

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - MESTRADO

LENDEL DOS SANTOS RODRIGUES

Formação de padrão na célula de Hele-Shaw  
girante: um estudo computacional através do  
método de *phase-field*

Maceió - Brasil  
Março - 2018

LENDEL DOS SANTOS RODRIGUES

Formação de padrão na célula de Hele-Shaw  
girante: um estudo computacional através do  
método de *phase-field*

Dissertação apresentada no Instituto de Física da  
Universidade Federal de Alagoas como requisito  
necessário para a obtenção do título de  
Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Sérgio Henrique Albuquerque Lira

Co-orientador:

Prof. Italo Nunes de Oliveira

Maceió - Brasil

Março - 2018

**Catlogação na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale – CRB4 - 661

- R696f Rodrigues, Lendel dos Santos.  
Formação de padrão na célula de Hele - Shaw girante : um estudo computacional através do método de *phase-field* / Lendel dos Santos Rodrigues. – 2018.  
59 f. : il.
- Orientador: Sérgio Henrique Albuquerque Lira.  
Coorientador: Italo Nunes de Oliveira.  
Dissertação (mestrado em Física da Matéria Condensada) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física, Maceió, 2018.
- Bibliografia: f. 55-59.
1. Formação de dedos viscosos. 2. Células de Hele-Shaw. 3. Força centrífuga. 4. Métodos phase-field. I. Título.

CDU: 538.9



**Universidade Federal de Alagoas**

**Instituto de Física**

Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14. Campus A.C. Simões  
Cidade Universitária  
Tabuleiro dos Martins  
57072-970 Maceió - AL, Brasil  
FONE : (82) 3214-1423/FAX 3214-1645

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

***“Formação de padrão na célula de ”Hele-Shaw girante: um estudo computacional através do método de Phase-Field”***

**por**

**Lendel dos Santos Rodrigues**

A Banca Examinadora composta pelos professores Italo Marcos Nunes de Oliveira (coorientador e presidente da banca), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Wandearley da Silva Dias, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas e Lidiane Maria Omena da Silva, do Campus Arapiraca da Universidade Federal de Alagoas consideram o candidato **aprovado com grau “ B ”**.

Maceió, 26 de março de 2018

*Italo Marcos Nunes de Oliveira*  
Prof. Dr. Italo Marcos Nunes de Oliveira

*Wandearley da Silva Dias*  
Prof. Dr. Wandearley da Silva Dias

*Lidiane Maria Omena da Silva*  
Prof. Dr. Lidiane Maria Omena da Silva

À meus pais.

## Agradecimentos

Primeiramente a Deus, porque sem ele não seria nada. Agradeço pela coragem e força que ele depositou em mim para realizar meus sonhos e projetos, pelo seu infinito amor e grande misericórdia.

À minha família que fiz em Maceió Ronaldo e Eliete; sem eles não seria possível realizar mais um sonho. Agradeço por todo apoio que me deram nos momentos de necessidade.

Meus sinceros agradecimentos aos professores da UFAL. Em especial aos professores Tiago Mariz, Iram Gléria, Wandearley Dias, Fernanda Matias, Ítalo Nunes e Francisco Fideles.

Ao professor Rodrigo Gester da UNIFESSPA, pelos artigos enviados e pelas dicas. O professor Gabriel Nascimento pelo apoio na seleção de mestrado no programa de Pós-Graduação em Física pela UFAL em Maceió. A todos os professores que participaram de boa parte da minha vida acadêmica. Obrigado a todos por tudo!

Aos bons amigos que conquistei ao longo destes dois anos por tornarem todo o caminho mais leve. As melhores lembranças que carrego destes dois anos dentro da UFAL incluem ,Anderson, Neudes(Netflix), Vinícios, Leônade, Fábio, Fabiana Carvalho, Flávia Paulino e ao grande amigo Eupidio. A todos que dividi sala pela convivência amigável e pelos cafés. Aos amigos de infância e de todas as horas: Thiago Pereira, Marcos Morais, Lucas Pereira, Paulo Henrique, Lúcia minha segunda Mãe. Às pessoas que conheci em Maceió que me ajudaram de diversas formas que não são estudantes da UFAL: Jaqueline, Carmen Lucia, Patricia, Mariana, Simone, Jaldinete, Poliana, Edjane, Edvania Oliveria e Nayara. Agradeço a todos que conheci ao longo desses dois anos.

Dou a meus pais o melhor agradecimento que posso, por estarem presentes, por todo o amor, por todo carinho, paciência, apoio, ajuda. A meu pai Bernardo Silva por ter me dado apoio, força, coragem, sempre me incentivando a não desistir participando lado a lado de tantas coisas importantes na minha vida. A minha mãe Maria José, por ter feito de tudo para tornar a minha vida fácil. Você conseguiu, mãe. Por ter feito coisas que só mãe faz e com tanto carinho que nem percebia o trabalho que dei.

Ao meu orientador Sérgio Lira, pela paciência, dedicação, orientação, ajuda nas disciplinas obrigatórias, pela amizade que tenho.

Agradeço à Universidade Federal de Alagoas, ao departamento de Física pelos cursos de excelente nível ao qual fui aluno da Pós-Graduação, e a todos os funcionários. Agradeço ainda à CAPES pelo suporte financeiro.

A vida do homem na terra é uma guerra. Jó 7:1

## Resumo

Nas últimas décadas diversos trabalhos científicos foram publicados sobre instabilidades hidrodinâmicas na célula de Hele-Shaw e a formação de padrão de dedos viscosos na interface entre dois fluidos imiscíveis. Este problema foi analisado tanto por físicos experimentais como teóricos devido ao seu papel prototípico na descrição de processos de crescimento interfacial, tais como extração de petróleo, solidificação, descargas elétricas, etc. Quando um fluido menos viscoso desloca outro mais viscoso, essas instabilidades ocorrem devido à diferença de viscosidade entre os dois fluidos imiscíveis confinados (instabilidade de Saffman-Taylor), sendo a taxa de injeção a força motriz da desestabilização. No entanto, outros mecanismos físicos também podem desestabilizar uma interface inicialmente circular nesta geometria quase bidimensional e produzir dedos viscosos qualitativamente diferentes. Nesta dissertação abordamos o problema da célula de Hele-Shaw girante, em que as instabilidades são induzidas através da força centrífuga e, neste caso, dependem da diferença de densidade entre os fluidos. Esta variante do problema de Saffman-Taylor foi previamente estudada na literatura de maneira analítica, numérica e experimental, onde diversas características morfológicas e dinâmicas dos dedos viscosos foram exploradas. Nós revisitamos este sistema com o intuito de reproduzir várias destas observações através de simulações computacionais utilizando o método de *Phase-Field* para escoamentos bidimensionais com tensão superficial finita. Este método consiste em reescrever as equações dinâmicas do problema de fronteira livre original em termos de um campo de fase auxiliar que regulariza a interface entre os fluidos ao introduzir uma espessura finita artificial para a separação das fases. Desta maneira somos capazes de integrar numericamente equações diferenciais parciais que automaticamente implementam as condições de contorno do problema e não necessitam rastrear a interface. Através desta técnica, realizamos simulações da evolução temporal de gotas inicialmente circulares tanto em circunstâncias em que introduzimos perturbações simétricas na interface (consistindo apenas um modo harmônico) como perturbações assimétricas (possuindo diversos modos harmônicos de perturbação com fases aleatórias entre si). Neste estudo, analisamos o papel dos dois parâmetros adimensionais que governam a dinâmica do sistema: a tensão superficial adimensional  $B$ , que mede a razão entre as forças de capilaridade em relação à força centrífuga; e o contraste de viscosidade entre os fluidos  $A$ . Nossas observações são comparadas qualitativa e quantitativamente com as previsões da análise de perturbação linear do problema, e estão de acordo com os prévios resultados contidos na literatura.

**Palavras-chave:** Formação de dedos viscosos 2. Célula de Hele-Shaw 3. Força centrífuga 4. Método de *phase-field*.



# Abstract

In the past few decades many scientific papers were published about hydrodynamic instabilities in the Hele-Shaw cell and pattern formation through viscous fingering in the interface between two immiscible fluids. This problem was analyzed both by experimental and theoretical physicists, due its prototypical role in describing interfacial growth, such as oil recovery, solidification, electrical discharges, etc. When a less viscous fluid displaces a more viscous one, these instabilities arise due to the difference in viscosity between the two confined liquids (Saffman-Taylor instability), and the driving force of this destabilization is the fluid injection rate. However, other physical mechanisms may destabilize an initially circular interface in this effectively two-dimensional geometry and produce qualitatively different viscous fingering phenomena. In this work, we approach the problem of a rotating Hele-Shaw cell, where the instabilities are now induced by the centrifugal force and depend on the density difference between the fluids. This variant version of the original Saffman-Taylor problem was previously studied in the literature trough analytical, numerical and experimental investigations, and several morphological and dynamical properties of viscous fingering were explored. Here, we revisit this system with the goal of reproducing several of these observations through computational simulations utilizing the *Phase-Field* method for two-dimensional flow with finite surface tension. This method consists in rewriting the equations in terms of an auxiliary scalar field that regularizes the interface between the fluids by introducing an artificial finite thickness to the phase separation region. By proceeding this way, we are able to numerically integrate partial differential equations that automatically implement the boundary conditions of the problem, without the necessity of tracking the moving interface. Via this technique, we have performed numerical simulations of the time evolution of initially circular droplets in situations where we introduce symmetric perturbations at its interface and other cases where we use asymmetric perturbations. In this study, we analyze the role of both dimensionless parameters that govern the system's dynamics: the dimensionless surface tension  $B$ , which measures the ratio between capillary and centrifugal forces; and the dimensionless viscous contrast  $A$  between the fluids. Our observations compare well with the theoretical predictions of the linear perturbation analysis, both qualitatively and quantitatively, and are in agreement with previous results contained in the scientific literature on the subject.

**Keywords:** Viscous fingering 2. Hele-Shaw cell 3. Centrifugal force 4. *Phase-field*.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	O Problema de Saffman-Taylor . . . . .	1
1.2	Lei De Darcy . . . . .	7
1.3	Condições de Contorno . . . . .	12
<b>2</b>	<b>A CÉLULA DE HELE-SHAW GIRANTE</b>	<b>15</b>
2.1	Revisão da literatura . . . . .	15
2.2	Lei de Darcy para célula de Hele-Shaw girante . . . . .	21
2.3	Análise perturbativa linear . . . . .	22
2.4	Regime linear . . . . .	26
<b>3</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE <i>PHASE-FIELD</i></b>	<b>29</b>
3.1	O método de <i>phase-field</i> . . . . .	29
3.2	Equação do <i>phase-field</i> . . . . .	32
3.3	Implementação numérica . . . . .	34
<b>4</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS E COMPARAÇÃO COM A TEORIA</b>	<b>36</b>
4.1	Simulações simétricas . . . . .	38
4.2	Simulações assimétricas . . . . .	41
4.3	Análise quantitativa do crescimento da perturbação . . . . .	46
4.4	Análise comparativa . . . . .	49
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>53</b>
	Referências	55

# INTRODUÇÃO

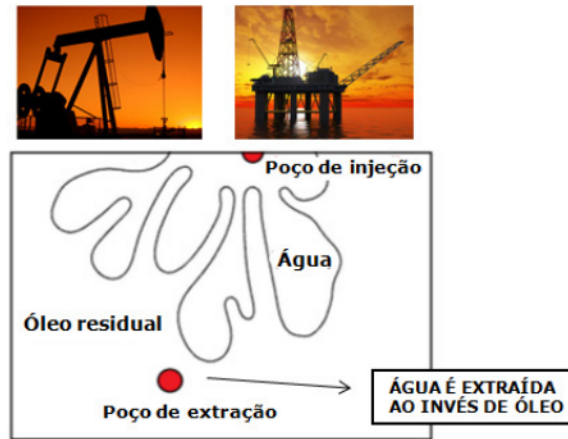
## 1.1 O Problema de Saffman-Taylor

A Física é uma ciência que busca compreender a natureza e seus fenômenos, de modo a explicar diversos tipos de padrões. O estudo destes padrões atua de forma decisiva para o desenvolvimento tecnológico e conseqüentemente, para a melhoria da vida humana[1]. Dentre eles, destacamos a formação padrão em sistemas hidrodinâmicos, onde podemos observar o comportamento complexo na interface que separa dois fluidos miscíveis ou imiscíveis. Por exemplo: convecção em fluidos com diferentes temperaturas, ondas no mar, difusão entre fluidos, etc.

O estudo das instabilidades na interface entre dois fluidos viscosos imiscíveis é de grande aplicabilidade em setores industriais, onde podemos citar o mercado petrolífero que utiliza a extração do óleo a partir de poços encontrados em jazidas profundas de meios porosos em terra firme e no fundo do mar[2]. Os meios porosos são como esponjas tipicamente preenchidas por fluidos, e oferecem uma resistência na passagem do mesmo, causando diminuição de velocidade. Nesses casos, geralmente usa-se a conhecida lei de Darcy para meios porosos, podendo ser derivada das equações de Navier-Stokes, e estas são usadas para uma relação linear entre forças viscosas e velocidade dos fluidos[3, 4]. Na exploração de petróleo ocorrem instabilidades interfaciais entre dois fluidos imiscíveis, e seus efeitos de deslocamento de um fluido sobre o outro são de grande interesse, uma vez que essa mudança na interface gera padrões conforme mostra a figura 1.1. Como exemplo podemos citar a água e o óleo, que formam um sistema heterogêneo, isto é, composto por duas fases. Essa mistura de fases é conhecida como sistema multifásico, e quando submetidos a processo de escoamento apresentam uma fronteira chamada de interface [5].

É comum o óleo ficar preso em rochas porosas, impedindo o seu bombeamento direto para fora por um outro fluido, o que leva a perda do poço de petróleo. A expulsão é então conduzida por bombeamento da água, onde ocorre o deslocamento do petróleo por pressão, causado pela ocupação da água no lugar do petróleo. Em relação ao petróleo não temos uma completa evasão desse fluido. A formação de ondulações é ocasionada pela diferença de viscosidade entre os fluidos, do menos viscoso para o mais viscoso, que ao empurrarem-se ocorre uma instabilidade na interface, comprometendo a recuperação final da produção. Uma parte fica presa nas rochas com isso, temos o abandono do poço

**Figura 1.1:** Instabilidade na interface de dois fluidos na extração de petróleo, ocasionada pela diferença de viscosidade. Temos três fotos a esquerda na parte de cima, temos uma máquina extraindo o petróleo, a direita uma plataforma de extração no fundo do mar, e na parte de baixo temos um exemplo do comportamento do fluido durante a extração por injeção de água.



Fonte: Dias (2012).

de exploração [5].

Nosso trabalho visa o estudo de instabilidades na interface entre dois fluidos imiscíveis, em que variamos os valores dos parâmetros de viscosidade, bem como a tensão superficial, visando reproduzir uma instabilidade induzida pela força centrífuga. A variação desses parâmetros pode estar relacionada à viscosidade do fluido e a sua densidade, mudando ou não o comportamento entre eles. A instabilidade não ocorre somente em sistemas de água e óleo, mas em qualquer fluido que não se mistura sob condições de temperatura e pressão variadas, denominados de líquidos imiscíveis. Essa ausência de mistura se deve a imiscibilidade, onde ocorrem escoamentos imiscíveis em sistemas de fluidos bifásicos, trifásicos, com fases distintas, como gás-líquido e líquido-líquido.

O problema de interfaces instáveis entre dois fluidos teve início com os estudos de Philip Saffman<sup>1</sup> e Geoffrey Taylor<sup>2</sup> [6] que em 1956 descobriram que poderiam modelar um problema similar ao encontrado nos poços de petróleo, em poço marítimos. Poderíamos então visualizar os fenômenos que ocorrem dentro das rochas porosas (dos poços no mar), evitando prejuízos ao prevenir que sobras de petróleo se mantivessem presas.

Taylor e Saffman usaram como dispositivo um ambiente de espaço estreito composto por duas placas paralelas, separadas para que o fluido escoasse entre elas, para modelar problemas semelhantes ao escoamento de fluidos em meios porosos. Este ambiente ficou conhecido como célula de Hele-Shaw[6]. Na figura 1.2 vemos o dispositivo formado pelas placas de vidro de 6 mm de espessura, 150 mm de comprimento, 100 mm de largura e 1 mm de espaçamento.

<sup>1</sup>matemático inglês, professor de matemática aplicada e aeronáutica no CALTECH

<sup>2</sup>renomado físico britânico, reconhecido por diversos trabalhos em dinâmica dos fluidos.

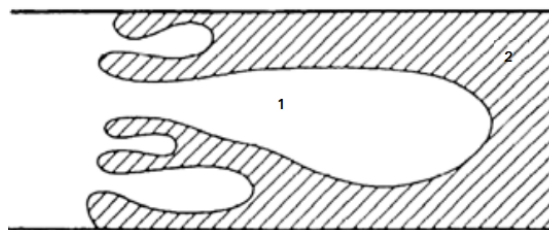
**Figura 1.2:** Vista 3D e transversal da célula de Hele-Shaw.

Fonte: Varges (2015).

A célula de Hele-Shaw nos fornece uma maneira simples de observar um fluxo efetivamente bidimensional, e nessa geometria é possível descrever o sistema de uma forma matemática simplificada[7]. No século XIX Henry S. Hele-Shaw<sup>3</sup> desenvolveu esta célula, que consiste em duas placas planas separadas por 1 mm de distância e 30 cm de largura[8], buscando entender o escoamento entre as placas[6]. Geralmente ela é usada como solução para problemas do escoamento de fluidos em meios porosos onde visualizamos instabilidades na interface entre dois fluidos.

A desestabilização da interface pode ocorrer quando há diferença de viscosidade entre os fluidos por injeção ou força centrífuga quando a célula é rotacionada. Neste caso temos uma instabilidade que se forma na interface que separa os fluidos do sistema. Em exemplo podemos citar em uma situação que o fluido de baixa viscosidade 1 (ar) desloca o fluido de alta viscosidade 2 (óleo) formando os dedos conforme a figura 1.3.

**Figura 1.3:** Na figura temos uma injeção do fluido menos viscoso sobre o mais viscoso. Onde ocorre uma instabilidade na interface entre ar (em branco) e óleo (em cinza) na célula de Hele-Shaw retangular.



Fonte: Saffman e Taylor, (1958).

Esse fenômeno não é observado na situação inversa em que o fluido mais viscoso desloca o menos viscoso, ou seja, a interface é completamente estável. Em 1958 Saffman e Taylor fizeram o primeiro experimento na célula de Hele-Shaw retangular muito estreita, onde observaram que ao injetar um fluido menos viscoso contra um mais viscoso a uma velocidade baixíssima não ocorre instabilidade na interface entre os fluidos. Porém aumentando a velocidade de injeção essa interface se desestabiliza ocorrendo uma interpenetração do fluido menos viscoso sobre o fluido mais viscoso. A instabilidade se desenvolve em forma de "dedos" que se tornam cada vez mais acentuados com o tempo,

<sup>3</sup>engenheiro naval inglês.

e é produzida pela velocidade de injeção e contraste de viscosidade. Por outro lado, a tensão superficial tende a estabilizar à interface, pois tenta reduzir a área da superfície entre os fluidos.

Para melhor compreensão desse comportamento na interface entre os fluidos, Saffman e Taylor realizaram um novo experimento, onde injetariam um fluido de baixíssima viscosidade próxima de zero contra um fluido de alta viscosidade. Através dessa análise poderiam concluir a influência da diferença de viscosidade na interface entre os fluidos. O experimento foi realizado em um canal estreito na posição vertical onde teriam a ação da gravidade desestabilizando o fluido. Injetaram primeiramente o fluido mais viscoso (glicerina) no fundo (parte de baixa) da placa, e logo após injetaram o fluido menos viscoso (ar), essa injeção ocorreu com uma velocidade suficiente para que ocorresse essa instabilidade entre os fluidos. Conforme injetavam o fluido menos viscoso sobre o mais viscoso, observaram uma interpenetração do ar sobre a glicerina, gerando “dedos viscosos” que inicialmente tinham aparência de pequenas ondulações. Com a evolução do tempo a interface começa ganhar à aparência de uma luva, até que notou-se que um dedo dominava a dinâmica desse sistema, os outros diminuía definindo assim um estado estacionário. Nesse experimento constata-se a predominância de um dedo ganhando metade da largura do estreito canal conforme a figura 1.4.

**Figura 1.4:** Foto do experimento realizado por Saffman-Taylor. O fluido menos viscoso (ar, parte superior da figura) é injetado no mais viscoso (glicerina, parte inferior da figura), favorecendo a formação de dedos. O tempo após o início do experimento cresce da esquerda para a direita.



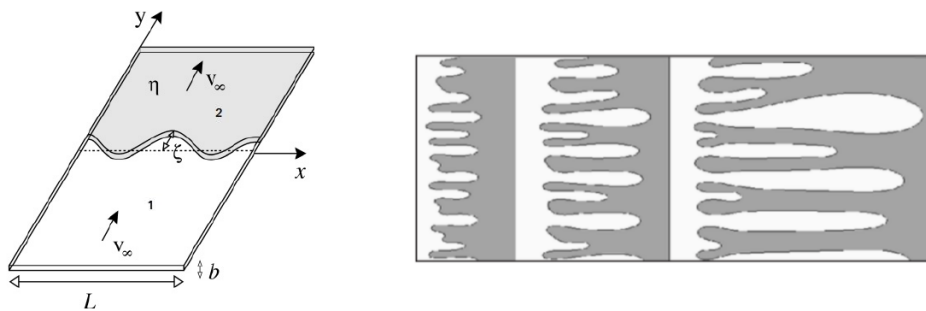
Fonte: Saffman e Taylor (1958).

Esse experimento ganhou notoriedade na comunidade científica: a pesquisa realizada por Saffman e Taylor atraiu diversos cientistas de diferentes áreas a desvendarem fenômenos na interface entre dois fluidos. Perceberam que variando a viscosidade do fluido e a geometria da célula poderiam ter como resultado uma diversidade de padrões. A célula de Hele-Shaw é um dos dispositivos mais bem-conceituado para esses tipos de experimentos no meio acadêmico, também conhecido como problema de Saffman-Taylor.

Podemos ter instabilidades de Saffman-Taylor para células de Hele-Shaw retangulares[9] ou radiais[10]. Outras geometrias também foram analisadas recentemente como células esféricas, cilíndricas e cônicas[11, 12, 13].

A geometria retangular está em um formato de canal onde fluido é deslocado por meio de injeção em um dos lados. No início da dinâmica, vemos que os dedos possuem comprimentos aproximadamente iguais, com pequenas ondulações, esses dedos viscosos competem entre si. No fluxo de geometria retangular o comprimento de onda dos dedos é a distância (paralela à direção de propagação da onda) entre as repetições da forma de onda. Esse comprimento depende da espessura que temos da placa das viscosidades, a velocidade que o fluido é injetado e da tensão superficial entre os fluidos. Conforme o tempo evolui, os dedos de diversos tamanhos vão surgindo, e alguns deles atingem um estágio estacionário e outros observamos estruturas de ondulações bem maiores, conforme mostra a figura 1.5.

**Figura 1.5:** Na figura esquemática da esquerda temos que o fluido 1, menos viscoso, é injetado no fluido 2, mais viscoso. As instabilidades ocorrem. Na figura a direita temos uma simulação computacional de três momentos da evolução típica na interface entre ar (em branco) e óleo (em cinza) na célula de Hele-Shaw retangular.



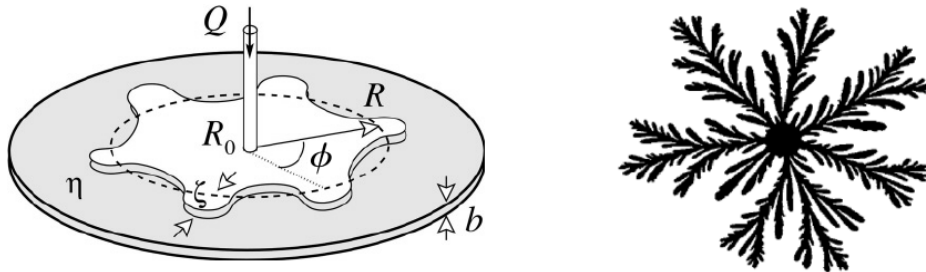
Fonte: Saffman e Taylor, (1958). Fonte: E. Pauné, M Siegel e J. Casademunt (2003).

Na geometria radial utiliza-se injeção no centro da célula como ponto de partida para deslocar os fluidos e a interface que tem forma de um círculo, conforme mostra a figura 1.6. Nelas temos dois fluidos imiscíveis e com diferentes viscosidades que são injetados radialmente um no outro através de um furo no centro das placas. As instabilidades surgem somente quando injetado o fluido de menor viscosidade contra o mais viscoso, onde vemos que algumas ondulações vão se formando na interface inicialmente circular e o surgimento dos dedos que se multiplicam com a evolução do tempo. Invertendo a inserção dos fluidos a interface se propaga na forma de uma frente circular estável.

Esses fenômenos ocorrem nas duas geometrias devido à evolução no tempo de flutuações térmicas ou mecânicas. Na superfície entre dois fluidos, pois qualquer perturbação nesse contorno gera a formação de pequenas ondulações na interface. A dinâmica do sistema provoca a formação dos dedos viscosos que crescem devido a gradientes de pressão nas pontas dessas ondulações. O gradiente de pressão nas regiões curvadas induz uma maior velocidade da interface forçando a desestabilização da gota. Por outro lado, a tensão superficial entre os fluidos forçará a estabilização dessa perturbação[14].

Na dinâmica de geometria radial observamos a interface entre os fluidos ramificar-se

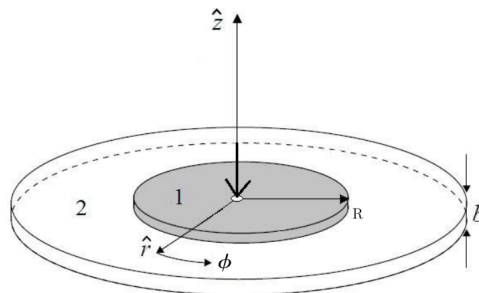
**Figura 1.6:** Na figura a esquerda temos a representação esquemática da célula de Hele-Shaw radial. Na figura a direita temos um experimento mostrando a evolução temporal de padrão formado em uma célula de Hele-Shaw radial. Inicialmente temos uma interface circular; em seguida, algumas dobras se formam e os dedos surgem.



Fonte: Dias, 2011. Fonte: Perter (2009).

nas chamadas bifurcações. Dedos surgem durante toda a evolução temporal da interface, e o estado estacionário não é alcançado[15]. Além disso, dependendo do espaçamento das placas da célula de Hele-Shaw e das propriedades físicas dos fluidos, podemos observar estruturas bastante ramificadas produzidas principalmente por sucessivas bifurcações dos dedos viscosos. Vale ressaltar que no fluxo inverso, no qual o fluido mais viscoso deslocando o menos viscoso, a interface fluido-fluido é estável e permanece plana na geometria retangular e evoluindo circularmente na geometria radial conforme mostra a figura 1.7.

**Figura 1.7:** Diagrama esquemático da célula de Hele-Shaw radial. Inicialmente temos uma interface circular que, com o passar do tempo se deformará.



Fonte: Pelce, (1988).

Agora se analisarmos o mesmo sistema radial aplicando forças não-inerciais, ao invés de injetarmos o fluido menos viscoso no centro da célula pelo orifício, colocamos no centro da célula girante o fluido mais denso que estará cercado por um fluido menos denso, e apenas rotaciona-lá. Teremos como resultado que o fluido de mais denso deslocará o de menor densidade pela influência da força centrífuga. Nesse sistema apenas giraremos a célula de Hele-Shaw sem injeção. Assim iremos provocar instabilidades na interface entre os fluidos com uma velocidade angular  $\Omega$  constante, em torno do seu eixo axial que é perpendicular às placas. Esse crescimento das perturbações, agora não é mais gerado pela diferença de viscosidade (injeção), porém pela força centrífuga que é proporcional a dife-



rença de densidade entre os fluidos. Ao girar a célula temos um fluido de maior densidade que deslocará à de menos denso, deformando a interface entre eles. Com isso teremos instabilidade na interface da célula de Hele-Shaw radial (pelos efeitos gravitacionais), vistos também na célula retangular (quando inserido no topo um fluido mais denso, provocando instabilidade), porém com uma distinção: a gravidade é variável ajustada pela velocidade angular  $\Omega$  na direção radial.

Um dos nossos objetivos é entender a instabilidade dinâmica na célula de Hele-Shaw girante provocada pelas forças não-inerciais entre dois fluidos imiscíveis que formarão padrões. A célula de Hele-Shaw girante começou a ser estudada experimentalmente por Ortín<sup>4</sup> em 1996 no seu trabalho publicado com o título “*Experiments in a rotating Hele-Shaw cell*” sendo sua principal motivação para este estudo é entender fenômenos dinâmicos entre as interfaces através da observação em fluidos com o contraste de baixa viscosidade em experimentos motivados pela gravidade.

O nosso ponto de partida com o estudo do processo de formação de padrões é revisar publicações que tratam da célula de Hele-Shaw girante. E a partir dela realizar um estudo computacional. Utilizamos métodos numéricos como ferramenta para solução das instabilidades na interface, com aplicação do método de *phase-field* para o referencial girante[16], no qual realizou um estudo de desprendimento das gotas satélite.

Comparamos os resultados numéricos com a análise perturbativa linear desenvolvida primeiramente por [17], e com os resultados analíticos da competição dos dedos prevista por [18] e Gadêlha<sup>5</sup> em 2007, no qual realizou um estudo teórico sobre a análise fracamente linear na célula de Hele-Shaw girante, incluindo a força de Coriolis<sup>6</sup>.

Neste trabalho abordaremos uma variante do problema de Saffman-Taylor, onde faremos um estudo computacional do comportamento de dois fluidos viscosos na célula de Hele-Shaw girante. Simularemos como um fluido externo menos denso é empurrado por outro fluido de maior densidade através da força centrífuga. Utilizamos modelos matemáticos que descrevem o comportamento desse fenômeno bem estabelecidos na literatura. Com isso tentaremos entender os processos de formação e crescimento dos dedos ao longo do tempo. Para isso simularemos a evolução temporal de uma interface circular ligeiramente perturbada e iremos variar os parâmetros adimensionais que governam a dinâmica do escoamento.

## 1.2 Lei De Darcy

Em 1855 e 1856 Henry Darcy<sup>7</sup> conduziu experimentos em colunas de água que estabeleceram o que tornou-se conhecido como lei de Darcy, a equação principal do nosso

---

<sup>4</sup>físico espanhol, professor de física na universidade de Barcelona.

<sup>5</sup>físico e matemático brasileiro, professor de matemática na universidade de York.

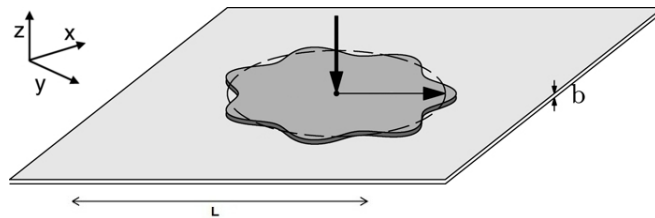
<sup>6</sup>força inercial de um sistema de referência em rotação uniforme

<sup>7</sup>engenheiro hidráulico francês, fez diversas contribuições na área de mecânica dos fluidos.

sistema, que descreve todo o escoamento de fluidos em meios porosos [19].

A lei de Darcy inicialmente foi utilizada para descrever o fluxo de água em filtros de areia verticais e homogêneos[19]. Apresentada primeiramente de forma empírica, ela nos fornece a relação entre a velocidade e o gradiente de pressão. Nos experimentos o fluido era submetido a um gradiente de pressão e atingiam velocidades no fluxo que eram proporcionais ao gradiente. Podemos considerar a célula de Hele-Shaw como sendo efetivamente bidimensional visto que não há fluxo na direção perpendicular às placas. Curiosamente, a célula de Hele-Shaw tem um comportamento que pode ser descrito pelo mesmo conjunto de equações que descrevem o fluxo bidimensional no meio poroso [15, 20], que é a lei de Darcy.

**Figura 1.8:** Representação esquemática da interface fluido-fluido na célula de Hele-Shaw horizontal.



Fonte: Miranda (1998).

Para entendermos melhor esse processo imaginaremos o confinamento de dois fluidos imiscíveis e incompressíveis no espaço estreito  $b$  na célula de Hele-Shaw radial, como mostrado na figura 1.8. Vamos assumir que  $b$  é o menor comprimento existente, portanto, o sistema pode ser considerado efetivamente bidimensional. A pressão é aplicada no centro empurrando o fluido 1 no fluido 2. A célula tem uma largura  $L$  e o fluxo efetivamente bidimensional acontece no plano  $x - y$ .

Usando a equação da continuidade para descrever a conservação da massa[21], temos:

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_j \mathbf{u}_j) = 0, \quad (1.1)$$

onde  $t$  é o tempo, a velocidade tridimensional dos fluidos e a densidade são representados por  $\mathbf{u}_j$  e  $\rho_j$  com  $j = 1$  e  $2$  denotando os fluidos 1 e 2 respectivamente. Para fluidos incompressíveis  $\rho_j$  é uma constante. Assim obtemos a expressão resultante da equação da continuidade

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_j = 0, \quad (1.2)$$

que nos mostra que o fluxo não possui divergência. A equação de Navier-Stokes [21, 22] descreve o movimento dos dois fluidos através do balanço de momento linear, portanto

podemos chamar ela de segunda lei de Newton aplicada aos fluidos. Podemos formular a equação de Navier-Stokes da seguinte forma:

$$\rho_j \frac{D\mathbf{u}_j}{Dt} = \mathbf{f}_j; \quad (1.3)$$

o lado esquerdo da equação é dada por:

$$\frac{D\mathbf{u}_j}{Dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \quad (1.4)$$

sendo  $D\mathbf{u}_j/Dt$  a aceleração do fluido e  $\mathbf{f}_j$  o somatório das forças hidrodinâmicas por unidade de volume.

Como estamos considerando os fluidos viscosos, devemos levar em conta o atrito interno no escoamento, isto é, a resistência dos fluidos é representada pelas forças viscosas. Essas forças podem ser descritas pelo tensor de estresses viscosos  $\mathbf{\Pi}_j$  na forma  $\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_j$  [22]. O tensor é dado por:

$$\mathbf{\Pi}_j = \eta_j \mathbf{e}_j = \eta_j [\nabla \mathbf{u}_j + (\nabla \mathbf{u}_j)^T], \quad (1.5)$$

onde  $\eta_j$  é a viscosidade,  $\mathbf{e} = \nabla \mathbf{u}_j + (\nabla \mathbf{u}_j)^T$  é o tensor da taxa de cisalhamento,  $\mathbf{T}$  representa a transposição da matriz e  $(\nabla \mathbf{u})_{ik} = \partial_i \mathbf{u}_k$ .

Observamos claramente que os estresses viscosos estão relacionados com as velocidades dos fluidos (para fluidos newtonianos incompressíveis). Por outro lado, temos a força de compressão que atua em um elemento de superfície  $dS$ . Exercida pela pressão  $-\nabla p_j$ , é dada por  $p_j \mathbf{n} dS$ . Desta maneira, podemos escrever,

$$-\int_S p_j \mathbf{n} dS = -\int_V \nabla p_j dV, \quad (1.6)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor normal à superfície, assim obtemos força de pressão hidrodinâmica do sistema. Usamos o teorema da divergência para uma função escalar (o sinal negativo surge por conta de  $\mathbf{n}$  apontar para fora de  $S$ ). A força de pressão por unidade de volume que atua no fluido é representada por  $-\nabla p_j$ . Usando  $\mathbf{f}_j = -\nabla p_j + \eta_j \nabla^2 \mathbf{u}_j$  após calcular o divergente da Eq.(1.5) e reescrevendo a Eq.(1.3) conseguimos chegar a equação de Navier-Stokes

$$\rho_j \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} + (\mathbf{u}_j \cdot \nabla)\mathbf{u}_j \right] = -\nabla p_j + \eta_j \nabla^2 \mathbf{u}_j, \quad (1.7)$$

que descreve o escoamento de fluidos viscosos na ausência de forças externas. No lado direito da Eq.(1.7) temos no primeiro termo a força provocada pelo gradiente de pressão e no segundo termo a força de atrito entre os elementos do fluido, que é proporcional à viscosidade.

Podemos obter a Lei de Darcy a partir das equações Eq.(1.2) e Eq.(1.7), consideremos placas paralelas com espaçamento  $b$  entre elas, que seja pequeno o suficiente para que o fluxo na célula de Hele-Shaw seja completamente determinado pelo balanço entre as forças viscosas e da pressão. Nestas circunstâncias podemos desprezar os termos inerciais  $[\partial \mathbf{u}_j / \partial t + (\mathbf{u}_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_j]$  para viscosidade alta comparada com a inércia.

Considerando que a pressão é aproximadamente constante na direção  $\hat{z}$ ,  $\mathbf{u}_j$  varia mais intensamente com  $z$  do que  $x$  e  $y$ . Sob essas condições, utilizamos a equação de Navier-Stokes para as componentes da velocidade  $u_x$  e  $u_y$  em ambos os fluidos então temos:

$$\eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1.8)$$

e

$$\eta \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (1.9)$$

onde omitimos o subíndice  $j$  com  $u_z \simeq 0$ , pois  $p_j$  é independente de  $z$ . Assumimos a condição de não deslizamento do fluido onde a velocidade se anula nas placas:  $\mathbf{u}_j = 0$  em  $z = 0$  e  $z = b$ , ou seja, o líquido fica preso, nas paredes sólidas. Resolvendo a Eq.(1.8) para  $x$ :

$$\eta u_x = z \frac{(z - b)}{2} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1.10)$$

e para  $y$  resolvendo a Eq.(1.9) temos:

$$\eta u_y = z \frac{(z - b)}{2} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (1.11)$$

Então, as Eq.(1.10) e Eq.(1.11) podem ser reescritas juntas da seguinte forma:

$$\eta_j \mathbf{u}_j(x, y, z) = \frac{1}{2} z(z - b) \nabla p_j(x, y). \quad (1.12)$$

Notamos que o perfil de velocidade do fluxo é parabólico na direção transversal da célula de Hele-Shaw, ou seja, é quadrático em  $z$ . Podemos transformar o problema num escoamento efetivamente bidimensional, introduzindo uma velocidade média ao longo da direção transversal dos fluidos

$$\mathbf{v}_j(x, y) = \frac{1}{b} \int_0^b \mathbf{u}_j(x, y, z) dz, \quad (1.13)$$

consequentemente temos a Lei de Darcy,

$$\mathbf{v}_j = -\frac{b^2}{12\eta_j} \nabla p_j. \quad (1.14)$$

As médias da velocidade e pressão com relação ao eixo  $z$  são  $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j(x, y)$  e  $p_j = p_j(x, y)$ . Com isso, o fluxo é irrotacional, isso pode ser observado aplicando o operador rotacional em ambos os lados da Eq.(1.14). Como  $\nabla \times \nabla p_j = 0$ , temos que  $\nabla \times \mathbf{v}_j = 0$ . Assim podemos escrever

$$\mathbf{v}_j(x, y) = -\nabla \Phi_j(x, y), \quad (1.15)$$

onde  $\Phi_j$  representa o potencial da velocidade de cada um dos fluidos.

Observaremos apenas os fluxos irrotacionais, podendo a vorticidade somente estar presente na interface entre os fluidos. Para o fluxo na célula de Hele-Shaw, a região de vorticidade não nula surge da descontinuidade em que a velocidade tangencial apresenta na fina interface entre os fluidos imiscíveis. Se substituirmos a Eq.(1.14) na Eq.(1.15), obtemos a Lei de Darcy na forma escalar,

$$\eta_j \Phi_j = \frac{b^2}{12} p_j. \quad (1.16)$$

Por outro lado, calculando a média transversal da condição de incompressibilidade da Eq.(1.2), obtemos,

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_j = 0. \quad (1.17)$$

A partir da equação Eq.(1.17), portanto, podemos ver que a nova equação para o potencial de velocidade satisfaz da equação de Laplace bidimensional,

$$\nabla^2 \Phi_j = 0. \quad (1.18)$$

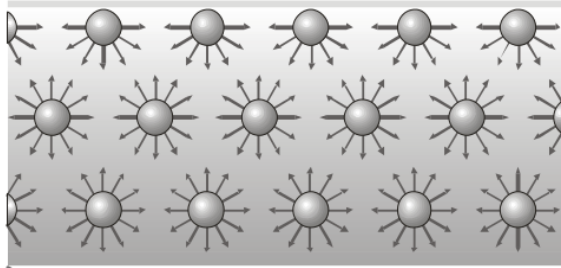
Apesar de encontrarmos facilmente na literatura a resolução da equação de Laplace, no nosso problema há uma dificuldade adicional devido à interface se mover com o tempo numa forma funcional desconhecida.

A seguir falaremos sobre as condições contorno dinâmico de fronteira "livre" que é a região que separa dois fluidos. Este o problema é do tipo "*free boundary problem*" e, em geral, não é possível resolvê-lo analiticamente de uma forma fechada. Portanto, fazem-se necessário o uso de simulações numéricas e de análise perturbativa.

### 1.3 Condições de Contorno

Nesta parte do capítulo estudaremos as condições de contorno necessárias para descrever o comportamento dos fluidos imiscíveis na região da interface. Para isso, primeiramente precisamos saber o que é tensão superficial ou capilaridade.

**Figura 1.9:** Tensão superficial da água.



Fonte: Nanocell News (2018).

A tensão superficial é a força que aparece na superfície livre de um líquido devido atração entre as moléculas do fluido. Esta força que permite aos insetos, por exemplo, andar por cima da água[23]. Tomando o exemplo da água podemos ver através da figura 1.9, a força resultante de atração das moléculas que abaixo da superfície na água é menor que as encontradas na superfície. Isso se deve ao fato que cada molécula no interior do líquido é atraída pelas demais moléculas igualmente, em todas as direções, enquanto as que estão na superfície são atraídas para o interior do líquido mais fortemente da que em direção ao ar [24]. Assim, na superfície da água cria-se uma força sobre essas moléculas que provoca a contração do líquido, causando a chamada tensão superficial, que funciona como uma fina película elástica na superfície da água. Este fenômeno pode ser descrito matematicamente através da lei de Laplace.

A lei de Laplace relaciona a variação de pressão na superfície que separa dois fluidos de natureza distintas. De acordo com Laplace, a pressão dentro de uma bolha é inversamente proporcional ao seu raio e diretamente proporcional à tensão superficial. Em outras palavras, a pressão dentro da bolha aumentará se o raio for reduzido e, diminuirá se a tensão superficial diminuir. Forças atrativas que surgem entre moléculas do mesmo tipo. Por exemplo, as moléculas de água atraem-se umas as outras por forças de coesão. A chamada "tensão superficial da água", pois elas estão fortemente ligadas umas as outras. Assim a lei de Laplace pode ser representada por;

$$p_1 - p_2 = \sigma \kappa, \quad (1.19)$$

onde  $p_1$  e  $p_2$  são as pressões do fluido 1 e 2 respectivamente na interface,  $\sigma$  é a tensão

superficial e  $\kappa$  é a curvatura média definida por

$$\kappa = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad (1.20)$$

em que  $R_1$  e  $R_2$  são os raios de curvatura principal.

Agora precisamos conhecer as condições de fronteira no caso de um sólido e um fluido. Para descrever o comportamento de um fluido em contato com objetos sólidos temos a chamada condição de não-deslizamento (*no-slip boundary condition*). Imaginemos uma interface onde temos um lado rígido ou sólido e o outro um fluido com uma velocidade  $\mathbf{u}$  de escoamento, ou seja, sua superfície  $S$  é a interface fluido-sólido. Então temos;

$$\mathbf{u} = 0, \quad (1.21)$$

em  $S$ , é a condição de não-deslizamento (*no-slip boundary condition*)[24]. Para condições de contorno não sólidas onde a interface se move, temos na superfície  $S$  dois fluidos 1 e 2 de velocidade representadas por  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  com a componente normal  $\mathbf{n}$ . Então;

$$(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.22)$$

em  $S$ . Esta é a chamada condição cinemática de escoamento, que também nos diz que a velocidade da interface fluido-fluido é dada por

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}. \quad (1.23)$$

Notamos que a componente de velocidade tangencial não apresenta restrições na superfície  $S$ . A mesma expressão pode ser usada como condição de não deslizamento. No entanto precisamos satisfazer a condição de contorno na interface entre dois fluidos, que é conhecida como a lei de Laplace [25, 26].

A Lei de Darcy é uma Eq.(1.14) fenomenológica derivada da Eq.(1.7) de Navier-Stokes que descreve problemas de fluidos em um sistema bidimensional de escoamento entre placas ou em um meio poroso. Assim como a Eq.(1.17) da incompressibilidade que descreve a restrição do fluido e a velocidade do escoamento num determinado ponto da célula, a lei de Laplace, ou seja, a Eq.(1.19) descreve a diferença de pressão do fluido 1 e 2 que é diretamente proporcional a tensão superficial dos fluidos e inversamente proporcional ao raio da curvatura dela. Essas equações são essenciais para resolução do nosso problema. Pois estamos partindo de um problema tridimensional que será resolvido em um sistema bidimensional, esse problema usará equações já referenciadas na literatura.

Com as limitações matemáticas e computacionais tentamos retratar esse fenômeno o mais parecido possível com o problema real com isso utilizamos ferramentas matemá-

---

ticas para descrever as condições de contorno do problema. A Eq.(1.22) é a condição da velocidade dos fluidos 1 e 2 dentro da célula, essas equações servem para descrever as condições de fronteira livre do nosso problema.

No próximo capítulo mencionaremos a célula de Hele-Shaw girante assim como a lei de Darcy onde inserimos o termo de rotação, velocidade angular e eixo de rotação.



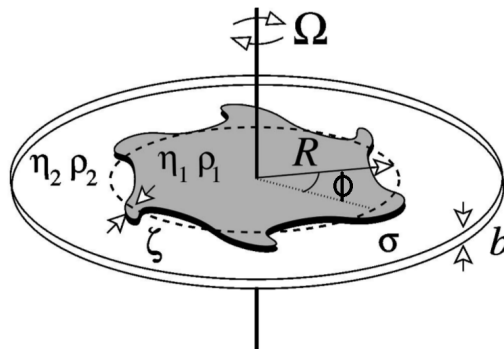
# A CÉLULA DE HELE-SHAW GIRANTE

## 2.1 Revisão da literatura

O estudo do célula de Hele-Shaw girante pode nos trazer informações preciosas sobre como prever o comportamento e a forma geométrica da interface entre dois fluidos, sem a necessidade de inserir um outro fluido por injeção. Podemos descrever seu comportamento conforme a figura 2.1.

Na célula Hele-Shaw girante temos dois fluidos viscosos com valores de densidades e viscosidades diferentes onde um fluido mais denso desloca o de menor densidade por força centrífuga. Essa força não-inercial é gerada no referencial girante pela velocidade angular e diferença de densidade, e é proporcional à distância radial ao eixo de rotação.

**Figura 2.1:** Diagrama esquemático da célula de Hele-Shaw girante com dois fluidos de densidades diferentes representada por  $\rho$ ,  $\Omega$  é a velocidade angular,  $\eta$  a viscosidade,  $\phi$  o ângulo azimutal,  $R$  é o raio da interface circular que separa os fluidos,  $\sigma$  a tensão superficial,  $b$  o espaçamento entre as placas e  $\zeta$  a perturbação na interface circular.



Fonte: Gadêlha 2007.

O problema consiste em uma gota de fluido inicialmente circular, cercada por um fluido de menor densidade, confinado no espaço estreito entre duas placas de vidro paralelas, a célula de Hele-Shaw, que gira em torno de um eixo perpendicular ao plano do escoamento.

As instabilidades interfaciais surgem quando pequenas perturbações são amplifica-

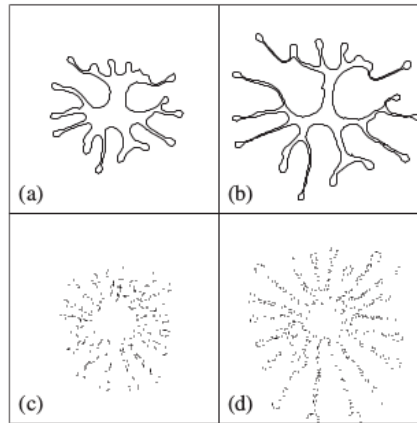
das por forças centrífugas que atuam sobre a interface fluido-fluido conforme a figura 2.1. Este problema é uma variação da instabilidade clássica de Saffman-Taylor[9], na qual as perturbações na interface agora surgem principalmente devido à diferença de densidade entre os fluidos, ou seja, o crescimento das perturbações  $\zeta$  na interface não são mais provocadas pela injeção de fluidos e pela diferença de viscosidade entre elas, mas sim causadas pela rotação e diferença de densidade.

O estudo do desenvolvimento de padrões interfaciais na célula de Hele-Shaw girante nos últimos anos, tem sido abordado por diversos grupos que se empenharam no estudo analítico do problema, [16, 18, 27, 28] e investigaram as instabilidades interfaciais de fluidos imiscíveis em uma célula girante. Uma melhor investigação do comportamento de mudança na interface foi realizada com uma análise teórica e experimental[18, 29, 30]. Essas investigações trouxeram grandes avanços teóricos para a análise de perturbações lineares e não-lineares. As simulações numéricas vieram como solução para problemas complexos, nos casos não-lineares ou envolvendo limite de baixo contraste de viscosidade [31] em situações que os fluidos apresentam valores de contraste de viscosidade negativo[28]. Alguns pesquisadores investigaram as propriedades reológicas<sup>1</sup> e adesivas durante a deformação de tração de um ferrofluido, de formação de cadeia confinada submetido a um campo magnético radial [32]. Há uma analogia entre a força magnética produzida pelo campo radial e a força centrífuga, pois ambas são proporcionais à distância radial. Em ambos os casos, para um ferrofluido submetido a um campo radial ou um fluido denso submetido à força centrífuga, ocorre uma desestabilização da interface e a formação de padrões de certa maneira semelhantes. Também foi estudado o caso em que o campo magnético é azimutal e produzido por um fio por onde passa uma corrente elétrica [33]. Neste caso o fluido externo é um fluido não-magnético, enquanto o fluido interno é um ferrofluido, o campo magnético desempenha um papel estabilizante e se opõe à força centrífuga que empurra o fluido para fora devido à diferença de densidade.

O grupo de Ortín e Casademunt deu grandes contribuições para a pesquisa na célula de Hele-Shaw girante, pois foram os primeiros a realizar análises teóricas e experimentais do problema [16, 17, 29, 30, 31, 34]. Estes experimentos podem ser vistos na figura 2.2, para duas combinações de fluidos distintos e em dois intervalos de tempo diferentes. Na Fig. 2.2(a) temos dois fluidos de viscosidade bastante distintas no instante inicial da dinâmica de crescimento dos dedos, e em (b) vemos a interface formada pelos fluidos num tempo posterior. Já as Figs. 2.2(c) e (d) mostram dois fluidos com viscosidades ligeiramente distintas em dois instantes de tempos diferentes. O parâmetro adimensional que descreve estas diferentes situações experimentais é o contraste de viscosidade  $A = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2}$ , onde  $\eta_1$  é a viscosidade do fluido interno e  $\eta_2$  é a viscosidade do fluido externo. Na figura 2.2 a) vemos dois fluidos com  $A$  próximo ou igual a 1(alto contraste), formando dedos, e em b) temos a interface num tempo posterior, onde visualizamos o crescimento

<sup>1</sup>Ciência que estuda as deformações e escoamentos da matéria.

**Figura 2.2:** Experimentos na célula de Hele-Shaw girante onde pode ser vista a evolução temporal da interface entre os fluidos. Em (a) e (b) temos experimentos realizados com intervalos de tempos diferentes e um alto contraste de viscosidade ( $A = 1$ ), enquanto em (c) e (d) temos baixo contraste viscoso ( $A < 1$ ) com intervalos de tempo diferentes.



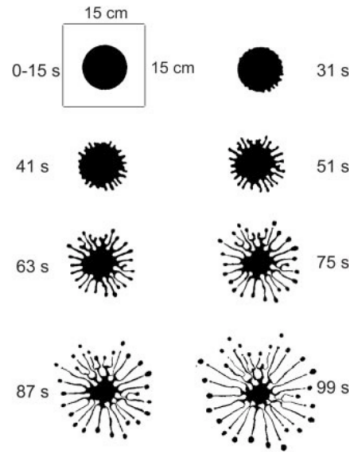
Fonte: Folch (2009).

de gotas satélites nas pontas dos dedos mas sem desprendimento. Para o caso c) com  $A < 1$  (baixo contraste), visualizamos os dedos e pequenas gotas satélites começando a se desprender, e em d) num tempo mais avançado essas gotas se desprendem dos dedos. Os diversos trabalhos desenvolvidos pelo grupo de Ortín e Casademunt foram de grande contribuição para o entendimento do problema de onde pode ser tirada uma série de resultados muito interessantes no assunto, envolvendo altos [29] e baixos [30] contrastes de viscosidade entre os fluidos e ainda o deslocamento radial de um anel girante, nos regimes estáveis e instáveis [34].

Na célula de Hele-Shaw girante podemos encontrar uma série de formas geométricas e padrões que são formados ao rotacionar os fluidos confinados na célula, esses gerados pela força centrífuga que desestabiliza a interface entre o fluido interno (de dentro) e o externo (de fora). Esta desestabilização ocorre na interface entre os fluidos, fazendo o fluido interno, que é o de maior densidade, formar dedos, que podem se desprender formando gotas redondas nas pontas dos dedos, conforme pode ser visto na figura 2.2 em (c) e (d). Neste caso temos uma formação de gotas na extremidades dos dedos, formada ao rotacionar a célula. Dependendo da instabilidade provocada, essas gotas podem se desmembrar da maior porção do fluido, caracterizando um fenômeno chamado de *pinch-off*, conforme pode ser visto na figura 2.3. É característica de gotas satélites que a diferença da geometria radial por injeção, onde ocorrem sucessivas bifurcações nas pontas dos dedos.

A bifurcação dos dedos não acontece em células girantes, porém vemos competição entre os dedos viscosos que crescem na interface. Pode-se dizer que a competição dos dedos está associada à variabilidade de comprimento entre as estruturas dos dedos [28]. O fluido de dentro cresce em direção ao fluido de fora, ou o fluido de fora penetra em direção ao

**Figura 2.3:** Evolução temporal do padrão formado em um experimento em célula de Hele-Shaw girante. As imagens mostram uma sequência temporal da esquerda para a direita e de cima para baixo. Note o desmembramento de gotas satélites nos estágios finais da dinâmica.

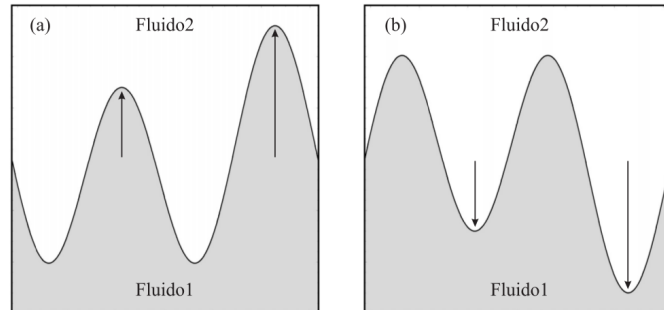


Fonte: Alvarez-Lacalle (2004).

fluido de dentro. Essa descrição de competição entre os fluidos, não é capturada pela análise da estabilidade linear. Como solução deve-se utilizar o regime fracamente não-linear para analisar a dinâmica da competição entre os dedos. No regime fracamente não-linear observamos algumas características morfológicas na interface, onde vemos que o contraste de viscosidade  $A$  (parâmetro adimensional do contraste de viscosidade que varia de  $-1 \leq A \leq 1$ ) tem um papel fundamental no comportamento da competição dos dedos. Essa competição pode ser analisada pelo destaque na diferença de tamanho dos dedos no fluido interno ou externo. Os tamanhos dos dedos formados pelo fluido interno é medido do centro da gota à ponta dos dedos. E para o fluido externo o tamanho dos dedos é medido do centro da gota ao vale da interface. Pode-se demonstrar que para valores em que  $A < 0$ , os dedos formados pelo fluido interno (fluido 1), que podemos chamar de dedos que saem, competem e assumem tamanhos diferentes entre si. E no caso em que  $A > 0$  o fluido externo (fluido 2), que forma os dedos que entram na interface, crescem em direção ao fluido interno e assumem tamanhos diferentes entre si. Essa relação de competição pode ser vista na figura 2.4 através das setas que apontam o sentido do crescimento dos dedos. Quando o contraste de viscosidade assume o valor  $A = 0$ , visualizamos que os dedos dos fluidos interno e externo não apresentam competição entre si [18].

A circunstância de termos dois valores de viscosidade parecidos nos dois fluidos. Mostrará uma inexistência de competição entre os dedos no regime fracamente não-linear, ou seja, indicará uma ausência dinâmica de destaque entre os dedos. Notavelmente, este importante efeito, que não poderia ser acessado usando a análise puramente linear, já é detectado na mais baixa ordem não-linear. Outros parâmetros de interessante como a tensão superficial  $B$ , e o espaçamento  $b$  também serão importantes nas características morfológicas na interface fluido-fluido para o regime fracamente não-linear [7]. Porém em

**Figura 2.4:** Descrição esquemática da competição entre os dedos em a)  $A < 0$  os dedos do fluido de dentro competem entre si, em b)  $A > 0$  os dedos do fluido de fora competem e assumem tamanhos distintos entre si.



Fonte: Gadêlha (2007).

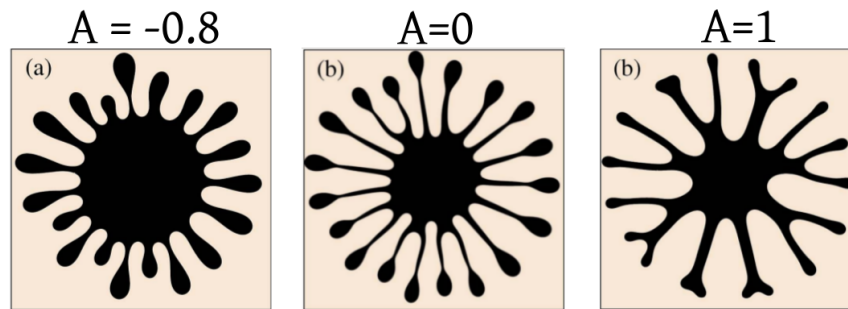
todo regime que analisaremos nesta dissertação, o parâmetro  $b$  não desempenha nenhum papel na nossa dinâmica desde que ele seja pequeno o suficiente para que a aproximação do perfil de velocidades parabólico seja válida. Neste trabalho não derivaremos a parte analítica no regime fracamente não-linear, apenas discutiremos qualitativamente a dinâmica de competição dos dedos que está além da análise de estabilidade linear.

Para o estudo analítico do sistema, consideramos a célula de Hele-Shaw girante onde a evolução da interface foi obtida em termos dos parâmetros (adimensionais) de controle: contraste de viscosidade  $A$  e tensão superficial adimensional  $B$ . Fizeram-se diversos estudos tanto teóricos como experimentais variando os valores dos parâmetros de controle [26, 27, 30]. Algumas das principais descobertas da competição dos dedos [35], foram feitas analisando todos aspectos dos parâmetros envolvidos no problema para o regime fracamente não-linear. Nesses estudos ignoraram a influência do contraste de viscosidade no início dos efeitos não-lineares, tal análise foi realizada por Gadêlha e Miranda [18] em alguns aspectos da interface descontínua que foram levadas em conta.

Devido a atratividade pela área das células girantes, foram obtidos em pesquisas experimentais e teóricas uma grande variedade de padrões dos dedos, onde os casos eram para fluido interno menos viscoso em relação ao fluido externo. Miranda e Alvarez-Lacalle [28] realizaram simulações numéricas de dois fluidos imiscíveis em que fluido interno era menos viscoso em relação ao fluido externo na célula de Hele-Shaw girante obtendo diferentes morfologias para a interface fluido-fluido. Eles perceberam que essa variação do contraste de viscosidade afeta visivelmente o comportamento dos dedos e principalmente o seu comprimento. Nesse mesmo estudo confirmaram o trabalho realizado por Gadêlha e Miranda [18] em que eles verificaram nos primeiros estágios de rotação uma competição dos dedos, esses fenômenos foram revelados nas simulações assim como o previsto na análise fracamente não-linear.

Na figura 2.5 temos três valores de viscosidades diferentes com  $A = -0.8$ ,  $A = 0$  e  $A = 1$  para  $B = 5.0 \cdot 10^{-4}$  das simulações numéricas realizadas por Miranda e Alvarez-

**Figura 2.5:** Experimento numéricos mostrando a formação típica de dedos na célula girante para três valores do contraste de viscosidade,  $A = -0.8$ ,  $A = 0$  e  $A = 1$ .



Fonte: Gadêlha (2008).

Lacalle. Analisando a figura 2.5 na parte a) vemos uma penetração dos fluidos de dentro que podemos chamar de dedos que saem e o fluido externo que são os fluidos de fora. A competição entre os dedos que saem ocorre quando nosso parâmetro adimensional de contraste de viscosidade é  $A = -1$ . Na parte b) da figura 2.5 observamos um equilíbrio no tamanho dos dedos em  $A = 0$ , quase não se observa uma competição entre eles, pois não ocorre uma variação de tamanho dos dedos, isso pode ser analisado com os que entram e os que saem. Esse resultado já eram esperado, pois esse estudo já está bem estabelecida para a célula de Hele-Shaw retangular [36, 37, 38, 39, 40]. Gadêlha e Miranda [18] sugeriram para a célula girante que ocorre a competição dos dedos, através de uma análise não-linear, que foi reforçado pelo estudo numérico realizado novamente por Miranda e Alvarez-Lacalle [28]. Na figura 2.5 em c) visualizamos os fluidos que entram penetrando o fluido interno. Se observamos no centro da figura notamos que ocorre uma penetração na região do fluido interno formando vales.

Essa competição entre os dedos dos fluidos sempre ocorrerá quando temos um fluido menos viscoso penetrando o mais viscoso, independente se os dedos estão entrando ou saindo. Podemos dizer que ocorre uma indicação clara da competição dos dedos que são determinadas pela viscosidade fundamentalmente em termos não-lineares, essa competição é semelhante a instabilidade de Saffman-Taylor [6] onde também esse fenômeno se deve a viscosidade dos fluidos.

Os resultados numéricos obtidos por Miranda e Alvarez-Lacalle [25], reforçam que o contraste de viscosidade  $A$  de fato influencia a competição entre os dedos e governa a morfologia dos padrões, de tal maneira que ao variamos o parâmetro entre 1 a -1 os padrões formados apresentarão comprimentos e larguras diferentes conforme as predições analíticas de Gadêlha e Miranda [18].

## 2.2 Lei de Darcy para célula de Hele-Shaw girante

Apesar do número considerável de estudos teóricos e experimentais sobre a célula de Hele-Shaw girante ainda há espaço para entender o surgimento de deformações na interface centrífugo-induzida e seus, vários efeitos dinâmicos e morfológicos. Nesta seção vamos mostrar como a instabilidade na interface entre dois fluidos viscosos na célula de Hele-Shaw girante pode ser formulada analiticamente. Considerando o referencial girante:

$$\rho_j \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} + (\mathbf{u}_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_j \right] = -\nabla p_j + \eta_j \nabla^2 \mathbf{u}_j + \rho_j \Omega^2 r \hat{r}, \quad (2.1)$$

onde  $\Omega$  denota a velocidade angular de rotação da célula,  $r$  é a distância ao eixo de rotação e  $\hat{r}$  é o vetor unitário na direção radial.

A fim expressar soluções em um referencial girante na célula de Hele-Shaw, é necessário alterar o balanço de momento angular na equação de Navie-Stokes. Agora inserindo os termos para o referencial girante no segundo termo da Eq.(1.7) temos:

$$\rho_j \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} + (\mathbf{u}_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_j \right] = -\nabla p_j + \eta_j \nabla^2 \mathbf{u}_j + \rho_j \Omega^2 r \hat{r}. \quad (2.2)$$

Sob as condições da célula de Hele-Shaw, podemos desprezar os termos inerciais do lado esquerdo da equação de Navier-Stokes e expressar as componentes da velocidade  $\mathbf{u}_{jr}$  e  $\mathbf{u}_{j\phi}$  em coordenadas polares:

$$\eta_j \frac{\partial^2 u_{jr}}{\partial z^2} = \frac{\partial p_j}{\partial r} - \rho_j \Omega^2 r, \quad (2.3)$$

e para  $\hat{\phi}$

$$\eta_j \frac{\partial^2 u_{j\phi}}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial p_j}{\partial \phi}, \quad (2.4)$$

onde  $\mathbf{u}_{jz} \simeq 0$ , pois  $p_j$  é independente de  $z$ .

Resolvendo a Eq.(2.3) para  $\hat{r}$  de maneira similar ao que foi feito na seção (1.2), temos:

$$\eta_j u_{jr} = z \frac{(z-b)}{2} \left[ \frac{\partial p}{\partial r} - \rho_j \Omega^2 r \right]. \quad (2.5)$$

e para  $\hat{\phi}$  resolvendo a Eq.(2.4) temos:

$$\eta_j u_{j\phi} = z \frac{(z-b)}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} \right]. \quad (2.6)$$

Então, pegando as Eq.(2.5) e Eq.(2.6) podemos reescrevê-las juntas da seguinte

forma:

$$\eta_j u_j(r, \phi, z) = \frac{1}{2} z(z - b) [\nabla p_j(r, \phi) - \rho_j \Omega^2 \hat{r}], \quad (2.7)$$

Nós definimos nossa coordenada como polar satisfazendo o sistema  $(r, \phi, z)$  de tal forma que sua origem esteja localizada no centro da gota efetivamente bidimensional (localizada no plano  $x-y$ ), enquanto a célula gira em torno do eixo  $z$ . Além disso, as placas da célula estão localizadas em  $z = 0$  e  $z = b$ . Finalmente realizando uma média transversal da Eq.(2.7) na direção  $z$ , temos:

$$\mathbf{v}_j = -\frac{b^2}{12\eta_j} [\nabla p_j - \rho_j \Omega^2 \hat{r}]. \quad (2.8)$$

onde  $\mathbf{v}_j$  e  $p_j$  representam a velocidade e pressão efetivamente bidimensional do problema. A equação do sistema expressa o campo de velocidade bidimensional dado pela lei de Darcy

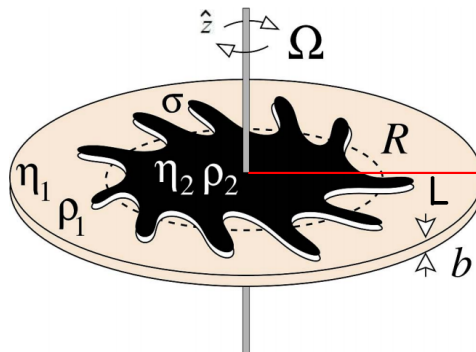
$$\mathbf{v}_j = -\frac{b^2}{12\eta_j} \nabla \left[ p_j - \frac{\rho_j \Omega^2 r^2}{2} \right], \quad (2.9)$$

que é usada para descrever o escoamento dos fluidos no interior da célula de Hele-Shaw girante. O problema fica completamente especificado ao incluirmos as condições de contorno na interface entre os fluidos dadas pelas Eqs.(1.19) e (1.20).

## 2.3 Análise perturbativa linear

Em geral não é possível obter soluções analíticas completas para a evolução da interface entre os fluidos e faz-se necessária uma análise perturbativa do crescimento de dedos na interface. Nesta seção, destacaremos alguns aspectos da análise de perturbação linear da interface.

**Figura 2.6:** Diagrama esquemático da célula de Hele-Shaw girante.



Fonte: Gadêlha (2008).



Consideraremos uma célula circular de Hele-Shaw com raio  $L$  (na direção radial) e espessura  $b$  (na direção  $z$ ), contendo dois fluidos com viscosidades distintas ( $\eta_1, \eta_2$ ) e densidades ( $\rho_1, \rho_2$ ) conforme a figura 2.6. O fluido interno possui um volume constante, onde  $R$  é o raio não-perturbado ambos os fluidos são separados por uma interface imiscível com a tensão superficial  $\sigma$  e consideramos que  $L \gg R$ . É conveniente usar a formulação do problema em termos da função corrente  $\psi$  definida por  $\mathbf{v} = \nabla \times \psi \hat{z}$ , onde  $\mathbf{v}$  é a velocidade do fluido e  $\hat{z}$  é a direção perpendicular das placas. A função da corrente é harmônica, mas, ao contrário do campo de pressão,  $\psi$  é contínua através da interface. Em termos da função corrente, o problema de limite livre é totalmente especificado pelas seguintes equações governantes:

$$\nabla^2 \psi = 0, \quad (2.10)$$

que vem da condição de incompressibilidade. A condição de incompressibilidade dos dois líquidos  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , leva à equação de Laplace para a função corrente no volume.

Para completar o conjunto de equações para o problema de fronteira livre em duas dimensões, devemos fornecer condições de fronteira cinemática e dinâmica na interface. As duas condições de contorno consideradas geralmente são, em primeiro lugar, a continuidade da velocidade normal na interface

$$v_n = \hat{n} \cdot \mathbf{v}_1 = \hat{n} \cdot \mathbf{v}_2, \quad (2.11)$$

e, em segundo lugar, uma relação linear entre o salto de pressão local na interface e sua curvatura da Eq.(1.19) temos,

$$p_1 - p_2 = \sigma \kappa, \quad (2.12)$$

onde  $\sigma$  é a tensão interfacial entre os dois líquidos e  $\kappa$  é a curvatura local da interface considerada uma linha unidimensional.

Reescrevendo essas condições de contorno em termos da função corrente, temos que

$$\partial_s \psi |_{in} = \partial_s \psi |_{out} = -v_n, \quad (2.13)$$

que vem da condição cinemática, e

$$\partial_n \psi |_{out} - \partial_n \psi |_{in} = \Gamma, \quad (2.14)$$

que vem da lei de Darcy e condição de pressão, onde  $s$  e  $n$  são coordenadas tangenciais e normais para a interface, respectivamente.

A magnitude do salto de velocidade tangencial é a força  $\Gamma$  da vorticidade singular

na interface,

$$\Gamma \equiv \gamma + A(\partial_n \psi|_{in} + \partial_n \psi|_{out}), \quad (2.15)$$

onde  $\Gamma$  é dada pela descontinuidade tangencial da velocidade ao longo da interface e sua parte local é dada por

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{b^2}{12(\eta_1 - \eta_2)} \frac{\partial}{\partial s} \left[ \sigma \kappa - (\rho_1 - \rho_2) \frac{\Omega^2 r^2}{2} \right], \quad (2.16)$$

sua versão adimensional é dada por

$$\frac{\gamma}{2} \equiv (B \nabla \kappa - \mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{s}}, \quad (2.17)$$

com  $\kappa$  sendo a curvatura no plano (para um círculo  $\kappa > 0$ ) e  $\mathbf{r}$  a coordenada radial. A forma explícita da vorticidade é o que define especificamente as forças do problema: tensão superficial e a força centrífuga. As equações governantes (2.10), (2.13) e (2.14) que são usadas como condição de contorno já estão em sua forma adimensional, assim como as equações (2.15) e (2.17).

Temos dois parâmetros que usamos em nosso problema para definir as características da nossa gota: tanto o tamanho da nossa perturbação como os tamanhos dos dedos. O contraste de viscosidade é responsável pela característica dos dedos na morfologia em que os dedos crescem, a forma como eles serão. A tensão superficial define o número de dedos, de maneira que sua força de atração entre as moléculas, quando maior ela for menor o número de dedos.  $B$  como parâmetro adimensional para a tensão superficial

$$B = \frac{\sigma}{(\rho_1 - \rho_2) \Omega^2 R^3}, \quad (2.18)$$

temos  $\rho$  que define nossa densidade,  $\eta$  que é nossa viscosidade.  $A$  é o contraste de viscosidade representado na seguinte equação:

$$A = \left( \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \right). \quad (2.19)$$

Vamos apresentar os métodos analíticos que descrevem o crescimento das perturbações e os parâmetros envolvidos, examinando importantes características morfológicas na interface fluido-fluido. Utilizaremos das equações (2.10), (2.13) e (2.14) como formulação analítica dos problemas na célula de Hele-Shaw girante. O problema consiste em determinar a evolução do tempo da interface entre dois fluidos viscosos e imiscíveis dentro de uma célula Hele-Shaw girante. Isso pode ser feito analiticamente somente de maneira aproximada, portanto, o posterior trabalho numérico geralmente é necessário. Para fazer a análise de perturbação linear, a interface perturbada é descrita como  $\mathfrak{R}(\theta, t) = R +$

$\zeta(\theta, t)$ , onde  $R$  é o raio não perturbado da gota inicialmente circular, e  $\zeta(\theta, t)$  representa a perturbação na interface. Nós expandimos em série de Fourier a perturbação na interface como

$$\zeta(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n(t) e^{in\theta}, \quad (2.20)$$

com amplitudes de Fourier  $\zeta_n(t)$  e números de onda azimutais discretos  $n$ . Ao inserir esta condição nas equações governantes do problema (2.10)-(2.14) e expandindo todos os termos até a primeira ordem em  $\zeta$  é possível obter a expressão [18, 27]

$$\dot{\zeta}_n = \lambda(n)\zeta_n, \quad (2.21)$$

onde  $\zeta_n$  representa a amplitude de fourier de um modo de  $n$ . Resolvendo Eq.(2.21) temos como resultado:

$$\zeta_n(t) = \zeta_n(0) e^{\lambda(n)t}, \quad (2.22)$$

$\lambda(n)$  é a taxa de crescimento exponencial,  $\zeta_n(0)$  a perturbação inicial, e  $t$  como tempo adimensional. A taxa de crescimento linear em sua forma dimensional é dada por

$$\lambda(n) = \bar{\Omega}n - \frac{\bar{\sigma}}{R^3}n(n^2 - 1), \quad (2.23)$$

sendo  $\bar{\Omega}$  representado por

$$\bar{\Omega} = \frac{\Omega^2 b^2 (\rho_1 - \rho_2)}{12 (\eta_1 + \eta_2)}, \quad (2.24)$$

e  $\bar{\sigma}$  como

$$\bar{\sigma} = \frac{b^2 \sigma}{12 (\eta_2 + \eta_1)}. \quad (2.25)$$

Discutimos a seguir como adimensionalizar o problema utilizando a Eq.(2.23). O parâmetro de tensão superficial  $B$  é uma razão entre as efeitos de capilaridade com a centrífuga na Eq.(2.21) os comprimentos são adimensionalizados por  $R$ , e o tempo por  $R/U$ , onde

$$U = [b^2 R (\rho_1 - \rho_2) \Omega^2] / 12 (\eta_1 - \eta_2), \quad (2.26)$$

e chamando

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda R}{U}. \quad (2.27)$$

Ao multiplicar o  $R/U$  nos dois lados da Eq.(2.23) temos que

$$\bar{\lambda}(n) = \left[ \frac{\Omega^2 b^2}{12} \frac{\rho_1 - \rho_2}{\eta_2 + \eta_1} n - b^2 \frac{\sigma}{\eta_2 + \eta_1} n(n^2 - 1) \right] \times \frac{R}{U}. \quad (2.28)$$

Ao trabalhar nos termos da Eq.(2.28) teremos

$$\bar{\lambda}(n) = \left[ n - \frac{\sigma n}{R^3 \Omega^2 (\rho_1 - \rho_2)} (n^2 - 1) \right], \quad (2.29)$$

e por fim encontramos a expressão para a taxa de crescimento adimensional

$$\bar{\lambda}(n) = |n| [1 - B(n^2 - 1)], \quad (2.30)$$

onde  $\bar{\lambda}$  denota a taxa de crescimento linear,  $n$  denota o modo de Fourier da perturbação e o parâmetro  $B$  é a tensão superficial adimensional. Observamos que uma característica importante é sua dependência somente no parâmetro  $B$ , o que indica que sua instabilidade será governada pela razão entre tensão superficial e força centrífuga. Se considerarmos a situação comum da água e óleo em que o fluido interno é mais denso, haverá um raio crítico no qual a interface se torna instável. Ao girar o fluido mais denso teremos o menos denso formando os dedos e a força centrífuga compete com o efeito estabilizador da tensão superficial que depende do raio  $R$ , de modo que a competição dos dois termos favorecerá a instabilidade para grandes  $R$ .

Na seção seguinte discutiremos a taxa de crescimento linear com mais detalhes e por simplicidade, omitiremos a barra na Eq.(2.30) e nos referiremos à  $\lambda(n)$  como taxa de crescimento linear adimensional.

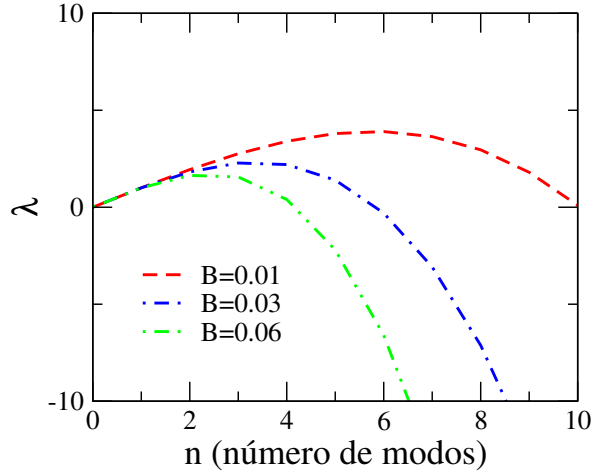
## 2.4 Regime linear

A taxa de crescimento linear governa o crescimento exponencial ou decréscimo das amplitudes de fourier da perturbação quando estas são pequenas, isto é, para tempos curtos com uma única evolução dos dedos.

A previsão da análise de perturbação linear é mostrada na figura (2.7) onde temos a taxa de crescimento linear adimensional  $\lambda(n)$  em função do modo perturbativo  $n$ . A figura nos mostra que o perfil da curva  $\lambda(n)$  é parabólica e modos perturbativos com altos valores de  $n$  são estáveis. Através da Eq.(2.30) podemos determinar o modo de maior crescimento linear, utilizando a modo crítico

$$n_c = \sqrt{1 + \frac{1}{B}}. \quad (2.31)$$

**Figura 2.7:** Taxa de crescimento linear  $\lambda(n)$  em função de  $n$ , para  $B = 0.01$ ,  $B = 0.03$  e  $B = 0.06$



Fonte: Autor.

assim podemos chamar  $n_{m\acute{a}x}$  da seguinte expressão

$$n_{m\acute{a}x} = \frac{n_c}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1 + 1/B}{3}}. \quad (2.32)$$

Podemos ver pela Eq.(2.21) que quando  $\lambda(n)$  é positivo para um dado  $n$ , este modo de Fourier cresce exponencialmente e quando  $\lambda(n)$  é negativo o modo decresce exponencialmente. Os modos que crescem vão determinar o número de dedos predominante do padrão.

A figura 2.7 descreve a taxa de crescimento linear em função de  $n$  para três valores distintos de  $B$ , dados por (0.01, 0.03 e 0.06). Notamos que valores mais altos da tensão superficial  $B$  fazem com que a banda de modos instáveis diminua e que  $n_{m\acute{a}x}$  se desloque para valores menores. Pode-se verificar na Eq.(2.30) que  $\lambda(n)$  é completamente insensível a mudanças em  $A$ . Então espera-se que examinando a evolução temporal de interface para um dado valor de  $A$  e  $B$  o número de dedos predominante é dado por  $n_{m\acute{a}x}$  Eq.(2.32). Calculando para  $B = 0.01$  temos como resultado para  $n_{m\acute{a}x} = 5.8$ , ou seja, aproximadamente 6. Para  $B = 0.03$  temos que  $n_{m\acute{a}x} = 3.38$  uma pequena aproximação do valor 4 e para  $B = 0.06$  o  $n_{m\acute{a}x} = 2.42$  um valor próximo de 3 que podemos comparar com a figura 2.7 para ambos os valores de  $B$ . De fato, experimentos na célula de Hele-Shaw girante concordam com as previsões teóricas [30].

Neste trabalhos exploremos condições onde o fluido interno é o mais denso assim a instabilidade da interface é impulsionada pelas diferença de densidade entre os fluidos. O número de dedos está também relacionado a velocidade de rotação da placa: ao ser aumentada a rotação temos conseqüentemente um maior número de dedos. O valor de  $B$  é inversamente proporcional à rotação. Se a velocidade é menor,  $B$  tende a ser maior e o

número de dedos menor.

Na Eq.(2.32) temos o modo de Fourier com a maior taxa de crescimento e portanto ele deve determinar o número de dedos predominante do padrão. Apesar de ter uma influência evidente no número típico dos dedos mostrados pela equação acima, o parâmetro  $B$  terá muita influência nos resultados principais apresentados neste trabalho. Nesse estudo utilizamos parâmetros adimensionais ( $B$  e  $A$ ) com os valores típicos das quantidades físicas correspondentes usadas em experimentos existentes na célula de Hele-Shaw girante, principalmente aqueles realizados por Ortín, Casademunt e colaboradores [27, 28, 29, 30].

Uma comparação detalhada entre a previsão linear e experimentos no trabalho é realizada por Ortín e Casademunt [30]. No experimento a investigação é feita com aparatos extremamente calibrados, placas de vidro circulares, onde a célula é montada em cima de uma plataforma rotativa movida por um motor DC e um redutor para manter velocidades angulares altamente estáveis, independentemente das flutuações de carga. A célula é nivelada com precisão mesmo nas velocidades angulares mais altas. Um nivelamento adequado da célula é crítico durante a rotação. Após os experimentos, a análise de estabilidade linear é realizada fazendo o comparativo do número predominante de dedos com a Eq.(2.32), que mostra o número máximo de dedos. Nos experimentos é visível um valor grande para o número máximo de dedos uma vez que o fluido interno é mais denso que o externo. Assumimos que o número de ondulações observadas no início da instabilidade, é tipicamente da ordem de  $n_{max}$ . A validade desta suposição depende de duas propriedades descontroladas das condições iniciais, a saber, que o ruído é suficientemente fraco e que sua amplitude não favorece sistematicamente alguns modos sobre outros. A comparação do número de ondulações e  $n_{max}$  não é, portanto, apenas uma prova da relação de dispersão linear, mas, na verdade, essas duas premissas sobre o ruído externo na condição inicial. Os padrões com conservação de massa exibem um número de onda um pouco menor do que o previsto analiticamente porque a célula leva um tempo da ordem de 1s para alcançar a velocidade estável.

No regime linear, o contraste de viscosidade não desempenha um outro papel além de definir a escala de tempo da instabilidade e não afeta o padrão emergente, que depende apenas da proporção de forças centrífugas para capilares [41, 42, 43, 44].

# IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE *PHASE-FIELD*

## 3.1 O método de *phase-field*

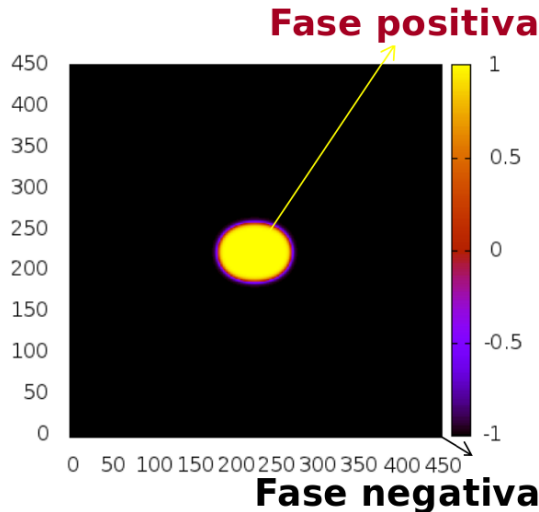
Os métodos de interface difusa hoje são bastante populares como ferramenta de modelagem física e computacional de processos multifásicos tais como solidificação e escoamento de fluidos. Dentre eles, destacamos o método de *phase-field*, ou campo de fase, que é geralmente empregado em problemas de formação de padrão de sistemas complexos. Do ponto de vista matemático, utilizaremos este método para resolver numericamente nosso problema de fronteira livre no escoamento entre dois fluidos viscosos imiscíveis e confinados.

Na prática o campo de fase descreverá o movimento da fronteira entre os fluidos, ou seja, a dinâmica da interface produzida pelo escoamento de ambos os líquidos. O método possui a vantagem de evitar o rastreamento da interface que está se movendo, introduzindo um campo auxiliar análogo a um parâmetro de ordem que localiza a interface e cuja dinâmica é acoplada aos outros campos físicos através de um conjunto apropriado de equações diferenciais parciais. Desta forma, as condições de contorno do problema são automaticamente implementadas na interface e todo o sistema é tratado como um granel.

Em modelos de campo de fase, um parâmetro de ordem não conservado, o campo de fase  $\theta$ , é introduzido para descrever o comportamento de cada fase. Ele possui valores constantes no interior das fases (por exemplo, neste trabalho,  $\theta = +1$  em uma fase e  $\theta = -1$  na outra) e varia suavemente na região da interface difusa ( $-1 < \theta < +1$ ), porém de maneira rápida como uma tangente hiperbólica, conforme mostra a figura 3.1.

A característica mais atraente do método de campo de fase é que todas as equações governantes podem ser resolvidas em todo o domínio numérico sem qualquer conhecimento a priori da localização das interfaces. O rastreamento de interface é completamente evitado e as alterações de topologia são tratadas naturalmente sem a necessidade de procedimentos especiais. Embora a curvatura da interface e a direção normal não estejam necessariamente explicitadas, o método do campo de fase é especialmente adequado para problemas nos quais o movimento da interface depende de gradientes de um campo externo normal à interface e à curvatura local da interface. Uma visão geral da aplicação

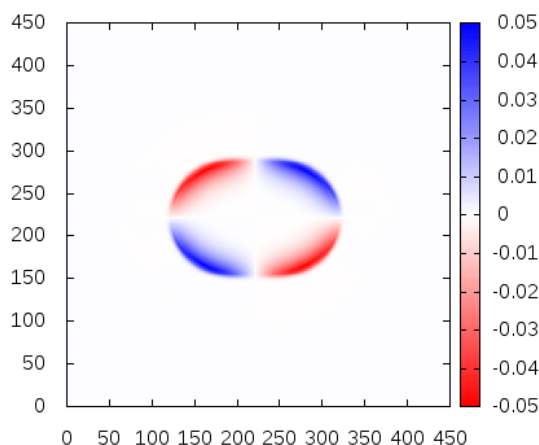
**Figura 3.1:** Diagrama esquemático da célula de Hele-Shaw girante com dois fluidos de densidades e viscosidades diferentes onde temos o fluido amarelo como fase +1(positiva) e o fluido preto como fase -1(negativa).



Fonte: Autor.

da modelagem de campo de fase em física de matéria condensada pode ser encontrada em [45]. A ideia fundamental de rastrear e capturar adequadamente a dinâmica da interface através de teorias de campo de fase foi posteriormente generalizada e adaptada a cenários de fluxo de fluidos multifásicos [46].

**Figura 3.2:** Podemos visualizar o crescimento dos dedos e entender pela escala de cores o lado positivo e o negativo. O lado direito que cresce em sentido positivo ao longo de  $y$  e o lado esquerdo cresce em sentido negativo ao longo de  $y$ .



Fonte: Autor.

As taxas de variação da função corrente  $\psi$  descrevem a velocidade dos fluidos em qualquer ponto da célula girante, podendo as componentes da velocidade serem positivas ou negativas. Na figura 3.2 podemos observar as velocidades dos fluidos através de variações na escala de cores que se encontra do lado direito. A cor branca indica  $\psi = 0$ , e



nas regiões brancas onde  $\psi$  é constante temos uma velocidade baixíssima ou desprezível; geralmente isso se dá nas regiões centrais da gota e no fluido externo longe da interface. Uma ilustração deste efeito pode ser feita utilizando o exemplo de uma bolha de ar se movendo na água: nas regiões próximas à interface da bolha a velocidade da água é alta, porém nos pontos mais distantes da bolha a velocidade da água é praticamente nula. A cor vermelha nos fornece um valor de  $\psi$  negativo, enquanto a cor azul representa valores de  $\psi$  positivo. Devido a simetria do problema, o módulo dos valores mais negativos é igual ao módulo dos valores positivos.

Para entender melhor como determinamos a velocidade a partir de  $\psi$  podemos utilizar as equações que relacionam a velocidade com a função corrente

$$\vec{v} = \nabla \times \vec{A}, \quad (3.1)$$

onde  $\vec{A} = \psi(x, y) \hat{z}$ . Abrindo os termos em  $\vec{A}$  temos

$$\nabla \times \vec{A} = \left[ \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z} \right], \quad (3.2)$$

e considerando que os termos  $A_x$  e  $A_y$  são nulos e que  $A_z = \psi$ ,

$$\nabla \times \vec{A} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \hat{x} - \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \hat{y}. \quad (3.3)$$

A nossa velocidade é dada por

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y}, \quad (3.4)$$

e comparando-a com a Eq. (3.3) temos que

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (3.5)$$

a variação de  $\psi$  ao longo da direção  $y$  nos dá a velocidade dos fluidos na direção  $x$ , e

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3.6)$$

a variação de  $\psi$  ao longo da direção  $x$  nos dá a velocidade dos fluidos na direção  $y$ . Portanto, conforme a figura 3.2, o dedo da direita se move com  $v_x > 0$  (para a direita) e o dedo da esquerda se move com  $v_x < 0$  (para a esquerda).

Nos casos assimétricos podemos ter gotas com dedos em diversas direções e com velocidades distintas nos diversos pontos da interface, dependendo da perturbação na forma da gota. O método de campo de fase resolve o problema de maneira totalmente não-linear, sendo compatível tanto com o regime linear como o não-linear. No capítulo

4 comparamos nossos resultados computacionais com as previsões teóricas para o regime linear.

Teorias variacionais ou termodinâmicas sejam talvez a estrutura teórica mais comum para derivar rigorosamente um funcional de energia em termos de campos de fase. O objetivo comum nessas abordagens é formular tensores de estresse termodinamicamente consistentes e leis de equilíbrio de mesoescala, incluindo o impacto da tensão superficial sobre o equilíbrio do momento, bem como a dinâmica correta da dinâmica interfacial. No entanto, alguns dos modelos de *phase-field* foram obtidos a partir da derivação de equações diferenciais para o campo de fase que convergem para as equações de interface estritamente fina no limite em que a espessura artificial da interface  $\epsilon$  tende a zero. Utilizaremos esta abordagem para integrar numericamente e analisar os diferentes estágios da dinâmica interfacial de nosso sistema. Isso torna o modelo uma ferramenta atraente para estudar problemas que não seriam facilmente viáveis com métodos tradicionais.

Outra maneira de abordar nosso problema seria através de métodos integrais de contorno (*boundary integral methods*) que expressam a dinâmica da interface em termos de equações integro-diferenciais calculada na interface entre os fluidos. A integração numérica dessas equações é bastante elaborada, particularmente em simulações de tempos longos, devido à complexidade e a estabilidade numérica das equações[29]. Portanto, no presente estudo abordaremos somente simulações numéricas através do método de *phase-field* para regime linear.

## 3.2 Equação do *phase-field*

Seguimos a referência [16] e reescrevemos equações que regularizam a interface entre os dois fluidos através de uma interface difusa de espessura  $\epsilon$ . Desta maneira substituímos as equações (2.10)-(2.14) de interface fina pelas equações diferenciais parciais (3.7) e (3.8). A Eq.(3.7) descreve o comportamento da função-corrente  $\psi$  em ambas as fases, e portanto a velocidade dos fluidos. Além disto, a Eq.(3.8) nos fornece a evolução temporal da interface através da função *phase-field*  $\theta$ , que possui valor  $+1$  ( $-1$ ) para o fluido interno (externo), e passa rapidamente de uma fase a outra. Desta maneira evitamos a dificuldade computacional de rastrear a interface entre os fluidos. Portanto, assim é descrita a função corrente em todos os pontos do fluido interno bem como do fluido externo:

$$\tilde{\epsilon} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla^2 \psi + A \nabla \cdot (\theta \nabla \psi) + \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{2\sqrt{2}} \gamma(\theta) (1 - \theta^2), \quad (3.7)$$

onde  $\epsilon$  é a espessura artificial da interface e  $\tilde{\epsilon}$  é um parâmetro numérico para otimização do tempo de relaxação de  $\psi$ . Destacamos que esta equação corresponde às equações de interface fina no limite  $\epsilon \rightarrow 0$ : o primeiro termo do lado direito reproduz a Eq. (2.10); a

continuidade de  $\psi$  ao longo da interface satisfaz a Eq. (2.13); e os últimos dois termos do lado direito reproduzem a condição de contorno da Eq. (2.14). Já o termo  $\gamma(\theta)$  é dado pela Eq. (2.17).

A Eq.(3.8) do *phase-field* representada por  $\theta$  abaixo nos diz como a interface se move:

$$\epsilon^2 \frac{\partial \theta}{\partial t} = f(\theta) + \epsilon^2 \nabla^2 \theta + \epsilon^2 \kappa(\theta) |\nabla \theta| + \epsilon^2 \hat{z} \cdot (\nabla \psi \times \nabla \theta) \quad (3.8)$$

com  $f(\theta) \equiv \theta(1 - \theta^2)$  escolhida para reproduzir os valores  $\theta = \pm 1$  em cada fase. A curvatura generalizada dependente do campo de fase é dada por

$$\kappa(\theta) = -\nabla \cdot n(\theta) \quad (3.9)$$

com

$$n(\theta) = \frac{\nabla \theta}{|\nabla \theta|} \quad (3.10)$$

representando o vetor unitário normal à interface. O vetor tangente da Eq.(2.17) é dado por

$$\hat{s}(\theta) = \hat{n}(\theta) \times \hat{z}. \quad (3.11)$$

A Eq. (3.8) tem grande importância em nosso modelo por representar a fronteira livre entre os fluidos do nosso sistema. O termo do lado esquerdo da equação juntamente com os dois primeiros termos do lado direito nos dão uma dinâmica de relaxação do campo  $\theta$  cuja solução é uma função degrau suavizada, ou seja, em uma dimensão ela corresponde a uma tangente hiperbólica. O último termo do lado direito introduz uma advecção a esta interface suavizada com velocidade dada pela velocidade normal dos fluidos. Por fim, o termo proporcional à curvatura é colocado na equação para manter a conservação da área da gota, pelo menos na ordem dominante da dinâmica.

Nós escolhemos arbitrariamente a fase +1 como interna e -1 como externa. De acordo com essa convenção, o vetor normal da Eq.(3.10) aponta para dentro, o vetor tangente Eq.(3.11) aponta em sentido anti-horário e a curvatura Eq.(3.9) é positiva para um círculo.

A seguir, demonstramos como expressar a curvatura generalizada em termos do campo de fase, que constitui um passo importante para a implementação numérica da Eq. (3.8). Usando a Eq.(3.10) e substituindo em (3.9) temos:

$$\kappa(\theta) = -\nabla \cdot \left( \frac{\nabla \theta}{|\nabla \theta|} \right). \quad (3.12)$$

Substituindo as derivadas temos:

$$\kappa(\theta) = -(\partial_x, \partial_y) \left( \frac{\partial_x \theta}{\sqrt{(\partial_x \theta)^2 + (\partial_y \theta)^2}}, \frac{\partial_y \theta}{\sqrt{(\partial_x \theta)^2 + (\partial_y \theta)^2}} \right). \quad (3.13)$$

Separando os termos de x e y da Eq.(3.13) temos:

$$\kappa(\theta) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial_x \theta}{\sqrt{(\partial_x \theta)^2 + (\partial_y \theta)^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial_y \theta}{\sqrt{(\partial_x \theta)^2 + (\partial_y \theta)^2}} \right). \quad (3.14)$$

Resolvendo para ambos os lados da Eq.(3.14) temos:

$$\kappa(\theta) = -\frac{\partial_x^2 \theta (\partial_y \theta)^2 - \partial_x \theta \partial_y \theta \partial_{xy} \theta}{[(\partial_x \theta)^2 + (\partial_y \theta)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\partial_y^2 \theta (\partial_x \theta)^2 - \partial_x \theta \partial_y \theta \partial_{yx} \theta}{[(\partial_x \theta)^2 + (\partial_y \theta)^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.15)$$

Para a expressão final temos:

$$\kappa(\theta) = -\frac{(\partial_x \theta)^2 \partial_{xx} \theta + 2\partial_x \theta \partial_y \theta \partial_{xy} \theta + (\partial_y \theta)^2 \partial_{yy} \theta}{[(\partial_x \theta)^2 + (\partial_y \theta)^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.16)$$

que explicita curvatura dependente do campo de fase.

### 3.3 Implementação numérica

A modelagem consiste na construção de um conjunto de equações matemáticas que representam os fenômenos e os processos modelados. Portanto, as soluções das equações de um modelo devem apresentar um comportamento compatível com as propriedades do problema físico modelado. A essência dos métodos numéricos está na representação discreta do problema que, em geral, é originalmente modelado como um contínuo. É essa discretização que viabiliza o uso dos computadores no tratamento numérico das equações diferenciais.

A ideia geral do método de diferenças finitas é a discretização do domínio e a substituição das derivadas presentes na equação diferencial por aproximações envolvendo somente valores numéricos da função. Na prática substitui-se as derivadas pela razão incremental que converge para o valor da derivada quando o incremento tende a zero; dizemos então que o problema foi discretizado. Quando o domínio tem mais de uma variável, a ideia acima é aplicada para cada uma delas separadamente.

Para obter a solução numérica do nosso problema utilizamos o método explícito de integração numérica, que consiste em calcular o estado do sistema num tempo posterior a partir da avaliação da equação diferencial discretizada no estado atual do sistema. Utilizamos a discretização mais simples de primeira ordem em tempo e segunda ordem no espaço com diferenças centradas.

Utilizaremos a seguinte notação para a discretização do campo escalar  $\psi$

$$\psi(x_i, y_j, t_n) = \psi_{i,j}^n, \quad (3.17)$$

onde os índices inteiros  $n$ ,  $i$  e  $j$  representam as discretizações de  $t$ ,  $x$  e  $y$ , respectivamente. Para discretizar as expressões das derivadas de primeira ordem utilizamos as seguintes aproximações:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^n}{\Delta t}, \quad (3.18)$$

para derivadas temporais; para a derivada de  $\psi$  em função de  $x$  temos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2\Delta x}, \quad (3.19)$$

equanto que para  $y$  temos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n}{2\Delta y}. \quad (3.20)$$

Usando diferenças centradas de segunda ordem na variável espacial para aproximar a derivada de segunda ordem obtemos:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x_i, t_j) \simeq \frac{\psi_{i-1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i+1,j}}{\Delta x^2}. \quad (3.21)$$

No caso espacialmente unidimensional, as Eqs. (3.18), (3.19) e (3.21) inseridas na Eq.(3.7) representam o método explícito para  $\psi(x_i, t_n)$ . O campo  $\theta(x, t)$  é tomado em  $t = t_n$  e suas derivadas espaciais são discretizadas da mesma forma que para o campo  $\psi$ . Notemos pois, que são conhecidos os valores  $\psi_{i-1,n}$ ,  $\psi_{i,n}$  e  $\psi_{i+1,n}$  calculamos  $\psi_{i,n+1}$  explicitamente, sem qualquer complicação suplementar.

A molécula computacional é uma tradução gráfica da Eq.(3.18) e Eq.(3.19), pois ela estabelece a relação de dependência existente entre o valor no ponto  $(i, n + 1)$  e seus vizinhos. Note que, no caso do método explícito, o ponto  $(i, n + 1)$  depende apenas dos pontos  $(i - 1, n)$ ,  $(i, n)$  e  $(i + 1, n)$ , todos do nível anterior, daí a palavra explícito.

## RESULTADOS NUMÉRICOS E COMPARAÇÃO COM A TEORIA

As formações de padrões interfaciais tem despertado bastante interesse entre muitos pesquisadores da área de mecânica dos fluidos, uma área bastante complexa e que ainda tem muito a ser explorado. Diversos estudos analíticos e experimentais foram feitos para entender o comportamento da interface entre dois fluidos imiscíveis quando esta evolui de maneira não-trivial no tempo. Com o intuito de entender e prever esse fenômeno são realizadas estudos numéricos que descrevem soluções rápidas e precisas.

Um exemplo é a injeção de fluidos em meios porosos que é utilizada como um problema protótipo para estudar formações interfaciais entre fluidos de viscosidades diferentes[47]. Um aspecto interessante deste problema é o papel não trivial do contraste de viscosidade entre os dois fluidos na dinâmica quando há injeção. Na geometria do canal, uma série de simulações numéricas[48, 36, 49], experimentais [38, 50], e outros estudos teóricos [51, 52, 53] provaram que o contraste de viscosidade desempenha um papel dinâmico importante no regime profundamente não linear, particularmente nos mecanismos de competição dos dedos e na morfologia resultante da interface deformada. Similarmente, o contraste de viscosidade desempenha um papel igualmente crucial no problema da injeção na geometria radial. Na geometria do canal, no limite de contraste de baixa viscosidade foram explorados experimentalmente por gravidade, levantando um dos lados do canal[6]. Neste caso, a instabilidade é basicamente originada pela diferença de densidade e não pela diferença de viscosidade entre os dois fluidos. A situação na geometria radial é mais complexa, uma vez que não há análises simples de gravidade nesta geometria. Um candidato interessante é a condução centrífuga, que ocorre girando a célula circular em torno de seu eixo de simetria vertical. Sob a direção centrífuga, a instabilidade também se origina basicamente pela diferença de densidade entre os dois fluidos, como no caso gravitacional. Para entendermos melhor realizamos experiências numéricas com uma ampla gama de parâmetros, com foco na influência do contraste de viscosidade que enfatiza a forma da interface dos padrões. Nossos experimentos numéricos resultaram em diversas simulações que apresentaram resultados de acordo com o previsto na literatura e nos experimentos realizados por Ortín e Casademunt[16, 17, 27, 30].

A literatura nos mostra como devem se comportar nossos resultados de acordos

com os experimentos e simulações já realizadas, portanto o principal objetivo do nosso estudo foi reproduzir estes resultados já conhecidos. Podemos relacionar nossos resultados aqui apresentados com os experimentos do grupo Ortín e Casademunt, pioneiros no estudo de instabilidades interfaciais sob forçamento centrífugo, onde observaram-se gotas assimétricas em uma célula de Hele-Shaw girante sob alto contraste de viscosidade[29]. Eles verificaram a seleção do modo de Fourier de máxima da taxa de crescimento e também estudaram o regime não-linear. O grupo de Ortín e Casademunt realizaram uma segunda série de experimentos na célula rotativa que focou na dinâmica das configurações anulares assimétricas, com ar na camada mais interna, e óleo na camada externa [54]. Este arranjo leva à uma rica variedade de padrões, uma vez que a diferença de densidade impulsiona a instabilidade da interface principal do óleo deslocando o ar e a diferença de viscosidade impulsiona a instabilidade da interface de arrasto do ar deslocando o óleo. Provaram que esta estabilidade das duas interfaces é acoplada através do campo de pressão já em um nível linear. Em outros experimentos com injeção houveram tentativas de controle do crescimento da instabilidade dos dedos, este processo visa encontrar uma forma de minimizar as perturbações da interface [31]. As perturbações nas gotas mostram o papel estabilizante do parâmetro de tensão superficial  $B$  e o papel desestabilizante do parâmetro adimensional  $A$  para a injeção.

Nossas simulações tratam da célula de Hele-Shaw girante (sem injeção) onde o fluido interno possui densidade maior que o fluido externo, mas o contraste viscoso entre os fluidos pode assumir qualquer valor. Os fluidos são imiscíveis e há uma tensão superficial entre eles, consideramos que a gota inicial quase circular do fluido interno é grande o suficiente para que o círculo seja desestabilizado pela força centrífuga. Para estudar as instabilidades na interface fluido-fluido introduzimos pequenas perturbações na gota circular, separando os casos em que as perturbações são simétricas e assimétricas. Nas simulações com perturbação simétrica as gotas mantêm a simetria imposta pela perturbação, e observa-se na beleza de cada parte dos dedos na gota dividida igualmente em relação aos eixos de simetria. Neste caso apenas um modo de Fourier  $n$  é utilizado na perturbação, e o crescimento deste modo induz o aparecimento somente de modos harmônicos, ou seja, múltiplos de  $n$  ( $2n, 3n, 4n$ , etc.), o que mantém a simetria do padrão. Em situações mais realistas comparáveis aos experimentos, diversos modos de Fourier ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) devem ser considerados na perturbação inicial da gota e desta maneira os padrões se desenvolvem de maneira assimétrica. Para os casos assimétricos as formações dos dedos não obedecem um padrão lógico, algo que reflete que os modos de Fourier possuem fases distintas entre si [28]. Para realizar o estudo da formação dos dedos nós focamos nos dois parâmetros adimensionais governantes do sistema  $A$  e  $B$ , variando ambos sistematicamente nas simulações. Realizamos simulações nos casos assimétricos e depois para os casos simétricos com 2, 3 e 4 dedos. Também fizemos uma comparação dos nossos resultados com previsões analíticas da análise linear.

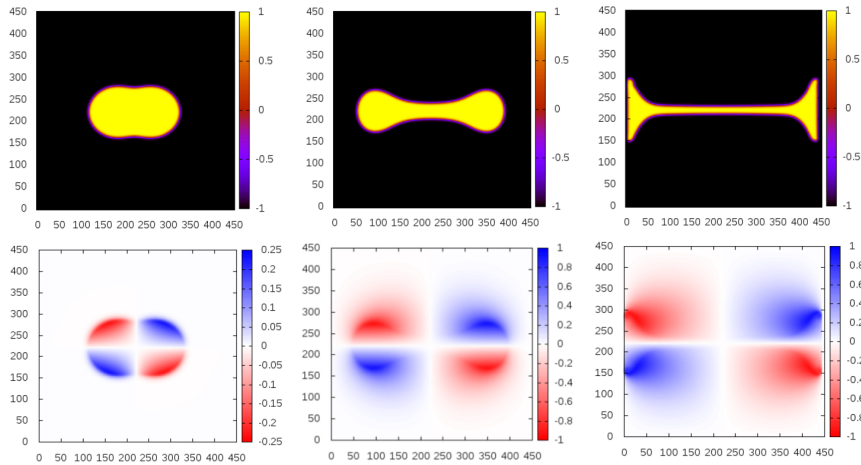
## 4.1 Simulações simétricas

Mostraremos três simulações de gotas simétricas nas figuras 4.1, 4.2 e 4.3 com parâmetros  $A = 0.95$  e  $B = 0.02$ , passo de tempo adimensional  $\Delta t = 7.81 \times 10^{-7}$ , por um número total de  $2 \times 10^6$  passos, com  $\epsilon = 0.025$ ,  $\tilde{\epsilon} = 0.1$  e para  $\Delta x = \Delta y = \epsilon/2 = 0.0125$ , onde variamos apenas a perturbação inicial utilizando os modos de Fourier 2, 3 e 4, respectivamente em cada figura. Os painéis superiores exibem o campo de fase  $\theta$  em três valores diferentes para o tempo adimensional: onde a fase  $\theta = +1$  (cor amarela) corresponde ao fluido interno e a fase  $\theta = -1$  (cor preta) correspondem ao fluido externo. Para obtermos os resultados simétricos, utilizamos a equação da perturbação inicial na interface:

$$r(\phi) = R + \zeta_n \cos(n\phi), \quad (4.1)$$

sendo  $r$  a posição da interface radial,  $R = 1$  o raio adimensional da gota não perturbada,  $n$  o único modo de Fourier da perturbação e  $\zeta_n$  a amplitude da perturbação.

**Figura 4.1:** Simulação da evolução temporal de uma gota inicialmente circular e perturbada pelo modo  $n = 2$  com  $A = 0.95$  e  $B = 0.02$ . Na linha superior a interface é vista através da escala de cores para a função  $\theta$  em três instantes de tempo adimensional  $t = 7.81 \times 10^{-3}$ ,  $t = 0.5$  e  $t = 0.81$ . Na linha inferior é mostrada a função corrente adimensional  $\psi$  em código de cores nos instantes de tempo correspondentes.



Fonte: Autor.

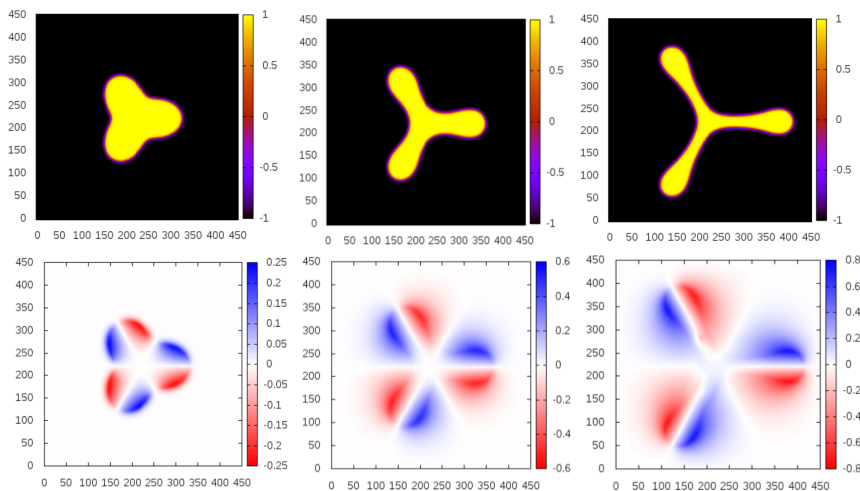
Os diagramas da figura 4.1 mostram as funções  $\theta$  e  $\psi$  que descrevem a evolução da interface, onde utilizamos uma gota inicialmente perturbada com  $n = 2$  dedos. Ela evolui no tempo como uma gotícula inicialmente circular perturbada para um  $n$  modo de Fourier com amplitude igual a 2. A gota perturbada com  $n = 2$  começa com dois dedos simétricos que se esticam igualmente para ambos os lados impulsionados pela força centrífuga. O parâmetro adimensional  $B$  representa a tensão superficial adimensional e mede a razão entre a tensão superficial e a força centrífuga. A tensão superficial tende a estabilizar a



gota enquanto a força centrífuga tende a desestabilizá-la. A simulação nos mostra que para tempos longos a interface apresenta uma configuração de duas gotículas do fluido conectadas por um “pescoço”. Neste caso explorado de  $A \approx 1$ , não ocorre a ruptura hidrodinâmica do pescoço apesar de seu estado final ficar bastante fino,consequentemente não há desprendimento de gotas satélites. No entanto, para  $A < 1$  é esperado o desprendimento de gotas, como foi descrito na Ref. [27]. Portanto, o efeito do contraste de viscosidade  $A$  está na morfologia e dinâmica não-linear dos dedos em tempos longos. Curiosamente, uma descrição contínua hidrodinâmica pode prever corretamente a ocorrência de singularidades de tempo finito fora de uma condição inicial suave, mesmo que não implique a separação e reconexão da interface que necessariamente envolve física microscópica [27].

Na linha de baixo na figura 4.1 observamos que variações da função  $\psi$  descrevem a velocidade em cada ponto da gota, de acordo com as relações  $v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}$  e  $v_y = \frac{\partial\psi}{\partial x}$ . Como exemplo podemos tomar a extremidade do dedo à direita, onde notamos que  $\psi$  cresce ao longo do eixo  $y$  de valores negativos (cor vermelha) até valores positivos (cor azul), indicando que  $v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} > 0$ . Consequentemente, o dedo da direita se move ao longo de  $x$  com  $v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} > 0$ , ou seja, para a direita. Analogamente, o dedo da esquerda se move com  $v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} < 0$  (para a esquerda).

**Figura 4.2:** Simulação da evolução temporal de uma gota inicialmente circular e perturbada pelo modo  $n = 3$  com  $A = 0.95$  e  $B = 0.02$ . Na linha superior a interface é vista através da escala de cores para a função  $\theta$  em três instantes de tempo  $t = 7.81 \times 10^{-3}$ ,  $t = 0.25$  e  $t = 0.45$ . Na linha inferior é mostrada a função corrente  $\psi$  em código de cores nos instantes de tempo correspondentes.



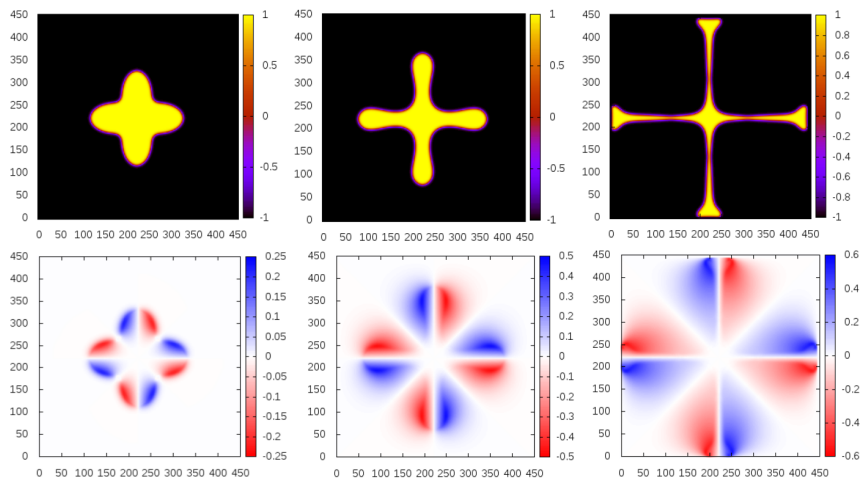
Fonte: Autor.

Na figura 4.2 o modo da perturbação inicial que mudou a morfologia do sistema, temos uma célula girante de  $n = 3$  dedos. Quando ocorre a evolução temporal da interface os dedos começam a surgir em  $t = 7.81 \times 10^{-3}$ , com a forte força centrífuga é desencadeada uma forte instabilidade interfacial. Devido à natureza da força centrífuga ser proporcional

à distância radial, os dedos viscosos se tornam mais propiciados em  $t = 0.25$ . A interface continua esticando até que um primeiro ponto da interface atinja a borda da célula, que é impenetrável de acordo com nossas condições de contorno nas fronteiras:  $\theta = -1$  e  $\psi = 0$ . Nosso método explícito com diferenças finitas é de primeira ordem no tempo e segunda ordem no espaço, e podemos determinar a condição de estabilidade baseada na difusão do ruído numérico. Com a imposição do limitante para o tamanho máximo do passo de tempo, o método explícito geralmente produz aproximações satisfatórias na ausência de quebra da gota.

Na linha de baixo na figura 4.2 observamos que variações da função  $\psi$  descrevem a velocidade em cada ponto da gota, onde temos três dedos que se deslocam, um deles na direção  $x$  e os outros dois em direções diagonais. O dedo na direção diagonal para cima move-se com  $v_x = -\frac{\partial\psi}{\partial y} < 0$  (para a esquerda) ao longo da direção  $x$  e com  $v_y = \frac{\partial\psi}{\partial x} > 0$  (para cima) ao longo da direção  $y$ . O resultado da uma resultante diagonal no segundo quadrante. Temos um resultado análogo para o dedo diagonal para baixo, que possui um vetor velocidade apontando no sentido do terceiro quadrante. Já para o dedo da direita, vemos que ao longo da direção  $x$  ele se move com  $v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} > 0$  (para a direita).

**Figura 4.3:** Simulação da evolução temporal de uma gota inicialmente circular e perturbada pelo modo  $n = 4$  com  $A = 0.95$  e  $B = 0.02$ . Na linha superior a interface é vista através da escala de cores para a função  $\theta$  em três instantes de tempo  $t = 7.81 \times 10^{-3}$ ,  $t = 0.25$  e  $t = 0.62$ . Na linha inferior é mostrada a função corrente  $\psi$  em código de cores nos instantes de tempo correspondentes.



Fonte: Autor.

Nas formas da figura 4.3, os dedos são esticados pelo forçamento centrífugo e assim evoluem para filamentos finos e alongados com uma extremidade arredondada no final, resultando em  $n = 4$  dedos. Nota-se que uma fração de massa do círculo inicial é presa ao redor do eixo enquanto a gota é acelerada a partir do centro da célula. São esperados dedos mais vigorosos quando o modo  $n$  possui uma taxa de crescimento linear  $\lambda(n)$  maior. Ressaltamos que a força centrífuga é diretamente proporcional à diferença de densidade

entre os fluidos, à distância radial e ao quadrado da velocidade angular. Para valores menores de  $B$  temos uma combinação maior dos efeitos centrífugos.

Observamos que a gota na ponta do dedo se alarga à medida que o dedo se estica em um filamento alongado encostado na parede. Isso continua enquanto a célula está sobre rotação o filamento se alarga o suficiente em direção à ponta. Há uma maior concentração de massa na ponta dos dedos, e uma menor no filamento da gota. A análise teórica e as simulações numéricas que estamos realizando mostram que a tensão superficial e o contraste de viscosidade desempenham um papel no processo da formação dos dedos, por exemplo, as pequenas perturbações crescem formando filamentos longos.

Além de quantificar bem o comportamento de um único modo na interface, o estudo das soluções simétricas é importante para entender certas classes de soluções estacionárias exatas e simétricas encontradas para o problema [16].

Na figura 4.3 da linha de baixo observamos que variações da função  $\psi$  descrevem a velocidade em cada ponto da gota. Analisando os dedos na direção horizontal. Podemos perceber que o dedo da direita ao longo da direção  $x$ , se move com  $v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} > 0$  (para direita), e o dedo da esquerda se move com  $v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} < 0$  (para a esquerda). Analisando os dedos na vertical, visualizamos que  $\psi$  decresce ao longo do eixo- $x$  de valores positivos (cor azul) até valores negativos (cor vermelha). Indicando que  $\frac{\partial\psi}{\partial x} < 0$ . Consequentemente, o dedo superior na vertical se move com  $v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} > 0$ , ou seja, para cima. Analogamente, o dedo inferior na vertical se move com  $v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} < 0$  (para baixo).

## 4.2 Simulações assimétricas

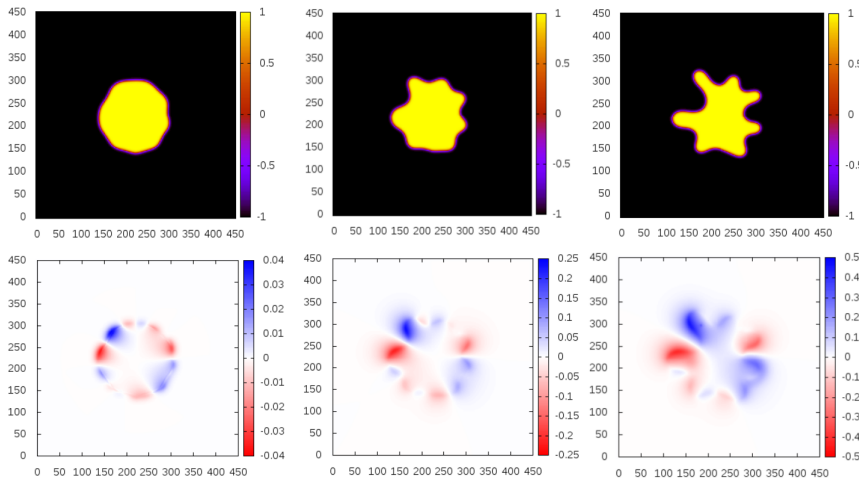
Para gerar simulações assimétricas, escolhemos uma condição inicial com vários modos de Fourier de amplitude pequena e sorteamos fases aleatórias para cada modo. Mostramos a seguir três simulações onde apenas variamos o parâmetro  $B$  e depois variamos somente o parâmetro  $A$ . A comparação do resultado simulado com a previsão analítica pode ser feita usando a Eq.(2.32) que calcula o modo  $n$  de máximo crescimento. Os dedos crescem de forma desordenada ocorrendo uma competição entre eles, onde alguns modos se destacam mais na gota ao longo da evolução temporal. Há diferença de crescimento entre os dedos e não existe uma simetria no padrão, como podemos perceber através da comparação entre as figuras (4.4)-(4.6) e (4.1)-(4.3). Para obtermos os resultados assimétricos, inserimos o termo  $\alpha_n$  de aleatoriedade na Eq.(4.1) da perturbação inicial na interface:

$$r(\phi) = R + \sum_{n=1}^N \zeta_n \cos(n\phi + \alpha_n) \quad (4.2)$$

os valores adotados na amplitude de perturbação  $\zeta_n = 0.01$ , para o número de modos  $N = 10$  e para  $\alpha_n$  que é fase de cada modo de Fourier foram escolhidos valores aleatórios entre 0 e  $2\pi$  rad (com 360 valores possíveis). Poderíamos fazer um cálculo estatístico para determinar a configuração média, porém, os valores de  $\alpha_n$  mexem na condição inicial da gota, mas não afetam a dinâmica. O número de dedos esperado continuará sendo o mesmo.

As condições utilizadas para as simulações assimétricas foram: passo de tempo adimensional  $\Delta t = 7.81 \times 10^{-7}$ , número total de  $2 \times 10^6$  passos, com  $\epsilon = 0.025$  para a grossura da interface,  $\tilde{\epsilon} = 0.1$  para difusão da função  $\psi$ , e para discretização espacial  $\Delta x = \Delta y = \epsilon/2 = 0.0125$  em que cada simulação variamos apenas os parâmetros  $A$  e  $B$ .

**Figura 4.4:** Simulação da evolução temporal de uma gota inicialmente quase circular com perturbação assimétrica usando  $A = 0.95$  e  $B = 0.01$ . Os instantes de tempo são  $t = 7.81 \times 10^{-3}$ ,  $t = 0.37$  e  $t = 0.81$ .



Fonte: Autor.

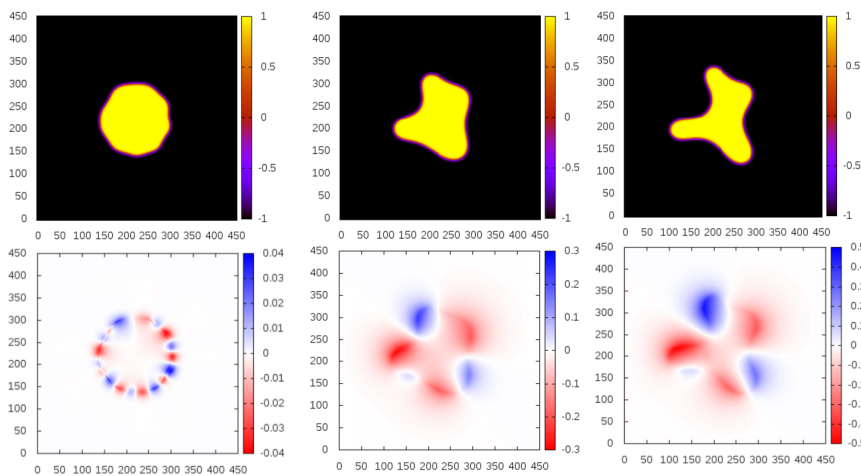
Na figura 4.4 utilizamos os valores dos parâmetros adimensionais  $A = 0.95$  e  $B = 0.01$ . Sabe-se que em experimentos a gota apresenta pequenas perturbações microscópicas (térmicas ou mecânicas) no tempo inicial  $t = 0$  que aqui reproduzimos através de modos de Fourier com amplitudes exageradas para melhor visualização na simulação. Quando a gota é centrifugada, os dedos iniciais crescem de maneira desacoplada entre si com taxas de crescimento similares às previstas pela análise linear  $\lambda(n)$ .

O modo  $n_{max}$  de maior taxa de crescimento se tornará mais evidente e, portanto, ditará o número de dedos  $n = n_{max}$  predominante no padrão. Os resultados analíticos lineares podem ser descritos utilizando a Eq.(2.32) que calcula modo de maior crescimento, a previsão linear nos diz que  $n_{m\acute{a}x} = 5.8$ , o que resulta em aproximadamente 6 dedos na interface da gota. A simulação apresenta 7 dedos ao longo da sua interface para  $B = 0.01$ , assim vemos uma pequena discrepância entre o resultado analítico e a simulação que é de aproximadamente 1 dedo. Notamos através da evolução temporal que no instante  $t = 0.37$

os dedos cresceram e já estão evidentes, enquanto que no tempo  $t = 0.81$  os modos já interagem entre si e os dedos já saíram do regime linear.

As características morfológicas assimétricas mostram também o fenômeno da competição entre os dedos, onde dedos apresentam comprimentos diferentes. Isso pode-se dar tanto nos dedos formados pelo fluido interno e que saem da gota, como nos dedos formados pelo fluido externo e que entram na gota [26]. Este fenômeno é não-linear e depende do contraste de viscosidade  $A$  entre os fluidos.

**Figura 4.5:** Simulação da evolução temporal de uma gota inicialmente circular assimétrica usando  $A = 0.95$  e  $B = 0.03$ . Os instantes de tempo são  $t = 7.81 \times 10^{-3}$ ,  $t = 1.31$  e  $t = 1,56$ .



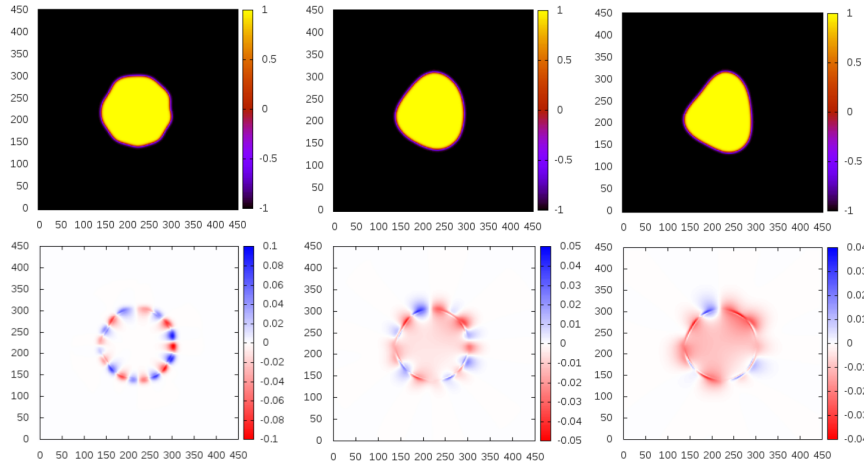
Fonte: Autor.

Na figura 4.5 utilizamos os parâmetros adimensionais  $A = 0.95$  e  $B = 0.03$ , ou seja variamos apenas  $B$ . O estado inicial da gota é o mesmo da figura 4.4. Ao variar o parâmetro  $B$ , ou seja, ao aumentar a tensão superficial o crescimento dos dedos é menor e a morfologia do sistema é diferente, para uma tensão menor o número de dedos na gota é maior devido as forças de coesão serem menores. Através desta simulação percebemos como o coeficiente de tensão superficial muda a forma da gota, dificultando o crescimento dos dedos, o que pode ser verificado conforme o resultado analítico linear na figura 2.4 onde  $n_{m\acute{a}x} = 3.38$  próximo de 4 dedos na interface da gota. A simulação apresenta 4 dedos ao longo da sua interface para  $B = 0.03$ , o resultado próximo da literatura. A disputa entre a força de tensão e a força centrífuga faz com que o número de modos linearmente estáveis e a magnitude de suas taxas de crescimento mudem com  $B$ .

Na verdade, percebe-se que, a partir de um padrão inicial bastante ruidoso, uma competição entre os dedos é estabelecida e os dedos mais curtos não crescem e apenas alguns deles continuam crescendo.

Na figura 4.6 utilizamos os parâmetros adimensionais  $A = 0.95$  e  $B = 0.06$ . A gota pouco se deforma com a evolução do tempo, ganhando uma forma similar a uma pera, mostrando claramente a influencia do parâmetro  $B$  em determinar a morfologia do

**Figura 4.6:** Simulação da evolução temporal de uma gota inicialmente circular assimétrica usando  $A = 0.95$  e  $B = 0.06$ . Os instantes de tempo são  $t = 7.81 \times 10^{-3}$ ,  $t = 0.78$  e  $t = 1,56$ .



Fonte: Autor.

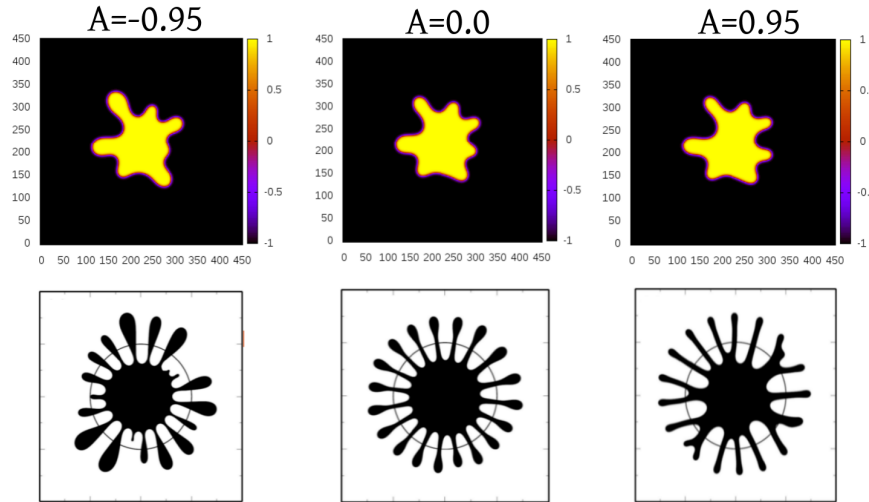
sistema inibindo o número de dedos. O estado inicial da gota é o mesmo da figura 4.4, e o sistema evolui temporalmente de forma que em  $t = 7.81 \times 10^{-3}$  os dedos começam a surgir de maneira lenta e ao chegar no tempo  $t = 1,56$  percebemos que o número de dedos na gota é bem menor que nas figuras 4.4 e 4.5.

A observação do comportamento dos dedos nos leva a validar o número de dedos usando a Eq.(2.32), ou seja, o número máximo de modos que pode ser comparado utilizando a figura 2.4 que de acordo com ela temos que  $n_{m\acute{a}x} = 2.42$  para  $B = 0.06$  um valor próximo de 3 juntamente com análise teórica, a simulação correspondeu com o previsto. Podemos observar que os comprimentos dos dedos se desenvolveram com tamanhos diferentes e em direções variadas.

Na figura 4.7 fixamos o parâmetro  $B$  e variamos apenas o parâmetro adimensional  $A$ , utilizando os valores  $A = -0.95$ ,  $A = 0.0$  e  $A = 0.95$ , e exibimos as formas da interface em seu estágio final de evolução. Destacamos que o número predominante de dedos no padrão não muda, visto que  $n_{m\acute{a}x}$  é unicamente determinado por  $B$ . Portanto, nesta figura podemos entender de que forma o parâmetro  $A$  influencia a morfologia dos dedos na interface e a competição entre eles, onde consideramos que há competição quando há diferença de tamanho entre os dedos. Além disto, podemos analisar a competição entre os dedos formados pelo fluido interno e que se projetam para fora da gota (dedos que saem da gota), e também entre os dedos formados quando o fluido externo penetra na gota inicialmente circular (dedos que entram na gota). Este estudo foi feito com base nas previsões analíticas e numéricas desenvolvidas em estudos passados[6, 18, 28].

Na figura da esquerda, onde temos  $A = -0.95$ , podemos observar como um valor de  $A$  negativo influencia a morfologia das perturbações: o fluido de dentro forma dedos com cabeças abaloadas, espessas na ponta, enquanto o pescoço é mais fino. Os dedos

**Figura 4.7:** Simulação da gota evoluída em seu tempo final assimétrica usando na figura esquerda  $A = -0.95$ , no centro  $A = 0.0$  e direita  $A = 0.95$ , com  $B = 0.01$  nas três simulações. No instante de tempo final e  $t = 0.81$ .



Fonte: Autor.

que saem da gota exibem competição, visto que os dedos formados pelo fluido interno (amarelo) possuem tamanhos claramente diferentes. Por outro lado, os dedos de que entram na gota (fluido externo, preto) não demonstram sinal de competição. Isso pode ser visto através das distâncias radiais do centro da célula até a ponta dos dedos que entram, que praticamente não variam de um dedo para outro.

De fato, estudos anteriores baseados na teoria fracamente não-linear [18, 28] indicaram que não deveria haver grande competição entre os dedos que saem e nem entre os dedos que entram na gota. No entanto, percebemos que ainda há uma ligeira diferença de tamanho tanto entre os dedos que entram como entre os dedos que saem da gota. Esta observação está de acordo com resultados computacionais da evolução temporal não-linear do método de *phase-field* [16].

Na figura do centro, em que  $A = 0.0$ , notamos que houve uma grande redução na competição tanto entre os dedos que entram como entre os dedos que saem da gota.

Na figura 4.7 da direita, no caso  $A = 0.95$ , vemos que os dedos que saem da gota possuem praticamente o mesmo comprimento, algo que pode ser constatado a partir da observação de que um círculo centrado na gota passaria por quase todas as pontas dos dedos amarelos. O mesmo não se aplica aos dedos pretos que entram na gota, pois possuem distâncias radiais distintas. Estas observações estão de acordo com as análises prévias [6] que constataram que para  $A > 0$  deveria haver competição entre os dedos que entram, mas não entre os dedos que saem. Ressaltamos que a intensidade da competição entre os dedos também depende do parâmetro  $B$ , porém o comportamento qualitativo desta competição é definido pelo parâmetro  $A$  [6]. Nossas simulações de *phase-field* corroboram os resultados que haviam sido explorados teoricamente [18] e através de simulações de

### 4.3. ANÁLISE QUANTITATIVA DO CRESCIMENTO DA PERTUBAÇÃO

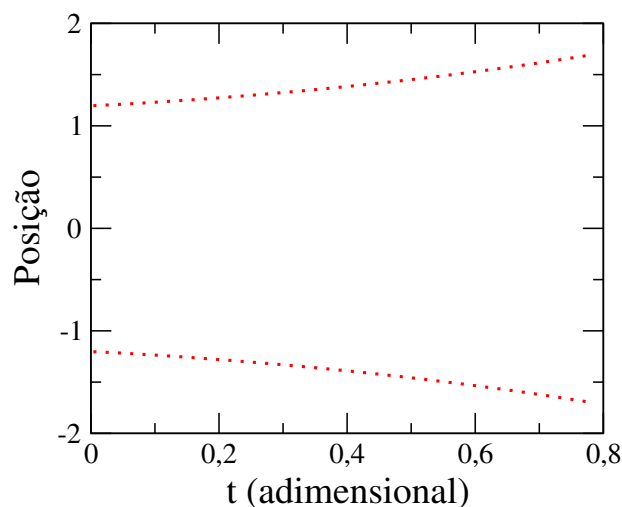
integrais de contorno [28].

Mostraremos em seguida que nossos resultados numéricos no caso simétrico apresentam que o crescimento dos dedos é basicamente exponencial no tempo para os instantes iniciais da dinâmica, algo que é previsto pela análise de estabilidade linear.

### 4.3 Análise quantitativa do crescimento da perturbação

Nesta sessão pretendemos fazer uma comparação quantitativa do crescimento dos dedos extraído das simulações numéricas com a taxa de crescimento linear prevista pela análise perturbativa para instantes iniciais da dinâmica. Para tanto, utilizaremos as simulações simétricas, visto que elas possuem somente um modo de Fourier  $n$  no início da instabilidade. Neste caso, só aparecerão outros modos de Fourier no estágio não-linear da evolução temporal, eles serão múltiplos de  $n$  e estarão em fase com o modo fundamental como consequência do acoplamento não-linear. O modo fundamental  $n$  determina o número de dedos da interface e, portanto, a simetria do padrão. Esta análise numérica será feita a partir das simulações das figuras 4.1, 4.2 e 4.3 para os modos  $n = 2, 3$  e  $4$ , de onde obtemos os gráficos das figuras 4.8, 4.9 e 4.10. Os resultados previstos analiticamente pela análise linear podem ser vistos na Fig.2.4 onde é mostrada a taxa de crescimento linear em função do modo de Fourier  $n$ .

**Figura 4.8:** Posição da interface ao longo do eixo  $y = 0$  em função do tempo adimensional  $t$  para a simulação mostrada na Fig. 4.1 em que temos uma perturbação simétrica com  $n = 2$ . O tamanho do dedo direito (esquerdo) neste gráfico é dado pela posição positiva (negativa) da interface menos (mais) o tamanho do raio não perturbado  $R = 1$ .



Fonte: Autor.

Através dos gráficos das figuras 4.8, 4.9 e 4.10 podemos analisar como as extremidades da interface crescem ao longo do tempo. Para realizar uma análise quantitativa, traçamos uma linha horizontal ao longo do eixo  $y = 0$  gota e localizamos as duas pontas



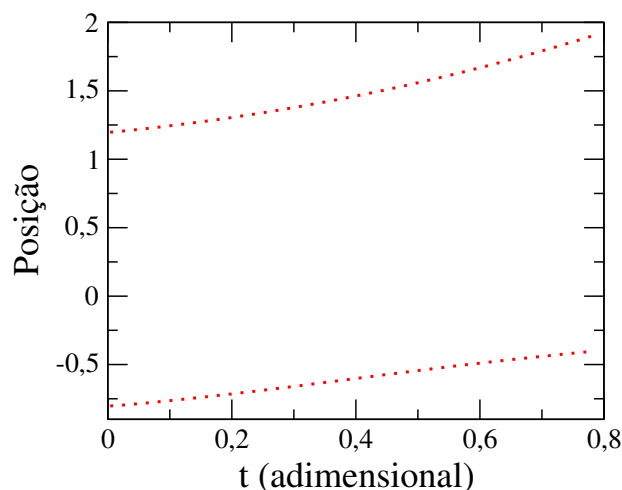
### 4.3. ANÁLISE QUANTITATIVA DO CRESCIMENTO DA PERTURBAÇÃO

da interface onde  $\theta = 0$ . Para os modos pares  $n = 2$  e  $n = 4$ , temos posições simétricas para ambas as extremidades devido à simetria de reflexão do padrão em torno de  $x = 0$ .

No caso do modo ímpar  $n = 3$  perdemos esta simetria, portanto teremos a posição de um dedo na extremidade direita da interface e a posição de um vale na extremidade esquerda que pode ser vista na figura 4.2. Conseqüentemente, as figuras 4.8 ( $n = 2$ ) e 4.10 ( $n = 4$ ) apresentam uma evolução simétrica das duas pontas da gota, enquanto a figura 4.9 ( $n = 3$ ) apresenta duas curvas assimétricas. De maneira geral, a evolução da interface se dá quando a tensão superficial é vencida pela força centrífuga, que é proporcional à distância radial.

As figuras abaixo, mostram a evolução temporal da posição na interface em  $n = 2$ ,  $n = 3$ ,  $n = 4$ . Fizemos uma análise quantitativa onde traçamos uma linha horizontal na gota, e fizemos um comparativo do crescimento da perturbação nas duas pontas. Para  $n = 2$  e  $n = 4$  temos curvas exponenciais simétricas, resultado do crescimento da perturbação no sentido positivo (lado direito da gota) e negativo (lado esquerdo da gota). Para  $n = 3$  temos um crescimento de um dedo na horizontal com sentido positivo (lado direito da gota), e dois dedos diagonalmente em sentido negativo (lado esquerdo da gota), formando um vale, o que resulta em curvas assimétricas.

**Figura 4.9:** Posição da interface ao longo do eixo  $y = 0$  em função do tempo adimensional  $t$  para a simulação mostrada na Fig. 4.2 em que temos uma perturbação simétrica com  $n = 3$ . Os dedos do lado esquerdo crescem na direção diagonal formando um vale, assim temos curvas assimétricas.



Fonte: Autor.

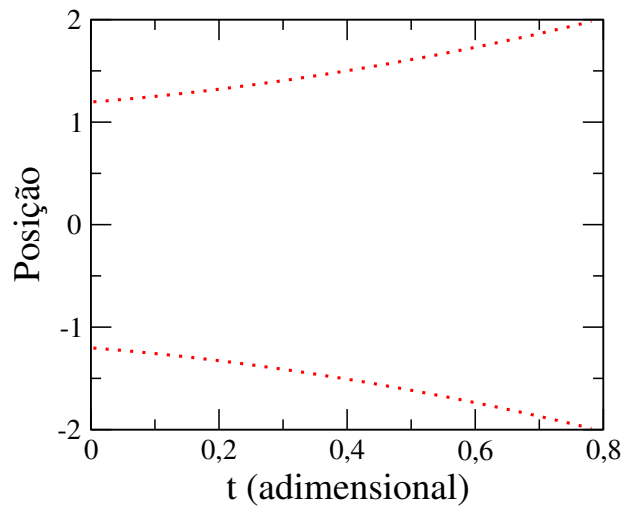
Na figura 4.8 temos as posições dos dedos na interface simétrica de modo  $n = 2$  evoluindo ao longo do tempo  $t$ . Para cada instante  $t$  mostramos dois pontos que correspondem aos valores das posições das extremidades da interface. A amplitude da perturbação aumenta à medida que evolui a instabilidade na gota, e os dois dedos da gota crescem de forma simétrica, conforme pode ser visto pelas interfaces mostradas na figura 4.1. No

### 4.3. ANÁLISE QUANTITATIVA DO CRESCIMENTO DA PERTURBAÇÃO

eixo das ordenadas notamos que a posição da interface varia de um valor próximo  $-1.2$  para  $-2$  (curva negativa) e de  $+1.2$  para  $+2$  (curva positiva), visto que a gota circular tem raio  $R = 1$  e a amplitude da perturbação inicial vale  $0.2$ .

As curvas se assemelham a duas exponenciais simétricas, resultado do crescimento da perturbação no sentido positivo (lado direito da gota) e negativo (lado esquerdo da gota). De fato, é previsto pela análise linear que o crescimento da amplitude da perturbação seja exponencial para  $t$  pequeno, de acordo com a Eq.(2.22). Escolhemos analisar o crescimento dos dedos somente até o tempo final de  $0.8$  para estudar a taxa de crescimento nos instantes iniciais da dinâmica e compará-la com a previsão linear, algo que fizemos na figura 4.1. Podemos saber agora as etapas do crescimento da perturbação ao longo do tempo da simulação mostrada na figura 4.1, a velocidade com que ela cresce, as ondulações que se destacam lentamente ao longo da interface da gota.

**Figura 4.10:** Posição da interface ao longo do eixo  $y = 0$  em função do tempo adimensional  $t$  para a simulação mostrada na Fig. 4.3 em que temos uma perturbação simétrica com  $n = 4$ . Os dedos crescem em forma de cruz, assim o crescimento das linhas da curvas são uma exponencial crescente positiva(negativa).



Fonte: Autor.

Na figura 4.9 vemos o comportamento da posição da interface em função do tempo para a simulação simétrica com  $n = 3$ . Neste caso a gota possui um número ímpar de dedos, portanto ao longo da direção horizontal  $y = 0$ , temos do lado direito a posição de um dedo da interface, e do lado esquerdo a posição de um vale, que podemos visualizar conforme a figura 4.2. O vale é formado pelos dois dedos nas direções diagonais do lado esquerdo da gota. No sentido positivo (lado direito) da gota ocorre o crescimento de um único dedo. O vale situado à esquerda na figura 4.2 faz com que as linhas do gráfico não sejam simétricas: temos uma curva positiva semelhante a uma exponencial para a posição do dedo e uma curva negativa menos pronunciada para a posição do vale. A amplitude da perturbação na gota varia de um valor que se inicia próximo de  $+1.2$  para um valor

perto de +2, e para o vale de um valor inicial próximo de  $-0.8$  que cresce em direção a 0.0 com aparência mais retilínea.

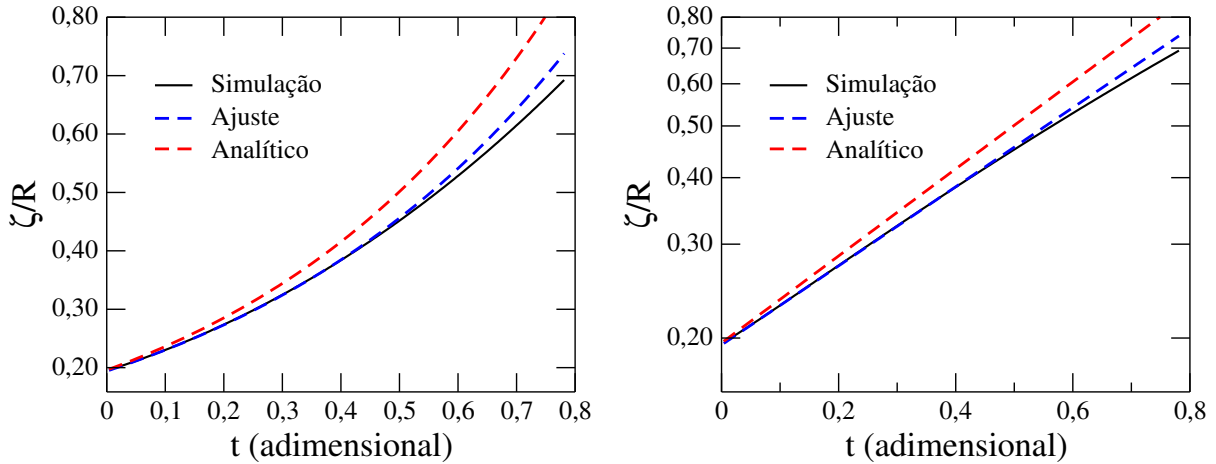
Na figura 4.10 temos duas curvas que aparentam ser exponenciais simétricas (uma positiva e outra negativa) para as posições da interface com modo  $n = 4$ . Portanto, o comportamento do crescimento das curvas é simétrico em ambas as direções dos dedos, conforme pode ser visto na figura 4.3. Se compararmos as curvas da figura 4.8 com às da 4.10, veremos que na última o crescimento é mais acentuado, o que significa uma maior taxa de crescimento.

## 4.4 Análise comparativa

Realizamos uma análise comparativa para o crescimento da perturbação na interface da gota extraído de nossas simulações com a previsão teórica dada pela análise linear. Para tanto utilizamos a posição da interface das simulações simétricas com  $n = 2, 3, e 4$ , mostradas nas figuras 4.8, 4.9 e 4.10, respectivamente. A amplitude da perturbação da gota  $\zeta$  em cada um destes casos é dada pela posição da interface subtraída do raio não perturbado  $R = 1$ , e representa o desvio da interface em relação à interface circular. Nos limitamos apenas ao regime linear nosso modelo computacional descreve tanto a parte linear como a parte não-linear da dinâmica, ele não faz nenhuma distinção entre esses regimes. No entanto, como há somente previsão analítica para o regime linear (perturbação pequena, tempo pequeno), nós comparamos quantitativamente nossos resultados com a previsão analítica linear. As discrepâncias entre os resultados numéricos e os analíticos a nível linear se devem à introdução da espessura artificial  $\epsilon$ , portanto se diminuirmos  $\epsilon$  diminuimos as discrepâncias[29].

Na figura 4.11 mostramos o crescimento da amplitude de perturbação do modo  $n = 2$  em função do tempo num gráfico com escala linear (à esquerda) e em escala monolog (à direita). Em ambos os gráficos a curva preta corresponde ao resultado da simulação numérica e representa o desvio da posição da interface em relação ao círculo obtido através da figura 4.8. Notamos que quando mostrado no gráfico monolog, esta curva é bastante próxima de uma reta principalmente em tempos iniciais, o que indica dependência exponencial com o tempo. Para corroborar esta observação, plotamos a curva azul que representa um ajuste exponencial para a curva preta somente no intervalo  $0 < t < 0.1$ . Vemos que a curva interpola bem os pontos para os instantes iniciais da dinâmica e sofre um pequeno desvio em tempos posteriores. Isto está de acordo com o fato de que para amplitudes baixas esperamos que a dinâmica se comporte de maneira linear (crescimento exponencial), e quando a amplitude se torna maior efeitos não-lineares começam a afetar o crescimento da perturbação. A curva vermelha representa a previsão teórica da análise linear: um crescimento exponencial de acordo com a Eq.(2.22) onde a taxa de crescimento linear adimensional é dada pela Eq.(2.32).

**Figura 4.11:** Tamanho da perturbação da interface  $\zeta_2$  em função do tempo adimensional  $t$  para a simulação simétrica com  $n = 2$  na Fig. 4.1. A curva preta representa o resultado extraído da simulação e de acordo com a Fig. 4.8; a curva azul representa um ajuste numérico por uma curva exponencial nos instantes iniciais da simulação  $0 < t < 0.1$ ; a curva vermelha representa a previsão teórica do crescimento exponencial do modo  $n = 2$  dada pela Eq.(2.22). O gráfico da esquerda está em escala linear, enquanto o gráfico da direita está em escala monolog.

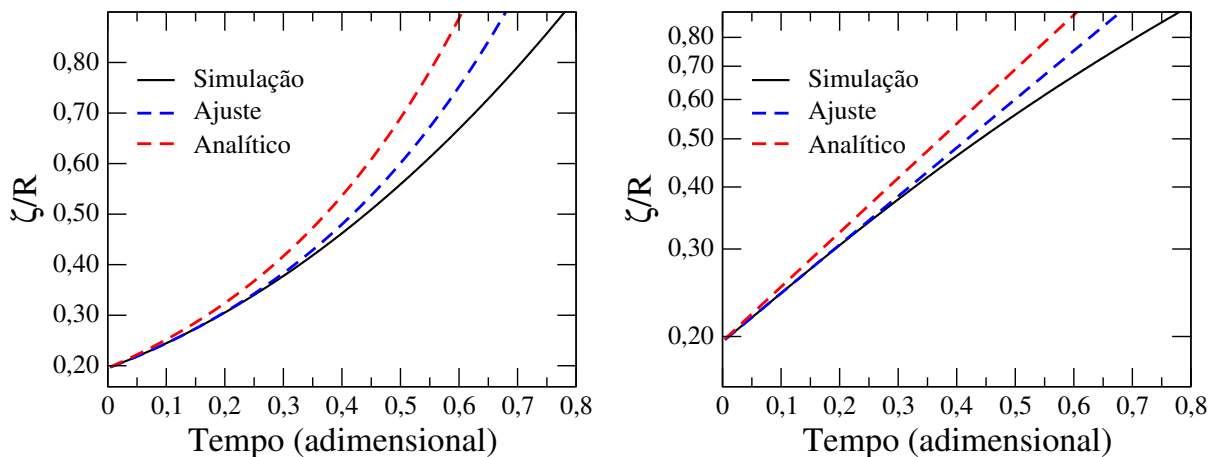


Fonte: Autor.

Através destas curvas podemos comparar a taxa de crescimento obtida a partir da simulação com a previsão teórica. Para encontrar o de  $\lambda_{analitico}$  analiticamente usamos a Eq.(2.32), e substituindo as variáveis por  $n = 2$  e  $B = 0.02$ , obtemos uma taxa de crescimento de  $\lambda_{analitico} = 1.88$ . Já em nosso ajuste numérico (curva azul) encontramos um valor de  $\lambda_{ajuste} = 1.64$ . Comparando esses resultados obtidos com a linha teórica temos uma pequena discrepância de 12,8%, e o resultado da simulação cresce um pouco abaixo do previsto. Notamos que há um desvio considerável entre o resultado da simulação e a previsão analítica, que se deve ao fato de que a espessura  $\epsilon$  da interface é finita e introduz correções quantitativas apreciáveis na dinâmica. No entanto, os aspectos qualitativos continuam sendo coerentes com as previsões do problema original de interface fina.

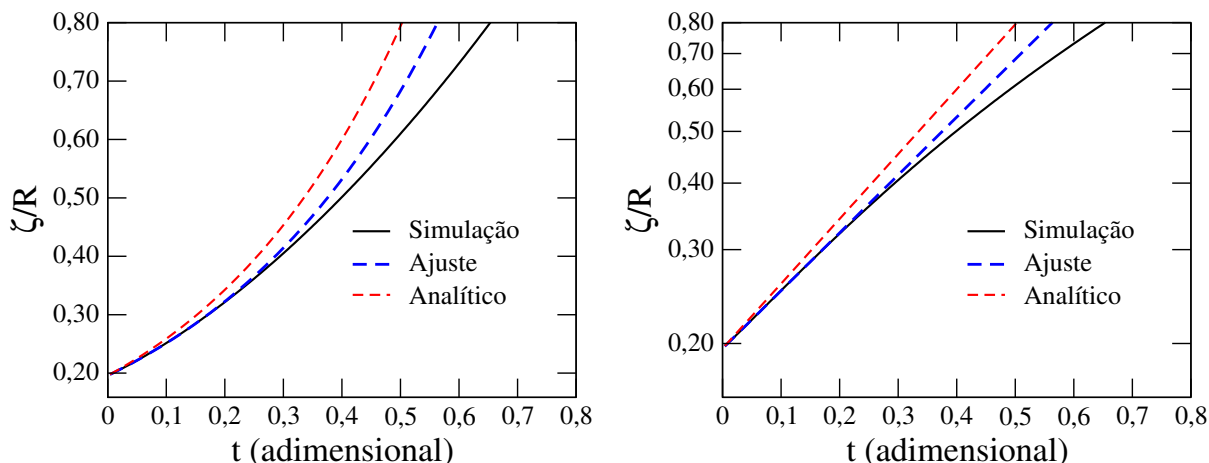
Na figura 4.12 temos a evolução temporal da amplitude de Fourier do modo  $n = 3$ , obtida através da figura 4.9, num gráfico com escala linear (à esquerda) e em escala monolog (à direita). A curva preta foi extraída das simulações, a azul corresponde a um ajuste exponencial da curva preta no intervalo  $0 < t < 1$ , e a curva vermelha corresponde à previsão teórica da análise linear. Todas elas têm o mesmo ponto nos tempos iniciais. A taxa de crescimento linear analítica é calculada usando a Eq.(2.32) com  $n = 3$  e  $B = 0.02$ , e obtemos  $\lambda_{analitico} = 2.52$ . Já a taxa de crescimento de nosso ajuste numérico resulta em  $\lambda_{ajuste} = 2.25$ , e é obtida através da inclinação da curva azul no gráfico monolog. As curvas do ajuste e da simulação se superpõem nos tempos iniciais, divergindo mais a partir de  $t > 0.4$ . Assim como no caso  $n = 2$ , temos uma pequena discrepância de 10,71%, a interface da simulação demora mais tempo para crescer do que o previsto na teoria devido às correções introduzidas pela grossura da interface difusa.

**Figura 4.12:** Tamanho da perturbação da interface  $\zeta_3$  em função do tempo adimensional  $t$  para a simulação simétrica com  $n = 3$  na Fig. 4.2. A curva preta representa o resultado extraído da simulação e de acordo com a Fig. 4.9; a curva azul representa um ajuste numérico por uma curva exponencial nos instantes iniciais da simulação  $0 < t < 0.1$ ; a curva vermelha representa a previsão teórica do crescimento exponencial do modo  $n = 3$  dada pela Eq.(2.22). O gráfico da esquerda está em escala linear, enquanto o gráfico da direita está em escala monolog.



Fonte: Autor.

**Figura 4.13:** Tamanho da perturbação da interface  $\zeta_4$  em função do tempo adimensional  $t$  para a simulação simétrica com  $n = 4$  na Fig. 4.3. A curva preta representa o resultado extraído da simulação e de acordo com a Fig. 4.10; a curva azul representa um ajuste numérico por uma curva exponencial nos instantes iniciais da simulação  $0 < t < 0.1$ ; a curva vermelha representa a previsão teórica do crescimento exponencial do modo  $n = 4$  dada pela Eq.(2.22). O gráfico da esquerda está em escala linear, enquanto o gráfico da direita está em escala monolog.



Fonte: Autor.

Na figura 4.13 exibimos a perturbação da interface em função do tempo num gráfico com escala linear (à esquerda) e em escala monolog (à direita) para  $n = 4$ , de acordo com os dados do gráfico da figura 4.10. O código de cores é o mesmo das figuras 4.11 e 4.12. Usando a Eq.(2.32) com  $n = 4$  e  $B = 0.02$  obtemos como resultado analítico  $\lambda_{analitico} = 2.8$ , enquanto em nosso ajuste numérico obtemos uma taxa de crescimento de  $\lambda_{ajuste} = 2.49$ . Portanto o desvio entre teoria e simulação é de 11,1%, mantém-se similar

aos modos  $n = 2$  e  $n = 3$ , e deve diminuir para simulações com valores de  $\epsilon$  menores [16].

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A natureza é composta de padrões, muitos cientistas descrever esses padrões da melhor maneira possível. Compreender e dominar a física por trás desse assunto nos ajuda a entender os mecanismos que conduzem a formação desses padrões. Através desse entendimento podemos aplicá-las tanto para criação de novas tecnologias como para aplicação direta em indústrias. Tentamos explicar melhor o comportamento da instabilidade de Saffman-Taylor que é a base de estudo do nosso trabalho porém em uma célula radial girante. Procuramos resolver suas equações que governam o sistema utilizando recursos numéricos. Dessa maneira, comprovamos através de nosso código de *phase-field* que interfaces simétricas e assimétricas de fato exibem dinâmica compatível com as análises físicas anteriores do problema. Neste trabalho focamos em alguns aspectos físicos fundamentais do problema estudado em questão: número de dedos dos padrões, a morfologia dos dedos viscosos e o papel dos parâmetros adimensionais do sistema  $A$  e  $B$ . Nosso estudo se limitou ao regime linear, onde simulamos a célula de Hele-Shaw girante, com gotas simétricas e assimétricas.

No capítulo 2 apresentamos a formulação tradicional de formação de dedos viscosos em células de Hele-Shaw girantes, os efeitos viscosos, de capilaridade e centrífugos como responsável pelos padrões formados. Mostramos as principais equações que descrevem o comportamento das perturbações na gota e de onde se originam os dedos. A velocidade dos fluidos na interface não pode ser determinada completamente de maneira analítica, mas pode ser calculada utilizando complexos métodos numéricos. Vale a pena salientar que o método numérico que utilizamos é capaz de acessar estágios altamente não-lineares da dinâmica sem a necessidade de rastrear a interface. A descrição do nosso método de *phase-field* é dada no capítulo 3.

No capítulo 4 apresentamos os resultados das simulações e fizemos comparações com resultado experimentais e analíticos. Analisamos o desenvolvimento das instabilidades de Saffman-Taylor na célula de Hele-Shaw girante quando variamos os parâmetros  $A$  e  $B$ . Se a tensão superficial for menor que 0.06 a interface se torna instável e temos crescimento de dedos. Observamos que a medida que diminuimos  $B$ , aumenta o número de dedos na interface, visto que a tensão superficial tem efeito estabilizante. Nós também comparamos o número de dedos predominante na interface com o número de dedos de mais rápido crescimento linear.

Além disso, realizamos um estudo na influência destes parâmetros sobre a dinâmica de competição dos dedos e deduzimos que existe uma ligação entre a competição dos dedos viscosos e o parâmetro  $A$ . Nessa abordagem foi mostrado que o contraste de viscosidade exerce papel crucial na determinação da dinâmica de competição dos dedos do sistema, e seu sinal determina se há competição nos dedos que entram ou que saem da gota. Nossos resultados mostram um bom acordo com as investigações prévias experimentais e numéricas. Ao nível linear, investigamos as características morfológicas da interface fluido-fluido no início do crescimento de dedos. Fizemos uma análise comparativa onde exibimos as curvas exponenciais nos gráficos das figuras 4.11, 4.12 e 4.13 da simulação, ajuste numérico e modelo analítico.

As simulações do método de *phase-field* explícito demonstram a boa concordância com a análise teórica linear. Uma continuação natural do presente estudo poderia ser implementar o método numérico implícito no tempo e analisar o desprendimento de gotas satélite.



# Bibliografia

- [1] Santos, Robson Luiz, *Dinâmica da formação de padrões: precursores, morfologia e seleção de modos em um sistema perturbado*. Tese de Doutorado em Ciências, UFMG, Novembro de (2008).
- [2] Silva, Rosivânia da Paixão *Geração e Caracterização Reológica de Emulsões de Água em Óleo Pesado para Aplicações em Projetos de Separadores Gravitacionais*. Dissertação de mestrado, UNICAMP. Programa de Pós-graduação Interdisciplinar de Ciências e Engenharia de Petróleo(2004).
- [3] Campos, Luccas Cassimiro, *Modelagem do escoamento de fluidos em meios porosos utilizando a estrutura de dados Autonomous Leaves Graph*. Dissertação de mestrado, UFMG. Programa de Pós-graduação em Matemática (2013).
- [4] Whitaker, Stephen *Flow in porous media I: A theoretical derivation of Darcy's law*. D. Reidel Publishing Company, Transport in Porous Media 1 (1986) 3-25.
- [5] Cassemiro, Mariano G. *Estudo do Escoamento Imiscível Água Óleo Mediante Experimentação em Célula de Hele-Shaw e Simulação CFD*. Dissertação de Mestrado, UFSC. Programa de Pós-graduação em Engenharia Química (2008).
- [6] P. G. Saffman, G. I. Taylor, *The Penetration of a Fluid into a Porous Medium or Hele-Shaw Cell Containing a More Viscous Liquid*. Proc. R. Soc. London Ser. A245, 312 (1958).
- [7] H. Gadêlha, *Efeitos da força de Coriolis na célula de Hele-Shaw girante: estabilidade linear e dinâmica não-linear*. Dissertação de Mestrado, UFPE. Programa de Pós-graduação em Física (2007).
- [8] Varges, Ribeiro P.; Leal R., *Instabilidade de Saffman-Taylor no deslocamento de Líquidos Viscoplásticos*. Relatório Final PIBIC, Outubro, p. 19, (2015).
- [9] Eduardo O. Dias and José A. Miranda, *Influence of inertia on viscous fingering patterns: Rectangular and radial flows*. Physical review E 83, 066312 (2011).
- [10] L. Paterson, *Radial fingering in a Hele-Shaw cell*. J. Fluid Mech. 113, 513 (1981).
- [11] J. A. Miranda, F. Parisio, F. Moraes e M. Widow *Gravity-driven instability in a spherical Hele-Shaw cell*. Phys. Rev. E 63, 016311 (2001).

- [12] J. A. Miranda, *Analytical approach to viscous fingering in a cylindrical Hele-Shaw cell*. Phys. Rev. E 65, 026303 (2002).
- [13] J. A. Miranda e F. Moraes, *Geometric approach to viscous fingering on a cone*. J. Phys. A: Math. Gen. 36, 863 (2003).
- [14] K. V. McCloud e J. V. Maher *Experimental perturbations to Saffman-Taylor flow*. Phys. Rep. 260, 139 (1995).
- [15] Carvalho, Gabriel Dias *Interfaces Elásticas e o surgimento de instabilidades em células de Hele-Shaw*. Dissertação de Mestrado, UFPE. Programa de Pós-graduação em Física (2015).
- [16] R. Folch, E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín, and J. Casademunt, *Pattern formation and interface pinch-off in rotating Hele-Shaw flows: A phase-field approach*. Phys. Rev. E 80, 056305 (2009).
- [17] Ll. Carrillo, J. Soriano e J. Ortín, *Radial displacement of a fluid annulus in a rotating Hele-Shaw cell*. Phys. Fluids 11, 778 (1999).
- [18] H. Gadêlha and J. A. Miranda, *Finger competition dynamics in rotating Hele-Shaw cells*. Phys. Rev. E 70, 066308 (2004).
- [19] H. Darcy, *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon: Distribution d'eau et Filtrage des Eaux*. Victor Dalmont, Paris (1856).
- [20] D. Bensimon, L. P. Kadanoff, S. Liang, B. I. Shraiman e C. Tang, *Viscous flow in two dimensions*. Rev. Mod. Phys 58, 977 (1986).
- [21] L. Prandtl, *Essentials of Fluid Dynamics*. Hafner, (1952).
- [22] C. Stephen, *An Introduction to Theoretical Fluid Dynamics*. Courant Institute of Mathematical Sciences at New York University, (2008).
- [23] Nanocell News, jornal eletrônico, *Tensão superficial da água: Como os insetos andam por sobre a águas*. <http://www.nanocell.org.br/tensao-superficial-da-agua-como-os-insetos-andam-por-sobre-a-agua/>, (2018).
- [24] K. Balasubramanian, F. Hayot e W.F. Saam, *Darcy's law from lattice-gas hydrodynamics*. Phys. Rev. A 36, 2248 (1987).
- [25] A. Eslami, *Viscous fingering regimes in elasto-visco-plastic fluids*. Volume 243, May (2017), Pages 79 à 94
- [26] R. Chebbi, *Dynamics of liquid penetration into capillary tubes*. J. Coll. Int. Science Volume 315, Issue 1,1 November (2007), Pages 255-260.

- [27] E. Alvarez-Lacalle, E. Pauné, J. Casademunt, and J. Ortín, *Systematic weakly nonlinear analysis of radial viscous fingering*. Phys. Rev. E 68, 026308 (2003).
- [28] J. A. Miranda and E. Alvarez-Lacalle, *Viscosity contrast effects on fingering formation in rotating Hele-Shaw flows*. Phys. Rev. E 72, 026306 (2005).
- [29] R. Folch, J. Casademunt, and A. Hernandez Machado, *Phase-field model for Hele-Shaw flows with arbitrary viscosity contrast. I. Theoretical approach*. Phys. Rev. E 60, (1999).
- [30] Ll. Carrillo, L. Magdaleno, F. Casademunt, J. Ortín, *Experiments in a rotating Hele-Shaw cell*. Phys. Rev. E 54, 6260-6267 (1996).
- [31] E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín e J. Casademunt, *Low viscosity contrast fingering in a rotating Hele-Shaw cell*. Phys. Fluids 16, 908 (2004).
- [32] Sérgio A. Lira e José A. Miranda, *Adhesion properties of chain-forming ferrofluids*. Phys. Rev. E 79, 046303. (2009).
- [33] J. A. Miranda, *Rotating Hele-Shaw cells with ferrofluids*. Phys. Rev. E 62, 2985 (2000).
- [34] Ll. Carrillo, J. Soriano e J. Ortín, *Interfacial instabilities of a fluid annulus in a rotating Hele-Shaw cell*. Phys. Fluids 12, 1685 (2000).
- [35] V. M. Entov, P. I. Etingof e D. Ya. Kleinbock, *On nonlinear interface dynamics in Hele-Shaw flows*. Eur. J. Appl. Math. 6, 399 (1996).
- [36] G. Tryggvason e H. Aref, *Numerical experiment on Hele-Shaw flow with a sharp interface*. J. Fluid Mech. 136, 1 (1983).
- [37] G. Tryggvason e H. Aref, *Finger-interaction mechanisms in stratified Hele-Shaw flow*. J. Fluid Mech. 154, 287 (1985).
- [38] J. V. Maher, *Development of Viscous Fingering Patterns*. Phys. Rev. Lett, 54 1498 (1985).
- [39] M. W. DiFrancesco e J. V. Maher, *Noisy and regular features in Saffman-Taylor patterns*. Phys. Rev. A 39, 4709 (1989).
- [40] J. Casademunt e D. Jasnow, *Defect dynamics in viscous fingering*. Phys. Rev. Lett. 67, 3677 (1991).
- [41] Ching-Yao Chen, Shu-Wei Wang. *Interfacial instabilities of miscible fluids in a rotating Hele-Shaw cell*. Fluid Dynamics Research 30 315-330 (2002).

- [42] P. Pelce, *Dynamics of Curved Fronts Academic Press*. New York, (1988).
- [43] J. A. Miranda and M. Widom, *Radial fingering in a Hele-Shaw cell: A weakly nonlinear analysis*, Physica D 120, 315 (1998).
- [44] E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín e J. Casademunt, *Relevance of dynamic wetting in viscous fingering patterns*. Phys. Rev. E 74, 025302(R) (2006).
- [45] I Singer-Loginova and H. M. Singer *The phase field technique for modeling multiphase materials*. Phys. 71 (2008) 106501 (32pp).
- [46] R. González-Cinca, R. Folch, R. Benifez, L. Ramirez-Piscina, J. Casademunt and A. Hernández-Machado *Phase-field models in interfacial pattern formation out of equilibrium*. in Advances in Condensed Matter and Statistical Mechanics, ed. by E. Korutcheva and R. Cuerno, Nova Science Publishers (New York, 2004), pp. 203-236.
- [47] J. Nase, D. Derks e A.Lindner, *Dynamic evolution of fingering patterns in a lifted Hele-Shaw cell*. Phys. Fluids 23, 123101 (2011).
- [48] Franco, Neide Bertoldi, *Cálculo Numérico*. Pearson, Pag. 437, (2006).
- [49] Chen, Ching-Yao., Chen, Chen-Hua. *Numerical study of pattern formation in miscible rotating Hele-Shaw flows*. Phys. Rev. E 73, 046306 (2006).
- [50] J. Casademunt, D. Jasnow, and A. Hernández-Machado, *Interface equation and viscosity contrast in Hele-Shaw flow*. Int. J. Mod. Phys. B 6, 1647, (1992).
- [51] H. Zhao and J. V. Maher, *Viscous fingering experiments with periodic boundary conditions*. ibid. 42, 5894. (1990).
- [52] J. Casademunt, D. Jasnow, *Finger competition and viscosity contrast in viscous fingering. A topological approach*. Physica D 79, 387, (1994).
- [53] E. Paune, *Interface dynamics in two-dimensional viscous flows*. Ph.D. thesis, University of Barcelona, Barcelona, Spain, (2002).
- [54] C. W. Park and G. M. Homsy, *Two-phase displacements in Hele-Shaw cells: theory*. J. Fluid Mech. 139, 291, (1984).
- [55] Eduardo O. Dias e José A. Miranda, *Control of radial fingering patterns: A weakly nonlinear approach*. Phys. Rev. E, 81.016312 (2010).
- [56] H. S. Hele-Shaw, *Investigations of the nature of surface resistance of water and of stream line motion under certain experimental conditions*. Trans. Inst.Naval Arch. 40, 21 (1898).

- 
- [57] Craig Gin and Prabir Daripa, *Stability Results for Multi-Layer Radial Hele-Shaw and Porous Media Flows*. *Physics of Fluids*, January (2015).
- [58] Emmerich, H. *Advances of and by phase-field modelling in condensed-matter physics*. *Adv. Phys.* 57, 1-87 (2008).