



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Reinaldo da Conceição

**A fase geométrica e a dinâmica de dipolos elétricos
e magnéticos**

Maceió-AL

2019

REINALDO DA CONCEIÇÃO

**A FASE GEOMÉTRICA E A DINÂMICA DE DIPOLOS ELÉTRICOS E
MAGNÉTICOS**

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Manoel de Moraes Carvalho

Maceió-AL

2019

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho

C744f Conceição, Reinaldo da.
A fase geométrica e a dinâmica de dipolos elétricos e magnéticos /
Reinaldo da Conceição. - 2019.
48 f. : il.

Orientador: Alexandre Manoel de Moraes Carvalho.
Dissertação (mestrado em Física da Matéria Condensada) – Universidade
Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2019.

Bibliografia: f. 45-48.

1. Dipolos magnéticos. 2. Dipolos elétricos. 3. Efeito Aharonov-Bohm. I. Título.

CDU: 538.9



Universidade Federal de Alagoas

Instituto de Física

Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14. Campus A.C. Simões
Cidade Universitária
Tabuleiro dos Martins
57072-970 Maceió - AL, Brasil
FONE : (82) 3214-1423/FAX 3214-1645

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**“A fase geométrica e a dinâmica de dipolos
elétricos e magnéticos”**


por

Reinaldo da Conceição

A Banca Examinadora composta pelos professores Alexandre Manoel de Moraes Carvalho (orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Francisco Anacleto de Barros Fidelis de Moura, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas e Samuel Silva de Albuquerque, do Campus Arapiraca da Universidade Federal de Alagoas consideram o candidato aprovado com grau “B”.

Maceió, 27 de junho de 2019


Prof. Alexandre Manoel de Moraes Carvalho


Prof. Francisco Anacleto de Barros Fidelis de Moura


Prof. Samuel Silva de Albuquerque

Dedico esta dissertação aos meus pais Alaide e Benedito, aos meus irmãos e a minha noiva Aline Raquel.

AGRADECIMENTOS

Na confecção da presente dissertação, contei com o apoio direto ou indireto de algumas pessoas que contribuíram para a realização de mais um sonho, no qual estou profundamente grato. Não gostaria de correr o risco aqui, de injustamente esquecer de mencionar alguém. Desta forma, expressei os meus agradecimentos às seguintes pessoas: O orientador desta dissertação, professor Alexandre Manoel de Moraes Carvalho, pela orientação prestada, pelo seu incentivo e apoio nos momentos que precisei, pela disponibilidade que sempre demonstrou a minha pessoa. Aqui lhe exprimo minha gratidão. Ao professor Tiago Mariz que ministrou a disciplina de teoria quântica I como nem um outro professor a ministraria, através do conhecimento que obtive dessa disciplina, escrevi parte deste trabalho, ao professor Iram Marcelo Gléria que ministrou mecânica estatística e eletrodinâmica I com grande sabedoria e inteligência e ao professor Fidelis que ministrou tópicos de programação e cálculo numérico aplicados a sistemas magnéticos e teoria da informação quântica, digno dos grandes mestres. Aos meus amigos e colegas que de uma forma ou de outra, contribuíram, ou auxiliaram para a elaboração do presente estudo, pela paciência, atenção e força que prestaram em momentos difíceis. Aos meus familiares por todo o apoio, força e carinho que sempre tiveram a minha pessoa ao longo de todo o mestrado, assim como, na elaboração desta dissertação pois sem esse apoio, isso não teria sido possível. A minha noiva por sempre estar ao meu lado, pela paciência e compreensão, agradeço por sempre estar sorridente e acreditar que as coisas vão melhorar, é por isso que luto e sempre lutarei pra estarmos sempre juntos. A CAPES pelo apoio financeiro, sem ele nada disso seria possível.

RESUMO

Neste trabalho abordamos o estudo da obtenção da fase geométrica e a dinâmica de dipolos elétricos e magnéticos. Apresentamos suas origens, alguns trabalhos relevantes nesta área assim como seus resultados. O aparecimento de uma fase geométrica é explicado quando se faz um estudo da dinâmica quântica da partícula como por exemplo no efeito Aharonov - Bohm. O presente estudo começa com uma introdução sobre a fase geométrica, onde apresentamos exemplos utilizados para ilustra-la. Em seguida, foi apresentado o teorema adiabático tanto em sistemas clássicos como em sistemas quânticos e um discurso acerca de invariantes adiabáticos. Após isto, apresentamos sua formulação matemática final e também a sua obtenção para uma partícula de spin $1/2$. Logo em seguida, obtivemos o lagrangiano e o seu hamiltoniano, achamos a fase quântica que a partícula adquire no efeito Aharonov - Bohm e Aharonov - Casher. Vimos também a dinâmica quântica de dipolos tanto (elétricos como magnéticos), onde partimos da Lagrangiana e estudamos suas configurações de campo, chegamos a fase de Ananda, onde no passo seguinte obtemos fases para algumas das configurações de campo na fase de Ananda desde a fase de Aharonov - Casher onde fizemos o momento de dipolo elétrico igual a zero, assim como a fase de He - Mckellar - Welkens com momento de dipolo magnético igual a zero, e o efeito Casella obtendo assim um caso partícula da fase de Ananda.

Palavras-chave: Dipolos magnéticos. Dipolos elétricos. Efeito Aharonov - Bohm.

ABSTRACT

In this work, we study the geometric phase and the dynamics of electric and magnetic dipoles. We present your origins, some relevant works in this area as well as your results. The appearance of a geometric phase is explained when a study of quantum dynamics of the particle is made, during a complete cycle and that is subject to cyclic adiabatic processes. The present study begins with an introduction about the geometric phase, where we present examples used to illustrate it. Next, the adiabatic theorem was presented in both classical and quantum systems and a discourse on adiabatic invariants. After this, we present its final mathematical formulation and also its obtaining for a spin $1/2$ particle. Soon after, we obtained the Lagrangian and its Hamiltonian, we find the quantum phase that the particle acquired in the effect Aharonov - Bohm and Aharonov - Casher. We have also seen the quantum dynamics of both electric and magnetic dipoles, where we start from the Lagrangian and study its field configurations, we reach the Ananda phase, where in the next step we obtain phases for some of the field configurations in the Ananda phase from phase of Aharonov - Casher where we made the electric dipole moment equal to zero, as well as the He - Mckellar - Welkens phase with magnetic dipole moment equal to zero, and the Casella effect thus obtaining a particle case of the Ananda phase.

Keywords: Magnetic dipoles. Electric dipoles. Effect Aharonov - Bohm.

Lista de Figuras

Figura 1 -	Feixe de luz inicialmente polarizada através de um polarizador.	2
Figura 2 -	O feixe se divide e suas metades passam pelos lados do solenóide.	3
Figura 3 -	O plano de oscilação do pêndulo gira quando se move ao redor de uma latitude.	4
Figura 4 -	Vetor transportado paralelamente ao longo de um caminho fechado sobre uma esfera.	5
Figura 1.1 -	Pêndulo de comprimento variável oscilando.	8
Figura 2.1 -	Spin-1/2 partícula no campo magnético descrito pela equação (2.6).	18
Figura 3.1 -	Efeito Aharonov-Bohm magnético.	26
Figura 3.2 -	Ilustração do efeito Aharonov - Casher.	29

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Lista de Figuras	iv
Introdução	1
1 O teorema adiabático	7
1.1 O teorema adiabático sistemas clássicos	8
1.2 Invariantes Adiabáticos	9
1.3 O teorema adiabático em sistemas Quânticos	11
2 Fases Geométricas	16
2.1 Introdução	16
2.2 A formulação matemática da fase de Berry	16
2.3 Fase geométrica para uma partícula de spin 1/2	18
3 O Efeito Aharonov-Bohm	22
3.1 A Lagrangiana em termos do potencial vetor	22
3.2 O Hamiltoniano em termos do potencial vetor	24
3.3 O efeito Aharonov - Bohm magnético	25
3.4 Efeito Aharonov-Casher	28
4 A Dinâmica de dipolos magnéticos e elétricos na fase geométrica	32
4.1 A dinâmica clássica e quântica de dipolos	32

4.2 Algumas configurações de campo na fase de Ananda	39
5 Conclusão	44
Referências Bibliográficas	45

Introdução

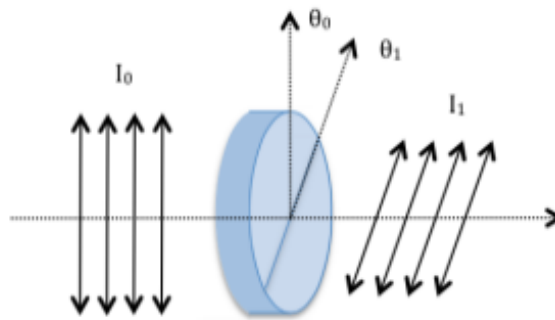
Fase geométrica é a fase adquirida ao longo de um ciclo completo, por um sistema que está sujeito a processos adiabáticos cíclicos. Essa fase resulta das propriedades geométricas do espaço de parâmetros. Em um sistema no n -ésimo auto-estado, durante uma evolução cíclica do hamiltoniano, o sistema permanece no n -ésimo auto-estado do hamiltoniano, mas adquire um fator de fase. O fator de fase total possui duas contribuições, uma contribuição chamada fase dinâmica e outra, chamada fase geométrica. A fase dinâmica depende da energia do estado e do tempo, enquanto a fase geométrica depende da geometria do contorno e não do tempo.

Como o próprio Berry [1] apontou, a noção de que a função de onda de um sistema quântico pode não retornar a sua fase inicial quando seus parâmetros sofrem uma evolução cíclica lenta tem muitos precursores. Existe uma série de trabalhos que analisaram luz polarizada, moléculas, ondas de rádio, matrizes e espaços curvos no qual a ideia de fase geométrica está inserida, mesmo que intuitivamente.

A fase geométrica teve sua antecipação em um artigo publicado sobre "*Teoria generalizada da interferência e suas aplicações*", em 1956 feito por Pancharatnam [2], ao estudar o efeito de ondas em luz polarizada, ele conseguiu definir a diferença de fase entre dois estados não ortogonais de polarização. Se diz que dois estados estão em fase quando a intensidade do estado superposto atinge um valor máximo, ou seja, a diferença de fase entre dois feixes é definida como a mudança de fase a ser aplicada a um feixe a fim de maximizar a intensidade de sua superposição. Então a pergunta que ele fez a si próprio foi a seguinte: qual seria o fator de fase adquirido por uma luz polarizada ao passar por várias mudanças de polarização no qual a polarização final e inicial são as mesmas? Dessa forma, Pancharatnam precisou definir a diferença de fase entre dois estados para descrever como um feixe de luz inicialmente polarizado linearmente numa direção θ_0 , muda ao passar através de um polarizador.

A diferença de fase definida por ele é proporcional ao ângulo sólido no espaço dos estados de polarização. Apesar de Pancharatnam ter descoberto, o que hoje se chama-se de fase

Figura 1 - Feixe de luz inicialmente polarizada através de um polarizador.



Fonte: Retirado da Ref. [40]

geométrica, foi Berry que estabeleceu uma relação precisa entre a fase de Pancharatnam e a fase geométrica, ao afirmar que a fase adquirida pelos autos estados de polarização é um análogo óptico ao efeito Aharonov–Bohm.

Em 1959 Aharonov e Bohm [3], publicaram um artigo no qual eles demonstraram que, o potencial vetor pode afetar o comportamento quântico de uma partícula carregada até mesmo quando ela está passando por uma região em que o campo magnético é nulo. Para ilustrar, vamos considerar um dos mais tradicionais exemplos dentre os inúmeros arranjos experimentais no qual o efeito Aharonov-Bohm pode ser observado.

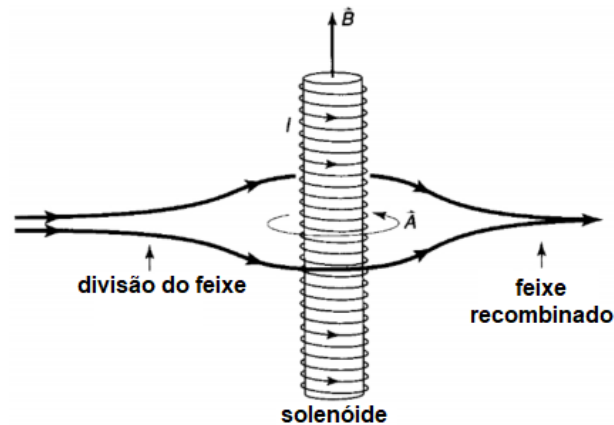
O exemplo mais simples para descrever o efeito Aharonov-Bohm é considerar um feixe de elétrons contornando um solenoide longo que possui um campo magnético no seu interior, essa demonstração foi feita experimentalmente com um feixe de elétrons que é dividido e suas partes passam por lados opostos de um solenoide, evitando-o, como mostra a Figura (2). O feixe é coerente antes da divisão e depois de dividido, devido às interações que são impostas em cada um dos caminhos diferentes que lhes são dados, fases diferentes são adquiridas, implicando assim em um aparecimento de uma fase quando os feixes se combinarem novamente.

Aprendemos nos cursos de física básica que uma partícula de carga q , girando ao redor de um solenoide infinitamente longo de raio $\rho = r_s$ que transporta uma corrente I com um campo magnético, em que μ_0 é a permeabilidade magnética e n é o número de espiras por unidade de comprimento (N/L), logo o campo magnético é escrito como

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{z} & \text{se } 0 < \rho < r_s \\ 0 & \text{se } \rho \geq r_s \end{cases} \quad (1)$$

lembrando que r_s é o raio do solenoide e ρ é o raio da curva amperiana.

Figura 2 - O feixe se divide e suas metades passam pelos lados do solenóide.



Fonte: Retirado da Ref. [8]

Observe que o campo magnético fora da região do solenoide é zero, mas o potencial vetor dessa configuração não é. Dessa forma o fluxo magnético é dado por

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dA \quad (2)$$

escrevendo o campo magnético como o rotacional do potencial vetor, ou seja, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ e usando o teorema de Stokes é possível reescrever o fluxo como

$$\Phi_B = \int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \hat{n} dA \quad (3)$$

$$\Phi_B = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \quad (4)$$

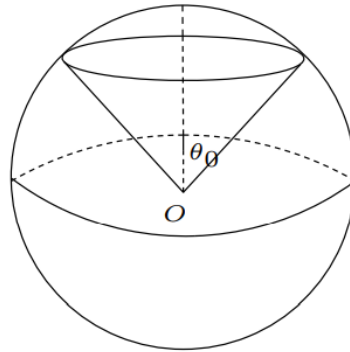
o lado direito da equação (4), nos permite encontrar seu potencial vetor

$$\vec{A} = \frac{\Phi_B}{2\pi r_s} \hat{\phi}. \quad (5)$$

O resultado da experiência, de acordo com a teoria quântica é que, um elétron é influenciado pelo potencial vetor \vec{A} , ainda que ele viaje inteiramente nas regiões onde $\vec{B} = 0$ ou seja, o fluxo magnético pode afetar as partículas mesmo fora do alcance do campo magnético. Este fluxo não envolve o campo magnético, mas sim seu potencial vetor, que conforme o teorema de Stokes não se anula fora do solenoide, pois sua integral de caminho deve ser igual ao fluxo. Por outro lado, os efeitos físicos dependem somente do rotacional de \vec{A} , então deduz que um elétron é influenciado por campos não nulos em regiões inacessíveis a ele.

Um outro exemplo utilizado para ilustrar a fase geométrica é o pêndulo de Foucault, que sofre uma variação no seu plano de oscilação devido ao movimento do suporte do pêndulo em um caminho fechado sobre uma esfera, como representado na figura (3).

Figura 3 - O plano de oscilação do pêndulo gira quando se move ao redor de uma latitude.



Fonte: Retirado da Ref. [4]

Este tipo de movimento é devido a rotação da Terra, no qual o plano de oscilação gira com tal rotação. A explicação usual faz uso da força de Coriolis e de referências não inerciais. Mais, entretanto esse movimento pode ser explicado em termos de uma fase geométrica. A fase adquirida pelo plano depende do caminho escolhido, que por sua vez depende do ângulo sólido que é determinado pela latitude $\theta_0 = (\frac{\pi}{2} - \lambda_0)$ que identifica o caminho percorrido pelo suporte do pêndulo. A fase é

$$\Omega = \int \int \frac{da}{r^2} \quad (6)$$

$$= \int \int \text{sen}(\theta) d\theta d\varphi \quad (7)$$

$$= \int_0^{\theta_0} \text{sen}(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \quad (8)$$

$$= 2\pi(1 - \cos(\theta_0)) \quad (9)$$

$$= 2\pi(1 - \text{sen}(\lambda_0)) \quad (10)$$

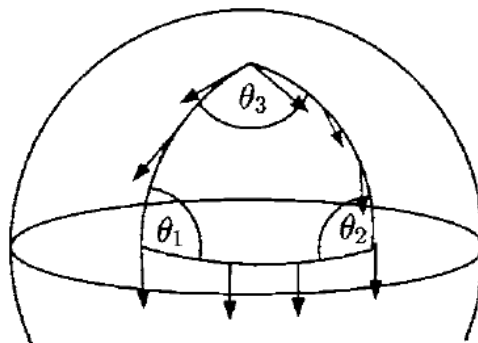
O ângulo sólido segundo o qual o caminho é visto à latitude θ_0 que, relativamente à Terra que rodou num ângulo 2π este resultado indica que o pêndulo precessou num ângulo $2\pi \text{sen}(\theta_0)$. Por exemplo, para um lugar onde a latitude é $\theta_0 = 30^\circ$ o plano do pêndulo demora dois dias a voltar à situação inicial. A rotação é feita no sentido dos ponteiros do relógio no hemisfério Norte e no sentido contrário no hemisfério Sul, como se pode facilmente ver pensando nos polos. No equador não há rotação do plano [4].

Como o pêndulo precessa quando é levado em torno de um caminho geral C ? Para transporte ao longo do equador, o pêndulo não precessa. Agora se C é composto de segmentos geodésicos, a precessão virá dos ângulos onde os segmentos das geodésicas se encontram;

a precessão total é igual ao ângulo do déficit líquido que por sua vez é igual ao ângulo sólido envolto. Finalmente, podemos aproximar qualquer loop por uma sequência de segmentos geodésicos, portanto, o resultado mais geral dentro ou fora da superfície da esfera é que a precessão é igual ao ângulo sólido líquido [5].

Desta forma a orientação do pêndulo sofre um transporte paralelo ao longo deste caminho. É sabido que o transporte paralelo de um vetor no circuito fechado inscrito numa superfície plana, pode retornar ao ponto de partida inicial com suas direções e sentidos iguais ao iniciado no começo de sua trajetória. Isso só é possível porque a superfície no qual o vetor foi transportado não possui curvatura. Se imaginarmos o transporte paralelo de um vetor ao longo de uma superfície fechada como sobre uma esfera, o que nos faz imaginar por exemplo em viajar de ônibus na superfície do planeta, sendo sua trajetória visualizada na figura (4), o vetor se movimentou ao longo da trajetória fechada sobre a esfera. Dá-se então início ao movimento propriamente dito, sendo transportado paralelamente de um dos polos da esfera até a curva equivalente ao equador, logo em seguida é transportado ao longo do equador e após segue sua trajetória a caminho do polo de origem. Ao completar o caminho fechado, o vetor se encontra em rotação com respeito à direção que estava apontando quando a viagem começou, ou seja, ele adquire uma fase [6].

Figura 4 - Vetor transportado paralelamente ao longo de um caminho fechado sobre uma esfera.



Fonte: Retirado da Ref. [5]

Neste trabalho será apresentado um resumo teórico sobre a obtenção da fase geométrica nos efeitos Aharonov - Bohm magnético e Aharonov - Casher e suas implicações, assim como a dinâmica de dipolos magnéticos e momentos de dipolo elétrico. A motivação para o estudo deste trabalho é devido a crescentes pesquisas sobre o estudo da dinâmica de dipolos magnéticos e elétricos, assim como a fase geométrica que tem despertado interesse na comunidade científica

há algumas décadas e continua até hoje ganhando adeptos na física da matéria condensada [7].

A presente dissertação conta com a parte introdutória, onde apresentamos alguns pesquisadores e suas relevantes pesquisas nesta área, além disso mostramos também meios alternativos que nos leva a obtenção da fase geométrica. No capítulo 1 apresentamos o teorema adiabático, que nos permitiu encontrar os invariantes adiabáticos para um oscilador harmônico simples onde a grandeza E/ω é um invariante. No capítulo 2 falamos sobre Fases geométricas, onde foi apresentada a equação que representa a fase geométrica, assim como a aplicação a uma partícula de spin $1/2$. No capítulo 3 O efeito Aharonov - Bohm, apresentamos o lagrangiano assim como o seu hamiltoniano, obtivemos a fase no efeito Aharonov - Bohm magnético e no efeito Aharonov - Casher. No capítulo 4 apresentamos o estudo da dinâmica clássica e quântica dos momentos de dipolos elétricos e magnéticos, assim como a obtenção da equação da fase de Ananda que ao considerar o momento de dipolo elétrico $d = 0$ encontramos o efeito Aharonov - Casher e $\mu = 0$, temos o efeito He- Mckellar - Welkens e encontramos também a fase Casella.

O teorema adiabático

Há um importante teorema envolvendo processos adiabáticos no contexto da mecânica quântica, conhecido como teorema adiabático [8]. O teorema adiabático ou teorema adiabático quântico foi formulado em 1928 por Max Born e Vladimir Fock [9]. Este teorema tem se mostrado de suma importância na Mecânica Quântica.

Além disso, o teorema possui uma série de aplicações em sistemas físicos como por exemplo, transição Landau-Zener [10,11], aproximação de Born-Oppenheimer [12], processos colisionais [13] e computação quântica adiabática [14] entre outros. Como podemos ver a utilização do regime adiabático contribui para a formulação de importantes resultados, dentre eles a aproximação de Born-Oppenheimer, que é de suma importância para o entendimento da dinâmica das moléculas. A aproximação de Born-Oppenheimer é uma divisão do hamiltoniano do sistema, separando o movimento nuclear do movimento eletrônico. Se a razão entre as massas do elétron e do núcleo é suficientemente pequena de forma que os núcleos não acompanham as rápidas mudanças na trajetória dos elétrons e podem ser considerados fixos. Esta afirmação recebe o nome de aproximação de Born-Oppenheimer ou aproximação adiabática.

Já a transição Landau-Zener [10,11] é um fenômeno que pode ser observado em um sistema de dois níveis com algum tipo de acoplamento não diagonal entre estados (como o intermediado por campo eletromagnético) desde que o hamiltoniano do sistema dependa do tempo de um modo tal que as energias do sistema na base adiabática variam linearmente e cruzam-se num certo instante [15]. Todavia, transições Landau-Zener também podem ocorrer em sistemas de muitos níveis [16,17,18], em sistemas acoplados ao ambiente que inclui dissipação [16,19,20], bem como quando os elementos diagonais do hamiltoniano têm dependência não linear no tempo [16,21,22].

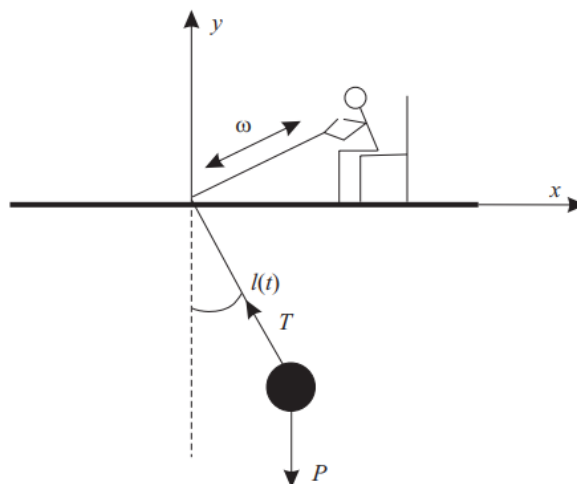
Na computação quântica adiabática foi proposta uma alternativa para o modelo de portas lógicas quânticas [20]. Neste tipo de computação, a sequência de operações unitárias aplicadas aos qubits (de maneira discreta) são substituídas por um hamiltoniano que depende continua-

mente do tempo, de modo que o algoritmo funciona da seguinte forma, a solução do problema, supostamente, está codificada no estado fundamental do hamiltoniano no final da evolução, $H_{(T)}$; o hamiltoniano inicial, $H_{(0)}$, é escolhido de forma que seu estado fundamental seja conhecido e facilmente implementado; o hamiltoniano que governa a evolução do sistema é construído de maneira que interpole linearmente $H_{(0)}$ e $H_{(T)}$ [21]. Assim, $H_{(s)} = (1-s)H_{(0)} + sH_{(T)}$, onde $s = \frac{t}{T}$ e $0 \leq s \leq 1$. Através do teorema adiabático, obtém-se a condição para que o sistema evolua do estado fundamental de $H_{(0)}$ até o estado fundamental de $H_{(T)}$, garantindo a resposta da computação. No algoritmo original, consideramos que a resposta do sistema esteja no estado fundamental. Porém, esta não é uma condição obrigatória, basta que a evolução do sistema seja adiabática [23].

1.1 O teorema adiabático sistemas clássicos

Para melhor entendimento do que hoje conhecemos como abordagem adiabática, convém deixarmos momentaneamente o campo da mecânica quântica para o campo da mecânica clássica a qual estamos intuitivamente acostumados. É bem conhecido que, se um sistema físico é lentamente alterado, o estado posterior do sistema físico se adapta suavemente ao novo ambiente, sem alterações súbitas.

Figura 1.1- Pêndulo de comprimento variável oscilando.



Fonte: Retirado da Ref. [41]

Tomemos o exemplo de um pêndulo constituído de uma massa m conectada a um fio de comprimento variável $l(t)$ como na figura (1.1), que é fixado em um determinado local, que

varia ao longo de um plano com o período clássico típico igual a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l(t)}{g}}. \quad (1.1)$$

Em um sistema adiabático, entendemos como sendo aquele que propicia uma mudança gradual e lenta a partir de condições externas ao sistema físico, de uma maneira que existam dois tempo característicos envolvidos T_i o tempo interno, que representa o movimento do sistema e T_e o tempo externo, sob o qual os parâmetros do sistema mudam sensivelmente. No pêndulo simples da figura (1.1), uma mudança em seu comprimento acaba mudando a frequência angular de oscilação do sistema, sendo que

$$\omega_{(t)} = \sqrt{\frac{g}{l(t)}} \quad (1.2)$$

g é a aceleração da gravidade no qual o sistema está sujeito. Para uma evolução adiabática do sistema é preciso que o comprimento do pêndulo mude lentamente com o tempo, de modo que a frequência de oscilação também mude. Feito isso será possível determinar um tempo interno T_i representando o movimento do sistema e um tempo externo T_e no qual muda-se os parâmetros do sistema ou seja, será de suma importância que tenhamos $T_e \gg T_i$, neste caso o pêndulo sofre uma transformação adiabática.

1.2 Invariantes Adiabáticos

Desde quando o físico alemão Max Planck, em 1899, descobriu que a absorção e emissão de energia radiante por matéria não ocorrem em quantidades arbitrárias, mas de forma quantizada, os físicos tentaram para introduzir as ideias quânticas na mecânica clássica. Em 1913, Niels Bohr explicou o espectro do hidrogênio com aspectos clássicos e introduziu duas hipóteses adicionais: que os elétrons têm apenas certos movimentos periódicos (órbita) estáveis e não um contínuo de tais movimentos, e que pode passar entre duas órbitas adjacentes emitindo ou absorvendo um quantum de luz.

Os movimentos ligados dos sistemas quânticos isolados que são estáveis ou estacionários formam um conjunto discreto. Os outros estados são instáveis, e eles formam um conjunto contínuo; eles são estados não estacionários. A partir de então até agora (e levará algum tempo até que a questão seja definitivamente resolvida), os físicos teóricos investigam as órbitas estáveis apresentados pelos sistemas atômicos; isto é para determinar a causa de certos estados

serem estáveis e os outros serem instáveis. No início do século XX, a questão de interesse não era tanto a causa da quantização dos sistemas atômicos (que foram tomados como dados experimentais), mas sim para determinar quais são as quantidades mensuráveis.

Verificou-se que as quantidades mensuráveis devem atender aos dois requisitos a seguir: elas podem mudar apenas para múltiplos, da constante de Planck $h/2\pi$ e devem permanecer absolutamente inalterado quando o sistema é submetido a uma influência externa que não é capaz de causar uma alteração de magnitude nessa quantidade. Tais quantidades são chamadas de invariantes adiabáticos e foram extensivamente estudadas por P. Ehrenfest nos anos 1914 a 1923. Os invariantes adiabáticos da antiga teoria quântica coincidem com as chamadas variáveis de ação que nada mais é que um conjunto de novas variáveis para certos campos hamiltonianos.

Considere um oscilador harmônico clássico, que surge a partir de um sistema físico, em que uma massa m está sujeita a uma força restauradora que atua proporcionalmente ao deslocamento, onde o equilíbrio da partícula encontra-se na posição $x = 0$. Tratando o caso simples, iremos partir para o estudo da energia potencial do sistema. A energia potencial diz respeito à capacidade do sistema em oscilar e é diretamente relacionado a força atuante sobre ele, ou seja, $F = -\frac{dV}{dx}$ ou $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$, onde o potencial pode ser obtido como: $V(x) = \frac{kx^2}{2}$. Sabemos que a frequência angular de oscilação é dada por: $\omega^2 = \frac{k}{m}$, dessa forma podemos escrever a equação de movimento do oscilador harmônico como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0. \quad (1.3)$$

Que nos dá como solução da equação $x(t) = x_0 \cos(\omega t - \varphi)$ onde x_0 é a amplitude e φ a fase. Esta solução nos permite compreender a posição do oscilador harmônico como composto de oscilações cossenoidais ao redor do ponto de equilíbrio, com frequência angular. A energia cinética é dada por: $T = \frac{p^2}{2m}$, onde $p = m \frac{dx}{dt} = m\dot{x}$. Logo a energia total do sistema que é a soma da energia cinética com a potencial, fica

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\omega^2x^2}{2}. \quad (1.4)$$

Mostraremos que, para um oscilador harmônico de frequência angular que varia lentamente, a grandeza E/ω é um invariante adiabático.

Se observamos que a frequência angular do sistema poderia estar variando lentamente porque neste caso teríamos que $\omega(t) = \sqrt{\frac{g}{l(t)}}$, como no caso do pêndulo com comprimento $l(t)$ variando lentamente, a partir da qui vamos supor que $l = l(t)$ e $\omega = \omega(t)$. Dessa forma podemos reescrever a equação (1.4) derivando-a em relação ao tempo o que nos dá

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + m\omega^2 x\dot{x} + m\omega x^2 \frac{d\omega}{dt}. \quad (1.5)$$

Esta equação contém termos rápidos e termos lentos. Durante um intervalo de tempo necessário para que os termos lentos E e ω variem significativamente, os termos rápidos executam um grande número de oscilações, de modo que podemos substituí-los por seus valores médios num período de oscilação. Assim procedendo, ficamos com

$$\frac{dE}{dt} = \langle m\dot{x}\ddot{x} + m\omega^2 x\dot{x} \rangle + \langle m\omega x^2 \rangle \frac{d\omega}{dt} \quad (1.6)$$

o resultado da equação (1.6) foi obtido durante um tempo necessário, para a energia e a frequência variarem, desta forma os demais termos oscilam enormemente, então o efeito produzido por eles é essencialmente o efeito produzido por um valor médio que estes termos assumem num período de oscilação. Assim os dois valores médios no período $\langle \dot{x}\ddot{x} \rangle$ e $\langle x\dot{x} \rangle$, são iguais a zero, de modo que $\langle \dot{x}\ddot{x} \rangle = \langle x\dot{x} \rangle = 0$, pois x retorna ao seu valor original após um período, restando apenas o termo $\langle m\omega x^2 \rangle = E/\omega$, onde

$$\frac{dE}{E} = \frac{d\omega}{\omega} \Rightarrow \frac{E}{\omega} = cte \quad (1.7)$$

como queríamos demonstrar.

1.3 O teorema adiabático em sistemas Quânticos

Para realizar a prova do teorema adiabático quântico, iremos considerar inicialmente um sistema físico descrito por um hamiltoniano H que não tenha uma dependência temporal, a equação de Schrödinger do sistema é dado por

$$H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle \quad (1.8)$$

considerando o tempo decorrido sob o qual a partícula permanece no n -ésimo autoestado, onde o autoestado $|\varphi_n(t)\rangle$ adquire um fator de fase, dado por

$$|\varphi_n(t)\rangle = |\varphi_n(0)\rangle e^{-iE_n t/\hbar}. \quad (1.9)$$

Para abordar o problema de um sistema dependente do tempo, vamos introduzir um conceito simples que é o de uma base “instantânea”.

$$H(t)|\varphi_n(t)\rangle = E_n(t)|\varphi_n(t)\rangle. \quad (1.10)$$

Em qualquer instante de tempo, seus autoestados constituem um conjunto ortonormal completo:

$$\langle \varphi_m(t) | \varphi_n(t) \rangle = \delta_{mn} \quad (1.11)$$

nesta equação, δ_{mn} é o delta de Kronecker, que apresenta as seguintes propriedades:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases} \quad (1.12)$$

Estas características fazem com que o delta de Kronecker corresponda à matriz identidade I . Feito isso, nosso próximo passo será escrever a solução geral para a equação de Schrödinger dependente do tempo

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H(t) |\psi(t)\rangle. \quad (1.13)$$

Como a equação de Schrödinger dependente do tempo, é uma equação diferencial linear, qualquer combinação linear de suas soluções particulares com autoestado de energia, advindas da separação das partes temporal e espacial, também são soluções da equação.

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |\varphi_n(t)\rangle e^{i\theta_n(t)} \quad (1.14)$$

O fato de o vetor de estado poder ser escrito como combinação linear dos autoestados, faz com que, elas sejam chamadas de base n-dimensional, do espaço de funções que obedecem a equação de Schrödinger, em analogia com o que se tem na representação vetorial.

A fase $\theta_n(t)$ que aparece na equação (1.14) é chamada de fase dinâmica e apresentamos mais detalhes na equação abaixo

$$\theta_n(t) = \frac{-1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt'. \quad (1.15)$$

Esta equação generaliza o fator de fase padrão no caso em que $E_n(t)$ varia com o tempo. O coeficiente $c_n(t)$ poderia ter sido incluso na equação, mas é conveniente fatorar essa parte da dependência do tempo, já que ela estaria presente até em um hamiltoniano independente do tempo [10].

Substituindo a expansão das funções básicas, equação (1.14) na equação (1.13) obteremos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} & i\hbar \sum_n \left\{ \frac{\partial c_n(t)}{\partial t} |\varphi_n(t)\rangle + c_n(t) \frac{\partial \varphi_n(t)}{\partial t} + i c_n(t) |\varphi_n(t)\rangle \frac{\partial \theta_n(t)}{\partial t} \right\} e^{i\theta_n(t)} \\ & = \sum_n c_n(t) (H |\varphi_n(t)\rangle) e^{i\theta_n(t)} \end{aligned} \quad (1.16)$$

A equação (1.16) pode ser simplificada se utilizamos a notação do ponto em substituição a derivada que indica que o termo está sendo diferenciado em relação ao tempo, desta forma podemos escrever

$$\begin{aligned} & i\hbar \sum_n \{ \dot{c}_n(t) |\varphi_n(t)\rangle + c_n(t) |\dot{\varphi}_n(t)\rangle + ic_n(t) |\varphi_n(t)\rangle \dot{\theta}_n(t) \} e^{i\theta_n(t)} \\ & = \sum_n c_n(t) (H |\varphi_n(t)\rangle) e^{i\theta_n(t)} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Também podemos escrever a equação (1.17) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} & i\hbar \sum_n \{ \dot{c}_n(t) |\varphi_n(t)\rangle + c_n(t) |\dot{\varphi}_n(t)\rangle \} e^{i\theta_n(t)} - \hbar \sum_n c_n(t) |\varphi_n(t)\rangle \dot{\theta}_n(t) e^{i\theta_n(t)} \\ & = \sum_n c_n(t) (H |\varphi_n(t)\rangle) e^{i\theta_n(t)} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Relacionando o segundo e o terceiro termo da equação (1.18) com as equações (1.10) e (1.15) observamos que os dois últimos termos se anulam, dessa forma a equação (1.18) passar a ser escrita da seguinte forma:

$$\sum_n \dot{c}_n(t) |\varphi_n(t)\rangle e^{i\theta_n(t)} = - \sum_n c_n(t) |\dot{\varphi}_n(t)\rangle e^{i\theta_n(t)}. \quad (1.19)$$

Se multiplicamos $\langle \varphi_m(t) |$ em ambos os lados da equação (1.19) será o mesmo que tomar o produto interno em ambos os lados, dessa forma podemos invocar a condição de ortonormalidade das autofunções de modo que podemos escrever a equação acima como se segue

$$\sum_n \dot{c}_n(t) \delta_{mn} e^{i\theta_n(t)} = - \sum_n c_n(t) \langle \varphi_m(t) | \dot{\varphi}_n(t) \rangle e^{i\theta_n(t)} \quad (1.20)$$

ou

$$\dot{c}_m(t) = - \sum_n c_n(t) \langle \varphi_m(t) | \dot{\varphi}_n(t) \rangle e^{i[\theta_n(t) - \theta_m(t)]}. \quad (1.21)$$

Diferenciando em relação ao tempo a equação (1.10) e mantendo a mesma notação empregada acima podemos escrever a nova equação da seguinte forma

$$\dot{H}(t) |\varphi_n(t)\rangle + H(t) |\dot{\varphi}_n(t)\rangle = \dot{E}_n(t) |\varphi_n(t)\rangle + E_n(t) |\dot{\varphi}_n(t)\rangle. \quad (1.22)$$

Podemos utilizar novamente a relação do produto interno $\langle \varphi_m(t) |$, deste modo teremos

$$\begin{aligned} & \langle \varphi_m(t) | \dot{H}(t) | \varphi_n(t) \rangle + \langle \varphi_m(t) | H(t) | \dot{\varphi}_n(t) \rangle = \\ & \langle \varphi_m(t) | \dot{E}_n(t) | \varphi_n(t) \rangle + \langle \varphi_m(t) | E_n(t) | \dot{\varphi}_n(t) \rangle \end{aligned} \quad (1.23)$$

ou

$$\begin{aligned} \langle \varphi_m(t) | \dot{H}(t) | \varphi_n(t) \rangle + \langle \varphi_m(t) | H(t) | \dot{\varphi}_n(t) \rangle = \\ \dot{E}_n(t) \langle \varphi_m(t) | \varphi_n(t) \rangle + E_n(t) \langle \varphi_m(t) | \dot{\varphi}_n(t) \rangle \end{aligned} \quad (1.24)$$

utilizando o fato que $\langle \varphi_m(t) | \varphi_n(t) \rangle = \delta_{mn}$ equação (1.11), podemos escrever a equação (1.24) como

$$\begin{aligned} \langle \varphi_m(t) | \dot{H}(t) | \varphi_n(t) \rangle + \langle \varphi_m(t) | H(t) | \dot{\varphi}_n(t) \rangle = \\ \dot{E}_n(t) \delta_{mn} + E_n(t) \langle \varphi_m(t) | \dot{\varphi}_n(t) \rangle \end{aligned} \quad (1.25)$$

a hermiticidade do operador hamiltoniano $\langle \varphi_m(t) | H(t) | \dot{\varphi}_n(t) \rangle = E_m(t) \langle \varphi_m(t) | \dot{\varphi}_n(t) \rangle$, isso para o caso em que temos $n \neq m$ a equação será escrita como

$$\langle \varphi_m(t) | \dot{H}(t) | \varphi_n(t) \rangle = (E_n(t) - E_m(t)) \langle \varphi_m(t) | \dot{\varphi}_n(t) \rangle \quad (1.26)$$

$$\langle \varphi_m(t) | \dot{\varphi}_n(t) \rangle = \frac{\langle \varphi_m(t) | \dot{H}(t) | \varphi_n(t) \rangle}{E_n(t) - E_m(t)} \quad (1.27)$$

substituindo esse resultado na equação (1.21) e supondo que não há estados degenerados de energia, temos que

$$\dot{c}_m(t) = -c_m(t) \langle \varphi_m(t) | \dot{\varphi}_m(t) \rangle - \sum_n \frac{\langle \varphi_m(t) | \dot{H}(t) | \varphi_n(t) \rangle}{E_n(t) - E_m(t)} e^{[-i/\hbar] \int_0^t [E_n(t') - E_m(t)] dt'} \quad (1.28)$$

Até esse ponto o resultado obtido foi este, não foi feita nenhuma aproximação. A partir de agora, vamos fazer a aproximação adiabática, pois assumindo que $\frac{dH}{dt} \ll 0$, o que nos permite ignorar o segundo termo do lado direito, assim temos

$$\dot{c}_m(t) = -c_m(t) \langle \varphi_m(t) | \dot{\varphi}_m(t) \rangle \quad (1.29)$$

reescrevendo a equação acima

$$\frac{dc_m(t)}{dt} = -c_m(t) \langle \varphi_m(t) | \dot{\varphi}_m(t) \rangle \quad (1.30)$$

fazendo a integração ficamos com

$$\int_0^t \frac{dc_m(t)}{c_m(t)} = - \int_0^t \langle \varphi_m(t) | \dot{\varphi}_m(t) \rangle dt \quad (1.31)$$

logo sua solução é

$$c_m(t) = c_m(0)e^{i\gamma_m(t)} \quad (1.32)$$

na equação (1.32), $\gamma_m(t)$ é a fase geométrica, que podemos escrevê-la como

$$\gamma_m(t) = i \int_0^t \left\langle \varphi_m(t') \left| \frac{\partial \varphi_m(t')}{\partial t'} \right. \right\rangle dt' \quad (1.33)$$

em particular se a partícula começa no n -ésimo auto estado, isso implica que uma seleção dos coeficientes é tal que para $m \neq n$ temos que $c_m(0) = 0$ e $c_n(0) = 1$, então a equação (1.14), passa a ser escrita como

$$|\psi_n(t)\rangle = e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)} |\varphi_n(t)\rangle. \quad (1.34)$$

Isto significa que, em uma situação onde a aproximação adiabática é válida ou seja, que aconteça lentamente o bastante para validar esta hipótese, uma partícula que está no n -ésimo autoestado do operador hamiltoniano permanecerá neste estado à medida que o sistema evolua ao longo do tempo, adquirindo um par de fatores de fase que não estavam presentes no tempo $t = 0$.

A fase geométrica depende do trajeto escolhido e é independentemente do quão rapidamente esse trajeto é percorrido (ou seja, não depende do tempo e sim da mudança dos parâmetros do hamiltoniano que esteja mudando com o tempo), contudo a hipótese adiabática tem que ser validada, já a fase dinâmica por sua vez, depende exclusivamente do tempo decorrido.

Fases Geométricas

2.1 Introdução

Em 1984, Berry fez a descoberta surpreendente de que um sistema quântico transportado adiabaticamente em volta de um circuito fechado C no espaço de parâmetros externos adquire, além da fase dinâmica familiar, uma fase não integrável dependendo apenas da geometria do circuito C . Esta fase, que havia sido negligenciada no trabalho feito por Mead e Truhlar em 1979 [24], revelaram também este fator de fase adicional, que por mais de décadas, nos fornece uma visão muito profunda da estrutura geométrica da mecânica quântica. Berry mostrou que isso não estava correto, porque a fase é invariante e, portanto, pode ser medida.

Durante algum tempo, muitos pesquisadores acreditavam que a fase geométrica $\gamma_m(t)$ não teria significado físico, uma vez que as quantidades físicas dependem do módulo quadrado da função de onda $|\Psi|^2$, resultando então no cancelamento do fator de fase. Berry propôs que a fase $\gamma_m(t)$ poderia ser medida quando o hamiltoniano do sistema fosse adiabaticamente conduzido em uma trajetória fechada, levando-o de volta a sua forma original, no seu espaço de parâmetros. Ele obteve uma expressão para a fase geométrica $\gamma_m(t)$ e expôs suas ideias em seu artigo de 1984. Na seção seguinte, iremos seguir os passos de Berry, e determinaremos $\gamma_m(t)$.

2.2 A formulação matemática da fase de Berry

Vimos na seção anterior que quando um dado estado de um hamiltoniano evolui adiabaticamente, o estado final do hamiltoniano final, obtém-se um par de fatores de fases, sendo uma fase dinâmica e a outra fase geométrica. Vamos analisar a fase geométrica em mais detalhe. A fase geométrica é dada por:

$$\gamma_m(t) = i \int_0^t \left\langle \varphi_m(t') \left| \frac{\partial \varphi_m(t')}{\partial t'} \right. \right\rangle dt'.$$

A dependência temporal do fator de fase é proveniente de algum parâmetro externo do hamiltoniano que está mudando com o tempo. Esse parâmetro é representado por $R(t)$, que seria por exemplo a fase de um oscilador harmônico simples unidimensional, de modo que

$$\frac{\partial \varphi_m(t')}{\partial t'} = \frac{\partial \varphi_m(t')}{\partial R} \frac{dR(t)}{dt'} \quad (2.1)$$

substituindo a equação (2.1) na fase geométrica, podemos escrevê-la da seguinte forma

$$\gamma_m(t) = i \int_0^t \left\langle \varphi_m(t') \left| \frac{\partial \varphi_m(t')}{\partial R} \right. \right\rangle \frac{dR(t)}{dt'} dt' = i \int_{R_i}^{R_f} \left\langle \varphi_m(t') \left| \frac{\partial \varphi_m(t')}{\partial R} \right. \right\rangle dR(t). \quad (2.2)$$

Em particular, se o hamiltoniano retorna ao estado inicial ao fim do tempo T , onde temos que $R_f = R_i$, assim $\gamma_m(T) = 0$ e, portanto, o resultado é trivial. Contudo se em vez de um só parâmetro, tivermos N parâmetros: $R_{1(t)}, R_{2(t)}, \dots, R_{n(t)}$, obtemos

$$\frac{\partial \varphi_m(t')}{\partial t'} = \frac{\partial \varphi_m(t')}{\partial R_1} \frac{dR_1}{dt'} + \frac{\partial \varphi_m(t')}{\partial R_2} \frac{dR_2}{dt'} + \dots + \frac{\partial \varphi_m(t')}{\partial R_N} \frac{dR_N}{dt'} = (\vec{\nabla}_R \varphi_m(t')) \cdot \frac{d\vec{R}}{dt'} \quad (2.3)$$

substituindo a equação (2.3) na equação anterior ficamos com

$$\gamma_m(t) = i \int_{\vec{R}_i}^{\vec{R}_f} \left\langle \varphi_m(t') \left| \vec{\nabla}_R \varphi_m(t') \right. \right\rangle \cdot d\vec{R} \quad (2.4)$$

se o hamiltoniano volta ao estado inicial ao fim de um tempo T , obtemos

$$\gamma_m(t) = i \oint \left\langle \varphi_m(t') \left| \vec{\nabla}_R \varphi_m(t') \right. \right\rangle \cdot d\vec{R} \quad (2.5)$$

que é um integral ao longo de um caminho fechado e que em geral não será zero se o espaço dos parâmetros for não trivial. Você deve estar se perguntando porque a integral em (2.2) é nula e a em (2.5) não é? Para responder esta pergunta, imagine a seguinte situação, você tem a possibilidade de percorrer dois caminhos distintos, que chamarei de C_1 e C_2 , cada caminho deste, começa em um ponto que chamarei de ponto A e termina em um outro que chamarei de ponto B , de modo que em quase todas as opções para estes dois caminhos C_1 e C_2 , as integrais serão diferentes. Isso nos permite dizer que, uma dada integral está somando valores diferentes, em pontos do espaço inteiramente diferentes. Já o mesmo caminho distinto que ligam dois

pontos serão sempre iguais, na equação (2.2). A equação anterior foi pela primeira vez deduzida por Michael Berry e conhecida como fase geométrica. Pode mostrar-se que, para que a fase seja diferente de zero, é condição necessária que o número de parâmetros R_i seja pelo menos dois e que a função de onda ψ_n seja complexa.

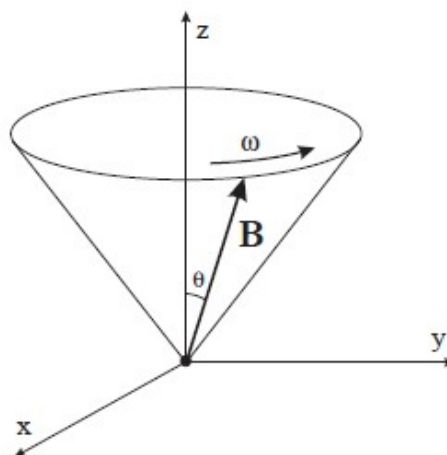
2.3 Fase geométrica para uma partícula de spin 1/2

Aplicando a fase Berry a um exemplo concreto de uma partícula de spin - 1/2, movendo-se em um campo magnético externo $B(t)$ que gira adiabaticamente ou seja lentamente sob um ângulo θ ao redor do eixo z . Vamos considerar um campo magnético que precessiona uniformemente ao redor do eixo z com uma frequência angular ω .

$$\vec{B}(t) \doteq B(0) \begin{pmatrix} \sin\theta \cos(\omega t) \\ \sin\theta \sin(\omega t) \\ \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

A precessão pode ser vista na figura (2.1) que representa o campo magnético movendo-se em torno do eixo z , com velocidade angular ω e lembrando que $|B(t)| = B(0)$. Quando o campo

Figura 2.1- Spin-1/2 partícula no campo magnético descrito pela equação (2.6).



Fonte: Retirado da Ref. [8]

magnético gira lentamente o bastante, em torno da direção do eixo z , o spin dessa partícula seguirá a direção do campo magnético, dessa forma um autoestado do hamiltoniano $H(0)$ permanece para tempos posteriores conforme o teorema adiabático a um estado igual a $H(t)$. O hamiltoniano que descreve a interação desse sistema é dado por

$$H(t) = \mu \vec{B} \cdot \vec{\sigma} \quad (2.7)$$

como $\vec{\sigma} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ que são definidos pelas matrizes de pauli

$$\sigma_1 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 \doteq \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

com a constante $\mu = \frac{e\hbar}{2m}$, essa constante é chamada de magnéton de Bohr. O hamiltoniano que descreve este sistema, é melhor representado pela seguinte equação

$$H(t) \doteq \mu B(0) \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\omega t} \sin\theta \\ e^{i\omega t} \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

onde, podemos escrever a equação de autovalores

$$H(t)|\psi(t)\rangle = E_n|\psi(t)\rangle \quad (2.9)$$

podemos ainda, representar o ket $|\psi(t)\rangle$ na base $|+\rangle$ e $|-\rangle$ como uma matriz coluna

$$|\psi(t)\rangle \doteq \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

ou ainda, na forma

$$|\psi(t)\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle \quad (2.11)$$

lembrando que na equação (2.11) a e b são números complexos. Dessa forma iremos substituir o resultado da equação (2.8) e (2.10) na equação de autovalores acima (2.10) e ficamos com:

$$\mu B(0) \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\omega t} \sin\theta \\ e^{i\omega t} \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = E_n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

fazendo $E_n = \lambda \mu B(0)$ e substituindo E_n na equação (2.12) temos

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\omega t} \sin\theta \\ e^{i\omega t} \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Para esta equação, devemos ter as seguintes soluções

$$\det \begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda & e^{-i\omega t} \sin\theta \\ e^{i\omega t} \sin\theta & -\cos\theta - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (2.14)$$

as raízes desta equação são $\lambda = \pm 1$ logo $E_n = \pm \mu B(0)$.

A equação (2.13) nos permite montar o seguinte sistema de equações para $\lambda = 1$

$$\begin{cases} a = a \cos\theta + b e^{-i\omega t} \sin\theta \\ b = a e^{i\omega t} \sin\theta - b \cos\theta \end{cases} \quad (2.15)$$

resolvendo o sistema de equação (2.15) para o segundo termo ficamos com $a = \cos\frac{\theta}{2}$ e $b = e^{i\omega t} \sin\frac{\theta}{2}$.

Dessa forma podemos escrever a equação de autoestados normalizados da seguinte forma:

$$|\psi_+(t)\rangle \doteq \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\omega t} \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

para $\lambda = -1$ podemos escrever a equação (2.16) como

$$\begin{cases} -a = a \cos\theta + b e^{-i\omega t} \sin\theta \\ -b = a e^{i\omega t} \sin\theta - b \cos\theta \end{cases} \quad (2.17)$$

resolvendo agora para o sistema de equações (2.17) para o segundo termo ficamos com $a = \sin\frac{\theta}{2}$ e $b = -e^{i\omega t} \cos\frac{\theta}{2}$. Com este resultado escreveremos a equação de autoestados $|\psi_-(t)\rangle$ da seguinte forma

$$|\psi_-(t)\rangle \doteq \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\omega t} \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Podemos interpretar os autoestados como spin-up $|\psi_+(t)\rangle = |\uparrow \vec{B}(t)\rangle$ e spin-down $|\psi_-(t)\rangle = |\downarrow \vec{B}(t)\rangle$ ao longo da respectiva direção $\vec{B}(t)$.

$$\nabla |\psi_+(t)\rangle = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} |\psi_+(t)\rangle + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} |\psi_+(t)\rangle + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} |\psi_+(t)\rangle \quad (2.19)$$

Quando substituirmos a equação (2.16) na equação (2.19), isso nos permite escrever para o autoestado $|\psi_+(t)\rangle$

$$\nabla|\psi_+(t)\rangle = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\ \frac{1}{2}e^{i\omega t}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ ie^{i\omega t}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \hat{\phi} \quad (2.20)$$

agora iremos proceder da mesma forma como fizemos na equação (2.16) só que agora na equação (2.18), isso nos permite escrever para o autoestado $|\psi_-(t)\rangle$

$$\nabla|\psi_-(t)\rangle = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ -\frac{1}{2}e^{i\omega t}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ ie^{i\omega t}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \hat{\phi} \quad (2.21)$$

utilizando o produto escalar com o correspondente $\langle\psi_+(t)|$ na equação (2.20), isso nos permite rescrever a nova equação como

$$\langle\psi_+(t)|\nabla|\psi_+(t)\rangle = i\frac{\sin^2(\frac{\theta}{2})}{r\sin\theta}\hat{\phi} \quad (2.22)$$

utilizando novamente o produto escalar com o correspondente $\langle\psi_-(t)|$ na equação (2.21), isso nos permite rescrever a equação como

$$\langle\psi_-(t)|\nabla|\psi_-(t)\rangle = i\frac{\cos^2(\frac{\theta}{2})}{r\sin\theta}\hat{\phi}. \quad (2.23)$$

A integração ao longo da curva C pode ser escrita pela equação de Berry, onde $r = \text{constante}$, $\theta = \text{constante}$ e $\phi \in [0, 2\pi]$.

$$\oint_C \langle\psi_{\pm}(t)|\nabla|\psi_{\pm}(t)\rangle r\sin\theta d\phi \hat{\phi} = i\pi(1 \mp \cos\theta) \quad (2.24)$$

A equação da fase de Berry (2.24) pode então ser escrita da seguinte forma

$$\gamma_{\pm}(C) = -\pi(1 \mp \cos\theta) \quad (2.25)$$

o lado direito da equação (2.25) pode ser expresso em termos do ângulo sólido Ω que pode ser escrita como

$$\Omega = \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta) d\phi = \frac{\Omega}{2} = \pi(1 - \cos\theta) \quad (2.26)$$

podemos escrever a equação (2.26) desta forma

$$\gamma_{\pm}(C) = \mp \frac{1}{2}\Omega(C) \quad (2.27)$$

Este resultado nos diz que, se você conduzir por exemplo o spin de um elétron, muito lentamente de forma que o caminho percorrido por ele seja fechado e arbitrário, a mudança de fase será (menos ou mais) a metade do ângulo sólido.

O Efeito Aharonov-Bohm

3.1 A Lagrangiana em termos do potencial vetor

Para um melhor entendimento sobre o efeito Aharonov - Bohm vamos apresentar uma revisão sobre como construir uma lagrangiana e um hamiltoniano para uma partícula carregada na presença de um campo eletromagnético. Uma partícula carregada na presença de um campo elétrico e de um campo magnético sofre a ação de uma força que é dada pela força de Lorentz

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right). \quad (3.1)$$

O campo elétrico e magnético obedece as equações de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{lei de Gauss}) \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{lei de Gauss magnética}) \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{lei de Faraday}) \quad (3.4)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{lei de Ampère - Maxwell}) \quad (3.5)$$

A lei que descreve a ausência de monopólio magnéticos $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, implica que o campo magnético pode ser escrito como o rotacional de um outro campo

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3.6)$$

o campo \vec{A} , é o seu potencial vetor. Substituindo essa expressão na lei de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.7)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad (3.8)$$

$$= -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (3.9)$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.10)$$

como $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\Phi = 0$ sendo Φ o potencial escalar o campo elétrico pode ser escrito da seguinte forma

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (3.11)$$

Podemos então, reescrever a força de Lorentz em termos desses potenciais, ou seja

$$\vec{F} = q \left\{ \left(-\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \vec{v} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} \right\} \quad (3.12)$$

mas antes de prosseguirmos, precisamos lembrar das seguintes identidades

$$(i) \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (3.13)$$

$$= \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \quad (3.14)$$

$$= \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \quad (3.15)$$

com isso, temos

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{d\vec{A}}{dt} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \quad (3.16)$$

$$(ii) \quad \vec{v} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}. \quad (3.17)$$

Com o auxílio dessas duas propriedades, podemos reescrever a força de Lorentz como sendo

$$\vec{F} = q \left\{ \left(-\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \vec{v} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} \right\}$$

$$\vec{F} = q \left\{ -\vec{\nabla}\Phi - \frac{d\vec{A}}{dt} + \cancel{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}} + \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \cancel{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}} \right\} \quad (3.18)$$

$$= q \left\{ -\vec{\nabla} (\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{d\vec{A}}{dt} \right\}. \quad (3.19)$$

Esse resultado nos permite pensar o termo $q (\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A})$, como uma energia potencial, do qual a força de Lorentz é derivada

$$U = q \Phi - q \vec{v} \cdot \vec{A} \quad (3.20)$$

assim podemos encontrar o lagrangeano

$$L = T - U \quad (3.21)$$

$$= T - q\Phi + q (\vec{v} \cdot \vec{A}), \quad (3.22)$$

o lagrangeano encontrado acima, realmente descreve o movimento de uma partícula sob a ação da força de Lorentz.

3.2 O Hamiltoniano em termos do potencial vetor

Considere uma partícula de massa m e carga elétrica q , submetida a um campo eletromagnético. Queremos determinar o hamiltoniano dessa partícula. Se considerarmos uma partícula livre, o hamiltoniano será dado por

$$H = \frac{p^2}{2m}. \quad (3.23)$$

Com o lagrangeano que encontramos na seção anterior, iremos nos valer dele para encontrar seu hamiltoniano. Como primeiro passo vamos encontrar a equação de movimento de Euler - Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -q \frac{\partial \Phi}{\partial x} + q \frac{\partial}{\partial x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \quad (3.24)$$

$$= -q \frac{\partial}{\partial x} (\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) \quad (3.25)$$

$$= -q (\nabla \Phi - \nabla (\vec{v} \cdot \vec{A})) \quad (3.26)$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial T}{\partial v} + q \frac{\partial}{\partial v} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \quad (3.27)$$

$$= mv + q\vec{A} \quad (3.28)$$

assim

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) = \frac{d}{dt} (mv) + q \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right) \quad (3.29)$$

$$= \vec{F} + q \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right) \quad (3.30)$$

Substituindo na equação de Euler - Lagrange

$$\vec{F} + q \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right) + q (\nabla \Phi - \nabla (\vec{v} \cdot \vec{A})) = 0 \quad (3.31)$$

portanto podemos escrever

$$\vec{F} = m\vec{a} = -q\nabla (\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) - q \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right). \quad (3.32)$$

Este resultado nos mostra que o hamiltoniano apresentado descreve a dinâmica de uma partícula sob a ação de uma força de Lorentz. A partir do conhecimento do lagrangeano podemos determinar o hamiltoniano por meio de uma transformação de Legendre

$$H = L - \sum p\dot{x} \quad (3.33)$$

o momento conjugado é representado por

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \quad (3.34)$$

como o lagrangeano é dado por

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - q\Phi + q\dot{x}A. \quad (3.35)$$

O momento conjugado pode ser obtido diretamente

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = mv + qA \quad (3.36)$$

dessa forma, encontramos a velocidade

$$v = \frac{p}{m} - \frac{q}{m}A \quad (3.37)$$

isso nos permite calcular a transformada de Legendre e assim obter o Hamiltoniano

$$-H = L - \sum p\dot{x} \quad (3.38)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m} - \frac{q}{m}A\right)^2 - q\Phi + q\left(\frac{p}{m} - \frac{q}{m}A\right)A - \sum p\left(\frac{p}{m} - \frac{q}{m}A\right) \quad (3.39)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m} - \frac{q}{m}A\right)^2 - q\Phi + q\left(\frac{pA}{m} + \sum \frac{pA}{m}\right) - \frac{q^2A^2}{m} - \sum \frac{p^2}{m} \quad (3.40)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m} - \frac{q}{m}A\right)^2 - q\Phi + 2q\frac{pA}{m} - q^2\frac{A^2}{m} - \frac{p^2}{m} \quad (3.41)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m} - \frac{q}{m}A\right)^2 - q\Phi - m\left(\frac{p}{m} - \frac{q}{m}A\right)^2 \quad (3.42)$$

$$= -\frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m} - \frac{q}{m}A\right)^2 - q\Phi \quad (3.43)$$

consequentemente, encontramos

$$H = \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m} - \frac{q}{m}A\right)^2 + q\Phi \quad (3.44)$$

este é o hamiltoniano que descreve a dinâmica de uma partícula carregada na presença de um campo eletromagnético. Esse conjunto de transformação é conhecido como acoplamento mínimo.

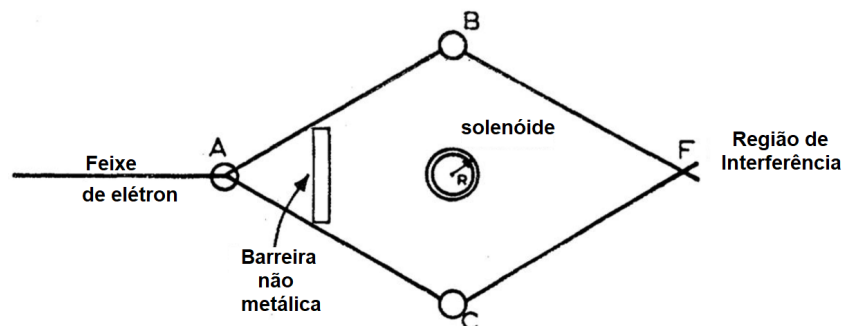
3.3 O efeito Aharonov - Bohm magnético

O efeito Aharonov - Bohm conforme visto de forma simplificada na introdução, é um fenômeno de natureza quântica, no qual não possui uma contrapartida clássica, pois o mesmo

afirma que partículas carregadas são afetadas, na forma de uma mudança de fase, pela existência de campos não nulos, mesmo que as partículas carregadas percorram regiões livres desse campo. Nesta seção, iremos demonstrar a fase adquirida no o efeito Aharonov-Bohm magnético.

Vimos na introdução deste trabalho que, quando um feixe de elétrons é dividido e suas partes passam por lados oposto de um solenoide, evitando-o, como mostra a figura (3.1). Nesse caso o feixe é coerente antes da divisão e depois devido às interações que o são impostas em cada um dos caminhos diferentes que lhes são dados, fases diferentes são adquiridas, implicando assim em um aparecimento de uma fase quando os feixes se combinarem novamente.

Figura 3.1- Efeito Aharonov-Bohm magnético.



Fonte: Retirado da Ref. [29]

A princípio, qualquer mudança na fase relativa entre os dois caminhos B e C na figura (3.1), pode ser observado como uma mudança no padrão de interferência quando os dois feixes são reunidos. Como fonte de fluxo magnético, uma corrente elétrica flui em um solenoide cilíndrico com raio r_s , e centro na origem e no eixo ao longo da direção z . Um campo magnético \vec{B} é criado e confinado dentro do solenoide, enquanto o potencial vetor \vec{A} será diferente de zero em todos os lugares fora do solenoide conforme vimos. Essa corrente estacionária que flui no solenoide gera um fluxo Φ_B dado pela expressão:

$$\Phi_B = \int (\nabla \times \vec{A}) \cdot \hat{n} dA = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}. \quad (3.45)$$

O potencial vetor para esta configuração do campo magnético deve satisfazer a equação acima, de modo que para qualquer gauge, a equação do fluxo da definição acima fica invariante nas transformações de gauge. As transformações que deixam invariantes os campos eletromagnéticos são conhecidos como transformações de gauge ou calibre. O hamiltoniano dessa configuração é

$$H = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar\nabla + \left(\frac{q}{c}\right)\vec{A} \right)^2 + V(\vec{r}, t) \quad (3.46)$$

dado pelo acoplamento mínimo, onde a interação do campo magnético com a carga da partícula é dada apenas pelo segundo termo entre parênteses do hamiltoniano, sendo então $V(\vec{r}, t)$ independente do campo magnético ou do potencial vetor.

Em uma região simplesmente conexa, ou seja, onde todas as curvas fechadas podem ser encolhidas continuamente até um ponto e na qual o rotacional do potencial vetor é igual a zero, desta forma obtemos a solução para a função de onda associada a hamiltoniana da equação (3.47) que é escrita como $\Psi = \psi_0 e^{iS_{AB}}$, onde ψ_0 é solução quando temos $\vec{A} = 0$ e $S_{AB} = \left(\frac{q}{\hbar c}\right) \int \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$. Como estamos em regiões multiplamente conexa, $\Psi = \psi_0 e^{iS_{AB}}$ não é mais de valor único, o que não pode representar uma solução para a equação de Schrödinger. Desta forma, no problema em questão é possível utilizar suas soluções devido a função de onda ser dividida em duas partes de modo que temos: $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$, onde Ψ_1 representa o feixe de elétrons superior em S_1 e Ψ_2 o feixe de elétrons inferior em S_2 .

$$\Psi_1 = \psi_1^0 e^{iS_{1AB}} \quad (3.47)$$

e

$$\Psi_2 = \psi_2^0 e^{iS_{2AB}} \quad (3.48)$$

onde S_{1AB} e S_{2AB} são iguais a $\left(\frac{q}{\hbar c}\right) \int \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$ ao longo dos caminhos do primeiro e segundo feixes, respectivamente.

Sabemos que a probabilidade para encontrar uma partícula em uma dada região, depende do módulo ao quadrado da amplitude de transição, dessa maneira a diferença de fase entre eles, devida a contribuição dos caminhos S_{1AB} e S_{2AB} é

$$\Delta S_{AB} = S_{1AB} - S_{2AB} \quad (3.49)$$

$$\Delta S_{AB} = \left(\frac{q}{\hbar c}\right) \int \vec{A} \cdot d\vec{\ell} - \left(\frac{q}{\hbar c}\right) \int \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \quad (3.50)$$

$$\Delta S_{AB} = \left(\frac{q}{\hbar c}\right) \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \left(\frac{q\Phi_B}{\hbar c}\right) \quad (3.51)$$

onde Φ_B é o fluxo do campo magnético na região interna do cilindro. A confirmação experimental do efeito AB se deu em 1960, um ano depois da publicação do artigo feita por Chambers [25], que realizou o experimento proposto por AB e provou que o efeito existe. Já em 1986 um grupo de físicos japoneses do laboratório de Hitachi [26], usaram uma geometria um pouco diferente do experimento e propriedades supermagnéticas de matérias para obter resultados mais precisos [27].

3.4 Efeito Aharonov-Casher

Em 1984, Aharonov e Casher [28] propuseram um modelo semelhante ao efeito Aharonov e Bohm no qual uma mudança de fase pode ser adquirida por uma partícula carregada na presença de um campo magnético. Eles predisseram que uma partícula neutra com um momento magnético experimenta uma mudança de fase enquanto ela envolve uma linha infinita de carga (o spin da partícula sendo paralelo a linha carregada).

O efeito Aharonov-Casher é simétrico ao efeito Aharonov-Bohm neste o campo magnético sofre ação de uma linha de carga enquanto no efeito Aharonov-Bohm é a carga que sofre ação do campo magnético. Desta forma a principal diferença entre os efeitos AB e AC é que o último é uma consequência da interação do momento dipolar com um campo elétrico externo, enquanto, o primeiro aparece como resultado da interação da carga elétrica com um campo magnético externo.

No efeito Aharonov-Casher ao consideramos um solenoide suficientemente grande, de tal forma que o campo magnético produzido por ele esteja totalmente localizado em seu interior, com isso o solenoide interage com uma carga que produz um campo elétrico. Uma vez interagindo teremos que encontrar a lagrangiana deste sistema, carga-solenoide que represente esta interação, e daí calculamos a ação sofrida pelo solenoide em seu caminho pois ela que é a responsável direta pelo ganho de fase [29].

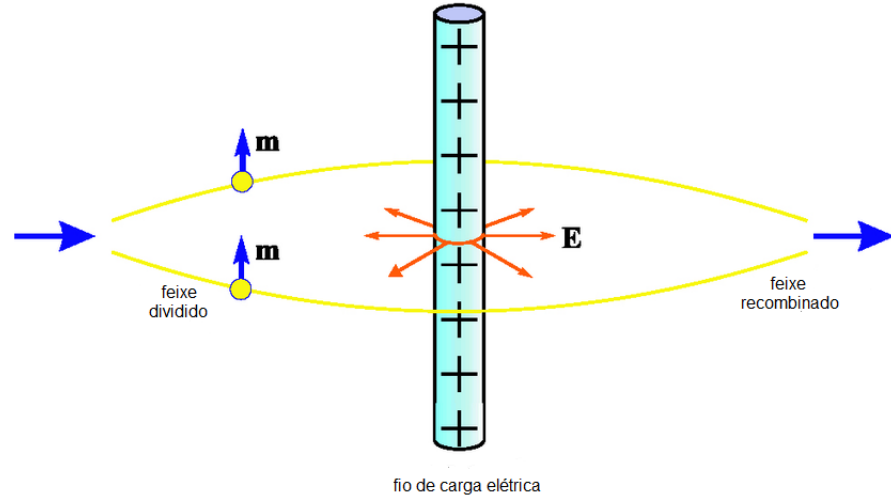
A situação que descreve um solenoide interagindo com uma carga será aproximada como sendo uma partícula neutra com momento magnético interagindo com um campo elétrico, onde o solenoide representa está partícula e o campo elétrico é inerente à linha carregada. Então, daí adiante teremos somente uma partícula sem carga interagindo com um campo elétrico através de seu momento magnético[30]. O momento do dipolo magnético das partículas é $\vec{\mu}$ e sua orientação é ao longo do fio, além disso, elas se movem com velocidade v na referência do fio, conforme ilustrado na figura.

Para uma partícula com momento magnético de dipolo que interage com um campo magnético \vec{B}' , escreveremos sua lagrangiana que é definida como

$$L = \frac{mv^2}{2} + \vec{\mu} \cdot \vec{B}'$$

onde $\frac{mv^2}{2}$ corresponde a sua energia cinética e $\vec{\mu} \cdot \vec{B}'$ sua energia potencial. Iremos nos valer agora, das transformações de Lorentz para os campos eletromagnéticos. De modo que para o

Figura 3.2 - Ilustração do efeito Aharonov - Casher.



Fonte: Retirado da Ref. [42]

campo \vec{B}' temos

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \vec{E})$$

no qual vamos supor que $\vec{B} = 0$, essa transformação relaciona o campo elétrico que temos, com o campo magnético, sentido pelo momento de dipolo em seu referencial, dessa forma temos para a lagrangiana

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{\vec{v}}{c^2} \cdot (\vec{\mu} \times \vec{E}) \quad (3.52)$$

cujo termo de interação é dependente do campo elétrico. Para encontrar a equação de movimento da partícula iremos utilizar a equação de Euler-Lagrange para a lagrangiana dada acima de modo que temos

$$\nabla L - \frac{d}{dt} (\nabla_v L) = 0 \quad (3.53)$$

$$\nabla \left[\frac{\vec{v}}{c^2} \cdot (\vec{\mu} \times \vec{E}) \right] - \frac{d}{dt} \left(m\vec{v} + \frac{1}{c^2} (\vec{\mu} \times \vec{E}) \right) = 0 \quad (3.54)$$

$$\frac{\nabla}{c^2} \left[\vec{v} \cdot (\vec{\mu} \times \vec{E}) \right] - \frac{1}{c^2} \frac{d\vec{\mu}}{dt} \times \vec{E} - \frac{1}{c^2} \vec{\mu} \times \frac{d\vec{E}}{dt} = m\ddot{\vec{x}} \quad (3.55)$$

queremos encontrar uma equação de movimento com a força escrita de forma conveniente, assim usaremos $\nabla (\vec{v} \cdot \vec{\mu} \times \vec{E}) = (\vec{v} \cdot \nabla) (\vec{\mu} \times \vec{E}) + \vec{v} \times [\nabla \times (\vec{\mu} \times \vec{E})]$ e também $\frac{d\vec{E}}{dt} = \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{E} \right)$. Substituindo isso na equação (3.55) temos

$$\frac{1}{c^2} \left[((\vec{v} \cdot \nabla) (\vec{\mu} \times \vec{E}) - \vec{\mu} \times (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{E}) + \left(\vec{v} \times (\nabla \times (\vec{\mu} \times \vec{E})) - \frac{d\vec{\mu}}{dt} \times \vec{E} - \vec{\mu} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right] = m\ddot{\vec{x}}$$

Podemos simplificar assumindo que o momento de dipolo magnético é livre de torque. Isso só é possível se sua direção é constante, neste caso o momento de dipolo é antiparalelo ao campo magnético efetivo sentido por ele. Com essa consideração temos $(\vec{v} \cdot \nabla) (\vec{\mu} \times \vec{E}) - \vec{\mu} \times (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{E} = 0$ e considerando também que $\vec{B} = 0$ e o campo elétrico estático, isso implica que a derivada temporal do campo elétrico é nula

$$\frac{1}{c^2} \left\{ \vec{v} \times \left[\nabla \times (\vec{\mu} \times \vec{E}) \right] - \frac{d\vec{\mu}}{dt} \times \vec{E} \right\} = m\ddot{x} \quad (3.56)$$

como o campo magnético não varia com o tempo, podemos eliminar o termo $\frac{d\vec{\mu}}{dt} \times \vec{E} = \vec{0}$, o que nos permite reescrever a equação de movimento como

$$\frac{1}{c^2} \left\{ \vec{v} \times \left[\nabla \times (\vec{\mu} \times \vec{E}) \right] \right\} = m\ddot{x} \quad (3.57)$$

ou

$$\vec{v} \times \left\{ \nabla \times \left[\frac{1}{c^2} (\vec{\mu} \times \vec{E}) \right] \right\} = m\ddot{x}. \quad (3.58)$$

A equação (3.58) acima representa o movimento de uma partícula neutra com momento de dipolo magnético interagindo com o campo elétrico. Observe que ao compararmos a equação (3.58) com a força magnética $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ e lembrando que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ao igualar ficamos com

$$q(\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{v} \times \left\{ \nabla \times \left\{ \frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \vec{E}) \right\} \right\} \quad (3.59)$$

ou

$$(\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{v} \times \left\{ \nabla \times \left\{ \frac{1}{qc^2} (\vec{v} \times \vec{E}) \right\} \right\} \quad (3.60)$$

onde temos que $\vec{A} = \frac{1}{qc^2} (\vec{\mu} \times \vec{E})$ esta analogia que fizemos é equivalente a um sistema de partícula com carga q sujeito a um potencial. O que fizemos na verdade foi definir um campo magnético, oriundo de um potencial vetor, que interage com uma carga, em meio a dinâmica de um momento de dipolo magnético sujeito a um campo elétrico. Observando este cenário ele é o mesmo do efeito (AB), o que nos permite encontrar uma fase quântica que a partícula neutra adquire, o que nos da

$$\Delta S_{AC} = \frac{1}{\hbar} \oint q\vec{A} \cdot d\vec{\ell}. \quad (3.61)$$

Desta forma podemos reescrever a equação (3.61), ao assumir que o campo elétrico, é produzido por uma distribuição linear de cargas. Desse modo a fase será

$$\Delta S_{AC} = \frac{1}{\hbar c^2} \oint (\vec{\mu} \times \vec{E}) \cdot d\vec{\ell} = \frac{\lambda \mu}{\epsilon_0 \hbar c^2} \quad (3.62)$$

ou seja

$$\Delta S_{AC} = \frac{\lambda \mu}{\epsilon_0 \hbar c^2}. \quad (3.63)$$

O aparecimento de uma fase quântica na equação (3.62) é conhecido como efeito Aharonov-Casher que é um fenômeno semelhante ao efeito Aharonov-Bohm. As semelhanças e as diferenças entre esses dois fenômenos e possíveis interpretações clássicas do efeito AC foram discutidas por Y. Aharonov e seus colaboradores em 1988 [31] e A.S. Goldhaber em 1989 [32].

A Dinâmica de dipolos magnéticos e elétricos na fase geométrica

4.1 A dinâmica clássica e quântica de dipolos

Nesse capítulo estamos interessados em analisar a dinâmica clássica e quântica de dipolos elétricos e magnéticos na presença de campos elétrico e magnético, respectivamente. Vamos construir efeitos análogos ao efeito Aharonov - Bohm. Vimos no capítulo anterior como construir um lagrangiano para uma partícula carregada submetido a campos elétrico e magnético. Vamos agora, estender para o caso, no qual, além de estar submetido a força de Lorentz, este esteja submetido a outra força derivada de uma energia potencial U_m , o lagrangiano assume a seguinte forma

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + e\vec{v} \cdot \vec{A} - e\Phi - U_m. \quad (4.1)$$

No caso específico de um dipolo magnético $\vec{\mu}$ na presença de um campo \vec{B} a energia potencial é dada por

$$U_m = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (4.2)$$

o dipolo sofre a ação de um torque que faz com que o mesmo tenda a se alinhar paralelamente ao campo magnético. Isso nos permite reescrever o lagrangiano como sendo

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + e(\vec{v} \cdot \vec{A}) - e\Phi + \vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (4.3)$$

introduzindo uma outra energia potencial U , definida por

$$U = e\Phi - e(\vec{v} \cdot \vec{A}). \quad (4.4)$$

Essa outra energia corresponde a energia potencial de um dipolo elétrico \vec{d} na presença de um campo elétrico

$$U = -\vec{d} \cdot \vec{E} \quad (4.5)$$

dessa forma

$$-\vec{d} \cdot \vec{E} = e\Phi - e(\vec{v} \cdot \vec{A}) \quad (4.6)$$

de modo que

$$e(\vec{v} \cdot \vec{A}) = e\Phi + \vec{d} \cdot \vec{E} \quad (4.7)$$

substituindo no lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + \vec{d} \cdot \vec{E}' + \vec{\mu} \cdot \vec{B}' \quad (4.8)$$

o resultado acima corresponde ao lagrangiano de uma partícula neutra na presença de um dipolo elétrico permanente e um dipolo magnético $\vec{\mu}$ na presença de um campo eletromagnético.

É bem sabido da teoria da relatividade que os campos elétrico e magnético não podem ser escritos como quadrivetores, entretanto suas componentes podem ser combinadas de modo a formar um tensor de ordem dois. Nesse contexto, foi introduzido um tensor antissimétrico, chamado de tensor de Faraday, definido como

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \quad (4.9)$$

$A^\alpha = (\Phi/c, \vec{A})$ é o quadrivetor potencial, definido em termos do potencial escalar e do potencial vetor. O tensor de Faraday possui as seguintes propriedades: $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$ e $F^{\alpha\alpha} = 0$. O tensor de Faraday permite escrever de modo unificado os campos elétrico e magnético. O tensor pode ser escrito na sua forma matricial da seguinte forma

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Como as equações de campo são covariantes com relação as transformações de Lorentz, também é preciso que as componentes do tensor de Faraday tenham a mesma forma em todos os referênciassi inerciais. Essa exigência determina a maneira sob a qual $F^{\alpha\beta}$ deve se comportar sob uma transformação de Lorentz.

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha F^{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\nu. \quad (4.11)$$

A matriz de transformação de Lorentz pode ser escrita na seguinte forma

$$\Lambda_{\mathbf{v}}^{\mu} = \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & -\sinh(\phi) & 0 & 0 \\ -\sinh(\phi) & \cosh(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

O parâmetro ϕ é chamado de rapidez e é obtido da relação $\tanh \phi = \beta$. Como essa relação é possível mostrar que as componentes do campo se transformam da seguinte forma

$$E'_x = E_x \quad (4.13)$$

$$E'_y = E_y \cosh(\phi) - B_z c \sinh(\phi) \quad (4.14)$$

$$E'_z = E_z \cosh(\phi) + B_y c \sinh(\phi) \quad (4.15)$$

e

$$B'_x = B_x \quad (4.16)$$

$$B'_y = B_y \cosh(\phi) + (E_z/c) \sinh(\phi) \quad (4.17)$$

$$B'_z = B_z \cosh(\phi) - (E_y/c) \sinh(\phi) \quad (4.18)$$

Ou, ainda, na forma vetorial

$$\vec{E}' = \gamma \left(\vec{E} + c \vec{\beta} \times \vec{B} \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{E}) \quad (4.19)$$

$$\vec{B}' = \gamma \left(\vec{B} - \frac{1}{c} \vec{\beta} \times \vec{E} \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{B}) \quad (4.20)$$

As equações (4.19) e (4.20) são as transformações de Lorentz para os campos elétricos e magnéticos, onde consideramos uma partícula não relativística, mas veloz o bastante para que desprezemos apenas a partir de termos de ordem dois em v/c . Feito isso iremos desprezar o segundo termo das equações (4.19) e (4.20) de modo que podemos simplificar ainda mais estas equações assumindo que $\gamma \simeq 1$ se $v \ll c$. Logo estamos supondo que $c = 1$ e que $\vec{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c}$ dessa forma podemos representar as equações (4.19) e (4.20) como

$$\vec{E}' = \vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (4.21)$$

$$\vec{B}' = \vec{B} - (\vec{v} \times \vec{E}) \quad (4.22)$$

com estes resultados podemos reescrever o lagrangeano da equação (4.8) da seguinte forma:

$$L = \frac{1}{2} m v^2 + \vec{d} \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + \vec{\mu} \cdot (\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}). \quad (4.23)$$

Este resultado nada mais é do que o Lagrangiano não relativístico que descreve a partícula na presença de um campo elétrico magnético que obtivemos a partir das transformações de Lorentz para o tensor eletromagnético. Observe também que esta Lagrangiana descreve a situação apontada por Anandan a uma partícula neutra com momentos de dipolo elétrico e magnético.

Com o resultado da Lagrangiana acima, podemos obter a equação de movimento da partícula e também o seu hamiltoniano não relativístico. Iremos reescrever a lagrangiana da equação (4.23) da seguinte forma

$$L = \frac{mv^2}{2} + \vec{d} \cdot \vec{E} - \vec{v} \cdot (\vec{d} \times \vec{B}) + \vec{\mu} \cdot \vec{B} + \vec{v} \cdot (\vec{\mu} \times \vec{E}) \quad (4.24)$$

Iremos encontrar primeiro a equação de movimento da partícula, para isso, vamos utilizar a equação de Euler - Lagrange nesta lagrangiana ou seja

$$\nabla L - \frac{d}{dt} (\nabla_v L) = 0 \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} & \nabla (\vec{d} \cdot \vec{E}) - \nabla (\vec{v} \cdot (\vec{d} \times \vec{B})) + \nabla (\vec{\mu} \cdot \vec{B}) + \nabla (\vec{v} \cdot (\vec{\mu} \times \vec{E})) - m\ddot{x} \\ & + \dot{\vec{d}} \times \vec{B} + \vec{d} \times \frac{d\vec{B}}{dt} - \dot{\vec{\mu}} \times \vec{E} - \vec{\mu} \times \frac{d\vec{E}}{dt} = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

queremos encontrar uma equação de movimento na qual a força esteja escrita de forma conveniente, usaremos portanto $\nabla (\vec{v} \cdot (\vec{\mu} \times \vec{E})) = (\vec{v} \cdot \nabla) + \vec{v} \times \nabla \times (\vec{\mu} \times \vec{E})$ e de forma análoga para o momento de dipolo elétrico $\nabla (\vec{v} \cdot (\vec{d} \times \vec{B})) = (\vec{v} \cdot \nabla) + \vec{v} \times \nabla \times (\vec{d} \times \vec{B})$ e na derivada $\frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{E}$ e procedendo da mesma forma para o campo magnético, a equação de movimento fica

$$\begin{aligned} & \nabla (\vec{d} \cdot \vec{E}) - \left\{ (\vec{v} \cdot \nabla) (\vec{d} \times \vec{B}) - \vec{d} \times (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B} \right\} - \vec{v} \times \nabla \times (\vec{d} \times \vec{B}) + \dot{\vec{d}} \times \vec{B} + \vec{d} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ & + \nabla (\vec{\mu} \cdot \vec{B}) + \left\{ (\vec{v} \cdot \nabla) (\vec{\mu} \times \vec{E}) - \vec{\mu} \times (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{E} \right\} + \vec{v} \times \nabla \times (\vec{\mu} \times \vec{E}) \\ & - \dot{\vec{\mu}} \times \vec{E} - \vec{\mu} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = m\ddot{x} \end{aligned} \quad (4.27)$$

a partir daqui vamos assumir que tanto $\vec{\mu}$ e \vec{d} são constantes em suas direções, ou seja, não estão sujeitos a torques causados por \vec{B}' e \vec{E}' sentidos por eles. Com essas considerações temos que $\left\{ (\vec{v} \cdot \nabla) (\vec{d} \times \vec{B}) - \vec{d} \times (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B} \right\} = 0$ e $\left\{ (\vec{v} \cdot \nabla) (\vec{\mu} \times \vec{E}) - \vec{\mu} \times (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{E} \right\} = 0$, o que resulta em

$$\begin{aligned} & \left[\nabla (\vec{d} \cdot \vec{E}) + \vec{d} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] - \vec{v} \times \nabla \times (\vec{d} \times \vec{B}) + \dot{\vec{d}} \times \vec{B} + \left[\nabla (\vec{\mu} \cdot \vec{B}) - \vec{\mu} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \\ & + \vec{v} \times \nabla \times (\vec{\mu} \times \vec{E}) - \dot{\vec{\mu}} \times \vec{E} = m\ddot{x}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Assumindo que $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -(\nabla \times \vec{E})$ e $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = (\nabla \times \vec{B})$ e usando as seguintes identidades $(\vec{d} \cdot \nabla) \vec{E} = \nabla(\vec{d} \cdot \vec{E}) - \vec{d} \times (\nabla \times \vec{E})$ e $(\vec{\mu} \cdot \nabla) \vec{B} = \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) - \vec{\mu} \times (\nabla \times \vec{B})$, a equação de movimento fica

$$\begin{aligned} (\vec{d} \cdot \nabla) \vec{E} - \vec{v} \times \nabla(\vec{d} \times \vec{B}) + \vec{d} \times \vec{B} + (\vec{\mu} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{v} \times \nabla \times (\vec{\mu} \times \vec{E}) \\ - \dot{\vec{\mu}} \times \vec{E} = m\ddot{\vec{x}} \end{aligned} \quad (4.29)$$

considerando que os campos \vec{E} e \vec{B} não variam nas direções do dipolo e que $\dot{\vec{d}} = 0$ e $\dot{\vec{\mu}} = 0$ não variam com o tempo, assim a equação de movimento será

$$m\ddot{\vec{x}} = -\vec{v} \times \nabla \times (\vec{d} \times \vec{B}) + \vec{v} \times \nabla \times (\vec{\mu} \times \vec{E}) \quad (4.30)$$

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{v} \times \nabla \times [(\vec{\mu} \times \vec{E}) - (\vec{d} \times \vec{B})] \quad (4.31)$$

esta força é uma reminiscência da força experimentada por um elétron se movendo em um campo magnético $\nabla \times [(\vec{\mu} \times \vec{E}) - (\vec{d} \times \vec{B})]$. Agora iremos encontrar o hamiltoniano não relativístico para este problema, partindo de seu momento conjugado que usaremos para obter o hamiltoniano a partir do Lagrangiano

$$p = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left\{ \frac{mv^2}{2} + \vec{d} \cdot \vec{E} - \vec{v} \cdot (\vec{d} \times \vec{B}) + \vec{\mu} \cdot \vec{B} + \vec{v} \cdot (\vec{\mu} \times \vec{E}) \right\} \quad (4.32)$$

nosso próximo passo agora, será resolver a equação (4.32), para encontrar a nova equação do momento conjugado, assim temos

$$\vec{p} = m\vec{v} - (\vec{d} \times \vec{B}) + (\vec{\mu} \times \vec{E}) \quad (4.33)$$

Iremos agora calcular a transformação de Legendre para poder encontrar o hamiltoniano, que é calculado utilizando a definição mais usual do hamiltoniano, a partir da equação abaixo.

$$H = \sum p\dot{x} - L \quad (4.34)$$

vamos substituir o resultado da equação (4.33) e da equação (4.24) na equação (4.34) de modo que obteremos a seguinte equação.

$$H = \left\{ m\vec{v} - (\vec{d} \times \vec{B}) + (\vec{\mu} \times \vec{E}) \right\} \cdot \vec{v} - \left\{ \frac{mv^2}{2} + \vec{d} \cdot \vec{E} - \vec{v} \cdot (\vec{d} \times \vec{B}) + \vec{\mu} \cdot \vec{B} + \vec{v} \cdot (\vec{\mu} \times \vec{E}) \right\}. \quad (4.35)$$

Como já substituímos as equações, nosso próximo passo será eliminar os termos iguais de modo que a nova equação para o hamiltoniano não relativístico possa ser escrita como

$$H = \frac{mv^2}{2} - \vec{d} \cdot \vec{E} - \vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (4.36)$$

na equação (4.33) encontramos o momento canônico, que agora iremos utilizar, para encontrarmos o valor de sua velocidade, de posse deste resultado iremos substituir na equação (4.36)

$$\vec{v} = \frac{1}{m} \left\{ \vec{p} + (\vec{d} \times \vec{B}) - (\vec{\mu} \times \vec{E}) \right\}. \quad (4.37)$$

Quando substituir o resultado da equação (4.37) na equação (4.36) iremos encontrar para o hamiltoniano não relativístico, a seguinte equação

$$H = \frac{1}{2m} \left\{ \vec{p} + (\vec{d} \times \vec{B}) - (\vec{\mu} \times \vec{E}) \right\}^2 - \vec{d} \cdot \vec{E} - \vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (4.38)$$

onde iremos analisar a dinâmica quântica da partícula conduzida pelo hamiltoniano da equação (4.38), ou seja, em uma região no qual a partícula está imersa, para este caso vamos considerar que os campos são cilíndricos radiais e adotaremos campos genéricos

$$\vec{B} = \frac{\lambda_m}{\rho} \hat{\rho} \quad (4.39)$$

e

$$\vec{E} = \frac{\lambda_e}{\rho} \hat{\rho} \quad (4.40)$$

em que λ_m na equação do campo magnético é uma constante que possui uma dependência da matriz de dipolos magnéticos e λ_e é a densidade de carga elétrica responsável pela criação do campo elétrico. Desta forma a expressão da força na qual a partícula experimenta é nula, devido esta configuração de campo. Outro fato que não deve passar despercebido é que ao analisarmos a expressão para o torque experimentado pelos dipolos nesta configuração de campo, vemos que ele desaparece. Assim as condições para a existência da fase devem ser asseguradas.

O hamiltoniano da equação (4.38) mais precisamente o segundo termo do lado direito, que diz respeito ao potencial, tem uma contribuição nula para a dinâmica do dipolo nas contribuições de campo das equações (4.39) e (4.40) se os dipolos estiverem alinhados ao longo da direção z . Onde assumiremos que a partícula se move no plano x - y , no campo elétrico e magnético externo e que os campos gerados pelas fontes estejam radialmente distribuídos em tal espaço.

Para encontrar a fase de Berry, iremos nos valer de certos argumentos como por exemplo: limitar o sistema quântico a uma caixa refletora, onde o pacote de ondas seja diferente de zero,

apenas em seu interior. Desse modo o vetor que faz esta localização da caixa com relação a campo eletromagnético é simplesmente chamado de $R(t)$, ou seja $R(t)$ aqui é um parâmetro no hamiltoniano que mudará conforme o tempo. O vetor em questão possui orientação desde a origem do sistema de coordenadas ao centro da caixa. Na ausência de campos, a função de onda para a partícula é escrita como $\psi_0(r - R)$. Iremos usar o método do fator de Dirac na descrição da dinâmica quântica da partícula.

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(\frac{iH_0 t}{\hbar}\right) |\psi_0(t)\rangle \quad (4.41)$$

Nosso próximo passo agora será descrever o estudo quântico da dinâmica de uma partícula, sujeito a um campo magnético que se dá a partir de seu hamiltoniano que é escrito conforme equação (4.38), mais só que aqui com outra roupagem ou seja

$$H = \frac{1}{2m} [\vec{p} + \vec{A}]^2 + V(\vec{r}) \quad (4.42)$$

e cuja a interação entre a partícula e os campos elétricos e magnéticos é semelhante à de uma partícula minimamente acoplada a um campo de gauge não-Abeliano. A equação (4.38) e (4.42), nos permite escrever o potencial vetor como

$$\vec{A} = \left[(\vec{d} \times \vec{B}) - (\vec{\mu} \times \vec{E}) \right] \quad (4.43)$$

e o potencial escalar

$$V(\vec{r}) = -\vec{d} \cdot \vec{E} - \vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (4.44)$$

Se utilizarmos o teorema adiabático no hamiltoniano da equação (4.42) e procedermos da mesma forma como fizemos na secção (1.3) do capítulo (1), iremos encontrar a equação (1.34), ou seja, o estado quântico adquire um par de fatores de fase, que escreveremos como

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-i \int_0^t E(t) dt\right) \exp(i\gamma_n(t)) |\psi_0(R(t))\rangle. \quad (4.45)$$

Para a continuação da abordagem que vinha sendo feita até aqui, o estado quântico da partícula na presença de campos eletromagnéticos, podemos escrever como uma função do estado quântico na ausência de campos eletromagnéticos, o que nos permite reescrever seu estado quântico como

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-i \int_0^t E(t) dt\right) \exp\left(-i \int_R^{r'} \left[(\vec{d} \times \vec{B}) - (\vec{\mu} \times \vec{E}) \right] \cdot dr'\right) |\psi_0 R(t)\rangle \quad (4.46)$$

a fase quântica que surge na função de onda da partícula é

$$\Psi(r - R) = \exp\left[-i \int_R^r (\vec{d} \times \vec{B} - \vec{\mu} \times \vec{E})\right] \psi_0(r - R) \quad (4.47)$$

para determinar a fase geométrica, devemos, em primeiro lugar, avaliar a quantidade $\langle \Psi(r-R) | \nabla_R \Psi(r-R) \rangle$. Observe que

$$\begin{aligned} |\nabla_R \Psi(r-R)\rangle &= -i \left(\vec{d} \times \vec{B} - \vec{\mu} \times \vec{E} \right) \exp \left[-i \int_R^r \left(\vec{d} \times \vec{B} - \vec{\mu} \times \vec{E} \right) \right] \Psi_0(r-R) \\ &+ \exp \left[-i \int_R^r \left(\vec{d} \times \vec{B} - \vec{\mu} \times \vec{E} \right) \right] \nabla_R \Psi_0(r-R) \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$|\nabla_R \Psi(r-R)\rangle = -i \left(\vec{d} \times \vec{B} - \vec{\mu} \times \vec{E} \right) \Psi(r-R) + \nabla_R \Psi(r-R) \quad (4.49)$$

e, assim, temos

$$\langle \Psi(r-R) | \nabla_R \Psi(r-R) \rangle = \int \Psi^*(r-R) \left[-i \left(\vec{d} \times \vec{B} - \vec{\mu} \times \vec{E} \right) \Psi(r-R) + \nabla_R \Psi(r-R) \right] d^3r$$

$$\langle \Psi(r-R) | \nabla_R \Psi(r-R) \rangle = -i \left(\vec{d} \times \vec{B} - \vec{\mu} \times \vec{E} \right) + \int \Psi^*(r-R) \nabla_R \Psi(r-R) d^3r \quad (4.50)$$

o segundo termo do lado direito é zero, assim ficamos com

$$\langle \Psi(r-R) | \nabla_R \Psi(r-R) \rangle = -i \left(\vec{d} \times \vec{B} - \vec{\mu} \times \vec{E} \right) \quad (4.51)$$

$$\gamma_m(t) = i \oint \langle \Psi(r-R) | \nabla_R \Psi(r-R) \rangle \cdot d\vec{R}. \quad (4.52)$$

Voltando ao exemplo da caixa, se a transportamos entorno de fontes de campos eletromagnéticos, sua função de onda adquire uma fase geométrica, desta forma a equação (4.52) passa a ser escrita como

$$\gamma(C) = \oint \left[\left(\vec{d} \times \vec{B} \right) - \left(\vec{\mu} \times \vec{E} \right) \right] \cdot d\vec{R}. \quad (4.53)$$

O efeito observado é de uma interferência entre a partícula na caixa ao ser transportada ao redor do circuito. Onde este resultado demonstra claramente a existência de uma fase geométrica na dinâmica quântica da partícula neutra que contém momento de dipolo elétrico e magnético. A equação (4.53) é também conhecida na literatura como fase de Ananda, que nada mais é que uma generalização do efeito Aharonov - Casher para partículas neutras, com momentos de dipolos elétricos e magnéticos.

4.2 Algumas configurações de campo na fase de Ananda

Nesta secção, iremos estudar algumas das configurações que vimos na secção anterior como por exemplo a configuração radial de campo que apresentamos nas equações (4.39) e

(4.40), com este estudo esperamos obter certas configurações de campo e de momento de dipolo em que esta fase pode ser observada. Com este possível arranjo de configurações de campo, e o campo magnético radialmente cilíndrico é bem mais difícil sua realização experimental, pois a priori, precisa-se de uma distribuição linear de cargas magnéticas. Desta forma podemos observar na literatura que para este tipo de arranjo estudado seria possível sua execução.

Para autores como W.H. Heiser e seus colaboradores [33] e S.Y.Molokov e seus colaboradores [34], tem total convicção de que este tipo de arranjo como o apresentado aqui, pode ser obtido experimentalmente. Sendo assim uma configuração experimental como esta, o campo magnético é radial e é produzido por um par de magnetos cilíndricos concêntricos de modo que um campo magnético possa ser produzido entre os ímãs. Uma configuração mais realista que pode gerar um campo magnético radial é obtida quando consideramos um solenoide cilíndrico portando uma densidade de corrente superficial que produz, na região externa de um solenoide, uma configuração de campo com as mesmas características das equações (4.39) e (4.40) [35]. Quando assumirmos que nesta região, a existência de um campo elétrico radial gerado por um eletrodo cilíndrico interno, verifica-se por exemplo que a equação da fase geométrica de Ananda equação (4.53) nos permite encontrar a seguinte expressão para esta fase.

$$\gamma(C) = 2\pi\mu\lambda_e - 2\pi d\lambda_m \quad (4.54)$$

Uma outra forma de se obter campos magnéticos e elétricos radiais seria utilizar os mesmos argumentos apresentados pelo físico Volodymyr Tkachuk [36]. Em seu trabalho, Tkachuk considerou que as configurações de campo radiais são geradas por um fio ferromagnético com a magnetização paralela ao fio e a magnitude dessa linha de magnetização é linear ao longo da direção z .

Iremos considerar o fio dirigido ao longo do eixo z com a magnetização paralela ao fio, da mesma forma como na ref [37], só que com um pequeno detalhe, adotaremos agora que o fio ferromagnético é eletricamente carregado. Demo que a sua magnitude de sua magnetização se dá ao longo da linha M é uma função linear de z e é dada por: $M(z) = -\lambda_m z$ onde $M(z) = -\lambda_m z$ pode ser tratado como uma densidade linear de cargas magnéticas. Não podemos nos esquecer, que este fio tem uma densidade de cargas elétricas que gera o campo elétrico radial, de modo que para o fio suficientemente longo, o campo magnético nesta região em torno da parte central do fio é escrito como se segue

$$\vec{B} = \frac{2\lambda_m}{\rho} \hat{\rho} \quad (4.55)$$

para o campo magnético, já o campo elétrico é

$$\vec{E} = \frac{\lambda_e}{\rho} \hat{\rho}. \quad (4.56)$$

Com o exposto acima, podemos encontrar a fase geométrica de Ananda, equação (4.53), para a configuração modificada de Volodymyr Tkachuk, que para esta configuração é dada pelo seguinte fator de fase

$$\gamma(C) = 2\pi\mu\lambda_e - 4\pi d\lambda_m. \quad (4.57)$$

Ao analisarmos as configurações de campo obtidas neste capítulo, não é muito difícil percebermos que o primeiro termo da integral na equação (4.53), é a parte responsável pela fase de Aharonov - Casher, quando consideramos que o momento de dipolo elétrico é igual a zero, assim recuperamos um resultado já conhecido na literatura

$$\gamma_{AC} = \oint (\vec{\mu} \times \vec{E}) \cdot d\vec{R}. \quad (4.58)$$

Do mesmo modo, a ausência do momento de dipolo magnético $\mu = 0$, recuperamos a fase de He - Mckellar - Welkens, com outro resultado também já conhecido.

$$\gamma_{HM} = \oint (\vec{d} \times \vec{B}) \cdot d\vec{R}. \quad (4.59)$$

Já no caso em que $d \neq 0$ e $\mu \neq 0$, obtemos uma fase geométrica generalizada para uma partícula quântica (átomo ou molécula), com momentos permanentes de dipolo magnético e elétrico [37].

Iremos analisar agora, a fase geométrica em um sistema, onde temos interesse em encontrar as configurações de \vec{d} , $\vec{\mu}$, \vec{B} e \vec{E} para estes sistemas, de modo que o torque e a força clássicas desapareçam. Estudando a fase quântica na dinâmica de dipolos elétricos ou magnéticos Lee [38], observou que era possível escrever o potencial vetor para dipolos elétricos ou magnéticos usando para isto o efeito Aharonov - Bohm, ao observar que o referido efeito era um caso duplo do efeito Casella [39] para os dipolos [37].

Para melhorar o entendimento, iremos supor que o momento de dipolo elétrico aponte $\vec{d} = d\hat{x}$ e que $\vec{B} = B\hat{k}$ e finalmente $\vec{v} = -v\hat{y}$, de modo que o exposto acima nos garante que o

momento de dipolo elétrico é perpendicular a \vec{B} e \vec{v} ao mesmo tempo. Usando uma linha de raciocínio semelhante para o momento de dipolo magnético, neste caso o que mudaria seria que o momento de dipolo magnético estaria na direção z já o campo elétrico na direção x e sua velocidade na direção y então temos que o momento de dipolo magnético também é perpendicular ao campo e velocidade, assim quando o momento de dipolo (elétrico ou magnético) é ortogonal a (\vec{B} e \vec{v} ou \vec{E} e \vec{v}) eles possuem uma propriedade que faz com que tanto o torque quanto a força desapareçam. Assim a fase quântica que ambos os dipolos adquirem é independente da trajetória em oposição a fase de Aharonov - Bohm, seja qual for a trajetória e a configuração do solenoide.

Desta forma observamos que as trajetórias dos dipolos (elétricos ou magnéticos) é restritiva e que suas velocidades são perpendiculares a ambos os momentos devido ao efeito relativístico no campo. Assumiremos que um feixe de átomos ou moléculas, com momentos permanentes de dipolo magnético e que pode induzir momentos de dipolo elétrico nele, é preparado com o momento de dipolo magnético alinhado com a direção z e o momento de dipolo elétrico alinhado com a direção x . Desta forma este feixe é introduzido no dispositivo do interferômetro com um conjunto de dois magnetos dipolares com o campo magnético na direção z e duas placas que geram o campo elétrico uniforme na direção x [38]. Iremos encontrar a fase Casella para o termo da equação (4.58), onde estamos supondo que $\hbar = c = 1$ assim temos

$$\gamma_C = e \oint \vec{A}_{ec} \cdot d\vec{r} = 8\pi a \rho \mu \quad (4.60)$$

logo

$$\gamma_C = 2E_i a \mu \quad (4.61)$$

onde $E_i = 4\pi\rho$ é o campo elétrico.

Para encontrar a fase Casella para o termo da equação (4.59), onde também estamos supondo que $\hbar = c = 1$ temos

$$\gamma_{DC} = e \oint \vec{A}_{ec} \cdot d\vec{r} = 8\pi a \rho_b \mu \quad (4.62)$$

logo

$$\gamma_{DC} = 2B_i a d \quad (4.63)$$

assim para a fase total temos

$$\gamma_C = 2E_i a \mu + 2B_i a d \quad (4.64)$$

onde B_i e E_i são a magnitude dos campos magnéticos e elétricos em ambos os caminhos ao redor do aparelho e a é o comprimento dos ímãs e das placas elétricas. Para $E_i = 0$, temos o efeito duplo de Casella previsto por [38]; para $B_i = 0$ temos o efeito Casella. Este é um efeito Casella generalizado e também é um caso da fase de Ananda [37].

Conclusão

Neste trabalho, mostramos que a fase quântica de Ananda é um caso especial da fase geométrica. O objetivo foi configurar um processo semelhante a um interferômetro para tentar observar a fase quântica. Para a observação deste efeito não se pode ter força clássica nem torque atuando sobre a partícula teste. O processo de interferência é explicado apenas por efeito potencial quântico no sentido do efeito Aharonov-Bohm. Demonstramos algumas configurações onde a fase geométrica pode ser detectada como por exemplo nos efeitos Aharonov - Casher, He - Mckellar - Welkens e fase Casella, onde propusemos encontramos a fase de Ananda equação (4.53) e através dela obtivemos a fase para as diferentes configurações de campo desde o efeito AC para o caso de $d = 0$ e o efeito He - Mckellar - Welkens quando $\mu = 0$. E com as configurações de campo apropriadas obtivemos também a fase Casella.

Referências Bibliográficas

- [1] Berry, M. V. *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes*. Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences **392**, 45-57 (1984).
- [2] S. Pancharatnam, *Generalized theory of interference and its application*, Proc. Ind. Acad. Sci. A **44**, 247 (1956).
- [3] Aharonov and D. Bohm, *Significance of electromagnetic potentials in quantum theory*, Phys. Rev. **115**, 485 (1959).
- [4] J.C. Romão, *Fases em mecânica quântica*, Lisboa, Portugal.
- [5] J. v. Bergmann e H. v. Bergmann, *Foucault Pendulum Through Basic Geometry*, Am. J. Phys. **75**, 888-892 (2007).
- [6] Walter F. Wreszinski, *Algumas contribuições de von Neumann à Física Matemática*, 261-272 (1996).
- [7] Omer.F.Dayi e Turkey, *Dynamics of Dipoles and Quantum Phases in Noncommutative Coordinates*, or arXiv:0810.5468v2, (2009).
- [8] GRIFFITHS, D.J. *Mecânica Quântica*. 2. ed. [S.l.]: Pearson Education, 2011. 271 - 275 p. ISBN 9788576059271.
- [9] M. Born and V. Fock, *Beweis des Adiabatsatzes*, Z. Phys. **51**, 165-169, (1928).
- [10] Landau L. D., *Zur theorie der energieubertragung*. II, Phys. Z. Sowjetunion **2**, 46 (1932).
- [11] Zener C., *Non-Adiabatic crossing of energy levels*, Proc. R. Soc. A. **137**, 696 (1932).
- [12] M. Born and R. Oppenheimer. *Zur Quantentheorie der Molekeln*. Annalen der Physik, **389**, 457-484, (1927).

- [13] Cunha, T. F. *Estudo dos efeitos isotópicos no processo colisional reativo $H+Li ? LiH+Li$* , Brasília: (2013).
- [14] E. Farhi et al., *A Quantum Adiabatic Evolution Algorithm Applied to Random Instances of an NP-Complete Problem*, Science 292, 472 (2001).
- [15] SILVA, S. L. Everton. *Fenômenos paramétricos de segunda ordem e transições Landau-Zener em Eletrodinâmica Quântica de circuitos*, Dissertação de Mestrado, Brasília: p.39, (2017).
- [16] Shytov A. V., Ivanov D. A. and Feigelman M. V., *Landau-Zener interferometry for qubits*, Eur. Phys. J. 36, 263 (2003).
- [17] Shytov A. V., *Landau-Zener transitions in a multilevel system: An exact result*, Phys. Rev. A 70, 052708 (2004).
- [18] Zueco D. P., Hänggi H. and Kohler S., *Landau-Zener tunnelling in dissipative circuit QED*, New J. Phys. 10, 115012 (2008).
- [19] Ao P. and Rammer J., *Influence of dissipation on the Landau-Zener transition*, Phys. Rev. Lett. 62, 3004 (1989).
- [20] Vitanov N. V. and Suominen K. -A, *Nonlinear level-crossing models*, Phys. Rev. A 59, 4580 (1999).
- [21] Chasseur L. S., Theis Y. R., Sanders D. J. Egger and Wilhelm F. K., *Engineering adiabaticity at an avoided crossing with optimal control*, Phys. Rev. A 91, 043421 (2015).
- [22] FARHI, E. et al. *Quantum computation by adiabatic evolution*. arXiv:quant-ph/0001106 (2000).
- [23] Guarienti, P. Vanessa; *Computação Quântica Adiabática em Sistemas Relativísticos*. Dissertação de mestrado, Santa Catarina. p.46-47, (2016).
- [24] C. A. Mead and D. G. Truhlar, *Journal of chemistry, Physics*. 70, 2284, (1979).
- [25] R. G. Chambers, *Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux*, Phys. Rev. Lett. 5, 3, (1960).

- [26] N. Osakabe et. al., *Expperimental conformation of Aharonov-Bohm effect using a toroidal magnetic field confined by a superconductor*, Phys. Rev. A 34, 815, (1986).
- [27] Ramsak. A. *Aharonov-Bohm effect*, Ljubljana, marec 2011.
- [28] Y. Aharonov, A. Casher: *Topological quantum effects for neutral particles*. Phys. Rev. Lett. 53, 319?21 (1984).
- [29] AHARONOV Y.; BOHM, D. *Significance of Eletromagnetic Potentials in the Quantum Teory*. Physical Review, Vol.3 115, p. 485, (1959).
- [30] Y. Aharonov, P. Pearl, L. Vaidman, Phys. Rev. A 37, 4052 (1988).
- [31] T.H. Boyer, Phys. Rev. A 36, 5083 (1987).
- [32] NICOLE. T.G . *EFEITO AHARONOV-CASHER*. Dissertação de mestrado, Vitória. **p.51-52**,(2006).
- [33] W. H. Heiser and J. A. Shercliff, J. Fluid Mech. 22, 701 (1985).
- [34] S. Y. Molokov and J. E. Allen, J. Phys. D 25, 933 (1992).
- [35] C. Chryssomalakos, A. Franco, and A. Reyes-Coronado, Eur.J. Phys. 25, 489 (2004).
- [36] V. M. Tkachuk, *Quantum topological phase of an electric dipole circulating around a ferromagnetic wire*, Phys. Rev. A 62,052112 (2000).
- [37] C. Furtado e C. A. de L. Ribeiro, Quantum dynamics of magnetic and electric dipoles and the geometric phase, Phys. Rev. A 69, (2004).
- [38] T.-Y. Lee, *phases of electric and magnetic dipoles as special cases of the Aharonov-Bohm phase*, Phys. Rev. A 64, 032107 (2001).
- [39] R. C. Casella, Phys. Rev. Lett. 65, 221 (1990).
- [40] L.A.S. de Oliveira, Roteiros de experiências de Física Experimental IV, um curso de Licenciatura plena em Física. (2015).
- [41] M. Rodriguez, Masa del foton por medio de un condensador de placas paralelas, REVISTA MEXICANA DE FÍSICA 55 (5) 373?377, (2009).

-
- [42] Rulli, C. C, Rino, J. P, Oscilações Paramétricas: uma simulação numérica, Revista Brasileira do Ensino de Física, v.29,n.1, p.71-75,(2007).