \quad (3.23)$$

Observa-se que a distribuição de amplitude complexa do campo no plano focal da lente é o padrão de difração de Fraunhofer. Logo, a transformada de Fourier de uma lente com uma transparência imediatamente próxima a lente produz um padrão em que a amplitude complexa se comporta como se estivesse em um campo distante.

Um elemento de bastante interesse físico é a intensidade, que é dada por  $I = |U|^2$ , onde tal elemento permite obter informação sobre o espectro de energia.

Fazendo  $U_1(x, y) = At_a(x, y)$ , tem-se:

$$I(u, v) = \frac{A^2}{\lambda^2 f^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t_a(x, y) \exp\left[-\frac{i2\pi}{\lambda f}(xu + yv)\right] dx dy \right|^2. \quad (3.24)$$

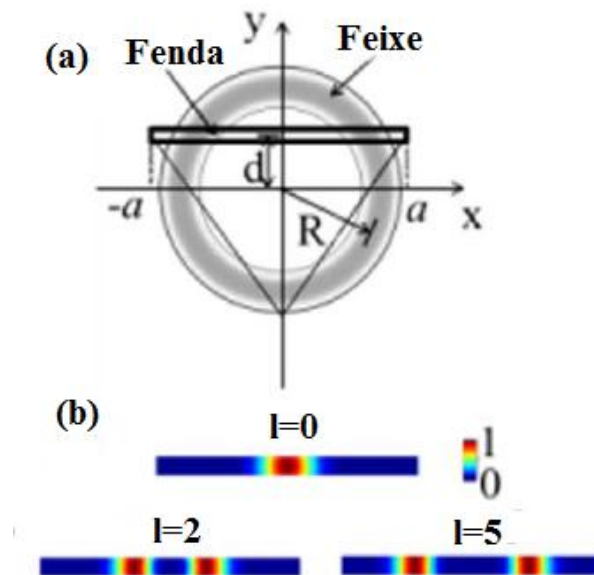
Além deste caso citado, a transparência pode ser colocada a uma distância arbitrária antes da lente ou depois da lente entre a lente e plano focal.

### 3.5 Padrão de difração de feixes possuindo momento angular orbital

#### 3.5.1 Padrão de difração de Fraunhofer de um feixe Laguerre-Gauss por uma fenda simples

Considere um feixe Laguerre-Gauss com um anel, ou seja,  $p=0$  incidindo em uma fenda simples infinitesimal de comprimento  $2a$  localizada em  $z=0$ , onde a distância entre o centro do feixe e o ponto do anel onde a intensidade máxima é  $R$  e  $d$  é o deslocamento do centro fenda em relação ao centro do feixe<sup>19</sup>. A figura (3.7) mostra todos os elementos descritos nesse parágrafo e o perfil de intensidade do feixe Laguerre-Gauss na fenda infinitesimal para diferentes valores de  $l$ .

**Figura 3.7 - (a) Esquema mostrando um feixe Laguerre-Gauss de alta ordem em relação a uma fenda de comprimento  $2a$ ,  $d$  é o deslocamento do centro da fenda em relação ao centro do feixe e  $R$  é a distância entre o centro do feixe e a intensidade máxima do anel. (b) Perfil de intensidade do feixe Laguerre-Gauss na fenda para valores de carga topológica  $l=0$ ,  $l=2$  e  $l=5$ .**

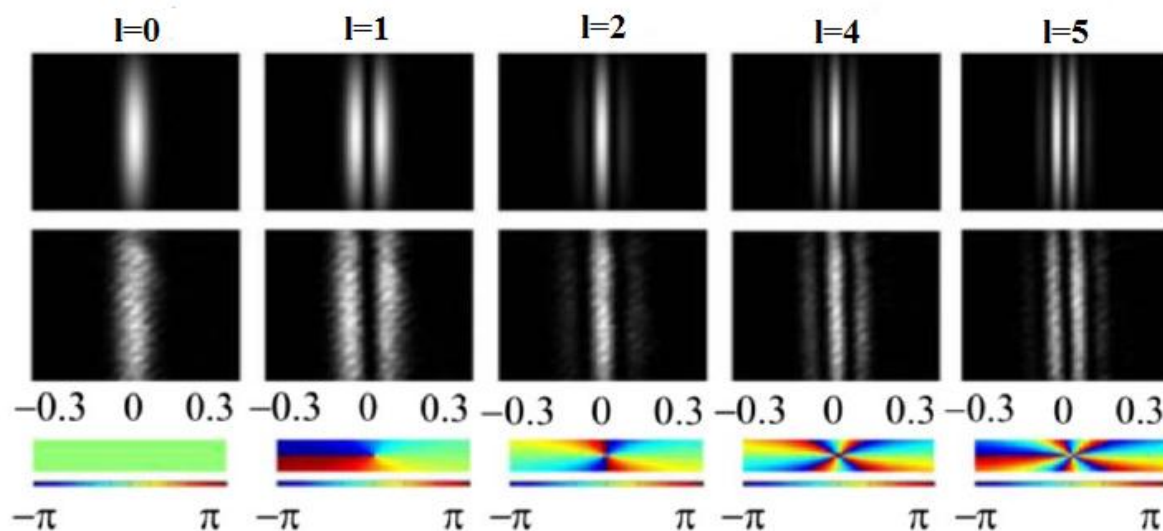


Fonte: Ferreira, 2011.

Para encontrar o padrão de difração na zona de Fraunhofer utilizamos a equação (3.8), fazemos as substituições  $f_x = \frac{x}{\lambda z}$  e  $f_y = \frac{y}{\lambda z}$ , o campo  $U(\xi, \eta)$  será o produto do campo do feixe Laguerre-Gauss por uma abertura  $t(\xi, \eta)$  que será uma fenda simples.

A primeira análise nos padrões de difração foi realizada adotando  $d=0$ , ou seja, no centro do feixe e variando os valores de carga topológica.

Figura 3.8 - Nesta figura temos: simulações numéricas na parte superior, os respectivos resultados experimentais na parte central e os diagramas de fase ao longo da fenda na parte inferior, para os valores de carga topológica  $l = 0, 1, 2, 4$  e  $5$ , onde  $d = 0$ .



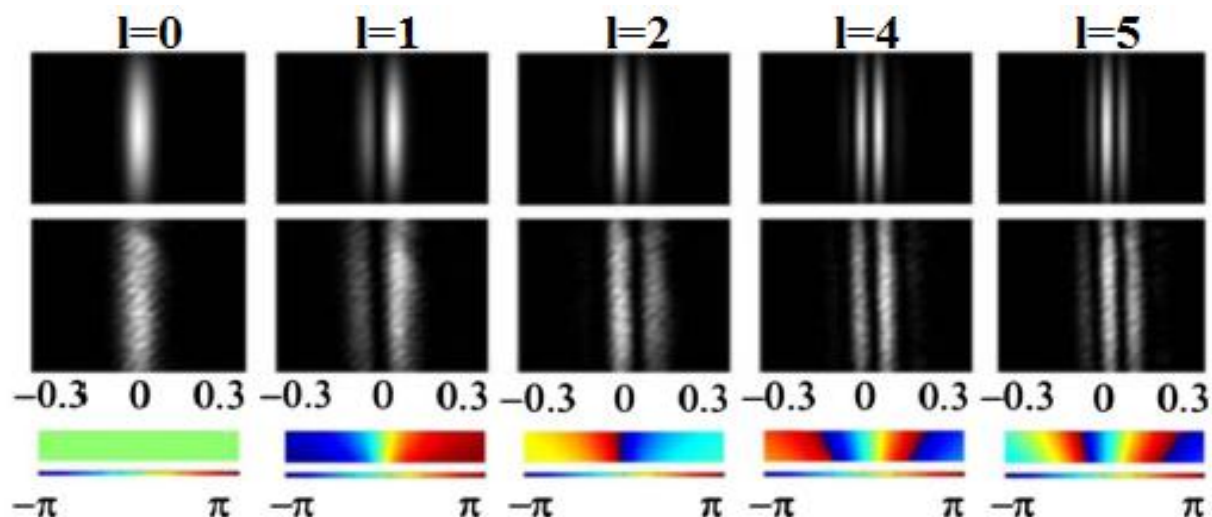
Fonte: Ferreira, 2011.

Nota-se que para o valor  $l = 0$ , o perfil de intensidade transversal comporta-se como um padrão de difração normal característico de um feixe Gaussiano em uma fenda simples. Porém, quando o feixe Laguerre-Gauss toma valores de alta ordem o anel atinge duas partes simétricas da fenda simples e o padrão de difração se comporta de forma similar ao padrão de um feixe Gaussiano em uma fenda dupla, onde o número de franjas aumenta de acordo com o aumento da carga topológica, pois há aumento da distância entre os máximos.

Observa-se que para as ordens pares  $\neq 0$  possuem um máximo central e a ordens ímpares possuem um mínimo central. Outro fato relevante é que a diferença de fase entre dois pontos ao longo de uma linha na direção da fenda, quando o momento angular orbital é par é múltiplo inteiro de  $2\pi$ . Quando o momento angular orbital for ímpar eles serão múltiplos de  $\pi$ .

Analisando agora o deslocamento para um caso em que  $d \neq 0$  em que se utilizou um valor  $d = 0,2R$ , notou-se que os padrões foram deslocados da posição  $0$ .

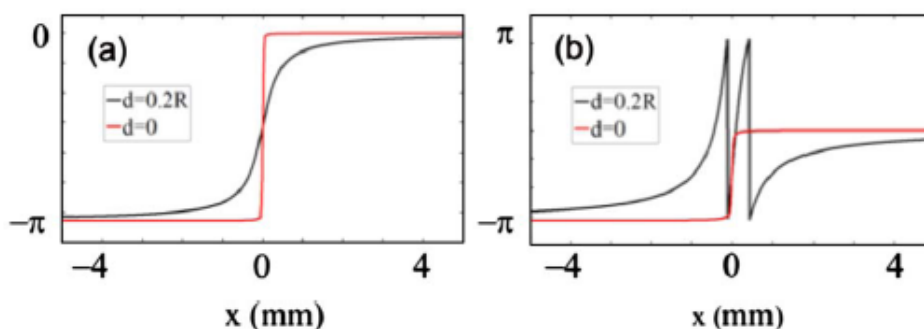
Figura 3.9 - Nesta figura vemos: simulações numéricas na parte superior, os respectivos resultados experimentais na parte central e os diagramas de fase ao longo da fenda na parte inferior para os valores de carga topológica  $l = 0, 1, 2, 4$  e  $5$ , onde  $d = 0, 2R$ .



Fonte: Ferreira, 2011.

A mudança de fase no decorrer da fenda pode ser analisada de acordo com a figura (3.10), onde no caso  $d = 0$  a fase permanece constante em regiões próximas ao zero enquanto que para o caso em que  $d \neq 0$  a fase não tem um comportamento constante.

Figura 3.10 - Análise da fase próxima à região central da fenda: (a)  $l = 1$  (b)  $l = 5$  para os valores  $d = 0$  e  $d = 0, 2R$ .



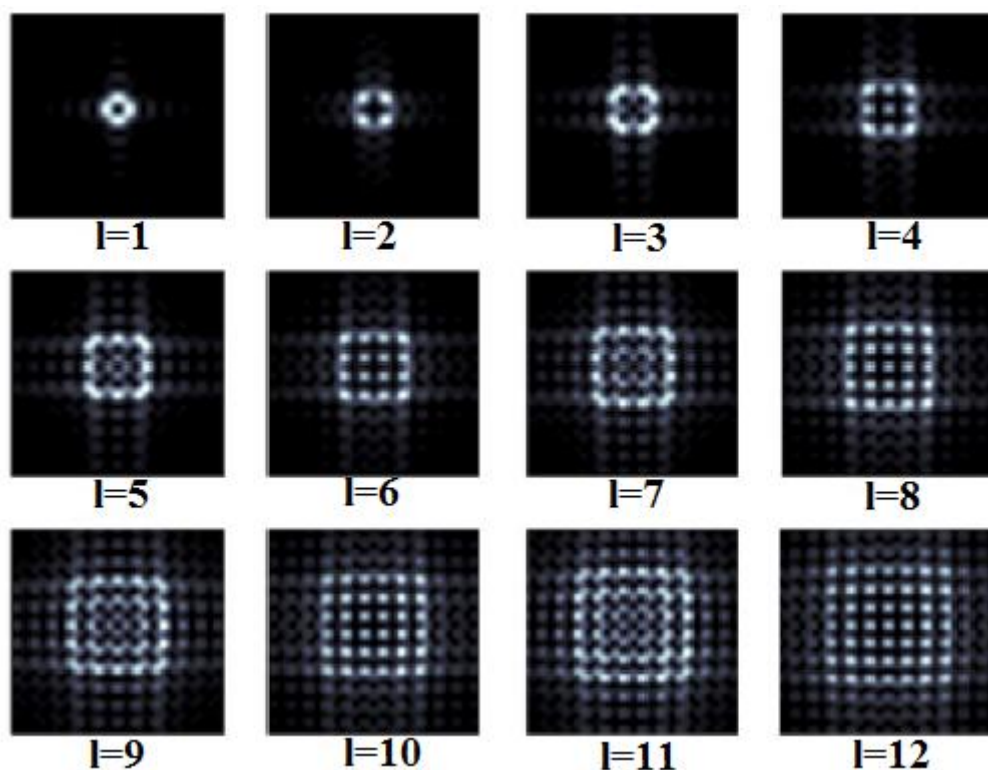
Fonte: Ferreira, 2011.

O comportamento da fase em  $d=0,2R$  tem o processo de evolução crescimento de aproximadamente linear para não linear quando o valor de  $l$  aumenta.

### 3.5.2 Padrão de difração de Fraunhofer de um feixe Laguerre-Gauss por uma abertura quadrada

Utilizando novamente um feixe Laguerre-Gauss com  $p=0$ , e mudando a abertura agora para uma abertura quadrada<sup>20</sup>, encontra-se o padrão de difração de Fraunhofer utilizando-se a equação (3.8), e substituindo  $f_x = \frac{x}{\lambda z}$  e  $f_y = \frac{y}{\lambda z}$ , encontra-se para diferentes valores de carga topológica os seguintes resultados mostrados na figura (3.11).

**Figura 3.11 - Intensidade de um feixe Laguerre-Gauss difratado em uma abertura quadrática na zona de Fraunhofer com a carga topológica  $l$  variando de 1 até 12 em uma simulação numérica.**

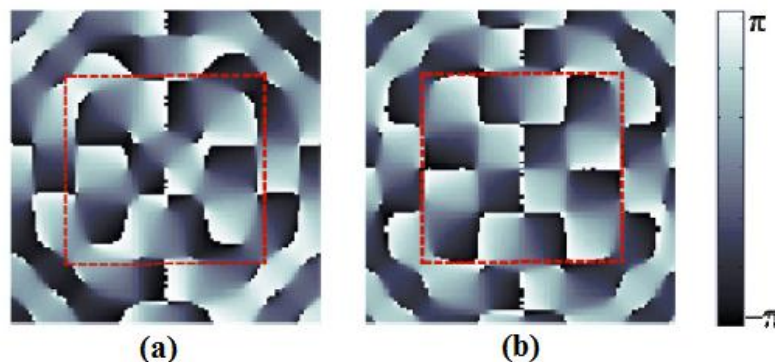


Fonte: Mesquita, 2011.

Observando os padrões de intensidade nota-se que para valores de carga topológica ímpar, a rede gerada pelo padrão de difração não é tão uniforme quanto

para valores pares, pois em valores pares há um salto de fase bem definido enquanto que nos ímpares a transição entre uma fase e outra é suavizada.

**Figura 3.12 - Fase do padrão de difração para os valores (a)  $l = 5$  e (b)  $l = 6$ .**



Fonte: Mesquita, 2011.

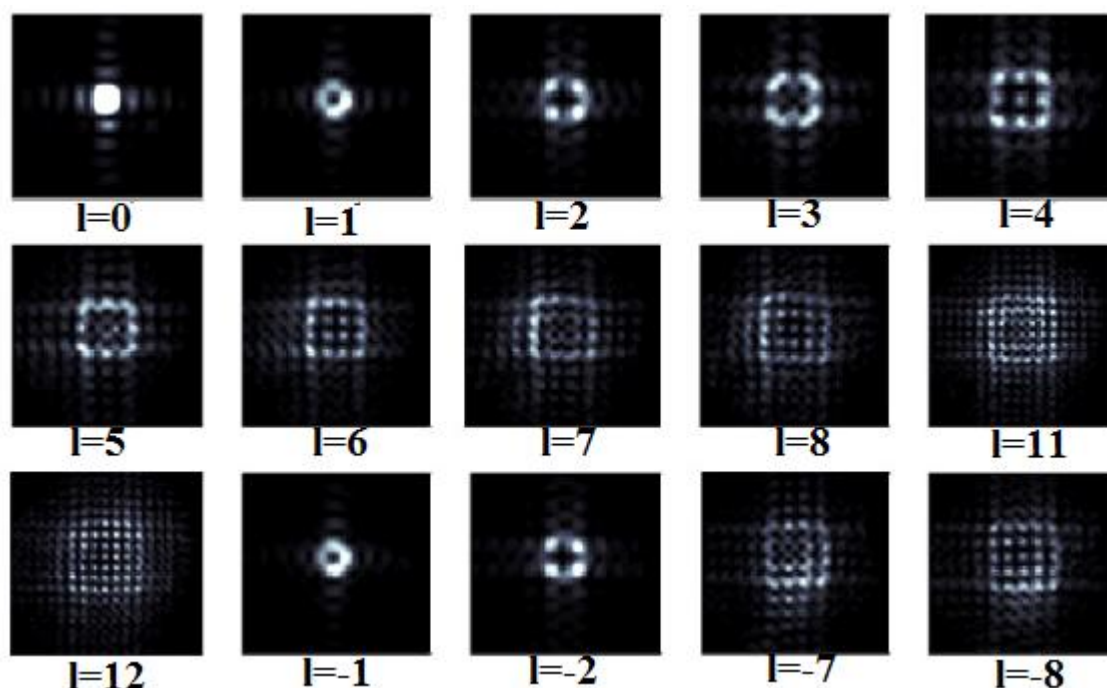
Fazendo a contagem dos máximos quando a carga topológica é par, identifica-se que o valor da carga topológica é dado por  $l = 2N - 2$ , onde  $N$  é o número de máximos. Na figura (3.13) tem uma representação experimental dos padrões de difração.

Percebe-se que para valores negativos de  $l$ , o padrão tem o mesmo formato do seu valor positivo, pois o padrão é invariante sobre uma rotação de  $\pi$ . Para  $l = 0$  percebe-se um padrão de difração usual de uma abertura quadrada.

O padrão de difração se forma com as contribuições de todos os lados, tratados individualmente como fendas simples ou aos pares como fendas duplas, segundo um resultado conhecido da óptica quântica conhecido como regra de Born<sup>31</sup>.

Um aspecto importante de salientar para a formação dessa rede óptica é que a junção dos padrões de difração proporcionados por fendas paralelas na direção horizontal e na direção vertical, quando o valor de  $l$  é par, faz com que os picos de intensidade se sobreponham, definindo melhor a rede quadrática formada.

**Figura 3.13 - Padrões de intensidade experimentais de um feixe Laguerre-Gauss com carga topológica  $l$  difratado até a zona de Fraunhofer por uma abertura quadrática para valores de  $l$  iguais a 0,1,2,3,4,5,6,7,8,11,12,-1,-2,-7 e -8.**



Fonte: Mesquita, 2011.

### 3.5.3 Padrão de difração de Fraunhofer de feixes de simetria cilíndrica com momento angular orbital utilizando uma abertura triangular

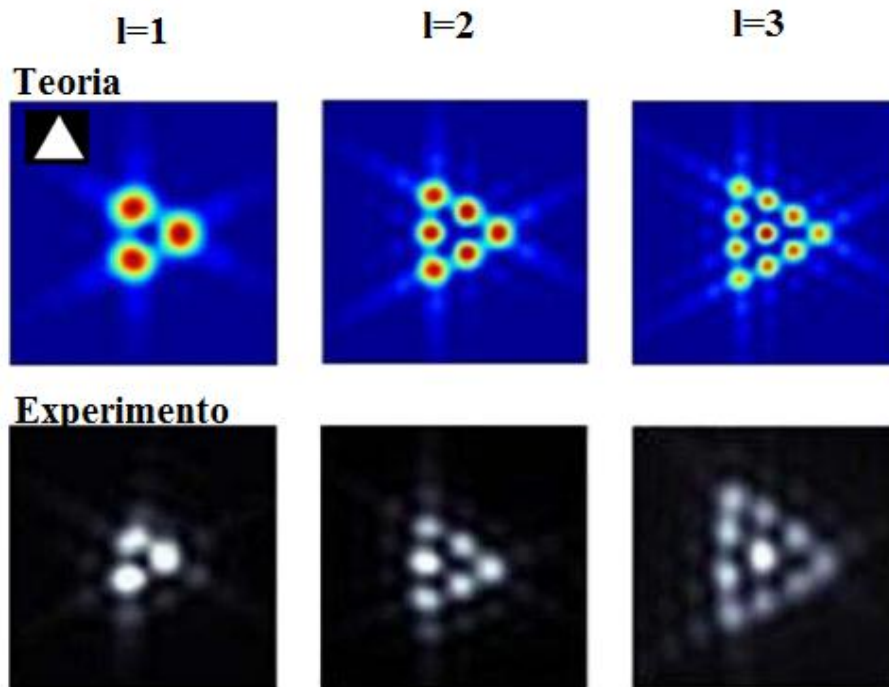
Hickmann *et. al.*<sup>21</sup>, utilizando um feixe Laguerre-Gauss com  $p=0$  e circunscrevendo uma fenda triangular equilátera, encontrou o padrão de difração em um campo distante através da transformada de Fourier da equação (3.8) em termos das frequências espaciais, nota-se uma rede com um número de máximos laterais  $N$  onde o valor da carga topológica é dado por  $l = N - 1$ .

Note na figura (3.14) que a rede sofre uma rotação de  $90^\circ$  em relação a abertura, e que a rede sofre um aumento de tamanho com o aumento da carga topológica, que consecutivamente aumenta o número de máximos.

Pela teoria da difração percebe-se o padrão de difração é uma resultante da interferência entre os padrões gerados por cada lado da abertura. A partir de agora será utilizado um argumento qualitativo para se verificar o efeito da fase azimutal em cada borda.



Figura 3.14 - Perfil de intensidade de um feixe Laguerre-Gauss difratado por uma abertura triangular equilátera para os valores de carga  $l = 1, 2, 3$ .



Fonte: Hickmann, 2010.

Coincidindo o centro geométrico do triângulo equilátero com o centro de propagação do feixe tem-se que a fase se distribui igualmente em todos os lados. Assim a fase para o lado da base do triângulo pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\varphi(s) = \arcsin \left( \frac{s}{\sqrt{(a/12)^2 + s^2}} \right), \quad (3.25)$$

onde  $s$  é uma coordenada com a origem no centro da fenda e  $a$  é o tamanho de cada lado do triângulo. Fazendo a expansão de Taylor e selecionando o primeiro termo tem-se  $\varphi(s) = 2\sqrt{3}s/a$ .

Tomando a fenda com uma largura infinitesimal de forma que podemos tratá-la como um delta de Dirac e, por simplicidade, ignorando a variação da amplitude do campo, o campo para a fenda horizontal tem-se o seguinte valor:

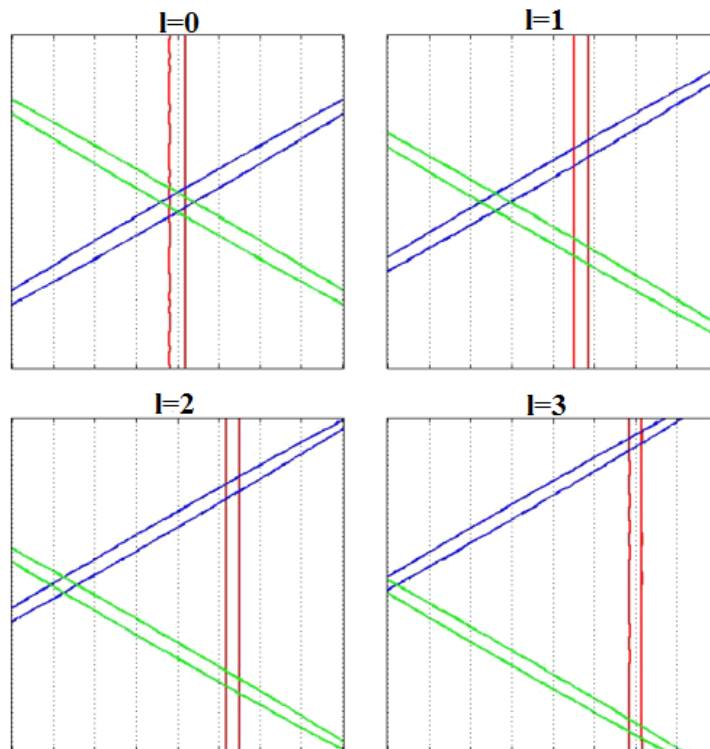
$$U \sim \delta(y_0) \exp \left( \frac{i2\sqrt{3}lx_0}{a} \right), \quad (3.26)$$

onde  $x_0$  e  $y_0$  são coordenadas cartesianas no plano de abertura. Utilizando a equação (3.23) no espaço das frequências tem-se:

$$U(k_x, k_y) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y_0) e^{\frac{i2\sqrt{3}lx}{a}} \left( e^{-i(k_x x_0 + k_y y_0)} \right) dx_0 dy_0 = \delta\left(k_x - \frac{2\sqrt{3}l}{a}\right). \quad (3.27)$$

Para resolver a integral acima utilizamos o teorema do deslocamento<sup>29</sup>. Compreende-se que o padrão obtido por um lado da abertura tem um deslocamento na direção  $k_x$  que é proporcional ao valor de  $l$ , observa-se também que esse deslocamento é proporcional ao inverso tamanho do lado do triângulo. O raciocínio é análogo para os outros dois lados do triângulo. Na figura abaixo se tem uma visão de como o valor da carga aumenta o tamanho da rede através deste efeito.

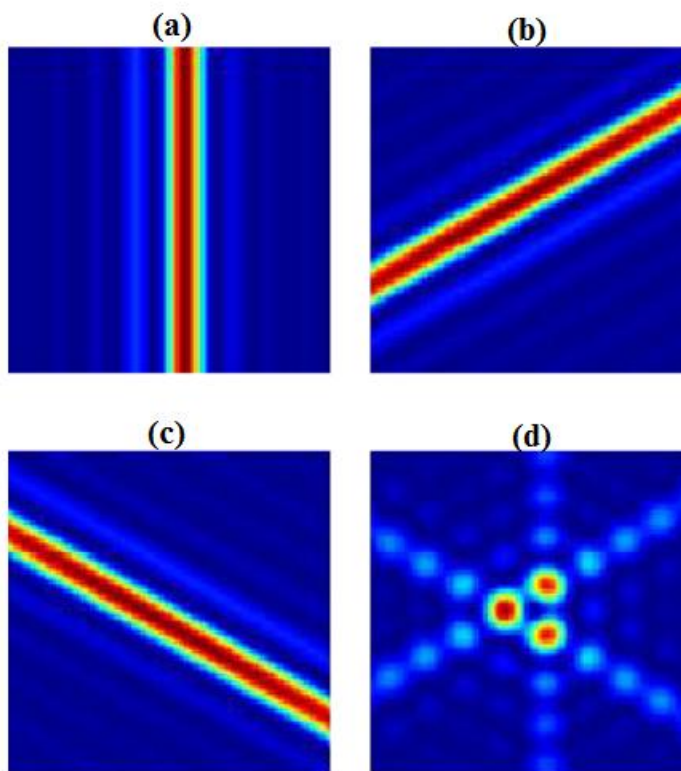
**Figura 3.15 - Deslocamento no plano de Fourier realizado pelo efeito da fase no padrão de difração para valores de  $l = 0, 1, 2$  e  $3$ .**



Fonte: Hickmann, 2010.

Lembrando que o padrão de difração também é resultado da interferência entre os padrões gerados por cada lado do triângulo, vamos supor agora que cada lado seja uma fenda com largura finita. A figura (3.16) a seguir mostra os padrões para cada lado do triângulo e a resultante das contribuições dos vários padrões.

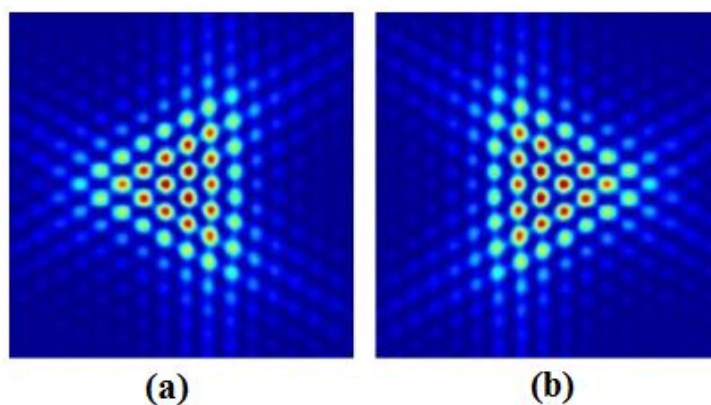
Figura 3.16 - Padrões de difração da fenda horizontal (a), da fenda lateral direita (b) e da fenda lateral esquerda (c). E (d) a contribuição da soma dos campos difratados com o valor de  $l = 1$ .



Fonte: Hickmann, 2010.

Outro aspecto de suma relevância para esse trabalho é que a mudança do sinal da carga topológica proporciona uma rotação de  $180^\circ$  em relação ao padrão triangular gerado por uma carga positiva.

Figura 3.17 - Efeito da mudança da carga topológica no padrão de difração: (a)  $l = -7$  e (b)  $l = 7$ .



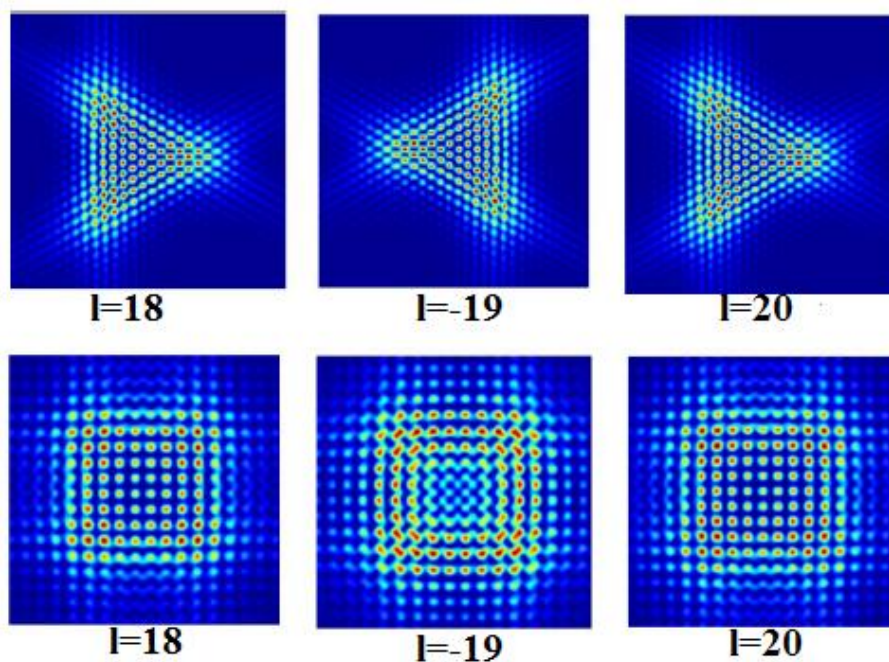
Fonte: Hickmann, 2010.

### 3.5.4 Breve estudo comparativo entre o padrão de difração da abertura triangular e retangular com feixes de simetria cilíndrica possuindo momento angular orbital

Utilizando algumas características relevantes proporcionados no padrão de difração, pode-se fazer um estudo comparativo<sup>22</sup> entre as mesmas identificando qualidades e limitações dos padrões gerados por uma abertura quadrática e uma abertura triangular. O padrão de difração gerado por uma abertura triangular proporciona a obtenção do módulo e do sinal da carga topológica, porém a rede tem nitidez até aproximadamente um valor de carga topológica  $l=10$ , já a rede quadrática gerada no padrão de difração por uma abertura quadrática proporciona uma melhor visualização para valores de carga topológica até  $l=20$ . A figura (3.18) mostra uma rede quadrática e triangular em termos de valores positivos e negativos de carga topológica, deixando claro a limitação de cada padrão de difração.

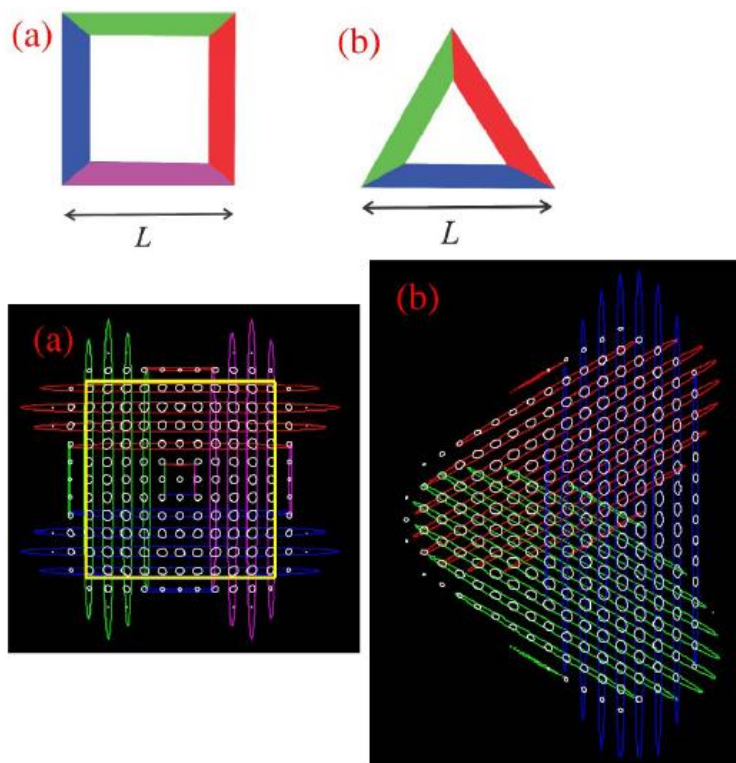
O padrão com máximos mais bem definidos para valores mais altos de carga topológica, quando se usa a abertura quadrática, se deve ao fato de que a simetria quadrática tem mais pontos de intersecção de máximos do que a simetria triangular, gerados pelas contribuições dos padrões de difração dos lados que se interferem.

**Figura 3.18 - Padrões de difração de feixes com momento angular orbital por: linha superior uma abertura triangular e linha inferior abertura quadrática para os valores de carga topológica  $l = 18, -19$  e  $20$ .**



Fonte: Silva, 2014.

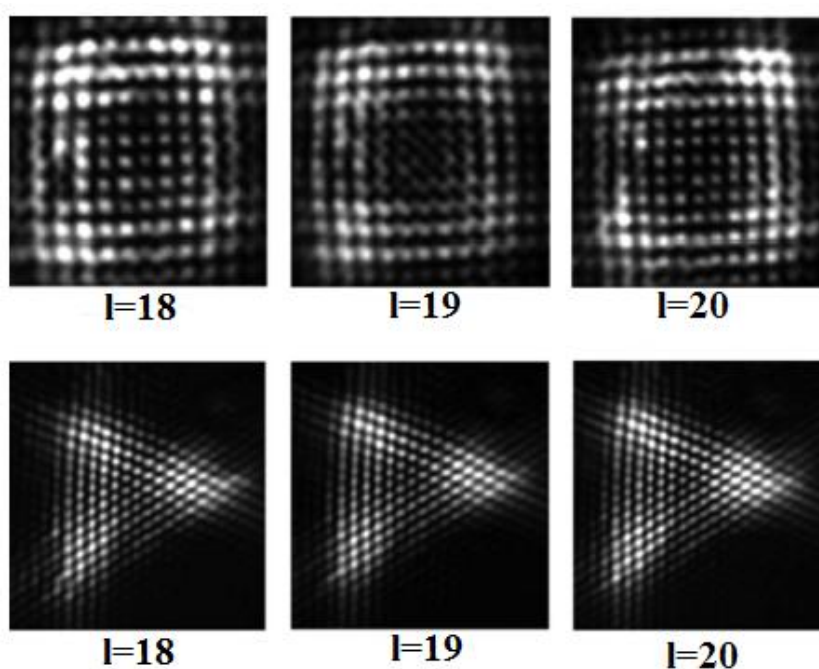
**Figura 3.19 - Contribuições dos lados dos polígonos para  $l = 20$ : (a) abertura quadrática e (b) abertura triangular.**



Fonte: Silva, 2014.

Nota-se que os deslocamentos que são gerados com o aumento do valor da carga topológica dos padrões de difração das bordas são muito mais benéficos para a intersecção de máximos em uma rede quadrática. A figura (3.20) ilustra os resultados experimentais de alguns padrões de difração de Fraunhofer para cargas topológicas com valores de 18 até 20.

**Figura 3.20 - Resultado experimental para a abertura quadrática (primeira linha) e triangular (segunda linha) para os valores de carga topológica  $l = 18, 19$  e 20.**



Fonte: Silva, 2014.

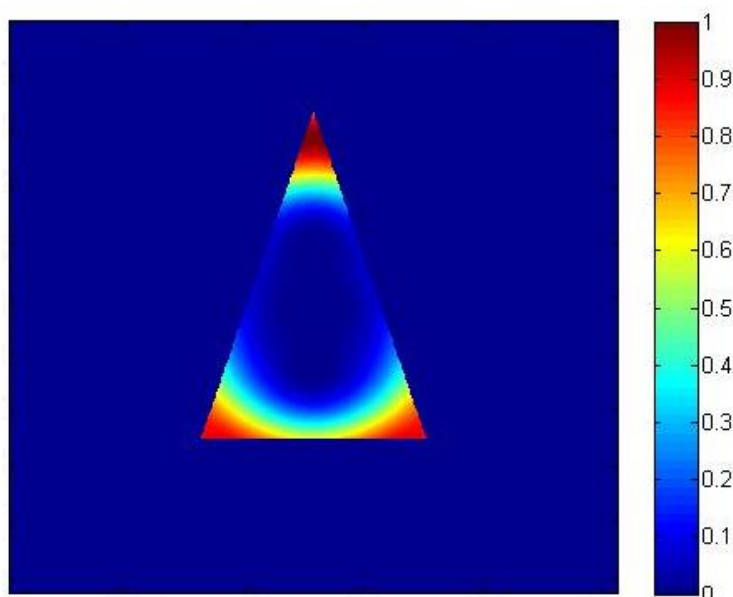
## 4 RELAÇÃO ENTRE A CARGA TOPOLÓGICA E A FORMAÇÃO DO PADRÃO DE DIFRAÇÃO DE FEIXES ELÍPTICOS POSSUINDO MOMENTO ANGULAR ORBITAL

### 4.1 Análise da simulação numérica dos padrões de difração de feixes elípticos por uma abertura triangular

Na literatura existem estudos sobre o padrão de difração de feixes possuindo momento angular orbital com simetria cilíndrica circular por uma abertura triangular equilátera e uma abertura quadrada. No entanto, simetria circular é um caso particular da simetria elíptica, em que o padrão de difração de tal simetria elíptica ainda não havia sido explorado. Deste modo, neste trabalho realizamos uma análise dos padrões de difração de três feixes com simetria elíptica: feixes Mathieu, feixes Ince-Gaussianos e os feixes Hermite-Gaussianos com vórtices.

Como tais feixes possuem uma inerente simetria elíptica, para obter um padrão de difração dos feixes através de uma abertura triangular com uma formação nítida de máximos, ela terá que moldar-se ao perfil transversal do feixe. Dessa forma, será utilizada uma abertura triangular isósceles.

**Figura 4.1 - Perfil de intensidade de um feixe Mathieu de carga topológica  $l = 3$  e  $q = 1$  incidindo em uma abertura triangular isósceles.**



Fonte: Autor, 2017.

Ainda não existe solução analítica para o padrão de difração de um feixe de simetria elíptica por aberturas triangulares isósceles, dessa forma, utilizaremos uma solução numérica para encontrar tal padrão de difração.

Primeiramente serão encontrados padrões de difração dos feixes Mathieu, onde utilizando a equação (3.8) no espaço das frequências, tomando  $k_x = \frac{kx}{z}$  e  $k_y = \frac{ky}{z}$ , onde  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  é o número de onda e fazendo as substituições de  $\xi = x_0$  e  $\eta = y_0$ , tem-se:

$$U(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x_0, y_0, z_0 = 0) T(x_0, y_0) \exp[-i(k_x x_0 + k_y y_0)] dx_0 dy_0. \quad (4.1)$$

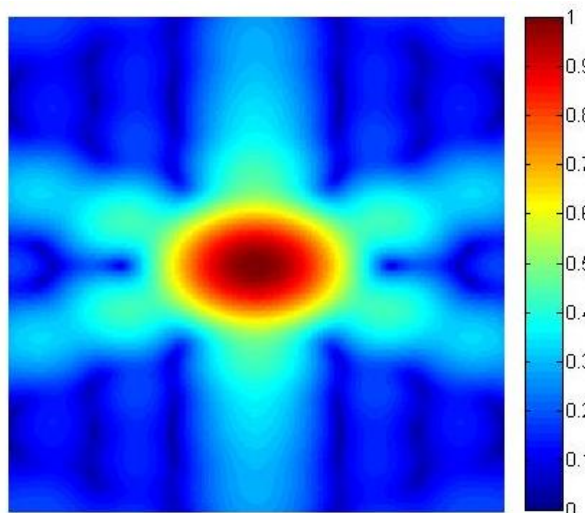
Desconsideramos o termo fase da equação (3.8), pois estamos interessados somente no perfil de intensidade. O termo  $U(x_0, y_0, z_0 = 0)$  é a função que representa o feixe incidente, que para um feixe Mathieu de alta ordem, ou seja  $l > 0$ , é dada por:

$$u(\zeta, \eta, z = 0; q) = [A_l(q)R_{e_l}(\zeta; q)ce_l(\eta; q) + iB_l(q)S_{e_l}(\zeta; q)se_l(\eta; q)], \quad (4.2)$$

$T(x_0, y_0)$  é a função de transmitância que representa a abertura triangular isósceles e o termo  $\exp[-i(k_x x_0 + k_y y_0)]$  é o núcleo da transformada de Fourier.

Fazendo a equação (4.1) nota-se que para um feixe Mathieu de ordem zero, as caudas de intensidade dos raios luminosos resultantes da difração sugerem como os máximos irão se interferir quando a integral for realizada para altas ordens.

**Figura 4.2 - Padrão de difração de um feixe Mathieu  $l = 0$  e  $q = 3$ .**

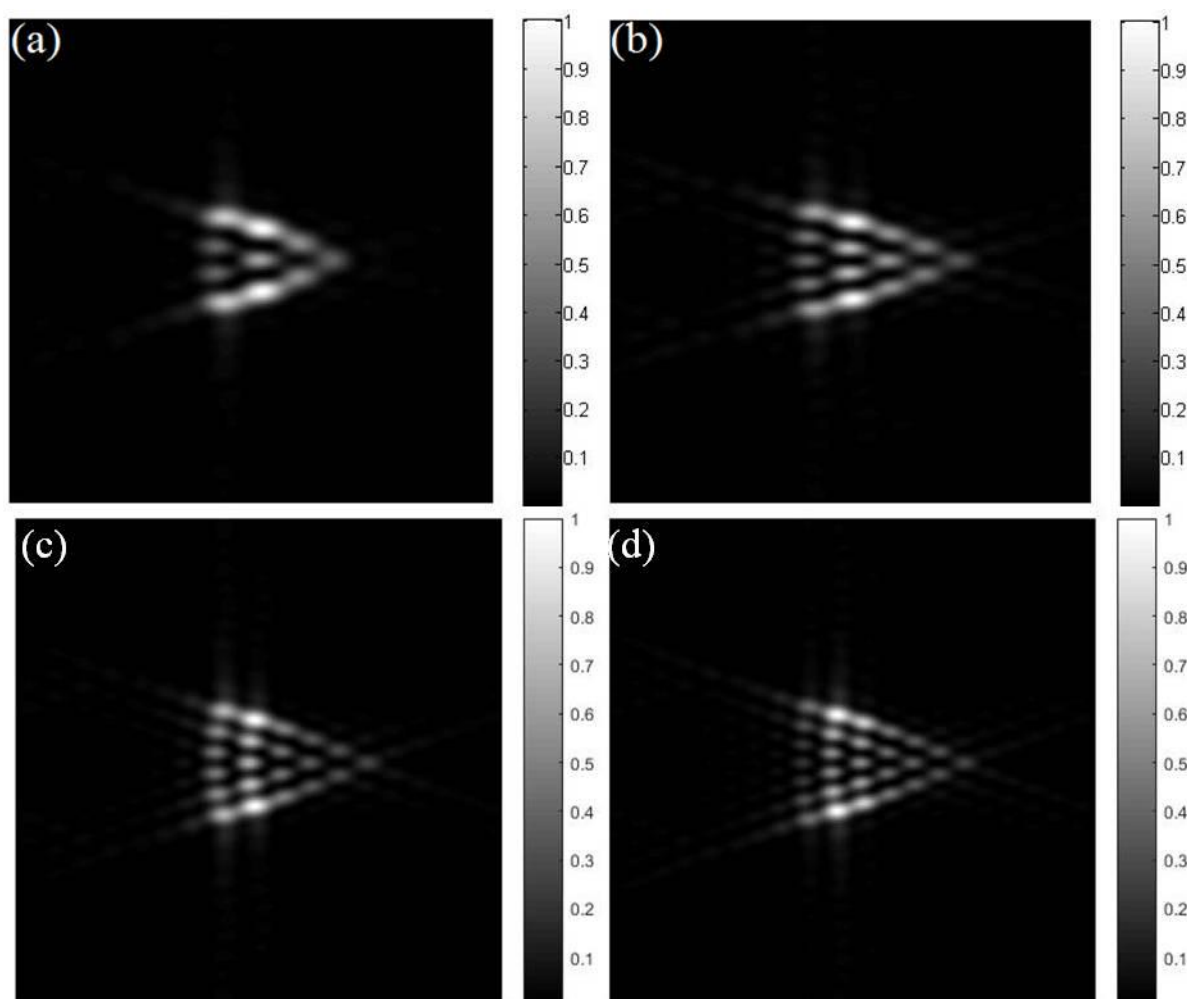


Fonte: Autor, 2017.



Abaixo veremos alguns padrões de difração de Fraunhofer para feixes Mathieu para diferentes valores de carga topológica e parâmetro  $q$ . Observamos a formação de padrões similares aos observados para Laguerre-Gauss e abertura triangular equilátera.

**Figura 4.3 - Padrões de difração numéricos de feixes Mathieu para as ordens: (a)  $l = 3$  e  $q = 2$ , (b)  $l = 4$  e  $q = 3$ , (c)  $l = 5$  e  $q = 5$ , (d)  $l = 6$  e  $q = 7,5$ .**

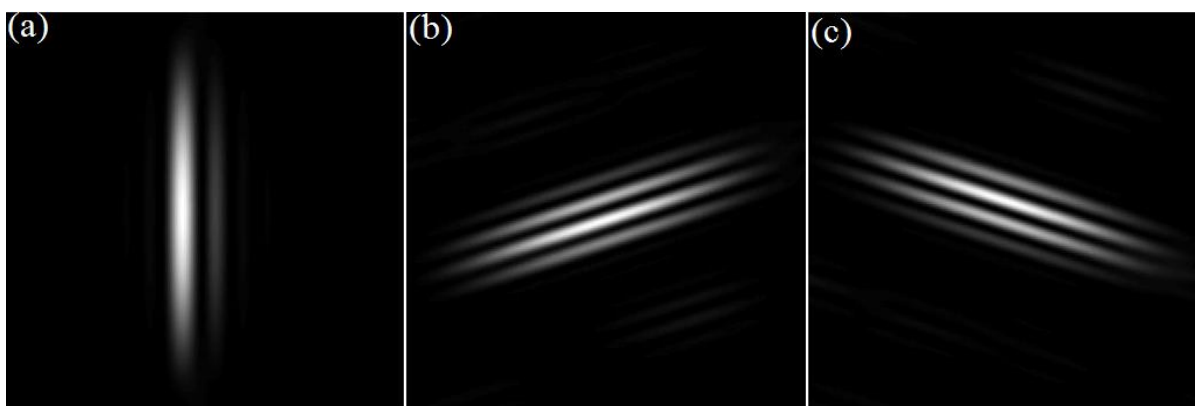


Fonte: Autor, 2017.

A partir desses resultados numéricos existem certos aspectos desse padrão que devem ser comentados. Com o aumento da carga topológica o padrão de difração também aumenta de tamanho dispersando mais a intensidade por toda a rede. O padrão de difração desses feixes não tem todos os máximos exatamente iguais. Para entender melhor este ponto, relembramos a ideia de que o padrão final pode ser tratado como a interferência das contribuições de cada lado do triângulo

tomando-os como fendas infinitesimais. No caso de um feixe elíptico e de uma abertura triangular isósceles, a intersecção dos máximos de intensidade na zona de Fraunhofer, não acontece de forma homogênea, diferentemente do feixe de simetria circular com a fenda triangular equilátera<sup>32</sup>.

**Figura 4.4 - Padrões de difração de um feixe Mathieu  $l = 3$  e  $q = 1$  por fendas simples dispostas na forma triangular isósceles: (a) fenda da base, (b) fenda lateral direita e (c) fenda lateral esquerda.**

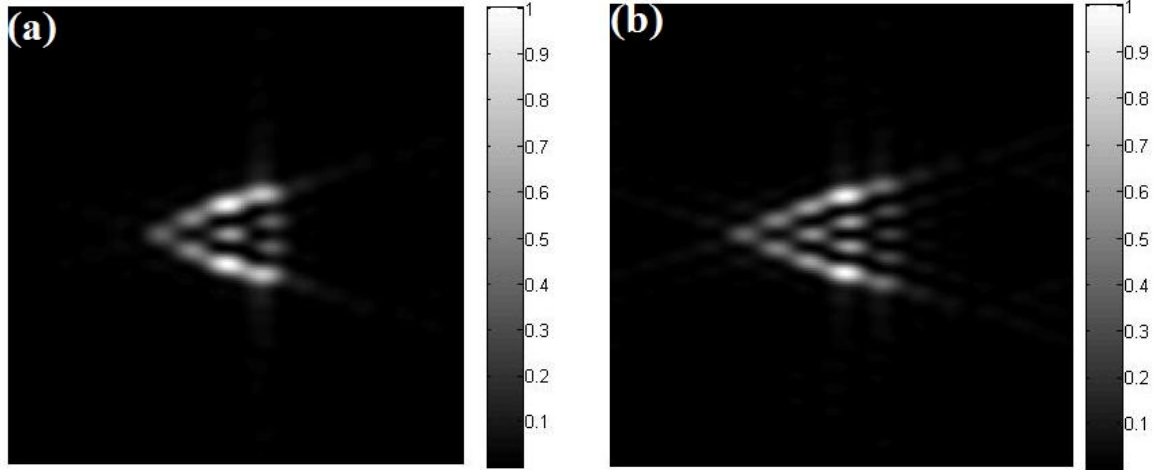


Fonte: Autor, 2017.

Nota-se que os padrões de difração por fendas infinitesimais obedecem claramente ao teorema do deslocamento. Em que o padrão de difração para o feixe Mathieu tem uma rotação de  $90^\circ$  no sentido horário em relação a abertura mostrada na figura (4.1).

Tomando o sinal que une as funções pares e ímpares da equação (4.2) negativo para os feixes Mathieu, acarreta uma distribuição de fase no plano de Fourier no sentido inverso, girando em  $180^\circ$  o padrão de difração.

**Figura 4.5 - Resultados numéricos para os padrões de difração de feixes Mathieu para as ordens: (a)  $l = 3$  e  $q = 2$ , (b)  $l = 4$  e  $q = 3$ , com o sinal negativo entre as funções pares e ímpares da equação (4.2).**



Fonte: Autor, 2017.

O valor da carga topológica é obtido subtraindo-se uma unidade do número de máximos existentes na borda do padrão de difração, obedecendo a relação  $l = N - 1$ , onde  $N$  é o número de máximos existente na borda da rede triangular. Este método tem uma limitação tanto em valores de carga, onde a rede não é bem definida para valores de  $l > 10$ , tanto quando a relação entre a carga topológica e o parâmetro de elipsidade  $q$  quando o valor de  $q > \frac{l^2}{4} - \frac{3}{4}l + 3$ , no qual o padrão de difração deixa de ter um crescimento quase-linear em suas bordas.

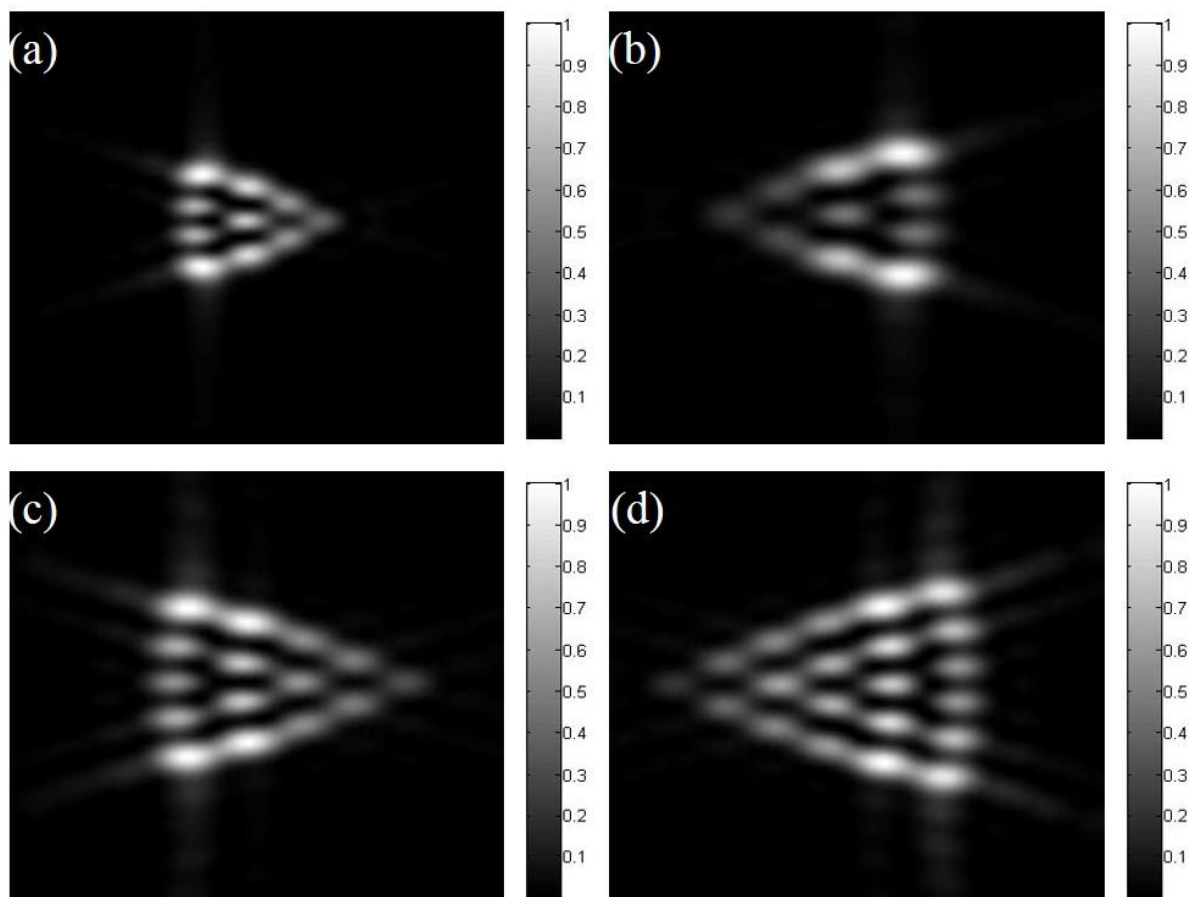
Utilizando a fenda triangular isósceles para os feixes Ince-Gaussianos, os quais em  $z = 0$ , se tem sua equação escrita como:

$$IG_{p,l}(\vec{r}) = HC_p^l(i\zeta, \tau) C_p^l(\eta, \tau) \exp\left[\frac{-r^2}{w_0^2}\right] + iJS_p^l(i\zeta, \tau) S_p^l(\eta, \tau) \exp\left[\frac{-r^2}{w_0^2}\right], \quad (4.3)$$

um aspecto desse feixe que é distinto aos demais que possuem momento angular orbital é uma mudança do sinal da carga topológica que não obedece nenhuma relação bem definida. Com a mudança dos índices  $l$  e  $p$  responsáveis pelo acréscimo no números de anéis, a combinação dos modos pares e ímpares mudam, fazendo com que haja uma rotação de  $180^\circ$  no padrão de difração aleatoriamente. Logo, a técnica do padrão de difração por uma fenda triangular identifica o valor da carga topológica mesmo com essa variação aleatória da mesma.

Na figura (4.6) são mostrados alguns padrões de difração teóricos com os valores de elipsidade  $\tau = 1$  e  $w_0 \approx 0,85$ .

**Figura 4.6 - Padrões de difração de feixes Ince-Gaussianos para as ordens: (a)  $l = 3$  e  $p = 3$ , (b)  $l = 3$  e  $p = 5$ , (c)  $l = 4$  e  $p = 6$ , (d)  $l = 5$  e  $p = 9$ .**



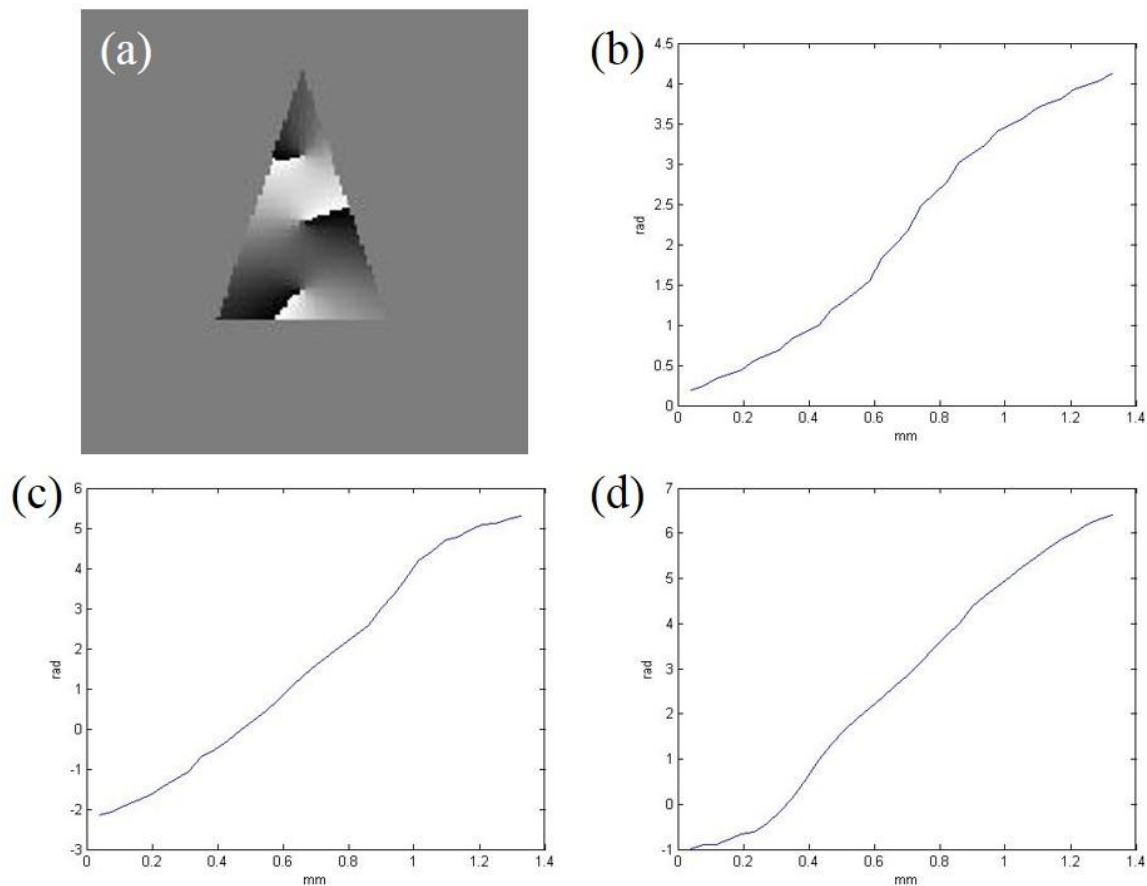
Fonte: Autor, 2017.

Utilizando a mesma abordagem introduzida nos feixes Mathieu, sabe-se que quando há uma mudança no sinal que une os modos pares e ímpares da equação (4.3) há uma mudança na fase, dessa forma haverá também uma rotação de  $180^\circ$  em relação à posição do padrão de difração.

Uma importante informação para justificar a formação do padrão de difração nos feixes Ince-Gaussianos é que com o aumento do valor da carga topológica há aumento do deslocamento da difração através de cada borda em relação ao centro<sup>29</sup>. Uma característica importante é que a fase também tem uma variação quase-linear nas bordas do triângulo<sup>19</sup>, que caracteriza a boa formação do padrão de difração mesmo com o aumento da carga topológica. Esse argumento também

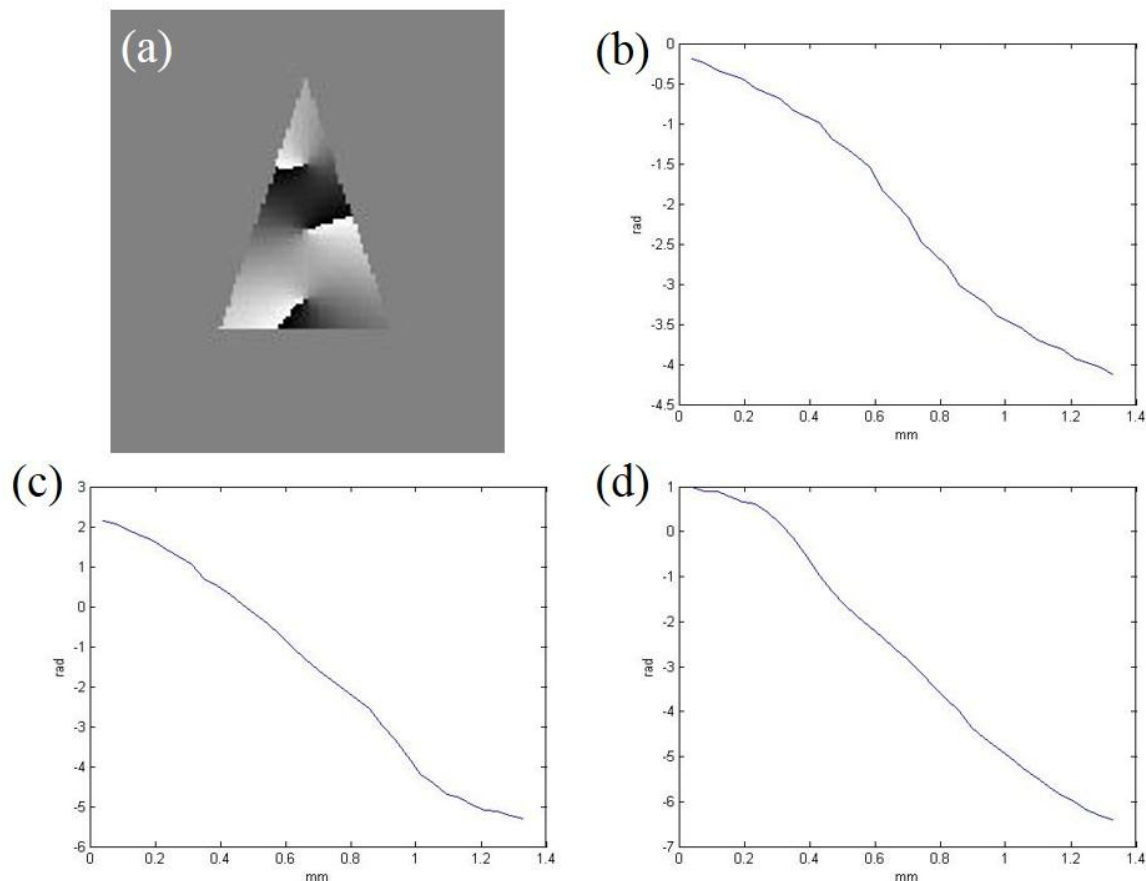
justifica a má formação quando o valor de  $l > 10$ , pois não há uma variação linear da fase nas bordas.

**Figura 4.7 - Figura da fase de um feixe Ince-Gaussiano  $l = 3$  e  $p = 3$  na abertura (a), e sua linearidade na borda triangular (b) inferior, (c) lateral esquerda e (d) lateral direita.**



Fonte: Autor, 2017.

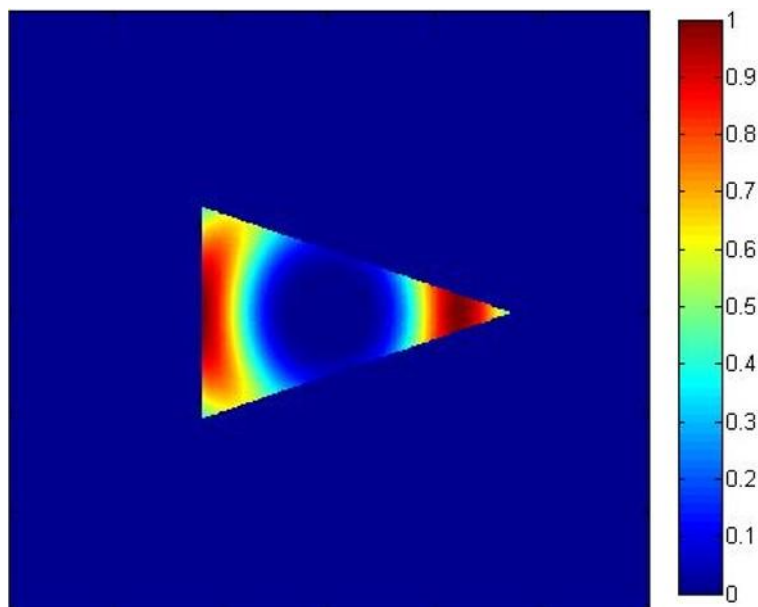
Figura 4.8 - Figura da fase de um feixe Ince-Gaussiano com sinal negativo na parte imaginária de sua equação  $l = 3$  e  $p = 3$  na abertura triangular (a), e sua linearidade na borda (b) inferior, (c) lateral esquerda e (d) lateral direita.



Fonte: Autor, 2017.

Utilizando outra família de feixes que possui simetria elíptica e momento angular orbital, denominados Hermite-Gaussianos com vórtices, calculamos novamente o padrão de difração na zona de Fraunhofer, porém com uma modificação no parâmetro  $a$ . Utilizamos  $|a| < 1$ , ou seja, o semieixo maior do feixe será na posição horizontal. É interessante ressaltar que para  $|a| > 1$  o semieixo maior do feixe será na posição vertical.

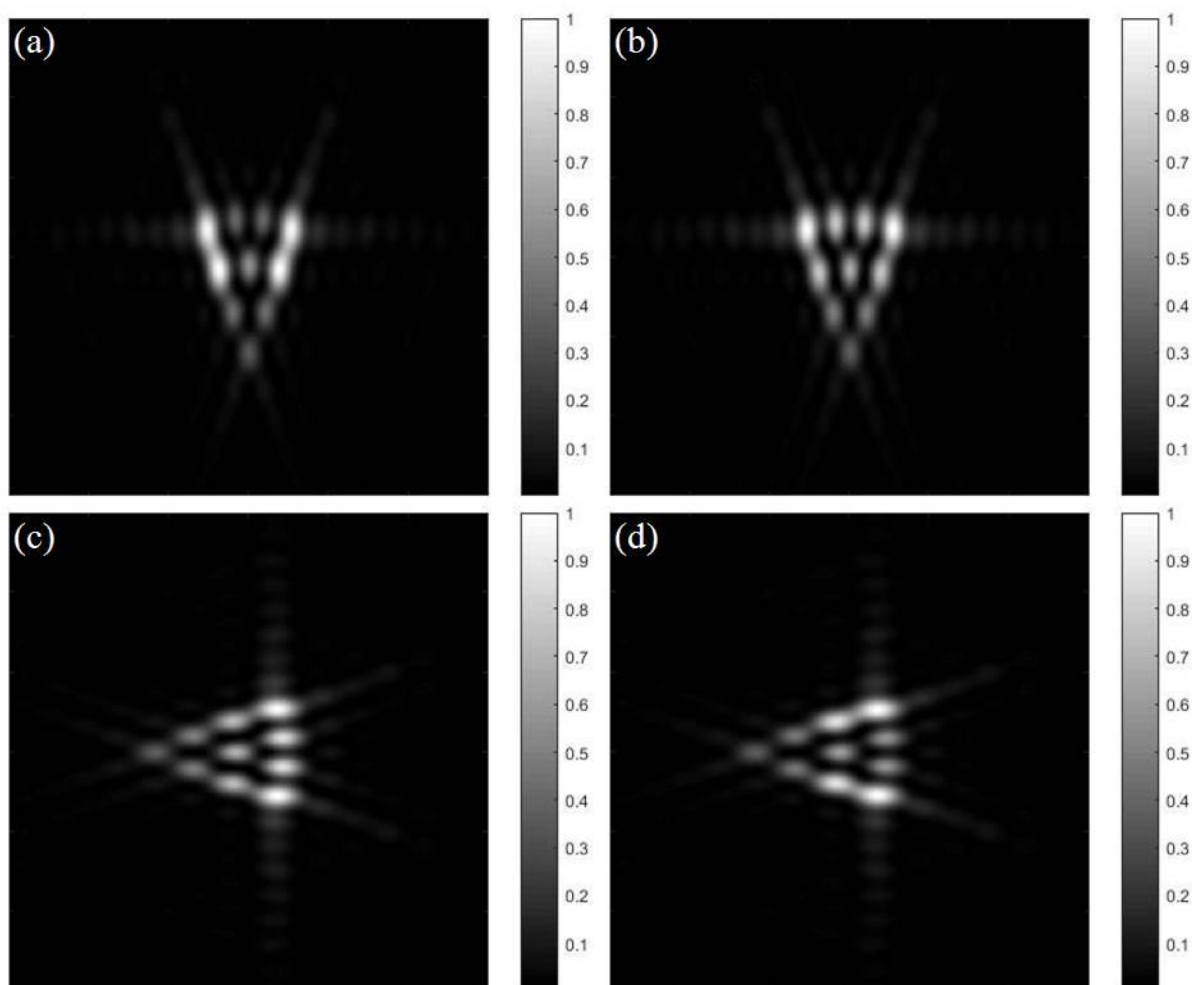
**Figura 4.9 - Posição da abertura em relação ao feixe Hermite-Gaussiano com vórtices no caso  $|a| < 1$ , para o valor de  $l = 3$  e  $a = 0,85$ .**



Fonte: Autor, 2017.

A figura (4.10) mostra diferentes padrões de difração para os vórtices Hermite-Gaussianos para  $l=3$  e diferentes valores de  $a$ . Nota-se que o padrão horizontal tem sentido inverso ao padrão obtido nos feixes Mathieu. Isso ocorre devido o sinal da carga topológica para o valor de  $a > 0$  no feixe Hermite-Gaussiano com vórtices corresponder a cargas topológicas com valores negativos. Um detalhe importante observado é que houve boa formação dos padrões de difração quando o valor de  $a$  varia de  $0,75 \leq a \leq 1,25$ , pelo fato de que nesse intervalo há uma variação quase-linear da fase nas bordas do triângulo.

Figura 4.10 - Resultados numéricos para o padrão de difração dos feixes vórtices Hermite-Gaussianos para  $l = 3$ : (a)  $a = 0,75$ , (b)  $a = 0,85$ , (c)  $a = 1,15$  e (d)  $a = 1,25$ .



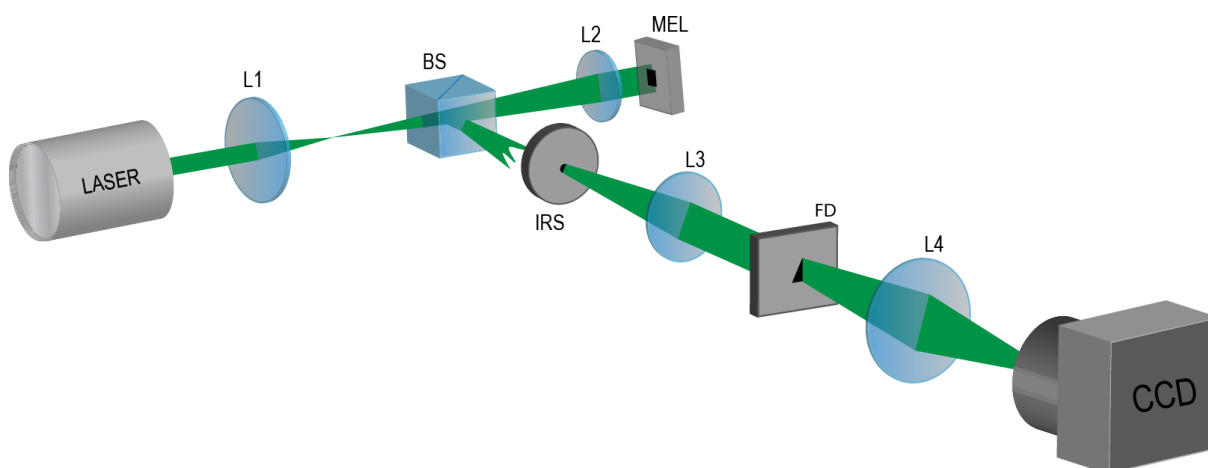
Fonte: Autor, 2017.

## 4.2 Resultados experimentais

Nesta seção do trabalho serão mostrados os resultados experimentais das simulações numéricas mostradas na seção anterior deste trabalho. A seguir será exibido o setup experimental utilizado para obter tais resultados.



**Figura 4.11 - Setup experimental:  $L_1, L_2, L_3, L_4$  : Lentes;  $BS$  :Beam Splitter (Divisor de feixes);  $IRS$  :Íris ;  $FD$  :Fenda ;  $MEL$  :Modulador Espacial de Luz;  $CCD$  :Câmera.**



Fonte: Autor, 2017.

Inicialmente um laser Argônio com comprimento de onda de 514nm e potência de 10mW, incide em um conjunto de lentes, onde a primeira tem distância focal  $L1=30mm$  e a segunda tem distância focal  $L2=500mm$ . Essas lentes são responsáveis pelo aumento da secção transversal do laser. Entre tais lentes existe um divisor de feixes ( $BS$ ) onde 50% da luz é refletida que é bloqueada e os outros 50% passa pelo divisor preenchendo devidamente a área de atuação do modulador espacial de luz ( $MEL$ ), Hamamatsu modelo X10468-01 [25]. Na holografia<sup>23</sup> de intensidade convencional é realizada uma gravação da interferência entre uma onda plana e um feixe desejado tendo como resultado um holograma. Incidindo uma onda plana no holograma obtém-se o feixe desejado. Diferentemente, o  $MEL$  faz um processo onde a geração do holograma é computadorizada, realizando uma modulação espacial da fase do feixe. Além disso, o  $MEL$  pode controlar amplitude e fase, ou também os estados de polarização da luz<sup>33</sup>. A luz atinge o  $MEL$  em uma camada de vidro passando por uma camada de eletrodos transparentes. A partir daí chega a uma fina camada de cristal líquido que são controlados pela tensão precisa de cada pixel eletrodo que formam uma camada, chamada e matriz ativa, junto a um espelho após o cristal líquido. O campo elétrico da camada de cristal líquido é controlado pelos potenciais elétricos contidos em cada pixel eletrodo. Inicialmente os cristais estão paralelos a camada de pixels eletrodos, porém quando os eletrodos são submetidos a uma diferença de potencial os cristais se inclinam conforme a

variação do campo elétrico fazendo assim com que a fase da luz seja alterada. Como a alteração é realizada em pontos específicos, a diferença nos índices de refração no cristal líquido ocorre em diferentes ângulos de inclinação, gerando assim uma diferença no percurso óptico da luz provocando uma diferença de fase na luz refletida. Na figura (4.12) será exibida esquematicamente uma ilustração do *MEL*.

A técnica utilizada para a construção de holograma utilizada neste trabalho é descrita por Victor Arrizón<sup>34</sup>, ele expressa a amplitude e fase do campo complexo da seguinte forma:

$$s(x, y) = A(x, y) \exp[i\phi(x, y)], \quad (4.4)$$

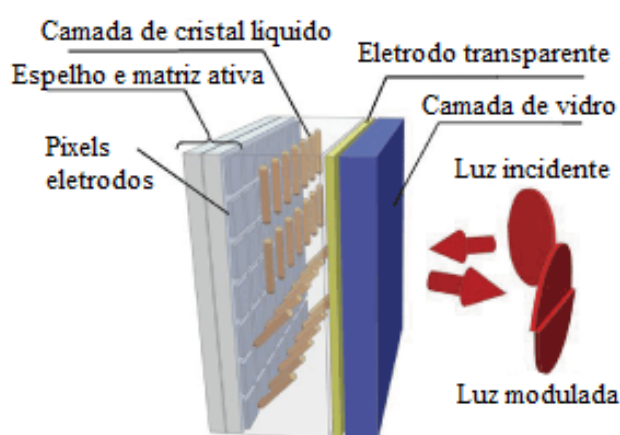
onde  $A(x, y)$  é a amplitude variando de  $[0,1]$  e  $\phi(x, y)$  é a fase variando de  $[-\pi, \pi]$ . A transmitância de fase do holograma gerado por computador, é expressa em função da amplitude e da fase do campo codificado é dado por:

$$h(x, y) = \exp[(\psi(A(x, y), \phi(x, y)))] , \quad (4.5)$$

onde  $\psi(A(x, y), \phi(x, y))$  é a modulação de fase do holograma gerado por computador. Arrizón<sup>34</sup> propõe três tipos de hologramas, mas por melhor adaptação ao trabalho foi utilizado o holograma do tipo 3. Onde foi considerada a seguinte modulação de fase:

$$\psi(a, \phi) = f(a) \sin(\phi) . \quad (4.6)$$

**Figura 4.12: Ilustração do MEL.**



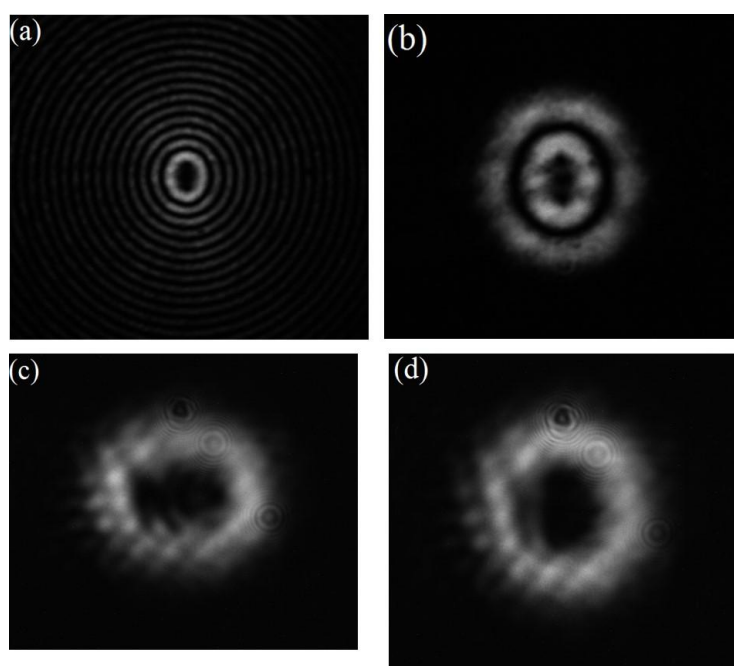
Fonte: Hamamatsu, 2014.

Incidindo o feixe na superfície do *MEL*, agora codificada, seleciona-se a primeira ordem de difração<sup>34</sup> utilizando uma íris (*IRS*) no foco da lente  $L2$ , ou seja no plano de Fourier; logo após existe uma lente  $L3 = 300mm$  confocal a *IRS*, dessa

forma o feixe selecionado da primeira ordem de difração do feixe é colimado por  $L3$ . Posteriormente existe uma fenda triangular isósceles ( $FD$ ) de aproximadamente 1,25mm de base e lados 1,75mm, a fenda foi acoplada em um translador, pois com a mudança de hologramas, o ajuste para que os máximos de intensidade fossem capturados com maior homogeneidade possível, era feito ajustando a posição da fenda em relação ao feixe. Um detalhe importante de ser salientado é que ao gerar os hologramas de feixes com diferentes cargas topológicas, o tamanho do feixe era modificado para que ele permanecesse aproximadamente igual, sempre se ajustando assim ao tamanho da fenda. Sendo o padrão de difração do feixe incidente capturado na lente  $L4=200mm$ , que está a uma posição de  $200mm$  de  $FD$ .  $L4$  fará a transformada de Fourier do feixe difratado, ou seja, obterá o padrão de difração em um campo distante no ponto focal da lente. Tal padrão é capturado por uma câmera CCD de 16 bits.

Os padrões de intensidade dos feixes são obtidos quando após sair da  $IRS$  a lente  $L3$  colima e em seguida imagem é capturada pela CCD. Algumas imagens dos feixes são mostradas abaixo.

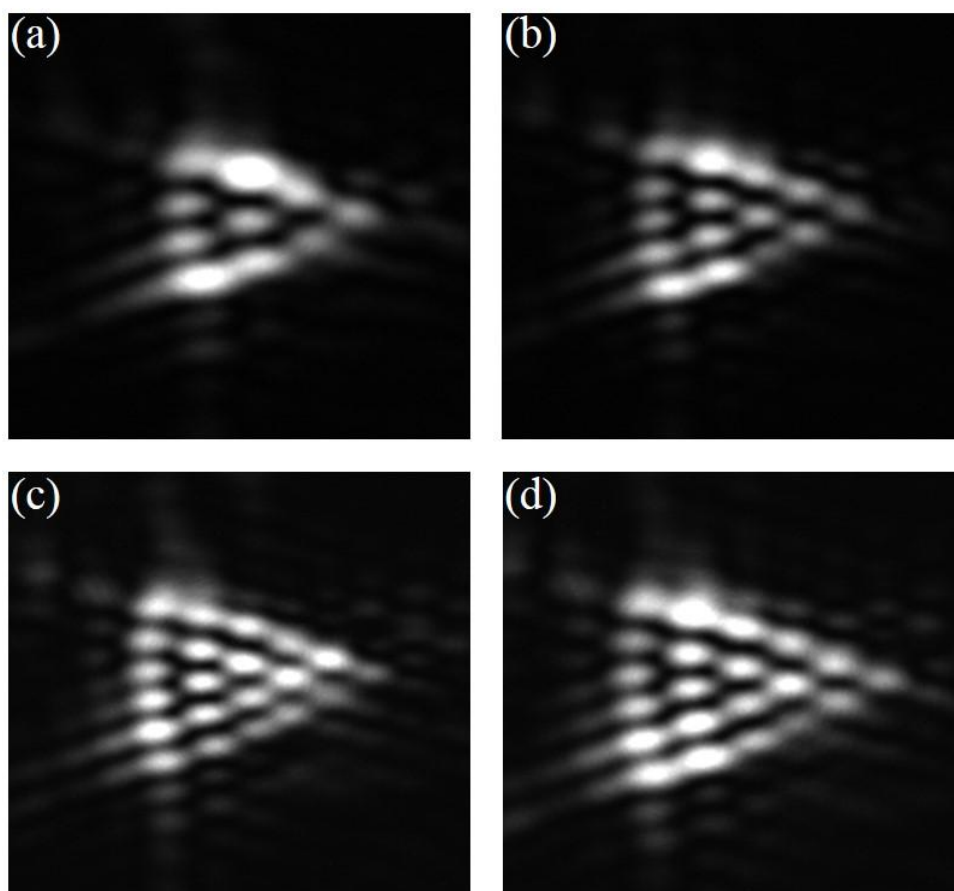
**Figura 4.13 - Perfis de Intensidade para feixes: (a) Mathieu  $l=4$  e  $q=3$ ; (b) Ince-Gaussiano  $l=3$  e  $p=5$ ; Hermite-Gaussiano com vórtices  $l=3$  (c)  $a=0,75$  e (d)  $a=1,15$ .**



Fonte: Autor, 2017.

Os padrões de difração para os feixes Mathieu obtidos experimentalmente são exibidos na figura (4.14). Observa-se que os padrões de difração obtidos experimentalmente concordam com os padrões teóricos discutidos na seção anterior, tanto com relação a mudança da carga topológica como em relação a mudança do parâmetro de elipsidade  $q$ . Isso se deve também a uma concordância entre os valores de  $l$  e  $q$ , onde os valores de  $l$  obedecem a  $l \leq 10$ . Pois, para  $l > 10$ , a visualização da contagem dos máximos para encontrar o valor da carga topológica dado por  $l = N - 1$  fica comprometida, como também os valores de  $q$  não excederam o limite  $q > \frac{l^2}{4} - \frac{3}{4}l + 3$  com relação à  $l$  previsto no modelo teórico.

**Figura 4.14 - Padrões de difração experimentais de feixes Mathieu para as ordens: (a)  $l = 3$  e  $q = 2$ , (b)  $l = 4$  e  $q = 3$ , (c)  $l = 5$  e  $q = 2$ , (d)  $l = 5$  e  $q = 4$ .**

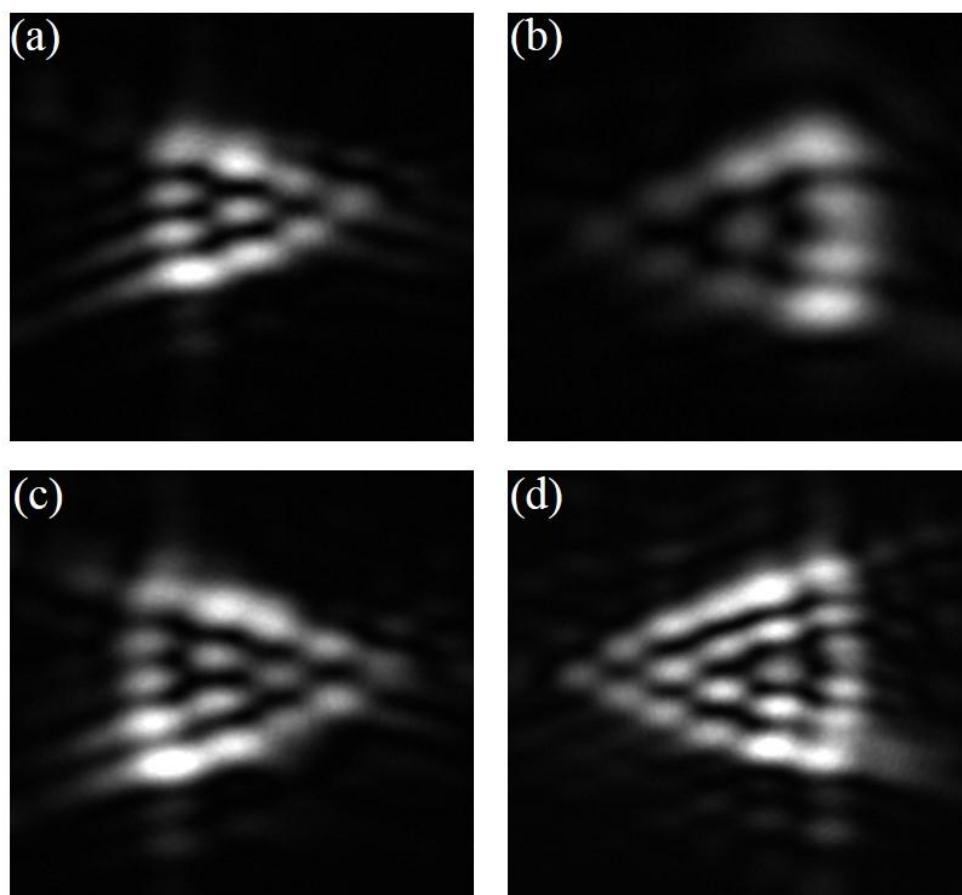


Fonte: Autor, 2017.

Nos feixes Ince-Gaussianos também houve concordância dos resultados obtidos pelas simulações numéricas com os resultados experimentais. Mesmo com o

fato de não ter um padrão bem definido para a mudança de fase nessa família de feixes. A técnica do padrão de difração por uma fenda triangular isósceles permite a identificação da mudança de fase do feixe com a variação dos valores do módulo da carga topológica e o índice  $p$ .

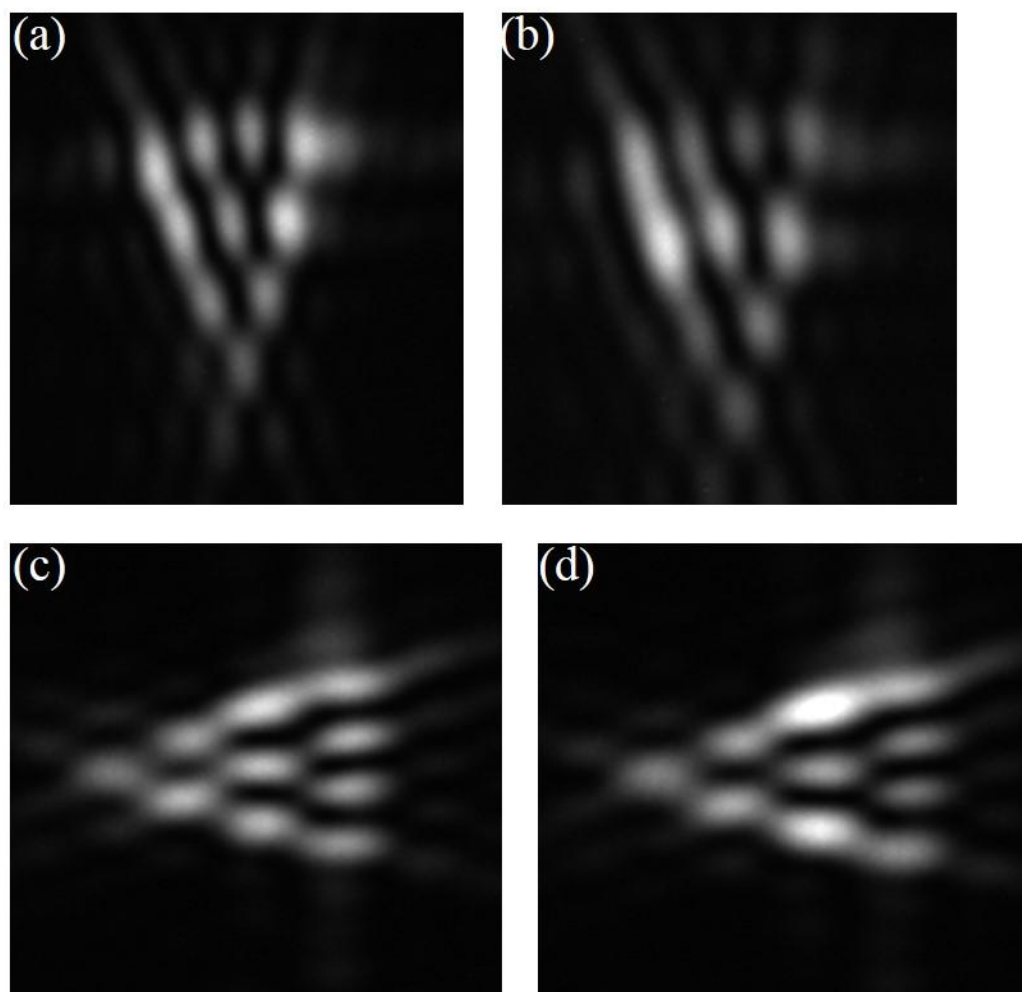
**Figura 4.15 - Padrões de difração experimentais de feixes Ince-Gaussianos para as ordens: (a)  $l=3$  e  $p=3$ , (b)  $l=3$  e  $p=5$ , (c)  $l=4$  e  $p=6$ , (d)  $l=5$  e  $p=9$ .**



Fonte: Autor, 2017.

Os feixes Hermite-Gaussianos com vórtices, assim como os feixes antecessores concordaram com o modelo teórico, ou seja, o intervalo do valor de  $0,75 \leq a \leq 1,25$ , pois fora desse intervalo não há uma interferência entre os máximos significativa para formar um padrão de difração bem definido.

Figura 4.16 - Padrão de difração experimental dos vórtices Hermite-Gaussianos para  $l = 3$ : (a)  $a = 0.75$ , (b)  $a = 0.85$ , (c)  $a = 1.15$  e (d)  $a = 1.25$ .



Fonte: Autor, 2017.

## 5 CONCLUSÕES

Neste trabalho, no capítulo 2, foi dado um enfoque maior nos feixes de simetria elíptica que são elementos chaves para a realização dessa dissertação. Partindo pela ordem cronológica, os feixes Mathieu foram os primeiros, visto que os Feixes Bessel um caso particular dos Feixes Mathieu, foi abordado tanto suas semelhanças, como o fato de ser não difratante e possuir carga topológica, como suas peculiaridades, por exemplo, ter as singularidades deslocadas ao longo do eixo maior do feixe quando  $q > 0$  e possuir momento angular orbital diferente de  $l\hbar$ .

Por conseguinte, vieram os feixes Ince-Gaussianos, que carrega várias características com feixes que são modulados por uma Gaussiana. Nesses feixes foram exibidos como as combinações de elementos pares e ímpares formam um feixe de frente helicoidal, sem a necessidade de da fase azimutal  $\exp(-il\varphi)$  e como a carga topológica e o parâmetro  $p$  influenciam na formação de tal feixe.

Por último, foi abordado sobre os feixes Hermite-Gaussianos com vórtices, esses feixes diferentemente dos anteriores, não decorre diretamente da solução da equação de Helmholtz, mas sim de uma superposição de vários feixes Hermite-Gauss de amplitude complexa, tendo um parâmetro principal  $a$  responsável por sua formação transversal.

No capítulo 3 foram citados alguns trabalhos relevantes envolvendo difração de feixes possuindo momento angular orbital. O primeiro foi um feixe Laguerre-Gauss incidindo em uma fenda simples, percebeu-se a carga topológica e o deslocamento da fenda em relação ao centro geométrico do feixe são fatores que influenciam na formação do padrão na zona de Fraunhofer. Também foi mencionada a utilização de uma abertura quadrática que devidamente ajusta ao perfil transversal do feixe, proporcionou uma formação de uma malha quadrática, que facilitava a obtenção de valores de carga topológica pares. O trabalho mais influente para esta dissertação, foi a utilização de uma abertura triangular, pois além de detectar os valores de carga topológica, fazendo a contagem do número de máximos e subtraindo uma unidade, também identifica o sinal da carga. Por fim, foi visto um comparativo entre as técnicas triangular e retangular, percebendo que para valores de carga topológica  $10 < l \leq 20$  a abertura triangular identificava o sinal e a abertura retangular tinha melhor formação de máximos.

No capítulo 4, utilizou-se uma abertura triangular isósceles para determinar o valor da carga topológica de feixes elípticos. Iniciou-se tal procedimento utilizando um feixe de ordem zero, observando a qual direção as caudas luminosas seguiriam para se ter uma noção de como seria o deslocamento perpendicular da mesma com o aumento da carga topológica. Uma característica, já conhecida antes, dos três feixes foi que a formação da rede faz um ângulo de  $90^\circ$  em relação à posição da fenda devido à intersecção dos máximos deslocados quando há aumento no valor da carga topológica, porém essa formação da rede não é tão uniforme quanto nos feixes de simetria circular devido às contribuições da difração não ser igual geradas pelos três lados do triângulo. Percebe-se que para os feixes de simetria elíptica existe um limite não só do valor da carga topológica para a formação do padrão, mas também limites associados ao aumento da elipsidade nos feixes. Outro elemento característico de feixes de simetria elíptica é que no caso dos feixes Mathieu e Ince-Gaussianos há uma mudança no sinal da carga topológica quando é alterado o sinal do número complexo, fazendo com que o padrão de difração rotacione  $180^\circ$ , que no caso dos feixes Ince-Gaussianos eles não variam somente com a mudança de sinal do número complexo, mas também com as mudanças dos índices  $l$  e  $p$ . No caso dos feixes Hermite-Gaussianos com vórtices essa variação também está presente quando há mudança no sinal do parâmetro  $a$ . E por fim, foi obtida uma boa concordância entre os modelos experimentais e teóricos mostrando que a o padrão de difração de um feixe elíptico por uma abertura triangular isósceles determina o sinal e o módulo da carga topológica para feixes de simetria elíptica de forma objetiva e simples.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 JACKSON, J. D. Classical Electrodynamics. 1999.
- 2 POYNTING, J. The wave motion of a revolving shaft, and a suggestion as to the angular momentum in a beam of circularly polarised light. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character**, v. 82, n. 557, p. 560-567, 1909. ISSN 0950-1207.
- 3 ALLEN, L. et al. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. **Physical Review A**, v. 45, n. 11, p. 8185, 1992.
- 4 MOLINA-TERRIZA, G.; TORRES, J. P.; TORNER, L. Twisted photons. **Nature Physics**, v. 3, n. 5, p. 305-310, 2007. ISSN 1745-2473.
- 5 HE, H. et al. Direct observation of transfer of angular momentum to absorptive particles from a laser beam with a phase singularity. **Physical Review Letters**, v. 75, n. 5, p. 826, 1995.
- 6 SOSKIN, M. et al. Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortices. **Physical Review A**, v. 56, n. 5, p. 4064, 1997.
- 7 ABRAMOCHKIN, E.; VOLOSTNIKOV, V. Beam transformations and nontransformed beams. **Optics Communications**, v. 83, n. 1-2, p. 123-135, 1991. ISSN 0030-4018.
- 8 DURNIN, J. Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory. **JOSA A**, v. 4, n. 4, p. 651-654, 1987. ISSN 1520-8532.
- 9 VOLKE-SEPULVEDA, K. et al. Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam. **Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics**, v. 4, n. 2, p. S82, 2002. ISSN 1464-4266.
- 10 ARLT, J. et al. Optical micromanipulation using a Bessel light beam. **Optics Communications**, v. 197, n. 4, p. 239-245, 2001. ISSN 0030-4018.
- 11 GUTIÉRREZ-VEGA, J. C.; ITURBE-CASTILLO, M.; CHÁVEZ-CERDA, S. Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams. **Optics letters**, v. 25, n. 20, p. 1493-1495, 2000. ISSN 1539-4794.

- <sup>12</sup> GUTIÉRREZ-VEGA, J. et al. Experimental demonstration of optical Mathieu beams. **Optics Communications**, v. 195, n. 1, p. 35-40, 2001. ISSN 0030-4018.
- <sup>13</sup> CHÁVEZ-CERDA, S.; GUTIÉRREZ-VEGA, J.; NEW, G. Elliptic vortices of electromagnetic wave fields. **Optics Letters**, v. 26, n. 22, p. 1803-1805, 2001. ISSN 1539-4794.
- <sup>14</sup> CHÁVEZ-CERDA, S. et al. Holographic generation and orbital angular momentum of high-order Mathieu beams. **Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics**, v. 4, n. 2, p. S52, 2002. ISSN 1464-4266.
- <sup>15</sup> BANDRES, M. A.; GUTIÉRREZ-VEGA, J. C. Ince–Gaussian beams. **Optics letters**, v. 29, n. 2, p. 144-146, 2004. ISSN 1539-4794.
- <sup>16</sup> \_\_\_\_\_. Ince–Gaussian modes of the paraxial wave equation and stable resonators. **JOSA A**, v. 21, n. 5, p. 873-880, 2004. ISSN 1520-8532.
- <sup>17</sup> KOTLYAR, V.; KOVALEV, A.; PORFIREV, A. Vortex Hermite–Gaussian laser beams. **Optics letters**, v. 40, n. 5, p. 701-704, 2015. ISSN 1539-4794.
- <sup>18</sup> SZTUL, H.; ALFANO, R. Double-slit interference with Laguerre-Gaussian beams. **Optics letters**, v. 31, n. 7, p. 999-1001, 2006. ISSN 1539-4794.
- <sup>19</sup> FERREIRA, Q. S. et al. Fraunhofer diffraction of light with orbital angular momentum by a slit. **Optics letters**, v. 36, n. 16, p. 3106-3108, 2011. ISSN 1539-4794.
- <sup>20</sup> MESQUITA, P. H. et al. Engineering a square truncated lattice with light's orbital angular momentum. **Optics express**, v. 19, n. 21, p. 20616-20621, 2011. ISSN 1094-4087.
- <sup>21</sup> HICKMANN, J. et al. Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using light's orbital angular momentum. **Physical review letters**, v. 105, n. 5, p. 053904, 2010.
- <sup>22</sup> SILVA, J. G. et al. Unveiling square and triangular optical lattices: a comparative study. **Optics letters**, v. 39, n. 4, p. 949-952, 2014. ISSN 1539-4794.
- <sup>23</sup> SALEH, B. E.; TEICH, M. C. Fundamentals of photonics. 2007. **Wiley Series in Pure and Applied Optics, Wiley**, v. 10, p. 0471213748,

- 24 PADGETT, M.; COURTIAL, J.; ALLEN, L. Light's orbital angular momentum. **Physics Today**, v. 57, n. 5, p. 35-40, 2004. ISSN 0031-9228.
- 25 STRATTON, J. A. **Electromagnetic theory**. John Wiley & Sons, 2007. ISBN 0470131535.
- 26 GRADSHTEYN, I. S. & RYZHIK, IM 1980 Table of Integrals, Series, and Products. **Academic**, v. 161, n. 173, p. 1972-1979,
- 27 KOTLYAR, V.; KOVALEV, A. Hermite–Gaussian modal laser beams with orbital angular momentum. **JOSA A**, v. 31, n. 2, p. 274-282, 2014. ISSN 1520-8532.
- 28 HECHT, E. Optics, 4th. **International edition**, Addison-Wesley, San Francisco, v. 3, 2002.
- 29 GOODMAN, J. W. **Introduction to Fourier optics**. Roberts and Company Publishers, 2005. ISBN 0974707724.
- 30 FOWLES, G. R. **Introduction to modern optics**. Courier Corporation, 1975. ISBN 0486659577.
- 31 SINHA, U. et al. Ruling out multi-order interference in quantum mechanics. **Science**, v. 329, n. 5990, p. 418-421, 2010. ISSN 0036-8075.
- 32 SILVA., W. C. S. **Geração e Caracterização de Feixes possuindo Momento Angular Orbital**. 2011.
- 33 ERIKSEN, R. L.; MOGENSEN, P. C.; GLÜCKSTAD, J. Elliptical polarisation encoding in two dimensions using phase-only spatial light modulators. **Optics communications**, v. 187, n. 4, p. 325-336, 2001. ISSN 0030-4018.
- 34 ARRIZÓN, V. et al. Pixelated phase computer holograms for the accurate encoding of scalar complex fields. **JOSA A**, v. 24, n. 11, p. 3500-3507, 2007. ISSN 1520-8532.