

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ANDERSON RAFAEL CORREIA BUARQUE DA SILVA

**PROPRIEDADES DE TRANSPORTE E EMARANHAMENTO EM  
CAMINHADAS QUÂNTICAS EM TEMPO DISCRETO**

Brasil

2022

ANDERSON RAFAEL CORREIA BUARQUE DA SILVA

**PROPRIEDADES DE TRANSPORTE E EMARANHAMENTO EM  
CAMINHADAS QUÂNTICAS EM TEMPO DISCRETO**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Alagoas, como requisito para obtenção do grau de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Wandearley da Silva  
Dias

Brasil

2022

**Catálogo na Fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

S586p Silva, Anderson Rafael Correia Buarque da.

Propriedades de transporte e emaranhamento em caminhadas quânticas em tempo discreto / Anderson Rafael Correia Buarque da Silva. – 2022.  
[209] f. : il.

Orientador: Wandearley da Silva Dias.

Tese (doutorado em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2022.

Bibliografia: f. 141-157.

Apêndices: f. 159-163.

Anexos: f. 165-[209].

1. Moedas aperiódicas. 2. Coerência quântica. 3. Não linearidade. 4. Oscilações de Bloch. 5. Auto-armadilhamento. 6. Auto-focalização. 7. Ondas traiçoeiras. I. Título.

CDU: 530.18



**Universidade Federal de Alagoas**  
**Instituto de Física**  
Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14. Campus A.C. Simões  
Cidade Universitária  
Tabuleiro dos Martins  
57072-970 Maceió - AL, Brasil  
FONE : (82) 3214-1423

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE**  
**TESE DE DOUTORADO**

**“PROPRIEDADES DE TRANSPORTE E EMARANHAMENTO EM**  
**CAMINHADAS QUÂNTICAS EM TEMPO DISCRETO”**

por


**Anderson Rafael Correia Buarque da Silva**

A Banca Examinadora composta pelos professores Wandearley da Silva Dias (orientador e presidente da banca), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas; Marcelo Leite Lyra, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas; Francisco Anacleto Barros Fidelis de Moura, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas; Solange Bessa Cavalcanti, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas; Marcos Gomes Eleuterio da Luz, da Universidade Federal do Paraná e Ernesto Carneiro Pessoa Raposo, da Universidade Federal de Pernambuco, consideram o candidato **aprovado com grau “A”**.

Maceió, 11 de março de 2022.

  
Prof. Dr. Wandearley da Silva Dias

  
Prof. Dr. Marcelo Leite Lyra

  
Prof. Dr. Francisco Anacleto Barros Fidelis de Moura

  
Profa. Dra. Solange Bessa Cavalcanti

  
Prof. Dr. Marcos Gomes Eleuterio da Luz

  
Prof. Dr. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo

*Regina Buarque,  
Sérgio Onofre,  
e a Juliana Lima.*

## Agradecimentos

Aos que passaram em minha vida e que, de alguma forma, tornaram-se singulares:

- Minha família, por todo o apoio de sempre. Em especial, Regina (mãe) e Sérgio (pai), responsáveis pelo que sou hoje. Especialmente por me mostrarem que o caminho para uma sociedade mais justa é através de uma educação pública, gratuita e de qualidade.
- Minha companheira Juli, por ser A pessoa que mais acredita, confia e me estimula para a finalização desse processo.
- Meu orientador, Prof. Wandearley Dias, que não apenas me orientou, mas me apoiou, incentivou e me fez acreditar que o doutorado é apenas um passo na minha formação. Fazendo por mim muito mais do que lhe caberia e, por isso, sou imensamente grato.
- A todos os professores do Instituto de Física. Em especial, Profa. Socorro, prof. Marcelo e Francisco, por todo o conhecimento compartilhado.
- Aos amigos e colegas: Rafa, Elias, Camyla, Maxwell, Danilo, Giva, Paulo, David, Guilherme, José Carlos, Luan, PV, Artur, Jamerson, Helena, Pedro, Mari, Fred, JP, Henrique, por todos os momentos compartilhados durante todos esses anos.
- CAPES pela ajuda financeira.

Muito obrigado!

*“Os cientistas dizem que somos feitos de átomos, mas um passarinho me contou que  
somos feitos de histórias.”  
(Eduardo Galeano)*

## RESUMO

Todas as questões, e situações, apresentadas nesta tese são complementares e misturam-se ao apontar as discussões para o seu tema principal. Estudamos as propriedades de transporte, emaranhamento quântico, coerência quântica, superoscilações e surgimento de eventos extremos em caminhadas quânticas em tempo discreto (CQTDs). Para isso, foi preciso inserir alguns elementos como: aperiodicidade, não-linearidade, ruídos, desordem e campos artificiais. Iniciamos estudando como as propriedades de localização, espectro de energia e emaranhamento quântico entre os graus de liberdade de uma CQTDs são alteradas quando adicionados uma dependência espacial aperiódica nos operadores moedas quânticas. A aperiodicidade é descrita por moedas espacialmente dependentes das posições em uma cadeia 1D. Dentro das propriedades de transporte, identificamos dois regimes: caminhadas quânticas deslocalizadas e localizadas mediadas por um ajuste adequado do parâmetro que controla o grau de aperiodicidade da distribuição. Usando a análise de espectros de energia, mostramos que no estágio inicial a inomogeneidade leva a leva ao desaparecimento do (*gap*) entre duas bandas principais, o que justifica o caráter predominantemente deslocalizado. Para um grau de aperiodicidade suficientemente alto, observamos um espectro de energia, que se assemelha ao descrito pelo modelo unidimensional de Anderson. Em relação ao emaranhamento quântico do sistema, mostramos muitas configurações em que um aumento na capacidade de gerar emaranhamento é observado. Esse comportamento traz novas informações sobre o papel da aperiodicidade nessa correlação entre o espaço das posição e da moeda quântica para sistemas com inomogeneidade estática, contrastando com o relatado, outrora, como quase sempre reduzindo o emaranhamento quando comparado com o caso homogêneo. Por fim, estendemos a análise para mostrar que sistemas com heterogeneidade estática são capazes de exibir limite assintótico. Adiante, inserindo não-linearidade, estudamos a existência e caracterização de fenômenos de auto-aprisionamento em CQTDs. Ao considerar uma não-linearidade do tipo Kerr, associamos uma aquisição da fase dependente da densidade de probabilidade a cada instante de tempo. Ajustando o parâmetro não-linear e as moedas quânticas, mostramos a existência de diferentes regimes dinâmicos, incluindo aqueles com estruturas tipo sólitons viajantes ou localizados por auto-aprisionamento. Após o mapeamento de eventos não-lineares em CQTDs, propomos um modelo para estudamos as consequências de termos ruídos e interação não-linear associados a um *qubit* se propagando em uma cadeia circular. Ao empregar medidas de coerência quântica, relatamos regimes instáveis emergentes nos quais surgem caminhadas quânticas, como auto-focalização e dinâmica de respiração. Ademais, estudamos a dinâmica de um caminhante quântico submetido simultaneamente a fases independentes e dependentes do tempo. Onde tal dinâmica emula uma partícula quântica carregada em uma rede submetida a uma superposição de campos elétricos estáticos e harmônicos. Com ajustes adequados, investigamos a possibilidade de induzir superoscilações do tipo Bloch, resultantes de uma sintonia próxima da frequência da fase harmônica e aquela associada às oscilações do tipo Bloch. Além disso, mostramos que sob condições exatas de ressonância é possível estabelecer um movimento unidirecional. Mostramos que a velocidade média de deriva pode ser bem descrita dentro de um modelo análogo de tempo contínuo. Por fim, usamos a estrutura geral de caminhadas quânticas discretas no tempo para estudar as origens físicas de ondas traçoeiras através de uma modulação de fase aleatória. Revelamos suas estatísticas de cauda longa, o perfil de distribuição e a dependência com o grau de aleatoriedade do sistema. Conseguimos classificar esses eventos extremos como pertencentes à família Gumbel de distribuições.



Palavras-chaves: moedas aperiódicas, coerência quântica, não-linearidade, eventos extremos, oscilações de Bloch, auto-armadilhamento, auto-focalização, ondas traiçoeiras.

## ABSTRACT

All the questions and situations presented in this thesis are complementary and intermingle to point the discussions towards its theme. We study the properties of transport, quantum entanglement, quantum coherence, superoscillations and the emergence of extreme events in discrete-time quantum walks (DTQWs). For this, it was necessary to insert some elements such as: aperiodicity, non-linearity, noises, disorder and artificial fields. We begin by studying how the localization properties, energy spectrum and quantum entanglement between degrees of freedom of a DTQWs are changed when adding an aperiodic spatial dependence in the quantum coin operator. The aperiodicity is described by coins spatially dependent on the positions in a 1D chain. Within the transport properties, we identified two regimes: delocalized and localized quantum walks mediated by an adequate adjustment of the parameter that controls the degree of aperiodicity of the distribution. Using energy spectra analysis, we show that at the initial stage inhomogeneity leads to a vanishing gap between two main bands, which justifies the predominantly delocalized character. For a sufficiently high degree of aperiodicity, we observe an energy spectrum, which resembles that described by Anderson's one-dimensional model. Regarding the quantum entanglement of the system, we have shown many configurations where an increase in the ability to generate entanglement is observed. This behavior brings new information about the role of aperiodicity in this correlation between the space of position and the quantum coin for systems with static inhomogeneity, in contrast to what was previously reported, as almost always reducing entanglement when compared to the homogeneous case. Finally, we extend the analysis to show that systems with static heterogeneity are capable of exhibiting an asymptotic limit. Further on, inserting non-linearity, we study the existence and characterization of self-trapping phenomena in DTQWs. When considering a Kerr-type nonlinearity, we associate a probability density-dependent phase acquisition at each time step. Adjusting the nonlinear parameter and the quantum coins, we show the existence of different dynamic regimes, including those with traveling or self-trapping solitons-like structures. After mapping non-linear events in DTQWs, we propose a model to study the consequences of having noise and non-linear interaction associated with a qubit propagating in a circular chain. By employing quantum coherence measures, we report emerging unstable regimes in which quantum walks arise, such as self-focusing and breathing dynamics. Furthermore, we study the dynamics of a quantum walker submitted to independent and time-dependent phases simultaneously. Where such dynamics emulates a quantum particle charged in a lattice subjected to a superposition of static and harmonic electric fields. With appropriate adjustments, we investigated the possibility of inducing Bloch-type superoscillations, resulting from a tuning close to the harmonic phase frequency and that associated with Bloch-type oscillations. Furthermore, we show that under exact resonance conditions it is possible to establish a unidirectional motion. We show that the average drift velocity can be well described within an analog continuous-time model. Finally, we use the general framework of discrete-time quantum walks to study the physical origins of rogue waves through random phase modulation. We reveal its long-tail statistics, distribution profile, and dependence on the degree of randomness of the system. We were able to classify these extreme events as belonging to the Gumbel family of distributions.

Keywords: aperiodic coins, quantum coherence, nonlinearity, extreme events, Bloch oscillations, self-trapping, self-focusing, rogue waves.

## LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – Exemplos de aparatos experimentais utilizados por alguns autores. Em (a) temos a representação da configuração óptica de uma caminhada quântica, proposta por Goyal *et al.* (44), onde um feixe de laser passa por uma *q-plate* seguido por uma placa de quarto de onda. O *loop* corresponde a uma única iteração de um processo da CQ. Já na referência (45), em (b), temos o aparelho experimental para realizar caminhada quântica de cinco etapas também utilizando *q-plates*. O quadro interno exibe imagens dos modos com momento angular orbital (MAO) dos estados de saída após passarem pelo divisor de feixe de polarização (DFP). . . . . 28
- Figura 2 – Distribuições de probabilidades de CQTDs após 250 passos de tempo com  $N = 500$  posições para três condições iniciais. Em (a)  $|\Psi_0\rangle = |c_1\rangle \otimes |250\rangle$ ; (b)  $|\Psi_0\rangle = |c_2\rangle \otimes |250\rangle$  e (c) um estado em superposição,  $|\Psi_0\rangle = (|c_1\rangle + i|c_2\rangle)/\sqrt{2} \otimes |250\rangle$ . . . . . 41
- Figura 3 – Comportamento do desvio padrão de uma caminhada Hadamard (em preto). A fim de comparação com as caminhadas aleatórias clássicas, foi adicionada a curva de sua dispersão (em vermelho). Nota-se que, enquanto na caminhada clássica a dinâmica é difusiva  $\sigma \propto \sqrt{t}$ ; a caminhada quântica apresenta uma dinâmica balística, ou seja,  $\sigma \propto t$ . . . . . 43
- Figura 4 – Comportamento do emaranhamento quântico  $S_E$  para duas condições iniciais diferentes contidas no espaço da moeda quântica. Ambas as condições iniciais saturam, no limite assintótico, no valor  $S_E \sim 0,872$ . . . 47
- Figura 5 – Comportamento da coerência quântica em uma cadeia circular para um *qubit* com um estado inicialmente simétrico localizado na posição  $N/2$ . Apresentamos esse comportamento para quatro tamanhos ( $N$ ) de rede. 49
- Figura 6 – Perfil da evolução temporal da densidade de probabilidade do caminhante quântico com estado inicial  $|\Psi_0\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |40\rangle$ . Em (a)  $\theta_0 = \pi/4$  e  $\nu = 0,0$ ; (b)  $\theta_0 = \pi/4$  e  $\nu = 1,0$ ; (c)  $\theta_0 = \pi/2$  e  $\nu = 0,0$ ; (d)  $\theta_0 = \pi/2$  e  $\nu = 0,05$ . . . . . 57

- Figura 7 – Evolução temporal da probabilidade de retorno,  $PR$ , em (a)-(b), e da função participação,  $PAR$ , para as mesmas configurações de  $\theta_0$  e  $\nu$  usadas na figura (1): (a) - (c)  $\theta_0 = \pi/4$  com  $\nu = 0$  e  $\nu = 1$ ; (b) - (d)  $\theta_0 = \pi/2$  com  $\nu = 0$  e  $\nu = 0,05$ . Ambas as quantidades corroboram com as transições entre regimes deslocalizados e fortemente localizados regidos pela não-homogeneidade aperiódica. . . . . 58
- Figura 8 – Energia espectral  $E_k = -i \log(\lambda_k)$ , com  $\lambda_k$  sendo os autovalores do operador de evolução temporal  $\hat{U}$  para as mesmas configurações utilizadas na figura 8. Associado à presença do grau de liberdade interno, ambos os sistemas exibem duas bandas principais na ausência de não-homogeneidade  $\nu = 0$ : as moedas Hadamard mostram um espectro de energia contínuo dentro das duas bandas principais, enquanto as moedas Pauli-X mostram um espectro de energia degenerado plano em ambas bandas. A não-homogeneidade de  $\theta_0 = \pi/4$  abre novas lacunas no principal faixas de energia, além de impor uma degeneração,  $\nu = 1$ . Enquanto isso, um pequeno grau de aperiodicidade,  $\nu = 0,05$ , quebra o alto nível de degenerescência em dois sub-bandas para  $\theta_0 = \pi/2$ . . . . . 61
- Figura 9 – Espectro de energia  $E_k = -i \log(\lambda_k)$  com  $\lambda$  sendo os autovalores do operador  $\hat{U}$  para  $\theta_0 = \pi/4$  (curvas em azul) e  $\theta_0 = \pi/2$  (curvas em vermelho). Nos oitos primeiros quadrados - topo:  $\nu = 0; 0,4; 0,8$  e  $1$ ; para o segundo grupo:  $\nu = 1,4; 1,8; ; 2$  e  $3$ . No início estágio a não-homogeneidade leva ao desaparecimento da lacuna entre as duas principais bandas. Com o aumento do grau de aperiodica, observa-se a presença de lacunas e estruturas de bandas planas. O ajuste de  $\nu > 1$  fornece um espectro que se assemelha ao descrito pelo modelo 1D Anderson, exceto quando a simetria translacional na não-homogeneidade é recuperado ( $\nu \in Z^*$ ). . . . 62
- Figura 10 – Comportamento médio da probabilidade de retorno,  $\overline{PR}(t_\infty)$ , e da função participação,  $\overline{PAR}(t_\infty)$ , em um tempo longo com  $\nu$  variando no intervalo entre  $[0, 4]$ . . . . . 63

- Figura 11 – Perfil da densidade de probabilidade,  $P_n$ , de uma caminhada Hadamard ( $\theta_0 = \pi/4$ ) no plano espaço-tempo para três valores de  $\nu$  inteiro. Em (a)  $\nu = 1, 0$ ; (b)  $\nu = 2, 0$  e (c)  $\nu = 3, 0$ . Os quadros na parte superior representam os valores de  $\cos(\theta_0)n^\nu$  (círculos em azul) e  $\sin(\theta_0)n^\nu$  (quadrados em laranja). Com isso conseguimos ter uma estimativa de qual moeda quântica estaria atuando em cada posição  $n$ . . . . . 65
- Figura 12 – Diagrama do comportamento médio probabilidade de retorno na posição inicial,  $\overline{PR}(t_\infty)$ , e da função participação,  $\overline{PAR}(t_\infty)$  no plano  $\nu \times \theta_0$ . Caminhadas quânticas deslocalizadas são predominantes para  $\nu < 1/2$ , enquanto a natureza localizada é predominante com aumento de  $\nu$  exceto para  $\nu \in Z^*$ . Este último, que pode estar associado à simetria translacional da não-homogeneidade, parece ser um aspecto relevante sobre a propagação da função de onda ao longo da rede. . . . . 66
- Figura 13 – Desvio padrão médio em tempo longo da distribuição espacial,  $\bar{\sigma}(t_\infty)$ , *versus* tamanho da cadeia  $N$  para alguns valores representativos de  $\nu$ . O cruzamento da escala balística para o regime independente de tamanho pode ser efetivamente descrito por um comportamento sub-balístico. . . . . 67
- Figura 14 – Evolução temporal da entropia de Von Neumann para as mesmas configurações da figura 6, isto é, para  $\theta_0 = \pi/4$  e  $\pi/2$ . Em (a) temos uma caminhada uniforme,  $\nu = 0$ , e em (b) introduzimos a inomogeneidade aperiódica através do parâmetro  $\nu \neq 0$ . Para um sistema livre de desordem, a moeda Hadamard induz um emaranhamento entre os graus de liberdade posição-*spin* saturando em torno de 0,872. Enquanto a moeda *Pauli-X* não gera emaranhamento para a condição inicial utilizada. Inserindo aperiodicidade na distribuição das moedas quânticas, as propriedades de emaranhamento são significativamente alteradas. . . . . 68

Figura 15 – Evolução temporal da função participação  $PAR(t)$ , quadros (a)-(c), e entropia de Von Neumann  $S_E$ , quadros (b)-(d), para moedas  $\theta_0 = \pi/6, \pi/4$  e  $\pi/3$ . Mostramos comportamentos na ausência,  $\nu = 0, 0$ , e na presença,  $\nu = 0, 05$ , de não-homogeneidade, em (a)-(b) e (c)-(d), respectivamente. Enquanto a  $PAR(t)$  exibe um caráter deslocalizado em ambos os regimes, observamos um aumento do grau de emaranhamento induzido pela não-homogeneidade para todas as moedas quânticas. . . . . 69

Figura 16 – Comportamento médio do emaranhamento quântico  $[\overline{S}_E(t_\infty)]$  versus  $\nu$ , para  $\theta_0 = \pi/6, \pi/4, \pi/3$  e  $\pi/2$ . As linhas tracejadas descrevem os respectivos valores de  $S_E(t_\infty)$  em sistemas homogêneos. Observamos que existem muitas configurações de não-homogeneidade nas quais há um aumento no grau de emaranhamento, sendo encontradas predominantemente para os menores valores de  $\nu$ . À medida que  $\nu$  cresce, o aspecto aleatório que governa a distribuição das moedas quânticas enfraquece o emaranhamento. 70

Figura 17 – Diagrama  $\theta_0$  versus  $\nu$  que revela o aumento na capacidade de emaranhar graus de liberdade internos e externos com respeito à distribuição homogênea de moedas quânticas. Não estamos preocupados com uma porcentagem de ganho, de modo que os pontos pretos significam um aumento da média de emaranhamento em tempo longo, enquanto os pontos brancos denotam um enfraquecimento. O aumento do emaranhamento é predominante para os valores iniciais de  $\nu$ . À medida que  $\nu$  cresce, o aumento é restrito a valores próximos a  $\theta_0 = 0, \pi$  e  $2\pi$ , bem como  $\theta_0 = \pi/2$  e  $3\pi/2$ . . . . . 71

Figura 18 – Evolução temporal da equação (44) para  $\theta_0 = \pi/4, \nu = 0$  e  $1$ ;  $\theta_0 = \pi/2, \nu = 0$  e  $0, 05$ . Como em sistemas governados por moedas de Hadamard, sistemas com não-homogeneidade estática também podem exibir valor assintótico, que obedece a uma lei de potência. A linha tracejada é um guia para os olhos mostrando  $D(t) \sim t^{-1}$ . . . . . 73

- Figura 19 – O painel esquerdo mostra a distribuição de probabilidade,  $P_n$ , após 500 instantes de tempo para dois valores de não-linearidades,  $\alpha = 0$  (curva preta) e  $0,4$  (curva vermelha). Note que quando  $\alpha = 0$  recuperamos a bem conhecida caminhada Hadamard. Para  $\alpha = 0,4$  há o surgimento de estruturas do tipo sólitons. No painel esquerdo mostramos o perfil distribuição de probabilidade no plano espaço-tempo quando a interação não-linear é  $\alpha = 0,49$ . Após um determinado instante de tempo as duas frentes de onda colidem de forma inelástica. . . . . 81
- Figura 20 – Perfis da evolução temporal da densidade de probabilidade,  $P_n$ , no plano espaço-tempo, em cadeias compostas por moedas quânticas com ângulos de rotação (a)–(d)  $\theta = \pi/4$  e (e)–(h)  $\theta = \pi/3$  homogeneamente distribuídas. Ambas as portas quânticas exibem estruturas semelhantes a sólitons itinerantes na presença de não-linearidade, cuja velocidade diminui à medida que o parâmetro não-linear,  $\chi$ , aumenta. Embora ambos os cenários tendam em um cenário de colisões com espalhamento inelástico para não-linearidades suficientemente fortes, um uma caminhada quântica auto-focalizada surge para  $\theta = \pi/3$ . O que sugere uma fenomenologia com dependência da moeda quântica. . . . . 84
- Figura 21 – Comportamento da função participação de um *qubit* em uma cadeia com  $N = 200000$  posições e  $N/2$  passos de tempo para quatro valores de  $\chi$ . Em (a) para uma caminhada Hadamard,  $\theta = \pi/4$ ; e (b) para  $\theta = \pi/3$ . . . . . 85
- Figura 22 – Evolução temporal da probabilidade de retorno em  $n_0$  para as mesmas configurações da figura 1. Nota-se que a quantidade confirma todos os aspectos relatados anteriormente. O comportamento de escala com  $PR(t) \sim t^{-1}$ , que é muito bem definido para quase todas as configurações. Enquanto que, para  $\theta = \pi/3$  e  $\chi = 0.6$  obtemos  $PR(t) \sim t^{-0}$ , o que configura uma caminhada quântica discreta auto-armadilhada entorno da posição inicial. . . . . 86

- Figura 23 – Análise do comportamento da probabilidade de retorno média,  $\overline{PR}(t_\infty)$  e função participação média,  $\overline{PAR}(t_\infty)$ , para duas configurações de moedas quânticas,  $\theta = \pi/4$  (a)-(b) e  $\pi/3$  (c)-(d). Ambas as quantidades concordam com a existência de estruturas do tipo sóliton no regime de fraca não-linearidade  $\chi < 0,5$ . Quando  $\theta = \pi/3$ , há o surgimento de configurações em  $\chi$  que levam a função de onda do *qubit* para o estado de auto-aprisionamento na posição inicial. Como mostrado em (c)-(d), existem pontos em que  $\overline{PAR}(t_\infty)$  decai para valores próximo a um, enquanto  $\overline{PR}(t_\infty)$  aumenta. . . . . 87
- Figura 24 – Diagramas do comportamento médio da probabilidade de retorno e função participação. Em (a)-(b) temos a dinâmica para um qubit inicialmente em um estado simétrico. Em (c)-(d) para uma condição inicialmente assimétrica. . . . . 89
- Figura 25 – Evolução temporal da coerência quântica para cadeias com  $N = 101$  sítios e regidos por moedas quânticas (a)–(d)  $\theta = \pi/4$  e (e)–(h)  $\theta = \pi/3$ . Padrões oscilatórios sugerem a falta de estabilidade da distribuição estacionária à medida que o parâmetro não-linear  $\chi$  aumenta, com o surgimento de dinâmicas respiratórias regulares e irregulares (caóticas). Para valores acima de uma força não-linear crítica, que depende da moeda quântica, a diminuição da coerência quântica após algum tempo transitório indica que o pacote de ondas se torna ainda mais estreito. . . . . 96
- Figura 26 – Evolução temporal da densidade de probabilidade,  $P_n$ , no plano espaço-tempo, de um caminhante quântico para as mesmas configurações de  $\theta$  e  $\chi$  usadas na figura 25. Isto é, (a)–(d)  $\theta = \pi/4$  e (e)–(h)  $\theta = \pi/3$ . Corroborando os resultados anteriores, observamos assinaturas claras de dinâmicas respiratórias regulares para não-linearidades fracas. Embora ambos os cenários culminem em um regime caótico à medida que o parâmetro não-linear ( $\chi$ ) aumenta, a caminhada quântica apresenta um auto-focalização apenas para  $\theta = \pi/3$ , que sugere uma fenomenologia dependente da moeda quântica. . . . . 97



- Figura 27 – Não-linearidade crítica do estado estacionário,  $\chi_c$ , em função do parâmetro da moeda quântica,  $\theta$  (em unidades de  $\pi$ ) mostrando que moedas quânticas próximas a *Pauli-Z* apresentam uma capacidade maior de sustentar o regime estacionário. Um decaimento monotônico de  $\chi_c$  é observado a medida em que alteramos o parâmetro  $\theta$  em direção a moeda quântica *Pauli-X*. Utilizamos quatro tamanhos de rede:  $N = 41$  (curva preta com círculos), 71 (curva vermelha com quadrados), 101 (curva verde com triângulos) e  $N = 221$  (curva azul com losangos). A seta indica a direção do crescimento de  $N$ . O quadro interno representa todos os mínimos da coerência ( $C_{l1}^{min}$ ) em função da força da não-linearidade,  $\chi_c$ , onde ilustra o ponto crítico sinalizado pela mudança significativa da largura de  $C_{l1}^{min}$ , que vem da falta de estabilidade e da dinâmica respiratória emergente. . . . . 98
- Figura 28 – Não-linearidade crítica do estado estacionário,  $\chi_c$ , calculada para diferentes tamanhos de cadeias  $N$  e para algumas moedas quânticas representativas. A análise  $\chi_c \times N$  confirma a dependência da não-linearidade crítica com o tamanho da cadeia e revela uma dependência de escala  $\chi_c \propto 1/N$ , independentemente da moeda quântica utilizada. O que sugere, para uma cadeia absurdamente grande,  $N \rightarrow \infty$ , operações sem erros para preservar o regime estável. . . . . 99
- Figura 29 – Mapa da coerência quântica norma-1 média,  $\overline{C_{l1}}(t_\infty)$ , no plano  $\chi \times \theta$ . . . . . 102
- Figura 30 – Perfil de oscilações do tipo Bloch em uma caminhada quântica em tempo discreto para alguns valores de parâmetros de força  $m$ . Em (a)  $m = 100$ ; (b)  $m = 50$ ; e (c)  $m = 1$  onde a distribuição de probabilidade do caminhante quântico não apresenta oscilações. . . . . 109

Figura 31 – Perfil da densidade de probabilidade de um *qubit* no plano espaço-tempo para três configurações de campo elétrico. Para todos os casos utilizou-se  $m = 100$ . Em (a), sob a presença de um campo elétrico uniforme  $G$  com ( $\Delta\Phi = 0$ ), o caminhante quântico apresenta oscilações bem definidas do tipo Bloch. (b) Quando sujeito a superposição das componentes de fase constante e harmônica com frequência  $\omega$  muito próxima da frequência de Bloch ( $\omega_B$ ), temos o surgimento de super oscilações com grandes amplitudes. Em (c), quando ajustamos os parâmetros para a condição de ressonância  $\omega = \omega_B$ , o pacote de ondas do caminhante quântico exibe um movimento com uma direção preferencial. . . . . 112

Figura 32 – O painel superior exibe a evolução temporal do centróide para três configurações de campo elétrico artificial,  $G(t)$ . Em (a),  $G(t)$  é composto somente pela fase independente do tempo  $\Phi_0 = 2\pi/m$ , com  $m = 100$  resultando em oscilações de Bloch; Quando ligamos a componente harmônica, em (b), com uma frequência efetiva ( $\omega_{SOB}$ ) próxima a frequência de Bloch, o *qubit* realiza super oscilações de Bloch; Quando a diferença entre as frequências é grande ( $\delta\omega = 0, 1$ ), o pacote de ondas volta realizar oscilações de Bloch. No painel inferior (d-f) mostramos o espectro de frequência de cada caso (a-c), respectivamente. O caso (b-e) chama atenção devido ao surgimento de três picos de frequências. . . . . 113

Figura 33 – O quadro (a) mostra uma análise quantitativa da frequência espectral predominante ( $\Omega$ ) em função da diferença entre a frequência da componente harmônica ( $\omega$ ) e a frequência de Bloch ( $\omega_B$ ) para dois valores de campos elétricos uniformes artificiais  $\Phi_0 = 2\pi/m$ , com  $m = 50$  e  $100$ . Para isso, consideramos que a atuante no sistema é a Hadamard. Para pequenas diferenças de frequências,  $\Omega$  apresenta um comportamento linear onde o comportamento predominante são as super oscilações de Bloch. Acima de um valor característico  $\Delta\omega_c$  a frequência de Bloch se mostra predominante sobre a dinâmica. Em (b) mostramos que esse valor  $\Delta\omega_c$  apresenta um decaimento com o valor de  $m$  e independe da moeda quântica que esteja atuando sobre o sistema. . . . . 115

- Figura 34 – Evolução temporal da posição média do caminhante quântico para três configurações de moedas quânticas,  $\theta = \pi/6, \pi/4$  e  $\pi/3$ . Os resultados mostram que a posição média do caminhante quântico realiza um movimento unidirecional onde a direção é controlada através da fase  $\phi$ . . . . . 116
- Figura 35 – Dependência de fase da velocidade do centróide do caminhante quântico para três moedas quânticas distintas:  $\theta = \pi/3, \pi/4$  e  $\pi/6$ . Ambos os quadros (a)  $\Delta\Phi = 0$  e (b)  $\Delta\Phi = 3$  mostram tendências oscilatórias semelhantes. Com amplitudes globais dependente da razão  $\Delta\Phi/\Phi_0$ . Tais dependências corroboram o resultado teórico em tempo contínuo dado pela equação 85, representada pela linha contínua no caso onde  $\theta = \pi/4$ . . . . . 117
- Figura 36 – Velocidade média em relação a razão  $\delta\Phi = \Delta\Phi/\Phi_0$  para uma caminhada Hadamard ( $\theta = \pi/4$ ). A curva contínua (em vermelho) representa  $J_1(\delta\Phi) \cos \theta/2$ . Os quadros internos mostram os dois primeiros pontos onde a velocidade é nula,  $\delta\Phi = 3,83171$  e  $\delta\Phi = 7,01559$ . . . . . 118
- Figura 37 – Mapa da velocidade média  $\bar{v}$  no plano fase da componente harmônica - moeda quântica ( $\phi$  versus  $\theta$ ). Consideramos o caso onde as frequências estão em ressonância ( $\omega = \omega_B$ ),  $m = 100$  e  $\Delta\Phi = \Phi_0 = 2\pi/m$ . Calculamos a velocidade média no transporte unidirecional do centróide. Observe que a velocidade do centróide pode ser controlada ajustando a fase do campo elétrico AC ou o parâmetro  $\theta$  da moeda quântica. . . . . 119
- Figura 38 – Perfil da evolução da densidade de probabilidade,  $P_n$ , para uma caminhada quântica Hadarmad, com estado inicial dado pela equação (92), em uma cadeia com  $N = 100$  sítios e uma largura de desordem  $W = 0,1$ . Deixamos o sistema evoluir até  $t = 10N$ . No entanto, realizamos um corte temporal, [6000, 8000], para mostrar com clareza o instante do surgimento de uma onda traiçoeira. Em (a), temos esse perfil no plano espaço-temporal, (b) e (c) exibem séries temporais e um perfil espacial extraídos de (a), respectivamente. O evento traiçoeiro é visto em  $t = 7174$ . . . . . 126

- Figura 39 – Função densidade de probabilidade (FDP), normalizada, para duas larguras de desordem representativas. Em (a)  $W = 0,01$ , uma desordem fraca e (b)  $W = 0,3$ , uma largura intermediária. A distinção é clara, enquanto a figura (b) apresenta uma assinatura de calda longa, em (a) vemos uma FDP que segue uma estatística gaussiana. A linha em vermelho representa o limite para classificação de tais eventos. . . . . 127
- Figura 40 – Número de eventos indicando a existência de ondas traiçoeiras em função do grau de desordem,  $W$ , do sistema para  $N = 50, 100, 200, 400$  e  $800$  sítios (no sentido da curva em preto para curva em laranja, respectivamente). O quadro interno mostra a escala do grau de desordem que maximiza as chances de medirmos uma onda traiçoeira,  $W_{\max}$  com  $N$ . . . . . 128
- Figura 41 – Largura da desordem,  $W_c$ , acima da qual as ondas traiçoeiras têm uma probabilidade de ocorrência finita para níveis de *anormalidade* diferentes:  $2,0\bar{P}_{1/3}, 2,5\bar{P}_{1/3}$  e  $3,0\bar{P}_{1/3}$ . O decaimento  $W_c \propto N^{-1/2}$  revela que em  $W_c$  o comprimento de localização  $\lambda \propto 1/W^2$  é da ordem do tamanho da cadeia. 129
- Figura 42 – Padrões do perfil da densidade de probabilidade,  $P_n$  do caminhante quântico no espaço-tempo para larguras de desordem: (a)  $W = 0,05$ , (b)  $W = 0,25$  e (c)  $W = 0,5$ , (realizações únicas). Pontos com amarelo mais intenso são eventos de ondas gigantes que cumprem a condição da equação (91) para cada amostra. Em (a), com um grau de desordem fraco, notamos que as condições de sincronização para formar uma onda traiçoeira são atendidas mais facilmente. . . . . 130
- Figura 43 – Funções densidade de probabilidade de valores extremos em escala semilog para  $N = 100$  para três larguras de desordem distintas: (a)  $W = 0,05$  (desordem fraca), (b)  $W = 0,1$  (intermediária) e (c)  $W = 0,5$  (forte). Em cada instante de tempo a amplitude de probabilidade máxima,  $P_{\max}$  é coletada. A curva sólida em vermelho é um ajuste do tipo Gumbel, dado pela equação (93). . . . . 131
- Figura 44 – Número médio de eventos normalizado no plano formado pela variação da largura da desordem e a quiralidade da moeda quântica ( $W \times \theta$ ). . . . 132

Figura 45 – Figura selecionada pelos editores para fazer parte do caleidoscópio da revista *Physical Review A* do mês de fevereiro. O trabalho faz parte do corpo desta tese como capítulo 4. Além disso, encontra-se no anexo B. . 136

## Lista de abreviaturas e siglas

IBM	<i>International Business Machines Corporations.</i>
Qubit	<i>Quantum bit.</i>
CQs	Caminhadas quânticas.
CQTCs	Caminhadas quânticas em tempo contínuo.
CQTDs	Caminhadas quânticas em tempo discreto.
RMN	Ressonância magnética nuclear.
MAO	Momento angular orbital
DFP	Divisor de feixe de polarização
bit	<i>Binary bit.</i>
RPI	Razão da participação inversa.
PR	Probabilidade de Retorno.
CBEs	Condensados de Bose-Einstein
OB	Oscilações de Bloch
SOB	Super oscilações de Bloch

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	25
1.1	<i>Sobre a tese</i>	33
<b>2</b>	<b>Fundamentação Teórica</b>	36
2.1	<i>O caminhante quântico (qubit)</i>	36
2.2	<i>Caminhadas quânticas no espaço das posições</i>	38
2.3	<i>Exemplificando a caminhada quântica discreta</i>	40
2.4	<i>Emaranhamento quântico</i>	43
2.5	<i>Coerência quântica</i>	48
<b>3</b>	<b>Caminhadas quânticas aperiódicas: Propriedades de localização, energia espectral e emaranhamento</b>	51
3.1	<i>Modelo e formalismo</i>	54
3.2	<i>Resultados e discussões</i>	56
3.2.1	Propriedades de transporte e energia espectral	56
3.2.2	Propriedades de Emaranhamento	68
3.2.3	Limite assintótico	72
3.3	<i>Considerações finais</i>	74
<b>4</b>	<b>Caminhadas quânticas auto-armadilhadas</b>	76
4.1	<i>Caminhada Hadamard não-linear</i>	79
4.2	<i>Modelo proposto</i>	82
4.3	<i>Resultados e discussões</i>	83
4.4	<i>Considerações finais</i>	91
<b>5</b>	<b>Mapeando tolerância a ruídos em caminhadas quânticas discretas via coerência quântica</b>	92
5.1	<i>Modelo proposto</i>	94
5.2	<i>Resultados e discussões</i>	95
5.3	<i>Considerações finais</i>	103

<b>6</b>	<b>Super oscilações de Bloch e movimento unidirecional dire-</b>	
	<b>cionados por superposição de fases</b> . . . . .	104
6.1	<i>Oscilações de Bloch</i> . . . . .	106
6.1.1	Oscilações de Bloch em CQTDs . . . . .	107
6.2	<i>Modelo proposto</i> . . . . .	109
6.3	<i>Resultados e discussões</i> . . . . .	111
6.4	<i>Considerações finais</i> . . . . .	120
<b>7</b>	<b>Ondas traiçoeiras em caminhadas quânticas discretas</b> . . .	122
7.1	<i>Modelo proposto</i> . . . . .	123
7.2	<i>Resultados e discussões</i> . . . . .	125
7.3	<i>Considerações finais</i> . . . . .	132
<b>8</b>	<b>Considerações finais gerais</b> . . . . .	134
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	142
	<b>APÊNDICES</b>	<b>159</b>
	<b>A – Relação entre CQTDs e as equações de Klein-Gordon e de</b>	
	<b>Dirac</b> . . . . .	160
A.1	<i>CQTDs desacopladas na forma de Klein-Gordon</i> . . . . .	161
A.2	<i>CQTDs acopladas na forma de Dirac</i> . . . . .	163
	<b>ANEXOS</b>	<b>165</b>
	<b>A – Aperiodic space-inhomogeneous quantum walks: Localiza-</b>	
	<b>tion properties, energy spectra, and enhancement of entan-</b>	
	<b>glement</b> . . . . .	166
	<b>B – Self-trapped quantum walks</b> . . . . .	180
	<b>C – Probing coherence and noise tolerance in discrete-time</b>	
	<b>quantum walks: Unveiling self-focusing and breathing dy-</b>	
	<b>namics</b> . . . . .	188



<b>D – Bloch-like superoscillations and unidirectional motion of phase-driven quantum walkers . . . . .</b>	<b>196</b>
<b>E – Rogue waves in discrete-time quantum walks . . . . .</b>	<b>204</b>

## Introdução

Recentes avanços nas áreas da computação e informação quântica têm chamado a atenção para a importância de explorar as propriedades fundamentais da mecânica quântica, tais como o princípio da superposição e emaranhamento (1), no intuito de desenvolver novos hardwares de computadores e métodos para acelerar algoritmos para o processamento de tarefas complexas, de modo que, venham a criar pontes mais amplas entre a ciência da computação e os mais diversos campos científicos (2, 3, 4). O conceito de computadores quânticos, isto é, a possibilidade de processar informação utilizando diretamente as propriedades e fenomenologias da mecânica quântica, tem sido um dos campos de pesquisa mais explorados nas últimas décadas (5, 6, 7).

Embora seja um campo em rápido desenvolvimento, proveniente da acelerada expansão tecnológica, a computação quântica ainda está longe de ter uma implementação efetiva que sirva para as mais diversas atividades que estamos acostumados a realizar no dia-dia. E, talvez, não seja necessário o uso de tais propriedades para estes fins. O grande desafio está em conseguir preservar as propriedades quânticas desses sistemas por longos períodos de tempo. Sistemas reais estão em constante interação com o ambiente, portanto, sujeitos a eventos que podem levar a efeitos de decoerência (8). Destarte, um computador quântico universal ainda é uma proposta bastante idealizada. Para termos uma ideia de como anda o desenvolvimento dos computadores quânticos na prática, em 2021, a IBM (do inglês, “*International Business Machines Corporation*”) revelou seu mais novo processador quântico, o IBM Eagle, que opera com até 127 *qubits* (do inglês, *quantum-bits*) e que possuem propostas e projeções ambiciosas, como por exemplo, o crescimento exponencial na capacidade de seus processadores quânticos. A projeção é que, até 2023, tenhamos computadores quânticos com *chip* de processamento com até 1.121 *qubits*. Em 2021, e mais

---

próximo de nós, na cidade de Salvador-BA, o SENAI CIMATEC e a Atos lançaram o *Latin America Quantum Computer Center* (LAQQC), primeiro centro de computação quântica no Brasil que será voltado ao setor empresarial. A proposta é disseminar a tecnologia quântica no país, fomentar a capacitação profissional e impulsionar o desenvolvimento de pesquisas científicas nas mais diversas áreas do conhecimento.

Enquanto a computação quântica se encontra na sua fase embrionária, caminhando lentamente, o processamento de informação quântica tem buscado tarefas com resultados a curto prazo, como o desenvolvimento de outras tecnologias quânticas. Nesse contexto, Caminhadas Quânticas (CQs) têm se apresentado como uma ferramenta matemática poderosa que pode ser utilizada para uma variedade de problemas e que recentemente tem sido apontada como um modelo de computação quântica universal (9, 10, 11). Essas CQs podem ser classificadas em dois grupos. Nas chamadas caminhadas quânticas em tempo contínuo (CQTCs), a dinâmica do sistema é governada por um operador hamiltoniano (12) e evolui em tempo contínuo. Enquanto que para caminhadas quânticas em tempo discreto (CQTDs), a evolução é regida pela ação recursiva de operadores quânticos sobre os graus de liberdade internos (13), por exemplo: *spin* ou polarização. Além disso, autores seguem as CQTDs em duas abordagens completamente equivalentes. A primeira consiste na realização de uma transformação unitária baseada em operadores moedas quânticas (14, 15). Enquanto que a segunda, baseia-se em multiportas ópticas e é chamada de caminhada quântica de espalhamento (16, 17). Nesta tese, nos basearemos no protocolo das caminhadas quânticas em tempo discreto mediante aplicação dos operadores moedas quânticas.

A ideia por trás dos algoritmos das CQTDs é preparar um ou mais *qubits* em um determinado estado inicial e, em seguida, aplicar operadores de evolução unitária sem realizar medições até o fim do processo. Uma vez que, neste cenário, realizar medições intermediárias levaria ao colapso da função de onda do caminhante quântico. As CQs têm sido extensivamente estudadas para possíveis aplicações nas mais diversas áreas da ciência devido à sua versatilidade. Entre elas, estão a modelagem de fenômenos físicos, como a localização de Anderson (18, 19), transporte em sistemas biológicos (20) e mapeamento de fases topológicas (21). Uma característica fundamental deste sistema é que, geralmente, são mais rápidos do que sua contraparte clássica devido à superposição coerente e interferência quântica (1, 10). Essa característica a torna uma matéria-prima atraente para a construção

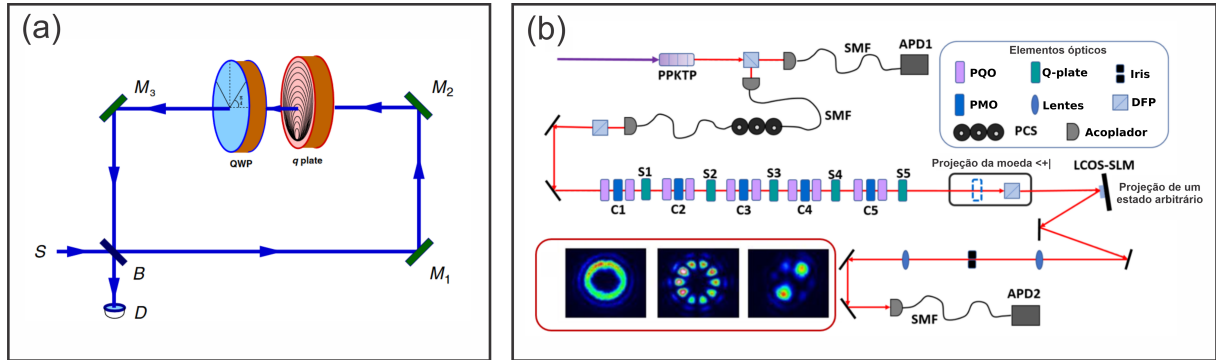
de algoritmos quânticos (9), desenvolvimento de protocolos de criptografia quântica (22, 23), bem como redes quânticas (24), simuladores de sistemas físicos complexos (25) e modelagem do transporte quântico (26).

Com o amadurecimento da pesquisa nesta área e com uma maior participação do campo experimental, CQTDs têm sido realizadas em uma variedade de plataformas físicas como átomos e íons aprisionados (27, 28, 29), níveis de energia em esquemas de ressonância magnética nuclear (RMN) (30, 31), estruturas de guias de ondas (32) e matrizes divisoras de feixe (33, 34, 35, 36, 37), matrizes de pontos quânticos (38), entre outros. Em 2003, Peter L. Knight *et al.* (35), apresentaram uma proposta de implementação experimental puramente clássica em que as caminhadas quânticas unidimensionais poderiam ser simuladas através da interferência de campos eletromagnéticos em uma cavidade Fabry-Perot. Nesse estudo, a caminhada quântica global é formada, essencialmente, por meio de uma composição entre outras duas caminhadas independentes associadas aos dois lados da moeda, onde são acopladas somente no estado inicial. Essa proposta está em concordância com o experimento outrora apresentado por Bouwmeester *et al.* em (33). Mais recente, Schreiber *et al.* (39), propuseram um arranjo experimental utilizando elementos ópticos passivos manipulando a polarização do fóton como o grau de liberdade extra do sistema.

Ainda nesse contexto, pode-se construir uma CQTD unidimensional através de uma rede de interferômetros Mach-Zehnder (40). Nesse caso, há fótons que passam por uma "pirâmide" de divisores de feixes estruturados em uma rede de interferômetros. Cada divisor de feixe é responsável por implementar simultaneamente os efeitos dos operadores moedas quânticas, que determinam a direção na qual o *qubit*-óptico se moverá. Dessa forma, todas as saídas dos divisores de feixes correspondem a pontos na rede espaço-tempo do caminhante quântico. Em (41), Crespi *et al.* construíram um aparato experimental utilizando fotônica integrada, onde uma CQTD é construída em um arranjo integrado de interferômetros fabricados em vidro por gravação a laser de femtossegundos.

Todos os aparatos experimentais apresentados até aqui, que utilizam óptica linear, apresentam uma limitação referente a quantidade de componentes ópticos utilizados para a realização das caminhadas quânticas. Isto é, o número de elementos ópticos cresce rapidamente a medida em que aumentamos o número de passos e, além disso, os resultados não têm se mostrados tão perfeitos. Por isso, uma das grandes limitações é não conseguirem

Figura 1 – Exemplos de aparatos experimentais utilizados por alguns autores. Em (a) temos a representação da configuração óptica de uma caminhada quântica, proposta por Goyal *et al.* (44), onde um feixe de laser passa por uma *q-plate* seguido por uma placa de quarto de onda. O *loop* corresponde a uma única iteração de um processo da CQ. Já na referência (45), em (b), temos o aparelho experimental para realizar caminhada quântica de cinco etapas também utilizando *q-plates*. O quadro interno exibe imagens dos modos com momento angular orbital (MAO) dos estados de saída após passarem pelo divisor de feixe de polarização (DFP).



Fonte: Modificado pelo autor, 2022.

realizar uma caminhada com um número grande de passos. Nesse cenário, um esquema muito interessante que se apresenta como uma proposta viável para suprir essa limitação é através do uso de uma *q-plate* (42, 43, 44, 45, 46, 47, 48). Nessa proposta, a CQTD ocorre no espaço do momento angular orbital de um feixe de laser. O esquema faz uso de um interferômetro de anel contendo uma placa de um quarto de onda (PQO) e uma *q-plate* [ver figura 1 (a)]. A *q-plate* é um dispositivo óptico que adiciona momento angular orbital em  $\pm 2\hbar$  dependendo do estado de polarização do feixe, ou seja, esse instrumento vai atuar como um operador deslocamento condicional, enquanto que, a placa de um quarto de onda desempenha o papel de um operador moeda quântica. Diferentemente do apresentado em (35), aqui não há a necessidade de um modulador eletro-óptico.

Em (45), Giordani *et al.* implementaram 5 passos de tempo de uma CQTD utilizando os estados de momento angular. Fazendo uma adaptação no modelo proposto por Goyal *et al.* (44), utilizaram placas *q-plate* em série para realizar a caminhada quântica, como exposto na figura 1 (b). O quadro interno exibe imagens dos modos com momento angular orbital (MAO) dos estados de saída após passarem pelo divisor de feixe de polarização (DFP) obtidas com luz coerente. Além disso, esta abordagem oferece a possibilidade de cobrir espaços de Hilbert de grandes dimensões. Um ponto importante desse esquema é que ele permite o total controle das operações que representam as moedas, fundamental para a implementação das caminhadas quânticas discretas no tempo. Embora estes experimentos

pavimentem um novo caminho para aplicações diretas e reais desses protocolos quânticos, é preciso buscar implementações mais sofisticadas para que isso venha a acontecer, como por exemplo, estudos que levem em consideração ruídos, inhomogeneidade espaciais, flutuações, interações não-lineares e efeitos do ambiente externo.

Poderíamos nos questionar o que aconteceria com tais protocolos quânticos se algum desses operadores (moeda/deslocamento) mudassem aleatoriamente com o espaço e/ou no tempo? Isso parece plausível visto a grande sensibilidade do sistema e a complexidade do ambiente em que eles estão inseridos. Uma possível resposta nos leva a inferir que várias características dessa caminhada quântica se perderiam ao longo do processo. Talvez devido a sensibilidade que os *qubits* apresentam em determinadas situações. Uma dessas características perdidas poderia ser o comportamento balístico da função de onda do caminhante quântico. Diversos autores têm abordado modelos de CQTDs com desordem associada a tais operadores e os resultados mostram diversos regimes e particularidades muito importantes (49, 50, 18).

Em linhas gerais, a inserção de desordem em CQTDs pode se dar de três formas fundamentais, as quais se classificam de acordo com relação que o operador escolhido possui com o espaço-tempo. A fim de facilitar o entendimento, vamos adotar que o operador no qual a desordem será aplicada é o operador moeda quântica. Se alterarmos a moeda, entre duas ou  $N$  moedas, a cada passo de tempo e as deixarmos espacialmente fixadas, teremos que o sistema possui uma desordem do tipo *dinâmica*. Neste contexto, a análise da evolução temporal de um caminhante quântico mostra que o desvio padrão da distribuição adquire um comportamento difusivo, semelhantemente como as caminhadas aleatórias clássicas (39). Já para moedas quânticas com dependência espacial e que são mantidas fixas no tempo, denominamos uma desordem *estática*. Nessa conjuntura, encontramos que a função de onda do caminhante quântico apresenta um perfil exponencialmente localizado, em total concordância com a fenomenologia presente na localização de Anderson (18, 39, 51). Localização de Anderson tem sido extensivamente estudada em CQTCs (52, 53, 54). Por fim, a desordem também pode se caracterizar com uma dependência espacial e temporal simultaneamente, conhecida como desordem *flutuante* (55).

Ainda pertencente a esse cenário, existe uma classe de distribuição que não é periódica (tipo Bloch), e também não é desordenada aleatoriamente (tipo Anderson),

mas que revela uma diversidade de comportamentos dinâmicos. Estas estruturas são conhecidas como aperiódicas (56, 57, 58, 59, 60). Nos restringindo as caminhadas quânticas discretas, modelos com operadores organizados em sequências aperiódicas têm sido bastante explorados. Estudos recentes mostraram que CQTDs com moedas quânticas que são aplicadas seguindo as distribuições de Fibonacci (61, 57) e Thue-Morse (57) apresentam um pacote de ondas com uma dinâmica subdifusiva, independentemente da posição inicial do caminhante quântico e, até certo ponto, do tamanho da cadeia. Para distribuições do tipo Fibonacci, este comportamento foi conectado com um decaimento do tipo lei de potência da função de correlação de tempo do mapa de rastreamento caótico (59). Usando uma dependência de tempo para o operador de moeda, diferentes tipos de comportamentos assintóticos (como subdifusivo e localizado) para a propagação da função de onda foram relatados (62). CQTDs com aperiodicidade no operador deslocamento condicional também foi estudada (58). No que tange as propriedades de transporte, os autores ressaltam que o protocolo com deslocamento condicional aperiódico fornece um mecanismo para o surgimento de uma dinâmica superdifusiva.

Entender o comportamento de caminhantes quânticos sob ação de determinados ingredientes, como desordem e ruídos, sejam eles de natureza aleatória ou determinística, é de fundamental importância para o desenvolvimento de tecnologias quânticas mais eficazes e seguras, evitando assim algumas situações indesejáveis, como o surgimento de erros quânticos e amplificações de sinais. Além de imperfeições e ruídos, efeitos não-lineares também podem trazer problemas. Nesse cenário, sistemas com não-linearidade têm sido fortemente discutida nas últimas décadas nos mais diferentes ramos da física como mecânica quântica (63), física do estado sólido (64) e óptica (65, 66). Tão presente em experimentos de CQTDs, a óptica não-linear trata de efeitos que acontecem quando propriedades ópticas de um determinado material são alteradas de acordo com a intensidade ou outro efeito da luz propagando nesse material.

Assim, poderíamos nos perguntar: o que aconteceria com a dinâmica de um *qubit* quando submetido a interações não-lineares? O que mudaria em sua propagação se a sua função de onda apresentasse uma dependência com a densidade de probabilidade local? No contexto de CQTDs, diversos autores propuseram estudos onde leva-se em consideração efeitos não-lineares (48, 67, 68). Em (68), Navarrete *et al.* apresentam um modelo não-linear do tabuleiro de Galton, que em outras palavras, como o próprio autor diz, acaba sendo

---

uma realização de uma caminhada quântica não-linear. Com isso, mostraram o surgimento de uma rica variedades de comportamentos que dependem da intensidade da interação não-linear, como o surgimento de estruturas do tipo sólitons e regimes onde a função do *qubit* possui uma dinâmica caótica. Comportamentos caóticos é de grande interesse para aplicações em criptografia quântica (23) e segurança de ponta a ponta em redes de internet das coisas (69).

Uma outra fenomenologia que surge da interação ruído e não-linearidade é a conhecida instabilidade modulacional. Qualquer tecnologia quântica prática, como criptografia de chaves quânticas ou até a própria computação quântica, deve funcionar de forma robusta na presença de ruído. Uma vez que, tratando de sistemas quânticos, a realização de uma medida tem um preço: qualquer medida que adquira informações sobre o sistema deve perturbá-lo. Na literatura esse processo é chamado de ação de retorno ou *backaction*, o ruído fundamental induzido em um sistema por meio de qualquer medição. Uma das consequências dessa comunicação (ruído/não-linearidade) é que a interação do ruído com a função de onda acaba degradando a performance do sistema (70). Em linhas gerais, a instabilidade modulacional é caracterizada pela amplificação de um ruído quando inserido no sistema não-linear. Dentro desse contexto, a instabilidade modulacional é um mecanismo que tem se mostrado diretamente ligada ao surgimento de uma classe de eventos raros e extremos que existem na natureza. São as chamadas ondas traiçoeiras ou ondas gigantes (71, 72, 73, 74). A dificuldade de compreender a origem física desses eventos tornou-se tão parte do folclore, histórias de marinheiros, quanto da ciência (75). Tentar entender o mecanismo por trás do surgimento de tais eventos pode nos ajudar a evitar que desastres ocorram. Embora na oceanografia esta área já seja bem consolidada, no mundo quântico há ainda muito trabalho a ser feito.

Ainda que o interesse em torno da ocorrência de ondas gigantes em modelos lineares tenha crescido consideravelmente nos últimos anos (76, 77, 78, 79), a mecânica quântica ainda não tem recebido tanta atenção. Assim, podemos nos questionar: Podemos utilizar os protocolos das CQTDs para entender melhor o surgimento desses eventos em mecânica quântica? Existem ondas traiçoeiras em caminhadas quânticas discretas no tempo? Uma importante questão ainda em aberto é sobre o papel de ruídos nesse processo. Pode-se perguntar se as ondas traiçoeiras podem ser descritas por um processo totalmente determinístico, com o ruído atuando como força geradora aumentando ou diminuindo a



---

probabilidade de observar essas ondas gigantes. Além disso, torna-se essencial determinar quais são os ingredientes mínimos necessários para um aumento na probabilidade de ocorrência de ondas traiçoeiras.

Além de entender a dinâmica de *qubits* na presença desses ingredientes: desordem, ruídos e não-linearidade, uma outra questão de interesse no desenvolvimento de novas tecnologias quânticas é a forma de como ter controle sobre esta dinâmica diante de tantas situações. Em física do estado sólido, uma dessas formas de controle se dá através de campos elétricos (80, 81, 82, 83). Nesse contexto, quando temos uma partícula sob ação de um campo elétrico uniforme e em um potencial periódico a partícula quântica realiza oscilações coerentes que possuem uma frequência característica proporcional à intensidade desse campo elétrico. Esta fenomenologia é conhecida como oscilações de Bloch. Quando colocamos dois campos elétricos em superposição (um uniforme e outro com dependência temporal) surge um comportamento muito interessante que tem chamado atenção da comunidade científica. Estudos relatam que é possível controlar a direção de propagação da função de onda eletrônica através da fase do campo dependente do tempo (82, 80). Passos e Dias exploraram as super-oscilações de Bloch quando submetidas a contribuições não-lineares (83). Neste trabalho, relataram que as oscilações deixam de existir no regime de fortes interações não-lineares.

Nesse contexto, estudos sobre caminhadas quânticas discretas no tempo com operadores que emulam efeitos de campo elétrico também vem sendo realizados. Genske *et al.*, (84), foram os primeiros a utilizarem a denominação *caminhadas quânticas elétricas* para esse tipo de protocolo. Usando átomos de Césio (Cs) em redes ópticas dependentes do *spin* e medidas por imagens de fluorescência, demonstraram que uma partícula quântica pode exibir características intimamente relacionadas às oscilações de Bloch. Nesse cenário, o campo elétrico foi simulado através de uma fase unitária inserida no operador de evolução das CQTDs. Poderíamos nos perguntar quais os efeitos de simularmos uma superposição de fases no ambiente das caminhadas quânticas? Conseguiríamos controlar, pelo menos, a direção de propagação do *qubit*?

Todas essas questões, e situações, apresentadas nesta breve introdução, são complementares e misturam-se ao apontar as discussões para o tema central desta Tese.

## 1.1 SOBRE A TESE

Diante do exposto, os trabalhos apresentados nesta tese buscam contribuir para um entendimento mais profundo sobre as propriedades de transporte, emaranhamento quântico e coerência quântica de um *qubit*, que evolui de acordo com o protocolo das CQTDs, em diversos cenários. Especificamente, (i) protocolos com moedas quânticas distribuídas de forma aperiódica; (ii) simulação de efeitos não-lineares; (iii) tolerância a ruídos; (iv) ação de fases externas que simulam campos elétricos; (v) eventos extremos em cadeias desordenadas. Encarar estes problemas é fundamental para que, futuramente, venhamos a ter aplicações de protocolos quânticos mais robustos. Para alcançar esses objetivos, a tese estruturou-se em oito capítulos. Descreveremos brevemente o que está por vir em cada um.

No capítulo dois, apresentaremos o formalismo matemático por trás das caminhadas quânticas discretas no tempo e descreveremos todo o protocolo necessário para realizar a evolução temporal de um *qubit* e suas principais características. Abordaremos o formalismo necessário para quantificarmos o emaranhamento quântico entre os graus de liberdade interno e externo de uma partícula quântica. Por fim, trataremos sobre uma das principais características da mecânica quântica, a coerência quântica.

Adiante, no capítulo três, apresentaremos estudos sobre as propriedades de localização, espectros de energia e emaranhamento das caminhadas quânticas não-homogêneas com aperiodicidade espacial. Mostraremos que controlando o grau de aperiodicidade na distribuição das moedas quânticas é possível encontrar o pacote de onda do *qubit* em dois regimes: deslocalizado e localizado. Além disso, mapeamos regiões onde é possível termos um grau de emaranhamento máximo entre posição-spin do caminhante quântico. O capítulo quatro será baseado em caminhadas quânticas discretas não-lineares, onde consideramos que o protocolo de evolução do caminhante quântico possui uma dependência com a densidade de probabilidade. Aqui, mapeamos as propriedades dinâmicas levando em consideração a aplicação de outros operadores moedas quânticas, além da Hadamard. Mostramos a emergência de um fenômeno muito característico quando estamos trabalhando em meios não-lineares, conhecido como auto-focalização.

No capítulo cinco, implementamos um modelo capaz de avaliar a sensibilidade a ruídos de curta duração em caminhadas quânticas não-lineares. Com isso, vimos um conjunto de parâmetros operacionais que favorecem uma operação estável. Em seguida, no capítulo seis, trataremos sobre a manipulação de um *qubit* através de uma superposição de fases dependente e independente do tempo, onde simulamos efeitos de campo elétrico externo. Com o intuito de apresentar respostas para os questionamentos apontados na introdução. Encontramos uma dinâmica bastante rica dependente da diferença entre as frequências típica de Bloch e da fase harmônica.

No capítulo sete, trataremos para a mecânica quântica uma fenomenologia que tem chamado bastante a atenção da comunidade científica, sobretudo sobre suas origens físicas e probabilidades de ocorrência, a fim de evitar grandes desastres. Aqui, propomos um modelo capaz de mapearmos ondas traiçoeiras usando os protocolos das CQTDs. Dentro dos resultados, revelamos suas estatísticas de cauda longa, a cara do perfil da distribuição de probabilidade e a dependência com o grau de aleatoriedade do sistema. Por fim, no capítulo oito, esboçamos um panorama com os principais resultados obtidos, as considerações finais e o que esperamos para trabalhos futuros.

Os resultados desta tese foram submetidos para publicações em revistas internacionais indexadas. Segue a seguinte lista de publicações referentes aos estudos desenvolvidos durante o período de doutoramento.

- **A. R. C. Buarque** e W. S. Dias; *Aperiodic space-inhomogeneous quantum walks: Localization properties, energy spectra, and enhancement of entanglement*. **Physical Review E**, 100, 032106, 2019.
- Supplementary Material to "*Aperiodic space-inhomogeneous quantum walks: localization properties, energy spectra and enhancement of entanglement*". **Physical Review E**, 2019.
- **A. R. C. Buarque** e W. S. Dias; *Self-trapped quantum walks*. **Physical Review A**, 101, 023802, 2020.
- **A. R. C. Buarque**, M. L. Lyra e W. S. Dias; *Bloch-like superoscillations and unidirectional motion of phase-driven quantum walkers*. **Physical Review A**, 103, 012222, 2021.

- **A. R. C. Buarque** e W. S. Dias; *Probing coherence and noise tolerance in discrete-time quantum walks: Unveiling self-focusing and breathing dynamics*. **Physical Review A**, 103, 042213, 2021.
- **A. R. C. Buarque**, W. S. Dias, F. A. B. F. de Moura, M. L. Lyra e G. M. A. Almeida. *Rogue waves in discrete-time quantum walks*. **Physical Review A**, 106, 012414, 2022.

Outras participações:

- P. R. N. Falcão; **A. R. C. Buarque**; W. S. Dias ; G. M. A. Almeida ; M. L. Lyra. *Universal dynamical scaling laws in three-state quantum walks*. **Physical Review E**, 104, 054106, 2021.
- Graça R. M. de Almeida, N. Amaral, **A. R. C. Buarque** e W. S. Dias. *Noise correlations behind superdiffusive quantum walks*. Em preparação.
- P. R. N. Falcão; **A. R. C. Buarque**; W. S. Dias ; G. M. A. Almeida ; M. L. Lyra. *Nonlinear three-state quantum walk*. **Physical Review A**, 106, 042202, 2022.
- **A. R. C. Buarque**, W. S. Dias, G. M. A. Almeida, M. L. Lyra e F. A. B. F. de Moura. *Emergent rogue waves in quantum chains with correlated diagonal disorder*. Submetido. arXiv:2207.13145.

## Fundamentação Teórica

Adiante, apresentaremos a estrutura matemática e as propriedades por trás do supracitado protocolo das caminhadas quânticas em tempo discreto em uma rede unidimensional. Para uma melhor estruturação das ideias, fragmentamos este capítulo em quatro seções, de modo que podemos elencá-las em: (i) quem é o caminhante quântico; (ii) qual é o formalismo matemático aplicado as caminhadas quânticas discretas; (iii) exemplos de aplicação do protocolo de evolução e, por fim, (iv) as propriedades do emaranhamento quântico que surgem devido à essência das CQTDs.

### 2.1 O CAMINHANTE QUÂNTICO (QUBIT)

Em computação clássica, a menor porção de informação disponível é definida como *bit* (contração do inglês, *binary bit*), que pode assumir exclusivamente um de dois valores:  $\{0 \text{ e } 1\}$ . A grande vantagem da computação quântica está intrinsecamente ligada às propriedades não-intuitivas da mecânica quântica. Seu primeiro postulado nos permite definir a unidade básica para toda a teoria da computação e informação quântica.

A unidade básica de informação quântica é o bit-quântico, conhecido também como *qubit* (do inglês, *quantum bit*). A essência de um *qubit* o diferencia de um bit pelo fato de podermos escrever seu vetor de estado  $|\psi\rangle$  como uma combinação linear, ou superposição,

entre os estados de sua base. Ou seja, além dos dois possíveis estados  $\{|0\rangle$  e  $|1\rangle\}$ <sup>1</sup>, o *qubit* pode estar em um estado de superposição definido por:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad (1)$$

onde  $a = \langle 0|\psi\rangle$  e  $b = \langle 1|\psi\rangle$  são números pertencentes ao conjunto dos complexos ( $\in \mathbb{C}$ ) e representam as amplitudes de probabilidade de obtermos os estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , respectivamente. Com isso, se não houver interação com o ambiente, devem, naturalmente, satisfazer a condição de normalização  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Podemos ainda escrever este estado de forma mais elegante se considerarmos  $a$  e  $b$  em sua forma polar, ou seja,  $a = a_1 e^{ir_1}$  e  $b = b_1 e^{ir_2}$ , com  $r_1$  e  $r_2 \in \mathbb{R}$ . Com isso, reescrevemos a equação (1) como,  $|\psi\rangle = a_1 e^{ir_1} |0\rangle + b_1 e^{ir_2} |1\rangle$ . Multiplicando ambos os lados da equação por um fator de fase  $e^{-ir_1}$ , temos que:  $e^{-ir_1} |\psi\rangle = a_1 |0\rangle + b_1 e^{i(r_2-r_1)} |1\rangle$ . Definindo que  $\phi = r_2 - r_1$ ,  $a_1 = \cos(\theta/2)$  e  $b_1 = \sin(\theta/2)$ , o estado da equação (1) se torna

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2) |0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2) |1\rangle. \quad (2)$$

Desconsideramos o fator  $e^{-ir_1}$  por se tratar de uma fase global e não geraria nenhuma alteração no momento da medição do estado.

Geometricamente, podemos representar o vetor de estado  $|\psi\rangle$  de um *qubit* como um vetor unitário em um espaço vetorial complexo bidimensional. Esse espaço vetorial pode ser interpretado como uma esfera, conhecida como esfera de Bloch. Desta forma, os vetores  $\{|0\rangle$  e  $|1\rangle\}$  pertencem ao espaço vetorial dos números complexos e formam uma base ortonormal para o espaço de um *qubit*. Podemos representar estes vetores na sua forma matricial dados por:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Diferentemente do caso clássico, o *qubit* possui uma propriedade não intuitiva de que, enquanto não for medido, ele pode existir em ambos os estados simultaneamente. Dessa forma, a capacidade de armazenar informação é muito grande, se olharmos a nível atômico. Para torná-la disponível, precisamos realizar uma medida no estado  $|\psi\rangle$ , colapsando a função de onda do *qubit* para um dos estados acessíveis ( $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$ ).

<sup>1</sup> Nesta seção utilizamos está notação de estados (0 e 1) apenas para ficar clara a associação entre o bit-clássico e o bit-quântico. No entanto, nas próximas seções e capítulos, escolheremos outras letras para representar o caminhante quântico.

Apesar de possuir este caráter que foge ao senso comum, os *qubits* são reais e podem ser representados por diversos sistemas físicos. Alguns exemplos são: os estados de polarização de um fóton  $\{|V\rangle$  e  $|H\rangle\}$  (vertical e horizontal, respectivamente) ou  $\{|R\rangle$  e  $|L\rangle\}$  (circular para a direita ou esquerda), dois estados de um elétron orbitando um único átomo  $\{|-1\rangle$  e  $|1\rangle\}$  como também os estados de *spin* de um elétron  $\{|\downarrow\rangle$  e  $|\uparrow\rangle\}$ . Assim, em linhas gerais, para ser candidato à implementação de um *qubit*, basta que o sistema apresente dois níveis.

## 2.2 CAMINHADAS QUÂNTICAS NO ESPAÇO DAS POSIÇÕES

Para construirmos um protocolo quântico, de modo análogo ao aplicado nas caminhadas aleatórias clássica, definiremos, antes de tudo, o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  deste sistema. Como visto na seção anterior (2.1), o caminhante quântico (*qubit*) possui um grau de liberdade interno que é definido em um espaço vetorial complexo bidimensional, no qual o chamaremos de espaço da moeda  $\mathcal{H}_C$ , compreendido pelos estados de base  $\{|c_1\rangle$  e  $|c_2\rangle\}$ . As posições discretas acessíveis  $\{|n\rangle\}_{n=1}^N$  ao caminhante quântico formam uma base para o espaço vetorial das posições  $\mathcal{H}_P$ . Com isso, delinearemos que o espaço de Hilbert total é dado por

$$\mathcal{H}_{total} = \mathcal{H}_P \otimes \mathcal{H}_C, \quad (4)$$

e tem sua estrutura definida pelo produto externo <sup>2</sup>  $\{|n\rangle \otimes |c_i\rangle\}$ , com  $i = 1, 2$ . Desse modo, podemos escrever o vetor de estado do caminhante quântico como uma superposição linear entre estes estados que formam  $\mathcal{H}_{total}$ . Ou seja,

$$|\Psi_0\rangle = \sum_{n=1}^N (a_{n,0}|c_1\rangle + b_{n,0}|c_2\rangle) \otimes |n\rangle, \quad (5)$$

onde  $a_{n,0} = \langle c_1|\psi_0\rangle$  e  $b_{n,0} = \langle c_2|\psi_0\rangle$  representam amplitudes de probabilidade de encontrarmos o caminhante quântico nos estados  $|c_1\rangle$  e  $|c_2\rangle$  na posição  $n$  e no tempo  $t = 0$ . Assumimos sempre que a condição de normalização seja respeitada  $\sum_n |a_{n,0}|^2 + |b_{n,0}|^2 = 1$ .

Na mecânica quântica, a evolução de um estado quântico  $|\psi(t_0)\rangle$  no tempo  $t_0$  para um estado  $|\psi(t + t_0)\rangle$  é governada pela equação

$$|\Psi(t_0; t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\Psi(t_0)\rangle; \quad (6)$$

<sup>2</sup> O produto externo da equação (4) promove o fenômeno de emaranhamento quântico entre os subespaços  $\mathcal{H}_P$  e  $\mathcal{H}_C$ . Abordaremos esse assunto com mais detalhes adiante, na seção 2.4.

onde  $\hat{U}$  é o operador unitário de evolução temporal, responsável pelo deslocamento temporal do estado  $|\Psi(t)\rangle$  para  $|\Psi(t+1)\rangle$ . Na abordagem das CQTDs, mediante aplicação dos operadores moedas quânticas, o operador  $\hat{U}$  é definido por meio de dois operadores:  $\hat{C}$  e  $\hat{S}$ . Isto é,

$$\hat{U} = \hat{S}(\hat{C} \otimes I_P), \quad (7)$$

$I_P$  é a matriz identidade sobre o espaço das posições  $\mathcal{H}_P$ ,  $\hat{C}$  é o operador moeda quântica pertencente a  $\mathcal{H}_C$  e  $\hat{S}$  o operador responsável por realizar a translação condicional. O produto externo é necessário para que o operador  $\hat{C}$  atue em todo o espaço das posições.

O operador moeda quântica pode ser qualquer matriz de rotação que satisfaça as condições do conjunto  $SU(2)$  (simétrica e unitária). Com isso, é possível definir uma variedade de caminhadas quânticas com diferentes moedas. Podemos apresentar tal operador através da seguinte expressão,

$$\hat{C}(\theta, \zeta, \xi) \equiv \begin{bmatrix} \cos(\theta) & e^{i\zeta} \sin(\theta) \\ e^{i\xi} \sin(\theta) & -e^{i(\zeta+\xi)} \cos(\theta) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Os três parâmetros da equação (8) são reais, independentes e não necessariamente são fixos durante o processo de evolução temporal. Especificamente,  $\theta$  controla a tendência do operador moeda, assim como, a largura da distribuição de probabilidade;  $\zeta$  e  $\xi$  são ângulos arbitrários que definem as fases relativas entre os estados da moeda e estão conditos no intervalo  $[0, 2\pi]$ . Quando  $\theta = \pi/4$ ,  $\zeta = \xi = 0$ , a moeda quântica gera uma combinação linear entre os estados com amplitudes  $a_{n,t}$  e  $b_{n,t}$  simétricas. Isto é, os estados  $\{|c_1\rangle, |c_2\rangle\}$  possuem a mesma probabilidade de ser obtidos. Outrossim, podemos representar essa rotação unitária por meio das equações de mapeamento,

$$\begin{aligned} |c_1\rangle &\rightarrow \cos(\theta)|c_1\rangle + e^{i\zeta} \sin(\theta)|c_2\rangle, \\ |c_2\rangle &\rightarrow e^{i\xi} \sin(\theta)|c_1\rangle - e^{i(\zeta+\xi)} \cos(\theta)|c_2\rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

A respeito do operador deslocamento condicional ( $\hat{S}$ ), ele é construído de modo a conter dois operadores de projeção. Um responsável por atuar no espaço das moedas quânticas e outro no espaço das posições. O deslocamento simultâneo do caminhante



quântico para a esquerda e para a direita ocorre de acordo com o estado da moeda, dessa forma, o operador  $\hat{S}$  tem a propriedade de

$$\begin{aligned}\hat{S}(|n\rangle \otimes |c_1\rangle) &\equiv \hat{S}_{c_1}(|n\rangle \otimes |c_1\rangle) = |n+l\rangle \otimes |c_1\rangle, \\ \hat{S}(|n\rangle \otimes |c_2\rangle) &\equiv \hat{S}_{c_2}(|n\rangle \otimes |c_2\rangle) = |n-l\rangle \otimes |c_2\rangle.\end{aligned}\quad (10)$$

Ou, de forma equivalente,

$$\hat{S} = \sum_n (|c_1\rangle\langle c_1| \otimes |n+l\rangle\langle n| + |c_2\rangle\langle c_2| \otimes |n-l\rangle\langle n|); \quad (11)$$

onde  $l$  é o comprimento do deslocamento. Desta forma,  $\hat{S}$  translada o estado do caminhante quântico para a direita em  $(n+l)$  e para a esquerda em  $(n-l)$  condicionado pelos estados internos  $\{|c_1\rangle, |c_2\rangle\}$ , respectivamente. Outra característica que vale a pena salientar é que, o operador deslocamento é responsável por emaranhar os estados dos dois subespaços  $\{H_C, H_P\}$ .

### 2.3 EXEMPLIFICANDO A CAMINHADA QUÂNTICA DISCRETA

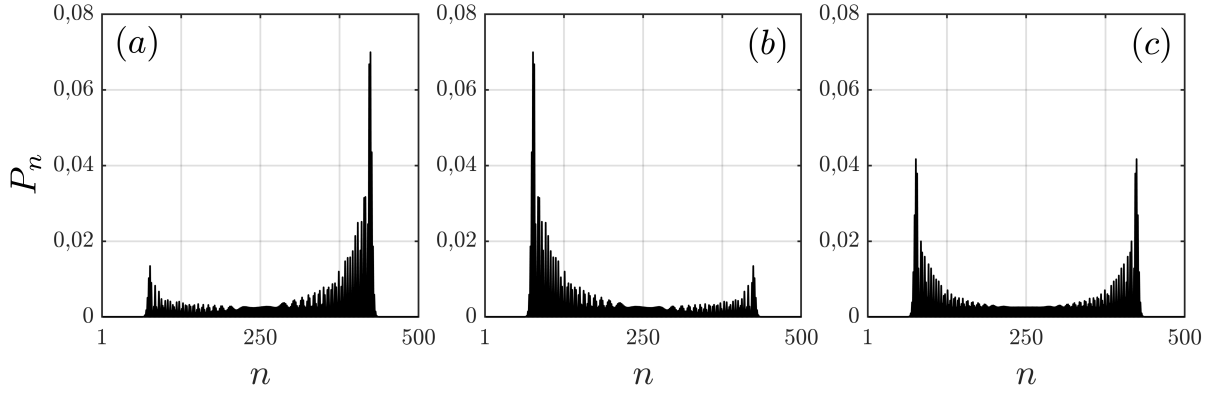
Em vista do exposto, destinamos esta seção a exemplificar as caminhadas quânticas em tempo discreto a fim de destacarmos suas principais características. Nesse sentido, faremos o uso de uma moeda quântica amplamente estudada em CQTDs, a chamada moeda Hadamard (85), que possui a propriedade de criar uma superposição com amplitudes de probabilidades iguais entre os estados de base do espaço  $H_C$ , isto é,

$$\begin{aligned}\hat{H}|c_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|c_1\rangle + |c_2\rangle), \\ \hat{H}|c_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|c_1\rangle - |c_2\rangle).\end{aligned}\quad (12)$$

Este operador vem sendo extensivamente estudado uma vez que é facilmente associado a portas quânticas no contexto de computação e informação quântica (86, 87, 88, 89). Consideremos um *qubit* em uma linha com  $N$  posições, onde o grau de liberdade interno é representados pelo estado  $\{|c_1\rangle, |c_2\rangle\}$  no espaço  $\mathcal{H}_C$ . Para ilustrar, vamos realizar a evolução da CQTD usando a transformação imposta pela equação (12), sem realizar medidas intermediárias. Para isso, ajustemos o estado inicial do *qubit* no tempo  $t = 0$  em:

$$|\Psi_0\rangle = |c_1\rangle \otimes |n_0\rangle. \quad (13)$$

**Figura 2** – Distribuições de probabilidades de CQTDs após 250 passos de tempo com  $N = 500$  posições para três condições iniciais. Em (a)  $|\Psi_0\rangle = |c_1\rangle \otimes |250\rangle$ ; (b)  $|\Psi_0\rangle = |c_2\rangle \otimes |250\rangle$  e (c) um estado em superposição,  $|\Psi_0\rangle = (|c_1\rangle + i|c_2\rangle)/\sqrt{2} \otimes |250\rangle$ .



Fonte: Do autor, 2022.

Isso posto, temos:

$$t = 1:$$

$$\begin{aligned} \hat{U}|\psi_0\rangle &= \hat{S}(\hat{I}_P \otimes \hat{C})|\psi_0\rangle \\ &= \hat{S}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|c_1\rangle + |c_2\rangle) \otimes |n_0\rangle\right] \\ |\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|c_1\rangle \otimes |n_0 + 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|c_2\rangle \otimes |n_0 - 1\rangle \end{aligned} \quad (14)$$

$$t = 2:$$

$$\begin{aligned} \hat{U}|\psi_1\rangle &= \hat{S}\left[\frac{1}{2}(|c_1\rangle + |c_2\rangle) \otimes |n_0 + 1\rangle\right] + \hat{S}\left[\frac{1}{2}(|c_1\rangle - |c_2\rangle) \otimes |n_0 - 1\rangle\right] \\ |\psi_2\rangle &= \frac{1}{2}|c_1\rangle \otimes |n_0 + 2\rangle + \frac{1}{2}(|c_1\rangle + |c_2\rangle) \otimes |n_0\rangle - \frac{1}{2}|c_2\rangle \otimes |n_0 - 2\rangle \end{aligned} \quad (15)$$

$$t = 3:$$

$$\begin{aligned} |\psi_3\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[|c_1\rangle \otimes |n_0 + 3\rangle + 2(|c_1\rangle + |c_2\rangle) \otimes |n_0 + 1\rangle + |c_1\rangle \otimes |n_0 - 1\rangle \right. \\ &\quad \left. - |c_2\rangle \otimes |n_0 - 3\rangle\right] \end{aligned} \quad (16)$$

Após  $t$  passos de tempo, a distribuição da probabilidade é dada por

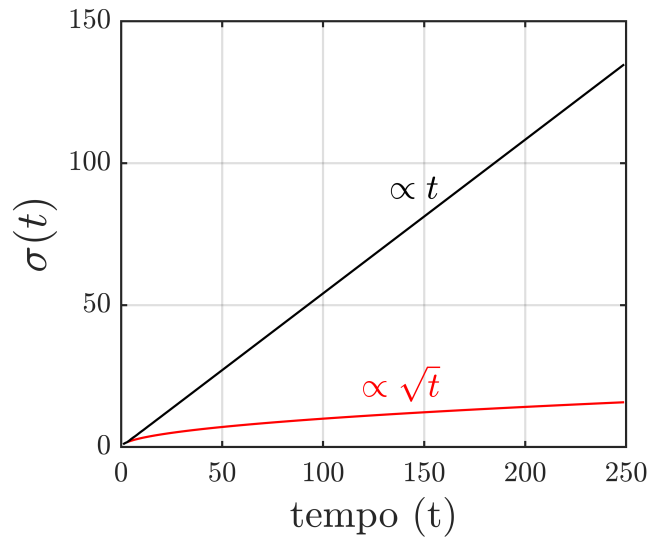
$$P_n = |\langle n| \otimes \langle c_1|\psi_t\rangle|^2 + |\langle n| \otimes \langle c_2|\psi_t\rangle|^2. \quad (17)$$

Em outras palavras, através da equação (17) realizamos uma medida no espaço das posições e colapsamos a função de onda do caminhante quântico para um único

estado com probabilidade  $P_n$ . Aplicando o operador  $\hat{U}$  sucessivas vezes, obteremos um estado final cujo o perfil da distribuição de probabilidade depende intimamente do estado inicial  $|\Psi_0\rangle$ . Na figura 2, mostramos a distribuição de probabilidade para três condições iniciais. Em (a)  $|\Psi_0\rangle = |c_1\rangle \otimes |250\rangle$ , podemos observar que após 250 passos de tempo a condição inicial da equação (13) apresentar um caráter assimétrico com um pico para a direita. Isso ocorre porque o operador Hadamard trata os estados de sua base de forma diferente, acrescentando uma fase para o estado  $|c_2\rangle$ , como pode ser visto na equação (12). Uma dinâmica semelhante, mas simétrica ao eixo das posições  $n$ , é observado quando consideramos a estado inicial  $|\Psi_0\rangle = |c_2\rangle \otimes |250\rangle$ , ver figura (2-b). Podemos construir um terceiro tipo de estado inicial para o caminhante quântico usando uma superposição linear entre os estados de base associados ao seu grau de liberdade interno. Isto é,  $(|c_1\rangle + |c_2\rangle) \otimes |n_0\rangle$ . É interessante mencionarmos que estes estados não interferem entre si, uma vez que são ortogonais. No entanto, ao aplicarmos o operador Hadamard, criamos mais dois estados em superposição e assim sucessivamente. O que levaria a uma distribuição de probabilidade diferente das apresentadas na figura 2 (a) e (b). Para obtermos um perfil simétrico, é preciso adicionarmos um estado inicialmente simétrico, ou seja,  $|\Psi_0\rangle = (|c_1\rangle + i|c_2\rangle)/\sqrt{2}$ . Como a operação de Hadamard não introduz nenhuma amplitude complexa (ver equação 12), as trajetórias dos estados  $|c_1\rangle$  permanecem reais e  $|c_2\rangle$  puramente imaginárias, à vista disso, não interferindo uma com a outra, acarretando assim, uma distribuição simétrica, como podemos observar na figura (2-c). Desta forma, podemos obter uma infinidades de evoluções considerando uma mesma moeda quântica e variando somente o estado inicial.

Outra característica é revelada quando olhamos para o desvio padrão do caminhante quântico. A probabilidade de encontrar o *qubit* em torno da posição inicial diminui monotonicamente a medida em que o sistema evolui, sugerindo um comportamento balístico. Consequentemente, o desvio padrão apresenta um crescimento proporcional ao número de passos, isto é,  $\sigma \propto t$ , diferentemente da caminhada aleatória clássica, onde, a distribuição de probabilidade apresenta um comportamento difusivo  $\sigma \propto \sqrt{t}$ . A figura 3 exhibe o comportamento do desvio padrão de um caminhante quântico em uma linha com  $N = 500$  posições após  $N/2$  passos. Nota-se que, enquanto no caso clássico a dinâmica apresenta um comportamento difusivo (curva em vermelho), no quântico, devido aos processos de interferência quântica, a função de onda do *qubit* se espalha balisticamente (curva em preto).

**Figura 3** – Comportamento do desvio padrão de uma caminhada Hadamard (em preto). A fim de comparação com as caminhadas aleatórias clássicas, foi adicionada a curva de sua dispersão (em vermelho). Nota-se que, enquanto na caminhada clássica a dinâmica é difusiva  $\sigma \propto \sqrt{t}$ ; a caminhada quântica apresenta uma dinâmica balística, ou seja,  $\sigma \propto t$ .



Fonte: Do autor, 2022.

A caminhada Hadamard em uma dimensão é um exemplo que demonstra as características importantes de uma caminhada quântica em tempo discreto. Como pudemos observar através da figura 2, o processo de interferência quântica leva a uma distribuição de probabilidade muito pequena em torno da posição inicial, enquanto fomenta drasticamente os picos nas posições extremas  $[-t/\sqrt{2}, t/\sqrt{2}]$ . Todavia, a complexidade das CQTDs vai muito além do que observamos no exemplo apresentado. Os graus de liberdade adicionais fornecidos pelos parâmetros da moeda quântica (ver equação 8) e o vetor de estado inicial do *qubit* permitem uma grande diversidade nas CQTDs, que podem exibir dinâmicas completamente diferentes.

## 2.4 EMARANHAMENTO QUÂNTICO

Como supracitado no capítulo introdutório, o princípio da superposição e o emaranhamento quântico são tidos como as principais ferramentas para futuras aplicações no processamento de informação quântica. A ideia por trás do emaranhamento surge quando dois ou mais sistemas quânticos, pertencentes a espaços de Hilbert distintos, comunicam-se entre si e o estado final de um deles pode depender do estado final dos

outros. Para estabelecermos o que é estar emaranhado, começaremos definindo quando o estado não é emaranhado. Um estado não-emaranhado ocorre quando a medição de qualquer informação de um espaço de Hilbert não traz consigo nenhuma informação do outro espaço. Para ficar mais claro, vamos assumir, por exemplo, dois sistemas quânticos  $A \in \mathcal{H}_A$  e  $B \in \mathcal{H}_B$ , cada um com seus respectivos estados  $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ . Um sistema composto  $AB \in \mathcal{H}_{AB}$  apresenta um espaço de Hilbert dado pelo produto tensorial dos espaço de Hilbert de  $A$  e  $B$ , isto é,  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . Um estado  $|AB\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$  é dito não-emaranhado se pudermos escrever tal estado na forma

$$|AB\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle, \quad (18)$$

caso contrário, classificaremos o estado como emaranhado.

Um exemplo didático para falarmos de estados emaranhados foi proposto por Schrödinger em 1935 e ficou conhecido como *o gato de Schrödinger*. Imaginemos uma situação na qual um gato se encontre dentro de uma caixa totalmente fechada. O gato pode estar vivo (vamos representar pelo estado  $|vivo\rangle$ ) ou morto ( $|morto\rangle$ ) e esses estados pertencem a um espaço de Hilbert denominado  $\mathcal{H}_{gato}$ . Dentro dessa caixa, há também um átomo instável ( $|\acute{a}tomo_1\rangle$ ), que pode decair para um nível mais estável ( $|\acute{a}tomo_2\rangle$ ), que formam o espaço  $\mathcal{H}_{\acute{a}tomo}$ . Além disso, vamos supor que a energia liberada nessa transição seja suficiente para ativar um mecanismo que libere um gás venenoso dentro da caixa matando o gato. Diante do descrito, o estado geral desse sistema dentro da caixa (espaço  $\mathcal{H}_{caixa}$ ) será dado por

$$|\Psi\rangle = \alpha |\acute{a}tomo_1\rangle \otimes |vivo\rangle + \beta |\acute{a}tomo_2\rangle \otimes |morto\rangle, \quad (19)$$

onde  $\alpha^2$  e  $\beta^2$  são densidades de probabilidade do decaimento do átomo ocorrer ou não e obedecem a condição de normalização. De acordo com a mecânica quântica, o gato encontra-se em um estado de superposição entre vivo e morto. Assim, com a caixa fechada não conseguimos dizer nada sobre o sistema além de que ele encontra-se nesse estado. Apenas abrindo-a é que saberemos o que houve com o gato. Nesse processo, significa que estaremos colapsando a função de onda do gato para um dos estados possível: vivo ou morto. O gato não estará vivo se o átomo decair, nem estará morto se ele não decair. Observe que uma informação sobre um dos estados  $|vivo\rangle(|morto\rangle)$  nos diz necessariamente uma informação sobre os estados  $|\acute{a}tomo_1\rangle(|\acute{a}tomo_2\rangle)$ , respectivamente. Assim, dizemos que os estados dos espaços  $\mathcal{H}_{gato}$  e  $\mathcal{H}_{\acute{a}tomo}$  estão emaranhados ou entrelaçados.

No protocolo das CQTDs, o operador deslocamento condicional  $\hat{S}$  é o responsável por produzir essa correlação quântica entre os graus de liberdade desse sistema  $\{\mathcal{H}_C, \mathcal{H}_P\}$ . Uma forma de medirmos essa correlação é por meio da entropia de Von Neumann  $S_E$ , que podemos defini-la por,

$$S_E(t) = -Tr[\rho_C(t) \log_2 \rho_C(t)], \quad (20)$$

onde,  $\rho_C = Tr_P[\rho(t)]$  é a matriz densidade reduzida obtida através do traço sobre os graus de liberdade de posição e  $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$  é a matriz densidade do sistema. Seja o estado arbitrário de um *qubit* dado pela equação  $|\psi(t)\rangle = \sum_n [a_n(t) |\uparrow\rangle + b_n(t) |\downarrow\rangle] \otimes |n\rangle$ , podemos escrever  $\rho_C$  como,

$$\rho_C(t) = \begin{bmatrix} \sum_n |a_n(t)|^2 & \sum_n a_n b_n^* \\ \sum_n a_n^* b_n & \sum_n |b_n(t)|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(t) & \gamma(t) \\ \gamma^*(t) & \beta(t) \end{bmatrix}, \quad (21)$$

com  $\alpha(t) = \sum_m |a_m(t)|^2$ ,  $\beta(t) = \sum_m |b_m(t)|^2$ ,  $\gamma(t) = a_m(t) b_m^*(t)$  e distribuição de probabilidade  $\alpha(t) + \beta(t) = |\psi_n(t)|^2 = 1$ . Por meio da técnica de diagonalizando da equação (21) obtemos os seguintes autovalores para a matriz densidade,

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \{1 \pm \sqrt{1 - 4[\alpha(t)\beta(t) - |\gamma(t)|^2]}\}. \quad (22)$$

Dessarte, expressamos o emaranhamento em função desses autovalores, isto é,

$$S_E = -\lambda_+ \log_2(\lambda_+) - \lambda_- \log_2(\lambda_-). \quad (23)$$

A equação (23) está contida no intervalo entre zero e um, ou seja,  $S_E(t) \in [0, 1]$ . Estes extremos significam que para estados não-emaranhados (separáveis),  $S_E = 0$ ; quando os estados estão maximamente emaranhados,  $S_E = 1$ . Além disso, para valores entre  $[0, 1]$  dizemos que o sistema está parcialmente emaranhado.

Diante disso, vamos entender essa correlação utilizando as CQTDs. Para isso, adotemos que os vetores  $\{c_1, c_2\}$  do espaço  $\mathcal{H}_C$  agora serão representados por  $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\} \in \mathcal{H}_C$ . Com isso, consideremos um *qubit* no estado  $|\Psi_0\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |n_0\rangle$ . Neste caso, as informações já estão definidas, isto é, ao realizar uma medida em um desses estados, não teremos nenhuma informação nova sobre o outro. Ou seja, o estado  $|\uparrow\rangle$  já é definido para cima e sua posição é em  $n_0$ . Em outras palavras, o estado  $|\Psi_0\rangle$  já encontra-se separável.

Outro caso interessante é o exemplo onde o estado é dado por,

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes (|n_0 + 1\rangle + |n_0 - 1\rangle); \quad (24)$$

pode parecer diferente, mas, se olharmos com cuidado, veremos que o estado  $|\Psi_0\rangle$  já encontra-se separado. Ou seja, uma medição da posição não nos revela nenhuma informação sobre o *spin* do *qubit*. Agora, olhemos para o estado do caminhante quântico no primeiro passo do exemplo da equação (14),

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle \otimes |n_0 + 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle \otimes |n_0 - 1\rangle;$$

ao realizarmos uma medida no espaço das posições  $H_P$ , saberemos em qual estado de *spin* o *qubit* se encontra. Ou ainda, não conseguimos escrever os estados de  $|\psi_1\rangle$  de forma separável. Nesse caso, temos um estado totalmente emaranhado.

Além disso, os estados podem estar parcialmente emaranhados. Podemos entender melhor através da função de onda do segundo passo na equação (15),

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle \otimes |n_0 + 2\rangle + \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes |n_0\rangle - \frac{1}{2}|\uparrow\rangle \otimes |n_0 - 2\rangle;$$

se realizarmos uma medição no espaço das posições o primeiro e último termo, da equação acima, saberemos qual é o estado de *spin* do caminhante quântico. Todavia, se realizarmos a medida na posição  $n_0$  não teremos nenhuma informação sobre o estado no espaço  $\mathcal{H}_C$ . Com isso, quando olhamos para todo o conjunto, temos um estado  $|\psi_2\rangle$  parcialmente emaranhado.

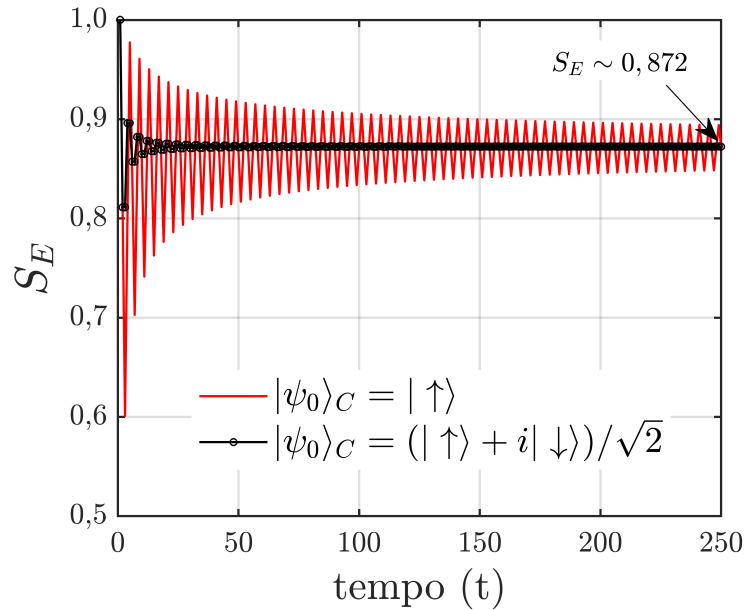
Por fim, a figura 4 mostra como o emaranhamento quântico  $S_E$  se comporta para diferentes estados iniciais contidos no espaço da moeda quântica,  $|\Psi_0\rangle_C$ . Para o estado inicialmente simétrico (curva em preto),

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle); \quad (25)$$

o emaranhamento converge rapidamente para um valor limite bem conhecido na literatura,  $S_E \sim 0,872$  (90). Por outro lado, para um *qubit* com uma condição inicial assimétrica (curva em vermelho), o emaranhamento apresenta flutuações, convergindo mais lentamente.

Construindo uma ponte entre esses conceitos e as discussões para o tema trabalhado no próximo capítulo, os autores em (50, 55), por meio de uma análise analítica-numérica, investigaram como a inserção de diferentes tipos de desordem em uma CQTD afeta o emaranhamento quântico entre os estados de posição e *spin* desse sistema. No modelo proposto, a desordem foi introduzida por intermédio de uma terceira moeda, chamada no texto original de *moeda clássica*, de três maneiras distintas: estática, dinâmica e flutuante.

**Figura 4** – Comportamento do emaranhamento quântico  $S_E$  para duas condições iniciais diferentes contidas no espaço da moeda quântica. Ambas as condições iniciais saturam, no limite assintótico, no valor  $S_E \sim 0,872$ .



Fonte: Do autor, 2022.

Em contraste com as CQTDs uniformes, onde o emaranhamento se mostra profundamente sensível às condições do estado inicial do *qubit* e onde a maioria das configurações de moedas quânticas não levam o sistema a um grau totalmente emaranhado; mostraram que é possível emaranhar o grau de liberdade interno com o grau de liberdade externo de forma ótima no limite assintótico para qualquer condição inicial, isto é, para um número de passos muito grande o sistema tende a ficar maximamente emaranhado. Para esse fim, é necessário que a desordem possua uma dependência temporal, ou seja, dinâmica e flutuante. Além disso, constataram que a desordem do tipo estática não apresenta o mesmo desempenho que as demais para tal objetivo, visto que, nenhuma das condições iniciais apresentaram um aumento significativo no grau de emaranhamento.

Mais tarde, autores (91) demonstraram experimentalmente, pela primeira vez, que de fato, a desordem dinâmica induz o aumento na geração de emaranhamento quântico independentemente da condição inicial ajustada. Para isso, utilizaram elementos de óptica linear baseado no protocolo de multiplexação de tempo. No experimento, a desordem foi inserida pelo sorteio aleatório entre dois operadores: *Hadamard* e *Fourier*. Mesmo que o número de passos no experimento tenha sido baixo (20), devido as limitações experimentais



ainda existentes, o objetivo foi bastante satisfatório, de modo que, o trabalho emprega uma maneira de explorar o emaranhamento no campo da informação quântica.

## 2.5 COERÊNCIA QUÂNTICA

Assim como o emaranhamento, a coerência quântica possui um papel central em sistemas quânticos e no processamento de informação quântica. É ela que descreve a capacidade de um estado quântico em exibir o fenômeno de sobreposição de dois ou mais estados. Um objetivo principal do processamento de informação quântica é manter a coerência dos sistemas por longos tempos, uma vez que, ela tende a se perder por interações do sistema com o ambiente circundante. As primeiras pesquisas de coerência quântica foram limitadas à análise qualitativa devido à falta de medidas rigorosas. Em (92), os autores propuseram uma estrutura teórica robusta para a quantificação da coerência quântica.

Nesta tese, vamos utilizar a medida da coerência da norma- $l_1$ <sup>3</sup> por dois motivos: (i) possui uma forma simples de ser utilizada e (ii) é de baixo custo computacional. Assim, podemos definir a coerência de um estado quântico com operador densidade  $\rho$  em relação à base  $|n\rangle$  como,

$$C(\rho) = \sum_{n \neq m} |\langle n | \rho | m \rangle|. \quad (26)$$

Seja o estado arbitrário de um *qubit* dado pela equação  $|\psi(t)\rangle = \sum_n [a_n(t) |\uparrow\rangle + b_n(t) |\downarrow\rangle] \otimes |n\rangle$  a coerência para todo o sistema de uma CQTDs é:

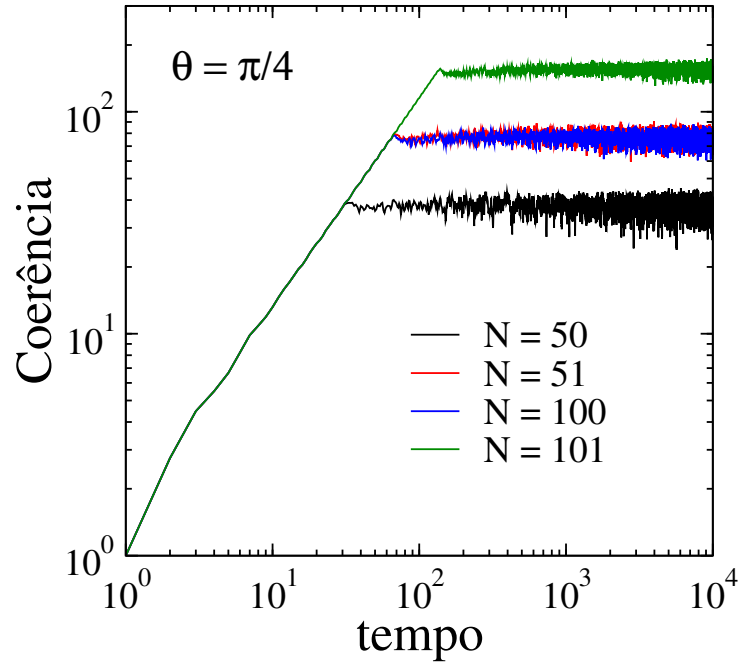
$$C(|\Psi(t)\rangle) = \sum_{n \neq m} |a_n(t)| \cdot |a_m(t)| + \sum_{n \neq m} |b_n(t)| \cdot |b_m(t)| + 2 \sum_{n, m} |a_n(t)| \cdot |b_m(t)|. \quad (27)$$

Para exemplificar, vamos calcular numericamente, através da equação (27), a dinâmica da coerência para uma caminhada quântica de Hadamard unidimensional em uma rede fechada (com condições periódicas de contorno). Considerando um *qubit* com estado inicial simétrico totalmente localizado centro de uma rede circular com  $N$  sítios, isto é,

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle) \otimes |N/2\rangle. \quad (28)$$

<sup>3</sup> Outra medida de coerência muito utilizada é a entropia relativa da coerência definida como:  $C_{ent}(\rho) = S_E(\rho_{diag}) - S_E(\rho)$ , onde  $S_E$  é a entropia de von Neumann e  $\rho_{diag}$  são os elementos da diagonal da matriz densidade.

**Figura 5** – Comportamento da coerência quântica em uma cadeia circular para um *qubit* com um estado inicialmente simétrico localizado na posição  $N/2$ . Apresentamos esse comportamento para quatro tamanhos ( $N$ ) de rede.



Fonte: Do autor, 2022.

Na figura 5, mostramos o comportamento da coerência quântica de todo o sistema para quatro tamanhos de rede  $N = 50, 51, 100, 101$  e deixamos o sistema evoluir até 10000 instantes de tempo. Observamos que as quatro configurações apresentam uma tendência semelhante, isto é, a coerência é crescente até saturar em determinada etapa de tempo. Este comportamento corrobora com a interpretação física da equação (27), já que estamos medindo quantitativamente a capacidade que o sistema possui de gerar estados em superposição. No entanto, quando olhamos para o ponto de saturação, vemos um comportamento que não é intuitivo. A figura 5 exibe que os valores de saturação para diferentes tamanhos variam muito. Esse comportamento está ligado intimamente ao fato de considerarmos uma rede com condições periódicas de contorno. Assim, para valores pares de  $N$ , segue-se que a dinâmica em sítios pares e ímpares se desacopla completamente, semelhante aos dois lados distintos de uma banda de Möbius com zero torções. O que significa que o caminhante ocupa apenas metade das posições em cada passo de tempo, apresentando, assim, uma saturação em um valor de coerência menor, com flutuações em torno de, aproximadamente,  $\approx 3N/4$ . Por outro lado, quando  $N$  é ímpar, a dinâmica do sítio par e ímpar é globalmente acoplada: qualquer excitação em um sítio par explorará todos os sítios pares até atingir o limite onde se torna ímpar e vice-versa. Por isso, a

coerência satura em valores maiores do que para  $N$  par, apresentando flutuações em torno de, aproximadamente,  $\approx 3N/2$ .

Recentemente, diversos autores têm investigado os efeitos causados por ruídos sobre a dinâmica da coerência quântica em CQTDs (93, 94, 95, 96). Em (93), os autores estudaram a influência de dois tipos de ruídos na evolução da coerência em cadeias circulares. Os resultados mostram que, dependendo da característica do ruído a taxa de crescimento da coerência sofre um decréscimo, como é o caso do operador Hadamard ruidoso. Para ruídos que surgem de *links* quebrados, há um aumento na taxa de crescimento da coerência no regime de baixa probabilidade de ocorrência do ruído. Yun-Long Su *et al.*, em (96), investigaram o comportamento da coerência quântica em CQTDs de busca com dois tipos de ruídos que surgem em redes ópticas: perda de fótons e fases aleatórias. Com isso, os autores mostraram que, os ruídos do tipo perda de fótons causam uma redução na coerência quântica, enquanto os deslocamentos de fase aleatórios dificultam a interferência entre os estados de borda, ambos levando a uma menor probabilidade de sucesso em comparação com o caso sem ruído. Assim, concluíram que a coerência desempenha um papel essencial para a aceleração neste algoritmo quântico. Nesse contexto, ao longo dessa tese, buscaremos entender a dinâmica da coerência quântica em CQTDs na presença de alguns ingredientes pertinentes, como ruídos e não-linearidade.

## Caminhadas quânticas aperiódicas: Propriedades de localização, energia espectral e emaranhamento

Como vimos no capítulo anterior, CQTDs não-homogêneas têm atraído muita atenção recentemente. As propriedades de CQTDs são sensíveis à presença de inhomogeneidade na sua dinâmica, que podem ser geradas quando assumidos operadores moedas com dependência espacial, temporal ou espaço-temporal simultaneamente. Diversos autores têm apresentado vários estudos sobre a dinâmica das caminhadas quânticas considerando sistemas unidimensionais onde a sequência da distribuição das moedas quânticas depende tanto do espaço quanto do tempo, exibindo, assim, uma classe muito mais ampla de propriedades dinâmicas (39, 41, 55, 61, 57, 97, 98, 99, 100).

Em termos gerais, a não-homogeneidade induz desvios do espalhamento balístico do pacote de ondas, incluindo o surgimento da localização de Anderson. Para uma desordem dinâmica, a moeda quântica é a mesma em todos os sítios da rede, mas muda a cada passo de tempo (55, 61, 97, 98). Neste contexto, a análise da evolução temporal de um caminhante quântico na presença de ruído temporal no operador de Hadamard mostra que o desvio padrão da distribuição espacial adquire um comportamento difusivo para longos tempos, semelhantemente ao passeio aleatório clássico (97). Para moedas quânticas organizadas em sequências aperiódicas, como Fibonacci (61) e Thue-Morse (57), as propriedades de transporte de um *qubit* em uma cadeia unidimensional revelam uma propagação superdifusiva do pacote de ondas. Para distribuições de Fibonacci, este comportamento foi conectado com o decaimento da lei de potência das correlações de tempo dos mapas de

rastreamento<sup>1</sup> (59). Usando uma dependência de tempo para o operador de moeda, foram relatados diferentes tipos de comportamentos assintóticos, como sub-difusivo e localizado, para a propagação da função de onda (59).

Comportamentos de estados localizados também foram descritos para sistemas com não-homogeneidade espacial, tanto para diferentes moedas distribuídas aleatoriamente ao longo dos sítios da cadeia, mas fixas durante a evolução temporal (18, 55, 101), como para sistemas com posição dependente defeitos de fase (102, 103, 104). Ambas as descrições possuem estudos experimentais utilizando configurações ópticas, o que demonstra a relevância de tais estruturas para o avanço da ciência da informação quântica (39, 41). A ausência de localização foi descrita para diferentes distribuições quasi-periódicas dos operadores de moedas (57, 60). Usando a distribuição de duas moedas na rede, Fibonacci e as sequências de Thue-Morse induzem um comportamento superdifusivo para o *qubit*, enquanto a sequência Rudin-Shapiro mostra um comportamento subdifusivo (57). Uma natureza fractal foi relatada para distribuições quasi-periódicas nas quais o período dos operadores de moedas é distribuído de forma análoga ao modelo de Aubry-André. Sequências aperiódicas determinísticas fornecem ambientes ideais onde essas propriedades podem ser exploradas com total controle (58, 60).

Mudanças na dinâmica de propagação do pacote de ondas do caminhante também foram relatadas para sistemas cuja não-homogeneidade encontra-se relacionada aos comprimentos dos deslocamentos em cada instante de tempo (58, 105, 106, 107). Ao incluir uma não-markovianidade nas CQTDs, Molfetta *et al.* (106), em seu trabalho denominado *Caminhada quântica do elefante*, descreve uma difusão hiper-balística, onde o expoente de difusão chega ser igual a 3. Observa-se que muitas das investigações relacionadas as CQTDs e desordem se concentram em associar a implementação da não-homogeneidade às propriedades de transporte do caminhante quântico. No entanto, o emaranhamento quântico entre os estados de posição e *spin* carregam aspectos relevantes em protocolos de computação e informação quântica (1). Ao contrário das CQTDs homogêneas, sistemas com não-homogeneidade dinâmica geram estados maximamente emaranhados no limite assintótico, independente da condição inicial do caminhante, como mostrado pelos autores em (50). Por outro lado, a não-homogeneidade estática é quase sempre pior do que o passeio

<sup>1</sup> Mapas de rastreamento são mapeamentos tridimensionais derivados de abordagens por meio da matriz de transferência para vários processos físicos que exibem quase-periodicidade no espaço ou no tempo.

quântico homogêneo em termos de geração de emaranhamento (55). Esses resultados foram recentemente demonstrados experimentalmente (91). Além disso, foi relatada uma ausência de limite assintótico para tais sistemas (55). A diminuição/aumento do emaranhamento devido à não-homogeneidade estática/dinâmica também foi descrita para sistemas 1D com desordem de fase no local (102). O efeito de considerarmos um estado inicial deslocalizado mostra uma relação entre as fases entre os estados de base do espaço da moeda,  $H_C$ , que sempre leva ao emaranhamento máximo para caminhadas regidas pelas moedas Hadamard e Fourier (108).

Perante as descrições acima, apresentaremos, neste capítulo, os estudos relacionados as propriedades de localização, espectro de energia e emaranhamento entre os graus de liberdade externo e interno de uma caminhada quântica discreta aperiódica. Em nosso modelo, a aperiodicidade é descrita por moedas quânticas que possuem dependência espacial com as posições da rede. No que tange as propriedades de transporte, identificamos dois cenários, com comportamentos distintos, para a função de onda do caminhante quântico: um onde os autoestados encontram-se deslocalizados pelos sítios da rede 1D, e o segundo, onde a função de onda encontra-se localizada em torno de algumas posições. A transição entre os dois regimes é mediada através do parâmetro que controla o grau de aperiodicidade desta distribuição. Para melhor caracterizarmos a dinâmica do *qubit*, exploramos algumas quantidades típicas, como: a função participação, probabilidade de retorno e largura do pacote de ondas; bem como os espectros de energia de um hamiltoniano efetivo associado ao problema.

Falando das propriedades de emaranhamento entre os graus de liberdade posição-*spin*, encontramos diversas conjunturas nas quais um aumento na capacidade de gerar emaranhamento é observado. Essas configurações trazem novas informações sobre a influência da aperiodicidade na geração de emaranhamento quântico e sistemas com inhomogeneidade do tipo estática, relatada pela literatura como quase sempre capaz de reduzir o emaranhamento quando comparado com o caso homogêneo. Ademais, estendemos nossa análise a fim de mostrar que sistemas com heterogeneidade estática também são capazes de exibir um limite de emaranhamento assintótico.

### 3.1 MODELO E FORMALISMO

No capítulo 1, mostramos em detalhes todo o protocolo das caminhadas quânticas em tempo discreto. Como visto, para descrevermos o estado total do caminhante quântico precisamos de duas informações, uma referente ao grau de liberdade interno e outra que diz respeito ao grau de liberdade externo. A direção a ser seguida está intimamente ligada ao seu estado interno, onde cada valor representa um lado da moeda quântica. No formalismo das caminhadas quânticas chamamos os lados da moeda de estados de base e serão representados, ao longo deste capítulo, pelos vetores ortonormais  $|\uparrow\rangle = (1, 0)^T$ ,  $|\downarrow\rangle = (0, 1)^T$ , onde  $T$  refere-se a matriz transposta, no subespaço  $\mathcal{H}_C$ . Enquanto que a informação externa refere-se ao espaço de todos os estados de posições possíveis  $|\psi\rangle_P = \sum_n |n\rangle$ , contidos no subespaço  $\mathcal{H}_P$ . Com isso, o espaço total é caracterizado por  $H_{total} = H_P \otimes H_C$ .

O estado arbitrário  $|\Psi\rangle$  para o caminhante quântico no tempo  $t = 0$  é definido por,

$$\begin{aligned} |\Psi_0\rangle &= |\psi\rangle_C \otimes |\psi\rangle_P, \\ |\Psi_0\rangle &= \sum_n [a_{n,0} |\uparrow\rangle + b_{n,0} |\downarrow\rangle] \otimes |n_0\rangle, \end{aligned} \quad (29)$$

onde  $a_{n,0}$  e  $b_{n,0}$  são amplitudes de probabilidades, ao passo que  $|a_{n,0}|^2$  e  $|b_{n,0}|^2$  representam as probabilidades de medirmos o *qubit* nos estados  $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$  no passo de tempo  $t$  e na posição  $n$ , e respeitam a condição de normalização  $\sum_n (|a_{n,0}|^2 + |b_{n,0}|^2) = 1$ .

Neste capítulo, adotamos que os parâmetros de fase na equação 8 são nulos, isto é,  $\zeta = \xi = 0$ . Além disso, adicionamos uma inomogeneidade espacial dada por uma distribuição aperiódica no argumento das funções cosseno e seno da moeda quântica. De modo que podemos escrever,

$$\hat{C}_n = \cos(\theta_0 n^\nu) |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \sin(\theta_0 n^\nu) |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + \sin(\theta_0 n^\nu) |\downarrow\rangle\langle\downarrow| - \cos(\theta_0 n^\nu) |\downarrow\rangle\langle\uparrow|, \quad (30)$$

que na sua forma matricial é escrita como

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_0 n^\nu) & \sin(\theta_0 n^\nu) \\ \sin(\theta_0 n^\nu) & -\cos(\theta_0 n^\nu) \end{bmatrix}; \quad (31)$$

o operador moeda quântica agora depende das posições  $n$  e de um parâmetro  $\nu$  que controla o grau de aperiodicidade. Considerando  $\nu$  sempre positivo, temos que para pequenos valores

de  $\nu$  ( $\nu < 0,5$ ) a inomogeneidade espacial dos operadores moedas cresce lentamente. À medida em que aumentamos o valor de  $\nu$ , a falta de homogeneidade aumenta, de modo a se comportar como uma distribuição pseudo-aleatória para um valor suficientemente alto. Assim, o parâmetro  $\nu > 0$  induz uma heterogeneidade estática no sistema, com operações de moedas quânticas dependentes da posição fixadas durante o evolução do tempo, isto é,  $\hat{C}(\theta_0, n, t) = \hat{C}_n(\theta_0)$ . O modelo proposto aqui pode ser visto como uma generalização do modelo investigado pela referência (109), com pequenas sutilezas, onde recuperamos sua descrição para o operador moeda configurando  $\nu = 1$  e  $\theta_0 = 2\pi$ . Por outro lado, configurando  $\nu = 0$ , recuperamos a caminhada quântica homogênea.

Fazendo uma ponte entre a equação (31) e a física do estado sólido, Sarma *et al.* (110, 111) estudaram as propriedades de localização de um elétron em uma cadeia unidimensional com potencial dado por uma série aperiódica incomensurável, isto é, as energias potenciais de cada sítio da rede era dada através da equação:  $\epsilon_n := V \cos(\pi\alpha n^\nu)$ , onde  $V$ ,  $\alpha$  e  $\nu$  são valores reais e determinam as características da aperiodicidade. Com isso, foi possível mostrar a possibilidade de existência de *bordas de mobilidade*. Em linhas gerais, podemos resumir em: (i) quando  $0 < \nu < 1$  e  $V < 2$ , os estados,  $E$ , são estendidos na faixa:  $-2 + V < E < 2 - V$  e localizados em  $2 - V < E < 2 + V$  e  $-2 - V < E < -2 + V$ . Por exemplo, se considerarmos  $V = 1$  e  $\nu = 0,5$ , teremos estados estendidos na faixa  $-1 < E < 1$  e localizados em  $1 < E < 3$  e  $-3 < E < -1$ . (ii) quando  $0 < \nu \leq 1$  e  $V > 2$ , todos os estados são localizados, uma vez que  $V$  representa a amplitude das energias potenciais locais, maior do que o valor da energia de salto utilizada pelos autores. Para (iii)  $\nu = 1$  e  $V < 2$ , todos os estados são estendidos. Já em (iv), quando  $1 < \nu < 2$ , todos os estados são localizados, mas o expoente de Lyapunov se aproxima de zero no centro da banda,  $E = 0$ . Por fim, (v) para a condição  $\nu \geq 2$ , todos os estados são exponencialmente localizados, o sistema se comporta como no modelo de Anderson em uma dimensão. Para mais detalhes, indicamos as referências (110, 111).

Voltando ao nosso protocolo de evolução, o operador deslocamento condicional  $\hat{S}$ , é escrito matematicamente através da equação

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{N-1} |n+1\rangle\langle n| \otimes |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \sum_{n=2}^N |n-1\rangle\langle n| \otimes |\downarrow\rangle\langle\downarrow|; \quad (32)$$

de forma que, ao ser aplicado no estado  $|\psi_n\rangle$ , translada os estados internos do caminhante quântico. Ou seja, o estado  $|\uparrow\rangle \otimes |n\rangle$  vai para  $|n+1\rangle$  enquanto que,  $|\downarrow\rangle \otimes |n\rangle$  para  $|n-1\rangle$ .



Agora que descrevemos o modelo e o formalismo que utilizaremos para caracterizar o sistema, estamos prontos para mostrar nossos resultados em detalhes.

### 3.2 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os resultados deste capítulo estão divididos em três seções. Especificamente, (i) caracterizaremos o sistema em relação as propriedades de transporte e energia espectral; (ii) adiante, a influência do grau de aperiodicidade sobre as propriedades de emaranhamento entre os graus de liberdade do sistema e, por fim, (iii) uma análise do comportamento deste emaranhamento no limite assintótico.

#### 3.2.1 PROPRIEDADES DE TRANSPORTE E ENERGIA ESPECTRAL

Para visualizarmos como a aperiodicidade modifica as propriedades dinâmicas do *qubit*, quando inserida na moeda quântica, acompanhamos o perfil da densidade de probabilidade,  $P_n(t)$ , no plano espaço-tempo. Para isso, consideramos que o caminhante quântico possui um estado inicial assimétrico, localizado na posição  $n_0 = N/2$ , com  $N = 80$  sítios. Assim, podemos escrever,

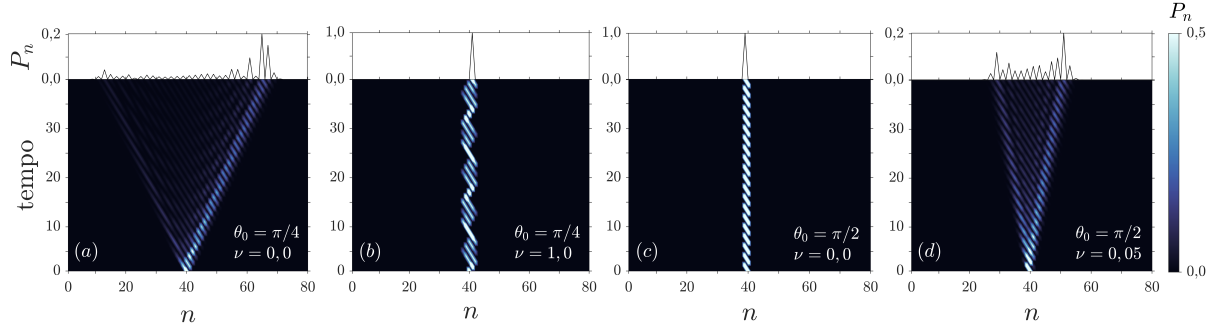
$$|\Psi(0)\rangle = \sum_n |\uparrow\rangle \otimes |n_0\rangle. \quad (33)$$

Essa condição inicial, equação (33), será utilizada para todos os resultados apresentados neste capítulo. No entanto, fizemos uma análise complementar para o comportamento médio de 5.184 condições iniciais e estes resultados encontram-se no anexo A.

Para ficar mais evidente as novas características que surgem no sistema quando ligamos o parâmetro  $\nu$ , utilizamos como referência duas moedas quânticas bem conhecidas na literatura, que são: a Hadamard:  $\theta_0 = \pi/4$ ; e a *Pauli-X*:  $\theta_0 = \pi/2$ , conhecida também como *bit-flip*. A forma como a moeda Hadamard atua sobre um estado  $|\psi\rangle$  já foi mostrada no capítulo (1). O operador *Pauli-X* atua sobre a função de onda do caminhante quântico rotacionando o seu estado atual no espaço  $H_C$  em  $180^\circ$ , ou  $\pi$  radianos, no eixo x da esfera de Bloch. Ou seja,

$$\begin{aligned} \hat{C}_{\pi/2}(|\uparrow\rangle \otimes |n\rangle) &= |\downarrow\rangle \otimes |n\rangle, \\ \hat{C}_{\pi/2}(|\downarrow\rangle \otimes |n\rangle) &= |\uparrow\rangle \otimes |n\rangle. \end{aligned} \quad (34)$$

**Figura 6** – Perfil da evolução temporal da densidade de probabilidade do caminhante quântico com estado inicial  $|\Psi_0\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |40\rangle$ . Em (a)  $\theta_0 = \pi/4$  e  $\nu = 0,0$ ; (b)  $\theta_0 = \pi/4$  e  $\nu = 1,0$ ; (c)  $\theta_0 = \pi/2$  e  $\nu = 0,0$ ; (d)  $\theta_0 = \pi/2$  e  $\nu = 0,05$ .

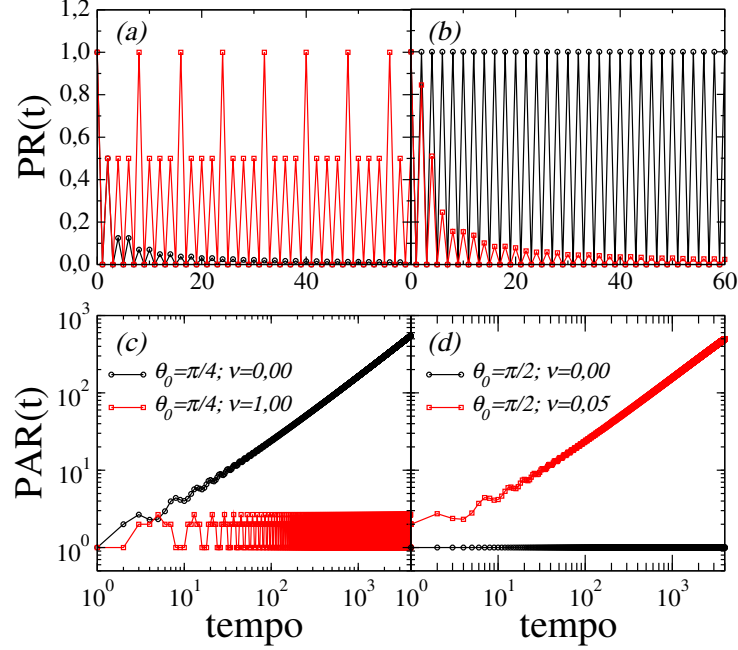


Fonte: Do autor, 2022.

Isto posto, a figura 6 mostra o perfil da densidade de probabilidade para quatro configurações de caminhadas distintas. A fig. 6 (a), mostra o caso em que as moedas Hadamard são distribuídas uniformemente,  $\nu = 0$ , em casa sítio  $n$  da cadeia, gerando um espalhamento da distribuição de probabilidade. Nesse caso, como vimos no capítulo 2, o caminhante quântico apresenta uma baixa probabilidade de ser encontrado em torno da posição inicial e apresenta uma distribuição de probabilidade bem característica com um pico acentuado para a direita, particularidade que surge devido ao estado inicial utilizado, ver equação (33). Por outro lado, quando distribuimos as moedas quânticas de modo inhomogêneo, com grau de aperiodicidade  $\nu = 1$ , o caminhante quântico apresenta um comportamento localizado em torno da posição inicial, como podemos ver na figura 6 (b). Por outro lado, na figura 6 (c), quando atuamos moedas quânticas *Pauli-X*,  $\nu = 0$ , o estado do *qubit* apresenta um comportamento localizado que fica alternado entre dois estados de posições:  $\{|40\rangle, |41\rangle$ , essa dinâmica pode ser entendida através das equações (34). Todavia, mantendo  $\theta_0 = \pi/2$  e adicionando um pequeno grau aperiodicidade na forma em que as moedas são distribuídas ao longo da cadeia,  $\nu = 0.05$ , vemos que a distribuição de probabilidade apresenta um perfil deslocalizado, recuperando, inclusive, o pico distintivo da distribuição para a direita, ver figura 6 (d).

A dinâmica, discutida na figura 6, pode ser melhor caracterizada através de algumas quantidades físicas utilizadas para analisar quantitativamente as propriedades de transporte de um determinado sistema, tais como: a probabilidade de encontrarmos o caminhante

**Figura 7** – Evolução temporal da probabilidade de retorno,  $PR$ , em (a)-(b), e da função participação,  $PAR$ , para as mesmas configurações de  $\theta_0$  e  $\nu$  usadas na figura (1): (a) - (c)  $\theta_0 = \pi/4$  com  $\nu = 0$  e  $\nu = 1$ ; (b) - (d)  $\theta_0 = \pi/2$  com  $\nu = 0$  e  $\nu = 0,05$ . Ambas as quantidades corroboram com as transições entre regimes deslocalizados e fortemente localizados regidos pela não-homogeneidade aperiódica.



Fonte: Do autor, 2022.

em torno de uma posição arbitrária,  $n$ , após  $t$  instantes de tempo, conhecida como probabilidade de retorno, abreviadamente aqui por  $PR$ , e que é definida pela expressão:

$$\begin{aligned} PR(t) &= \sum_{c=\uparrow,\downarrow} |\langle n | \otimes \langle c | \psi(t) \rangle|^2 \\ &= |\langle n | \otimes \langle \uparrow | \psi(t) \rangle|^2 + |\langle n | \otimes \langle \downarrow | \psi(t) \rangle|^2 \end{aligned} \quad (35)$$

Aqui, estamos interessados em medir a probabilidade de retorno do caminhante quântico na posição inicial ( $n_0$ ). Assim, a quantidade descrita pela equação (35) nos diz que, se no regime de longo prazo a probabilidade de retorno saturar em um valor finito, significa que a função de onda apresenta uma dinâmica localizada em torno de  $n_0$ . Por outro lado, se  $PR(t)$  tender a zero, indica que a função de onda escapa da sua localização inicial. Observe, então, que a probabilidade de retorno deve estar contida no intervalo  $[0, 1]$ .

Uma outra quantidade física pertinente que nos ajuda na classificação das propriedades de transporte é a função participação, abreviada aqui por  $PAR$  (112). Esta função nos dá uma estimativa de quantos sítios da rede estão participando efetivamente da dinâmica de deslocalização dos estados e uma ideia do grau de localização de um

determinado estado em relação a base das posições. Podemos definir tal quantidade através da equação

$$PAR(t) = \frac{1}{\sum_n |\psi_n(t)|^4}. \quad (36)$$

Quando a equação (36) apresenta valores proporcionais ao número de sítios, isto é,  $PAR(t) \propto N$  temos o indicativo de que o sistema encontra-se no regime deslocalizado, ou seja, os estados do *qubit* são distribuídos pela cadeia. E quando  $PAR(t)$  satura em valores finitos, dizemos que função de onda encontra-se em um regime localizado.

Com estas definições em mente, calculamos numericamente as quantidades das equações (35) e (36) utilizando as mesmas configurações da figura 6 e observamos que os resultados reforçam a descrição anterior, vejamos. Para o caso homogêneo,  $\nu = 0$ , onde o operador Hadamard ( $\theta_0 = \pi/4$ ) atua igualmente em todas as posições, a probabilidade de retorno cai rapidamente para valores próximos a zero,  $PR(t) \rightarrow 0$ , e a função participação cresce linearmente com o tempo [ver figura 7 (a)-(c), curvas em preto]. Ajustando o parâmetro que controla o grau de aperiodicidade para  $\nu = 1$ , temos que a função de onda é dividida em partes equiprováveis e após oito instantes de tempo é totalmente reagrupada em sua posição inicial com  $PR(t) = 1$ . Podemos observar esse comportamento através das curvas em vermelho das figuras 7 (a)-(c). No entanto, para a configuração com  $\theta_0 = \pi/2$  e  $\nu = 0$  o caminhante quântico apresenta uma dinâmica de alternância entre dois sítios da cadeia. Este comportamento é bem característico de sistemas sob atuação do operador *bit-flip*. Assim, temos que a probabilidade de retorno alterna entre os valores  $PR = 0$  e 1. Nessa configuração a função participação permanece fixa em somente um estado de posição,  $PAR = 1$ , como podemos observar nas curvas em preto da figura 7 (b)-(d). Mantendo  $\theta_0 = \pi/2$  e acrescentando um pequeno grau de aperiodicidade a moeda quântica,  $\nu = 0,05$ , observa-se que os estados do *qubit* começam a ganhar mobilidade abandonando o comportamento localizado e se espalhando pela cadeia, curvas em vermelho da figura 7 (b)-(d), com uma probabilidade de retorno indo para zero e uma participação crescente com o tempo.

Para entendermos a origem desta mudança na mobilidade do caminhante quântico, introduzimos um Hamiltoniano efetivo e exploramos suas pseudo-energias. O elemento básico para a teoria de Floquet é um operador unitário de evolução temporal do sistema ao longo de um período, que denominaremos de  $\hat{F}$ . Esse operador pode ser dado como

uma solução da equação da equação de Schrödinger para o operador evolução temporal. Isto é,

$$i\frac{d}{dt}\hat{U}(t, t_0) = H(t)\hat{U}(t, t_0), \quad (37)$$

onde  $t_0$  é o tempo inicial e  $\hat{U}(t_0, t_0) = 1$ . De modo que, evoluindo por um período  $T$  teremos,  $\hat{F}(t_0) = \hat{U}(t_0 + T, t_0)$ . Podemos escrever estas soluções como,

$$\hat{F}(t_0) = \hat{T} \exp\left(-i \int_{t_0}^{t_0+T} H(t)dt\right), \quad (38)$$

onde  $\hat{T}$  refere-se ao operador de ordenamento temporal. Em correspondência com o teorema de Bloch, é mostrado que qualquer solução da equação de Schrödinger dependente do tempo pode ser escrita como uma superposição de soluções que são autofunções do operador Floquet, isto é,  $\psi_\epsilon(t) = e^{-i\epsilon t}u_\epsilon(t)$ , onde  $u_\epsilon(t)$  é uma autofunção com período  $T$  e  $e^{-i\epsilon T}$  é autovalor do operador  $\hat{F}$ .

Se considerarmos a função  $\psi_\epsilon(t)$  apenas em múltiplos inteiros de  $T$ , a dependência do tempo assemelha-se a uma função de onda com energia  $\epsilon$ . Dizemos então que o operador tem quase-energia  $\epsilon$ . Em uma escala de tempo muito maior do que  $T$ , a evolução de uma função de onda é a mesma que a de um sistema governado por uma equação de Schrödinger estacionária com o Hamiltoniano efetivo eu, ou seja,

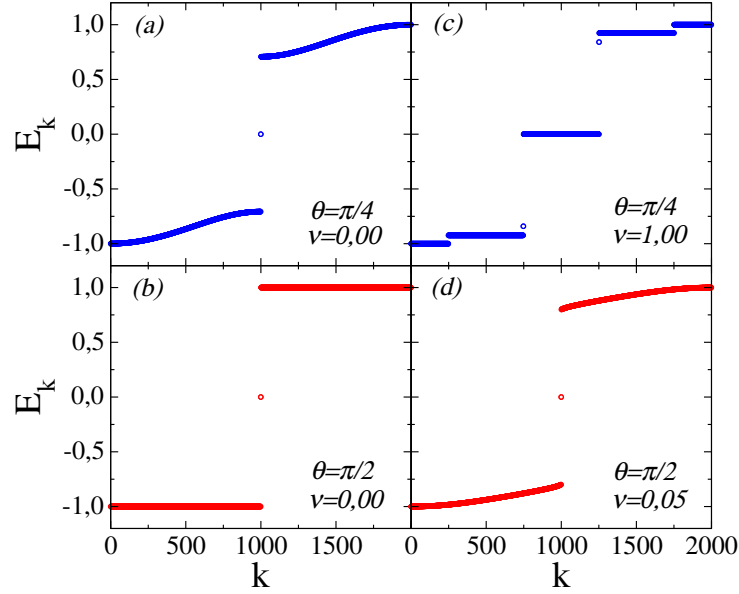
$$\hat{U} = e^{-iH_{eff}}. \quad (39)$$

Como visto anteriormente, o mecanismo por trás do protocolo das CQTDs é a repetição de duas etapas unitárias sem nenhuma medida intermediária. Uma característica importante desse tipo de sistema, é a sua evolução no tempo ser dada por etapas discretas, diferentemente dos sistemas onde a evolução é definida por meio de um Hamiltoniano, onde o tempo é contínuo. Nesse sentido, CQTDs podem ser consideradas como uma modelo de sistema simplificado para sistemas conduzidos periodicamente (com dois pontos por período  $T$ ). Assim, a evolução temporal é dada por

$$|\Psi_t\rangle = \hat{S}\hat{C}|\psi_{t-1}\rangle. \quad (40)$$

Utilizando a mesma metodologia empregada na referência (57), podemos definir  $\hat{U} = \hat{S}\hat{C}$  e associá-lo ao operador Floquet. Com isso, calculamos  $E_k = -i \log(\lambda_k)$  onde  $\lambda_k$  são os autovalores do operador  $\hat{U}$ . Na figura 8, mostramos as energias espectrais para as mesmas

**Figura 8** – Energia espectral  $E_k = -i \log(\lambda_k)$ , com  $\lambda_k$  sendo os autovalores do operador de evolução temporal  $\hat{U}$  para as mesmas configurações utilizadas na figura 8. Associado à presença do grau de liberdade interno, ambos os sistemas exibem duas bandas principais na ausência de não-homogeneidade  $\nu = 0$ : as moedas Hadamard mostram um espectro de energia contínuo dentro das duas bandas principais, enquanto as moedas Pauli-X mostram um espectro de energia degenerado plano em ambas as bandas. A não-homogeneidade de  $\theta_0 = \pi/4$  abre novas lacunas no principal faixas de energia, além de impor uma degeneração,  $\nu = 1$ . Enquanto isso, um pequeno grau de aperiodicidade,  $\nu = 0,05$ , quebra o alto nível de degenerescência em dois sub-bandas para  $\theta_0 = \pi/2$ .

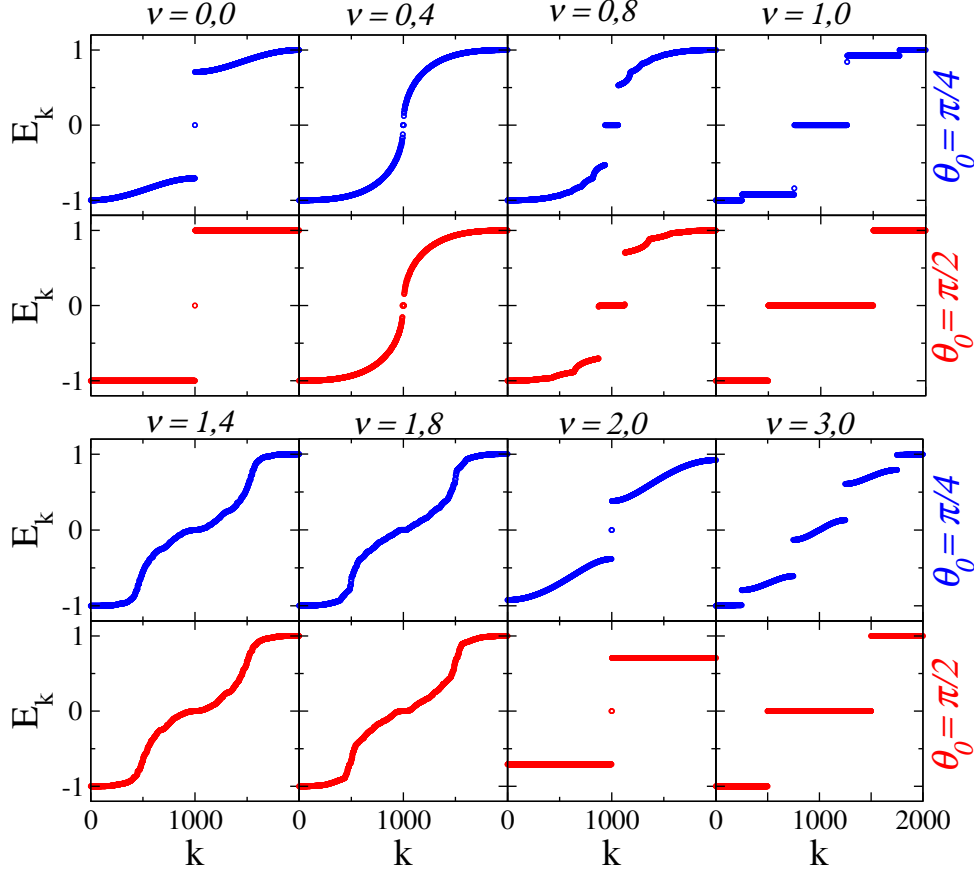


Fonte: Do autor, 2022.

configurações de  $\theta_0$  e  $\nu$  adotadas nas figuras 6 e 7. Para sistemas homogêneos compostos unicamente por moedas quânticas Hadamard,  $\theta_0 = \pi/4$  e  $\nu = 0$ , observa-se duas bandas principais afastadas uma da outra, porém com um espectro de energia contínuo dentro delas. Sistemas homogêneos exibem duas bandas principais, relacionadas à presença do grau de liberdade interno. Quando a dinâmica é regida por moedas *Pauli-X* de forma homogênea,  $\theta_0 = \pi/2$  e  $\nu = 0$ , o sistema apresenta somente dois estados acessíveis, consequentemente teremos um espectro de energia degenerado, como podemos ver na figura 8 (b).

Na figura 8 (c), observamos que ao ajustarmos o grau de aperiodicidade do sistema em  $\nu = 1$  e mantendo  $\theta_0 = \pi/4$ , o espectro de energia do caminhante quântico apresenta novas lacunas, abandonando o perfil de duas bandas de energia contínuas. Os autoestados são localizados dentro dessas sub-bandas, de modo a exibir um aspecto degenerado. Assim, uma combinação linear desses autoestados resulta em uma dinâmica restrita a alguns sítios, corroborando com todas as discussões supracitadas sobre as dinâmicas das figuras (6) e (7). Por outro lado, no regime de fraca inomogeneidade,  $\nu = 0,05$ , quando  $\theta_0 = \pi/2$ ,

**Figura 9** – Espectro de energia  $E_k = -i \log(\lambda_k)$  com  $\lambda$  sendo os autovalores do operador  $\hat{U}$  para  $\theta_0 = \pi/4$  (curvas em azul) e  $\theta_0 = \pi/2$  (curvas em vermelho). Nos oito primeiros quadrados - topo:  $\nu = 0; 0,4; 0,8$  e  $1$ ; para o segundo grupo:  $\nu = 1,4; 1,8; 2$  e  $3$ . No início estágio a não-homogeneidade leva ao desaparecimento da lacuna entre as duas principais bandas. Com o aumento do grau de aperiodica, observa-se a presença de lacunas e estruturas de bandas planas. O ajuste de  $\nu > 1$  fornece um espectro que se assemelha ao descrito pelo modelo 1D Anderson, exceto quando a simetria translacional na não-homogeneidade é recuperado ( $\nu \in \mathbb{Z}^*$ ).

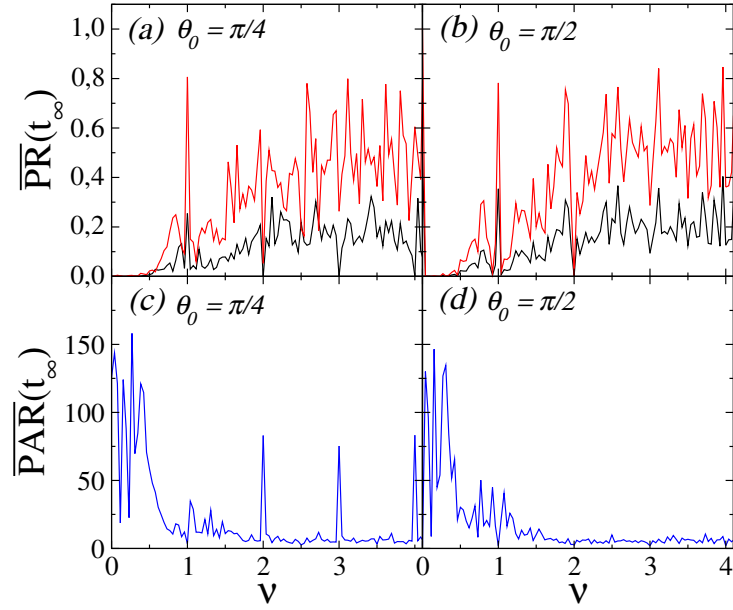


Fonte: Do autor, 2022.

a alta degenerescência de energia é quebrada. Assim, temos que a inhomogeneidade reduz a lacuna entre as duas bandas, figura 8 (d). Esse aspecto favorece para que a função de onda do *qubit* se espalhe ao longo da cadeia.

Uma descrição mais extensa sobre a relação entre o espectro de energia e o comportamento dinâmico das caminhadas quânticas não-homogêneas é mostrada na figura 9. Aqui, calculamos numericamente  $E_k$  para ambas as moedas  $\{\theta_0 = \pi/4, \pi/2\}$  com diferentes configurações de  $\nu$ . No estágio inicial, a falta de homogeneidade induz a largura de cada banda ao seu valor máximo, o que leva a um espectro sem intervalos. Essa natureza lembra o espectro obtido a partir de moedas *Pauli-Z*,  $\theta_0 = 0$ , homogêneas, onde a mobilidade característica é bem conhecida. Com o aumento do grau de aperiodicidade  $\nu$ , surgem

**Figura 10** – Comportamento médio da probabilidade de retorno,  $\overline{PR}(t_\infty)$ , e da função participação,  $\overline{PAR}(t_\infty)$ , em um tempo longo com  $\nu$  variando no intervalo entre  $[0, 4]$ .



Fonte: Do autor, 2022.

novas lacunas, sub-bandas e autoestados degenerados. O surgimento de estados de banda plana pode ser entendido como estados localizados em uma pequena parte da rede. Com o espectro de energia independente do momento, a velocidade do grupo desaparece e a supressão do transporte é observada. Para um valor de  $\nu$  alto o suficiente, os espectros de energia, que se assemelham ao descrito pelo modelo Anderson unidimensional, são observados. No entanto, este último aspecto está ausente para  $\nu \in \mathbb{Z}^*$ , ver figura 9. Com a simetria translacional em algumas configurações de  $\theta_0$  recuperada, alguns aspectos inerentes à moeda original são restaurados, o que pode favorecer o transporte quântico.

A análise anterior sugere que o parâmetro  $\nu$  seja capaz de sintonizar os estados do caminhante quântico entre os regimes localizado e deslocalizado, de modo que, estados deslocalizados são predominantes no regime de baixa inomogeneidade. Assim, avaliamos o comportamento médio da probabilidade de retorno,  $\overline{PR}(t_\infty)$ , e da função participação,  $\overline{PAR}(t_\infty)$ , em tempo longo para valores de  $\nu$  no intervalo  $[0, 4]$ . Na figura 10, mostramos os valores médios de tais quantidades calculados em uma cadeia com  $N = 100000$  sítios, durante um tempo de evolução  $t_{\max} = N/2$  e calculados sobre os últimos 100 instantes de tempo. Além da probabilidade média de encontrarmos o *qubit* na posição inicial,  $n = n_0$  (curva preta), computamos também a probabilidade média de encontrarmos o caminhante em torno dessa posição, ou seja,  $n = n_0, n_0 \pm 1$  (curva vermelha).

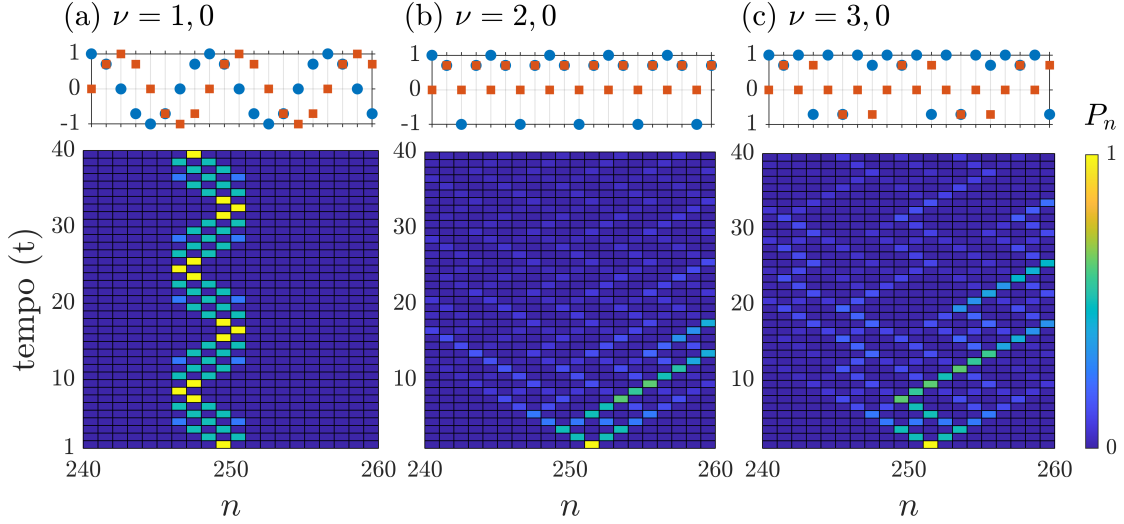


Desse modo, para valores de  $\nu$  menores que  $1/2$ , o comportamento descrito para as duas moedas quânticas,  $\theta_0 = \pi/4, \pi/2$ , é muito similar. Neste regime, de baixa heterogeneidade ( $\nu < 1/2$ ), os estados deslocalizados são bem descritos para ambas as moedas quânticas. Esse comportamento é observado nas figuras 10 (a) e (b), onde  $\overline{PR}(t_\infty) \rightarrow 0$ . Ainda neste regime, observamos nas figuras 10 (c) e (d) que a participação,  $\overline{PAR}(t_\infty)$ , apresenta valores predominantemente altos, indicando que a função de onda do caminhante quântico visita uma porção dos estados de posições, corroborando, assim, com a probabilidade de retorno acima. A medida em que vamos aumentando o grau de aperiodicidade no sistema ( $\nu > 1/2$ ), os estados começam a apresentar uma maior probabilidade de serem encontrados em torno da posição inicial  $n_0, n_0 \pm 1$ , ou seja, a natureza de estados localizados induzida pela inomogeneidade começa a emergir para altos valores de  $\nu$ . Como podemos ver na figura 10, quando  $\nu > 1/2$ , a  $\overline{PR}(t_\infty)$  apresenta valores finitos, enquanto a participação,  $\overline{PAR}(t_\infty)$  possui valores bem baixos.

Ao utilizarmos uma conexão entre as caminhadas quânticas discretas e contínuas, interpretamos esta inomogeneidade aperiódica, dentro de um regime de  $\nu$  baixo, como uma diferença de potencial entre os sítios vizinhos proporcional a  $n^{\nu-1}$ , que desaparece no limite termodinâmico e que favorece o espalhamento da função de onda do caminhante quântico. Para variações abruptas na distribuição das moedas quânticas, as correlações internas tornam-se efetivamente de curto alcance, promovendo interferências destrutivas e induzindo uma caminhada quântica localizada. Em boa concordância com a figura 10, essa premissa é reforçada pela deslocalização da função de onda em torno de  $\nu \in \mathbb{Z}^*$ , quando a inomogeneidade na distribuição das moedas recupera uma simetria translacional. Entretanto, a dependência espacial impõe correlações intrínsecas aos termos de interferência das moedas quânticas, fazendo com que a simetria translacional nem sempre predomine sobre o critério de deslocalização da função de onda.

Para compreendermos melhor os casos em que  $\nu = 1, 2, 3$ , construímos a figura 11. Aqui, mostramos o perfil da densidade de probabilidade,  $P_n$ , do caminhante quântico no plano espaço-tempo. Nos quadros menores (parte superior) calculamos os valores de  $\cos(\theta_0 n^\nu)$  (círculos em azul) e  $\sin(\theta_0 n^\nu)$  (quadrados em laranja), isso nos dá uma estimativa de qual moeda quântica está sendo aplicada em cada uma das posições. Na figura 11 (a), quando  $\nu = 1.0$ , temos um caso não intuitivo onde o caminhante quântico apresenta uma dinâmica parcialmente localizada. Esse comportamento se dá pelo fato de que, nesta

**Figura 11** – Perfil da densidade de probabilidade,  $P_n$ , de uma caminhada Hadamard ( $\theta_0 = \pi/4$ ) no plano espaço-tempo para três valores de  $\nu$  inteiro. Em (a)  $\nu = 1, 0$ ; (b)  $\nu = 2, 0$  e (c)  $\nu = 3, 0$ . Os quadros na parte superior representam os valores de  $\cos(\theta_0)n^\nu$  (círculos em azul) e  $\sin(\theta_0)n^\nu$  (quadrados em laranja). Com isso conseguimos ter uma estimativa de qual moeda quântica estaria atuando em cada posição  $n$ .

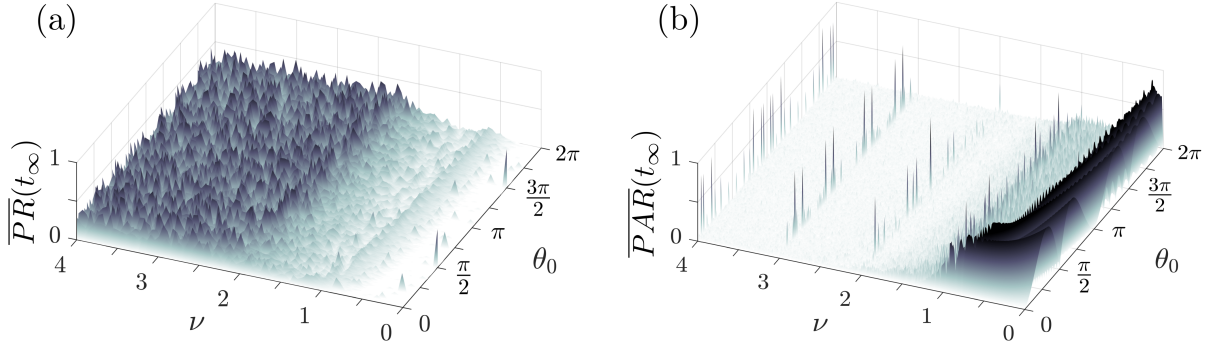


Fonte: Do autor, 2022.

configuração, moedas *Pauli-X* (*bit-flip*) aparecem, para  $n > 2$ , a cada três sítios. Com isso, nestas posições, o estado de *spin* do *qubit* é rotacionado de acordo com a equação (34). Para valores inteiros de  $\nu > 1$  o caminhante apresenta uma dinâmica balística. Isto ocorre porque, nestas cenários, não teremos o aparecimento da moeda *Pauli-X* e a distribuição das moedas quânticas recupera a simetria translacional, favorecendo, assim, a propagação da função de onda, ver figuras 11 (b-c). Para  $\theta_0 = \pi/2$  e  $\nu = 1, 2, 3$ , temos que, para estas configurações, só serão aplicadas duas moedas: *Pauli-X* para as posições ímpares e *Pauli-Z* para as sítios pares.

Uma descrição geral sobre o comportamento dinâmico do caminhante quântico é mostrada na figura 12, onde exibimos diagramas do comportamento médio para a probabilidade de retorno em  $n_0$ ,  $\overline{PR}(t_\infty)$ , e para a função participação,  $\overline{PAR}(t_\infty)$ , no plano  $\nu \times \theta_0$ , nos intervalos  $[0, 4]$  e  $[0, 2\pi]$ , respectivamente. Coletamos o máximo valor entre os dados coletados afim de normalizarmos a função participação. A dependência periódica exibida quando  $\nu = 0$ , onde recuperamos o caso homogêneo, descreve o comportamento bem conhecido para diferentes moedas quânticas. Para a moeda quântica *Pauli-Z*,  $\theta_0 = 0$ , o caminhante quântico se afastará da posição inicial e visitará somente as posições  $+t$  para  $|\psi_0\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |n_0\rangle$ , e  $-t$  para  $|\psi_0\rangle = |\downarrow\rangle \otimes |n_0\rangle$  com probabilidade não-nula. Por outro

**Figura 12** – Diagrama do comportamento médio probabilidade de retorno na posição inicial,  $\overline{PR}(t_\infty)$ , e da função participação,  $\overline{PAR}(t_\infty)$  no plano  $\nu \times \theta_0$ . Caminhadas quânticas deslocalizadas são predominantes para  $\nu < 1/2$ , enquanto a natureza localizada é predominante com aumento de  $\nu$  exceto para  $\nu \in Z^*$ . Este último, que pode estar associado à simetria translacional da não-homogeneidade, parece ser um aspecto relevante sobre a propagação da função de onda ao longo da rede.



Fonte: Do autor, 2022.

lado, para caminhadas quânticas conduzidas pela moeda quântica *Pauli-X*,  $\theta_0 = \pi/2$ , o caminhante permanecerá em torno da posição inicial para todos os passos de tempo. Estes comportamentos estão bem descritos no diagrama da figura 12, onde, para  $\nu = 0$ , a probabilidade de retorno tende a zero [ $\overline{PR}(t_\infty) \rightarrow 0$ ] e a razão de participação média é 1, ou seja,  $\overline{PAR}(t_\infty) = 1$ . Ainda no regime homogêneo, quando  $\theta_0 = \pi/2$ , a probabilidade de sobrevivência média em  $n_0$  apresenta um valor  $1/2$ , este valor está associado a característica da própria caminhada quântica discreta.

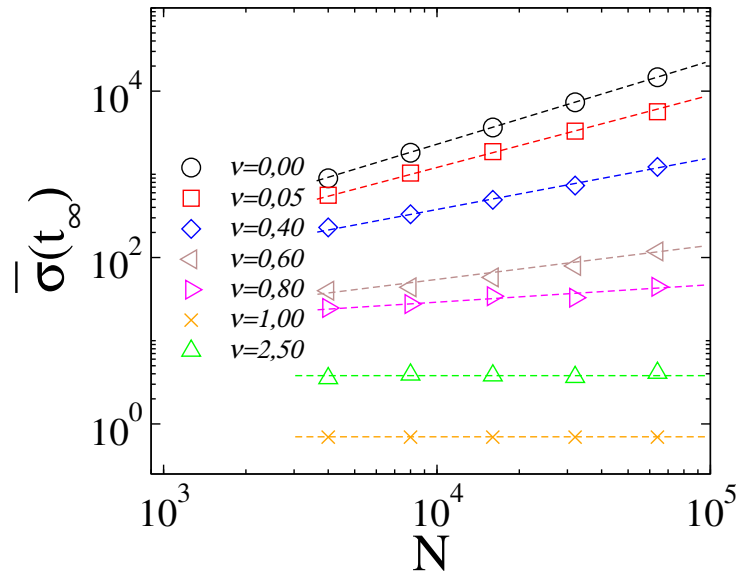
Como vimos até aqui, a desordem e/ou a falta de homogeneidade na distribuição das moedas quânticas induz desvios na propagação balística do pacote de ondas do *qubit*. Assim, a fim de oferecer uma análise complementar, resolvemos explorar o desvio médio quadrático do pacote de ondas. Para isso, vamos definir que

$$\sigma(t) = \sqrt{\sum_n [n - \bar{n}(t)]^2 |\psi_n(t)|^2}, \quad (41)$$

com  $\bar{n}(t)$  sendo a posição média do caminhante quântico. Essa quantidade nos diz que, se após um tempo longo  $\sigma(t) \propto t^1$  teremos que o comportamento do caminhante quântico é balístico com velocidade constante, enquanto que um  $\sigma(t) \propto t^0$  indica que a função de onda apresenta um perfil localizado.

Isto posto, calculamos a largura média do pacote de ondas do caminhante quântico para a moeda Hadamard,  $\theta_0 = \pi/4$ , para vários graus de aperiodicidade  $\nu$ . A figura 13, exhibe um comportamento de escala da largura média do pacote de ondas,  $\bar{\sigma}$  com o

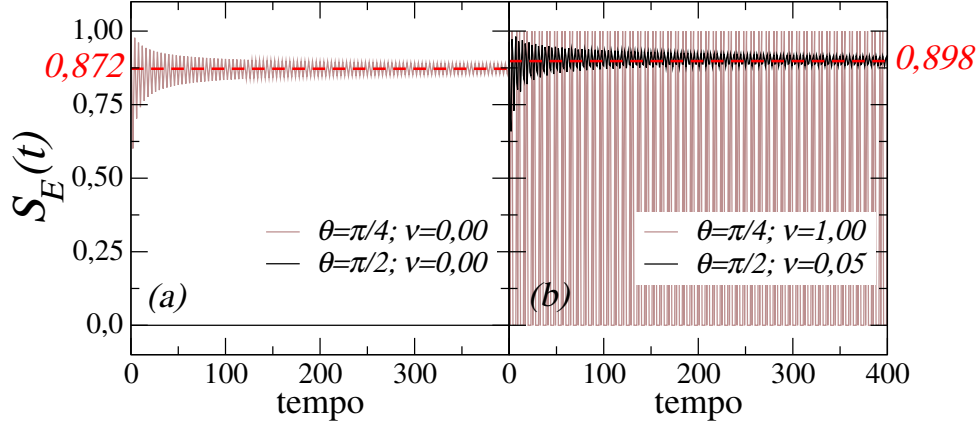
**Figura 13** – Desvio padrão médio em tempo longo da distribuição espacial,  $\bar{\sigma}(t_\infty)$ , versus tamanho da cadeia  $N$  para alguns valores representativos de  $\nu$ . O cruzamento da escala balística para o regime independente de tamanho pode ser efetivamente descrito por um comportamento sub-balístico.



Fonte: Do autor, 2022.

tamanho da cadeia,  $N$ , no intervalo de  $N = 4000$  e  $N = 64000$ . Como esperado, quando  $\nu = 0$ , recuperamos o caso homogêneo, onde, o caminhante quântico encontra-se em um regime com estados completamente deslocalizados, ou seja,  $\bar{\sigma}(t_\infty) \sim N$ . Todavia, conforme aumentamos o valor do parâmetro  $\nu$ , observamos um declínio do perfil balístico para uma dinâmica localizada que independe do tamanho da cadeia ( $\nu = 1, 2.5$ ), ou seja,  $\bar{\sigma}(t_\infty) \sim N^0$ . Corroborando com os resultados apresentados anteriormente. No regime intermediário a largura do pacote de ondas apresenta um comportamento sublinear com o tamanho da cadeia  $N$ . Além disso, ressaltamos que este comportamento de  $\sigma(t_\infty)$  não exibe uma variação continuamente suave à medida que o grau de aperiodicidade aumenta. Conforme mostrado anteriormente, com o aumento de  $\nu$  identificamos algumas configurações cuja densidade de probabilidade é localizada em torno de poucos sítios, mas com o *qubit* desenvolvendo uma caminhada quântica orientada (semelhante ao andador submetido a moedas *Pauli-Z* homogeneamente distribuídas). Além disso, sem perda de generalidade, o comportamento apresentado na figura 13 é recuperado para outros valores de  $\theta_0$ . Com isso, finalizamos as análises em torno das propriedades de transporte.

Figura 14 – Evolução temporal da entropia de Von Neumann para as mesmas configurações da figura 6, isto é, para  $\theta_0 = \pi/4$  e  $\pi/2$ . Em (a) temos uma caminhada uniforme,  $\nu = 0$ , e em (b) introduzimos a inhomogeneidade aperiódica através do parâmetro  $\nu \neq 0$ . Para um sistema livre de desordem, a moeda Hadamard induz um emaranhamento entre os graus de liberdade posição-*spin* saturando em torno de 0,872. Enquanto a moeda *Pauli-X* não gera emaranhamento para a condição inicial utilizada. Inserindo aperiodicidade na distribuição das moedas quânticas, as propriedades de emaranhamento são significativamente alteradas.



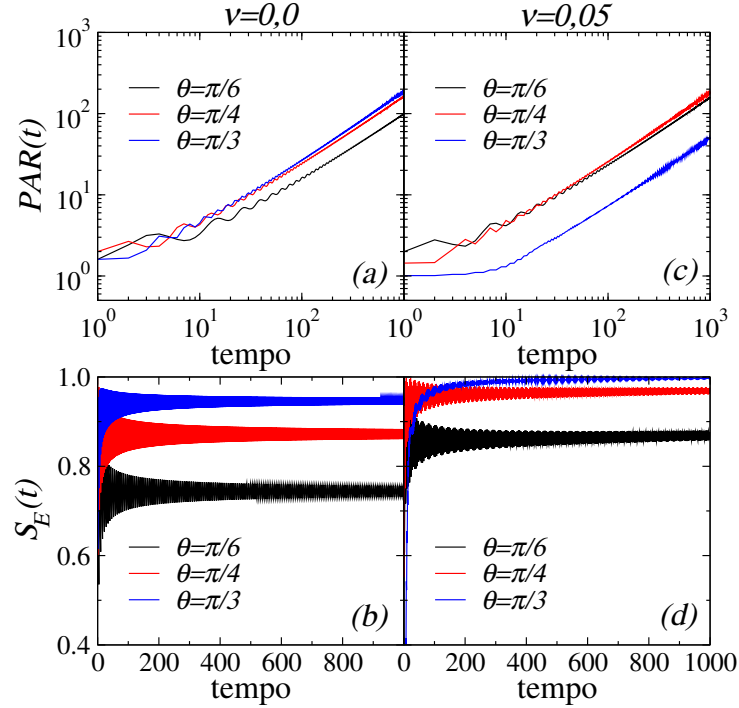
Fonte: Do autor, 2022.

### 3.2.2 PROPRIEDADES DE EMARANHAMENTO

No segundo momento desse capítulo, trabalharemos as propriedades de emaranhamento quântico que surgem ao inserirmos inhomogeneidade na rede. Como visto, o emaranhamento, no contexto das CQTDs, é uma medida de correlação quântica entre os subsistemas de um sistema bipartite. Investigaremos o emaranhamento entre os estados pertencente ao espaço  $H_C$  e  $H_P$ . Calculamos a entropia de Von Neumann da matriz de densidade reduzida através do formalismo descrito no capítulo 1.

Dito isto, mostramos na figura 14 a evolução temporal da entropia de Von Neumann  $S_E(t)$  para um caminhante quântico com estado inicial dado pela equação (5), localizado no centro de em uma rede com  $N = 1000$  e sujeito as mesmas configurações utilizadas na figura 6, ou seja, para  $\theta_0 = \pi/4$  e  $\pi/2$ . Para um sistema homogêneo dirigido pela moeda Hadamard,  $\theta_0 = \pi/4$  e  $\nu = 0$ , foi mostrado no capítulo 1 que no limite em que o número de passos é muito grande, o emaranhamento satura em um valor finito bem definido,  $S_E(t \rightarrow \infty) \approx 0,872$ , em total concordância com a literatura. Ajustando o grau de aperiodicidade da distribuição das moedas quânticas para  $\nu = 1$ , o emaranhamento posição-*spin* exibe um comportamento oscilatório entre três regimes: não-emaranhado,  $S_E(t) = 0$ , parcialmente,  $S_E(t) = 0,81$ , e totalmente emaranhado,  $S_E = 1$ . Esta característica é

**Figura 15** – Evolução temporal da função participação  $PAR(t)$ , quadros (a)-(c), e entropia de Von Neumann  $S_E$ , quadros (b)-(d), para moedas  $\theta_0 = \pi/6, \pi/4$  e  $\pi/3$ . Mostramos comportamentos na ausência,  $\nu = 0,0$ , e na presença,  $\nu = 0,05$ , de não-homogeneidade, em (a)-(b) e (c)-(d), respectivamente. Enquanto a  $PAR(t)$  exibe um caráter deslocalizado em ambos os regimes, observamos um aumento do grau de emaranhamento induzido pela não-homogeneidade para todas as moedas quânticas.

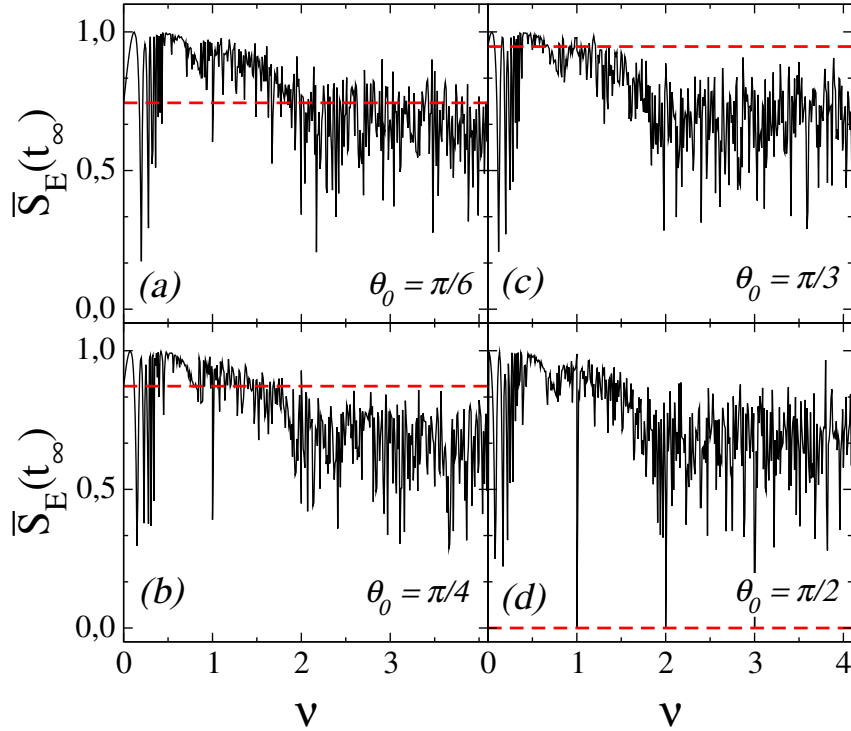


Fonte: Do autor, 2022.

consistente com o comportamento dinâmico descrito na figura 6 e 11. Contudo, enquanto as moedas homogêneas *Pauli-X*,  $\theta_0 = \pi/2$  e  $\nu = 0$ , não geram emaranhamento, uma vez que o estado inicial dado pela equação (5) será sempre totalmente localizado, ao adicionarmos um pequeno grau de aperiodicidade,  $\nu = 0,05$ , observamos a geração emaranhamento que oscila próximo a  $S_E \approx 0,898$ . Essa última característica vem do surgimento da dispersão no espectro de energia, conforme descrito nas figuras 9.

Na literatura, trabalhos relatam que caminhadas quânticas com inomogeneidade do tipo estática exibem os piores resultados em termos de geração de emaranhamento, quase sempre o reduzindo quando comparado com o caso homogêneo (50, 55). Diante de mudanças significativas na capacidade de gerar emaranhamento induzido pela dependência espacial aperiódica, relatado na figura 14, investigamos se este tipo de não-homogeneidade estática é capaz de torná-lo mais propenso a aumentar essa correlação entre os graus de liberdade do sistema.

**Figura 16** – Comportamento médio do emaranhamento quântico  $[\bar{S}_E(t_\infty)]$  versus  $\nu$ , para  $\theta_0 = \pi/6, \pi/4, \pi/3$  e  $\pi/2$ . As linhas tracejadas descrevem os respectivos valores de  $S_E(t_\infty)$  em sistemas homogêneos. Observamos que existem muitas configurações de não-homogeneidade nas quais há um aumento no grau de emaranhamento, sendo encontradas predominantemente para os menores valores de  $\nu$ . À medida que  $\nu$  cresce, o aspecto aleatório que governa a distribuição das moedas quânticas enfraquece o emaranhamento.

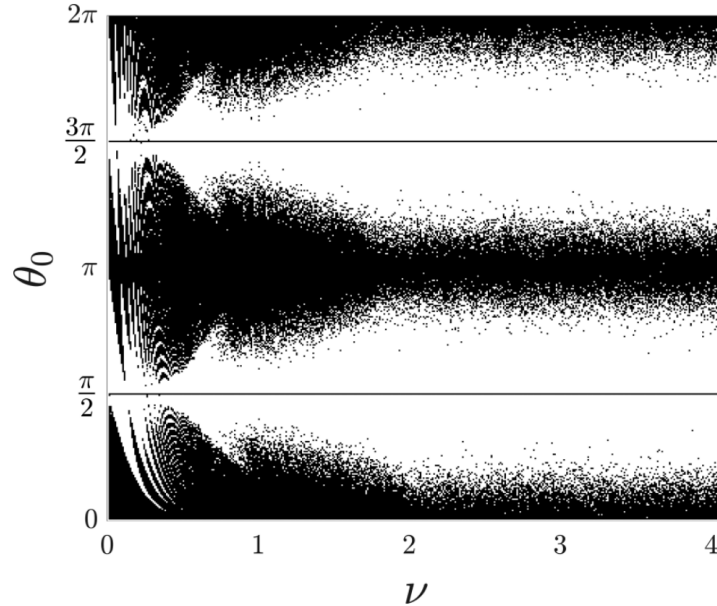


Fonte: Do autor, 2022.

Na figura 15, nos concentramos em configurações que exibem um caráter deslocalizado. Consideramos  $\theta_0 = \pi/3, \pi/4, \pi/6$ , onde os sistemas com heterogeneidade espacial,  $\nu = 0,05$ , são mostrados nos painéis da direita. Observamos um aumento do poder de emaranhamento induzido pela correlação aperiódica introduzida na cadeia, mesmo para uma configuração que tem um forte emaranhamento em um regime homogêneo ( $\theta_0 = \pi/3$ ). Tal habilidade não foi relatada para não-homogeneidade estática, apenas para não-homogeneidade dinâmica e flutuante (50, 55). Uma vez que ambos os estudos descrevem distribuições aleatórias, para as moedas quânticas ou fase no local, identificamos que as correlações internas na distribuição da desordem podem aumentar a eficiência na capacidade de emaranhar.

Diante disso, buscando uma melhor compreensão das consequências geradas pela inserção de inhomogeneidade aperiódica na distribuição das moedas quânticas sobre o grau de emaranhamento, calculamos na figura 16, o comportamento do emaranhamento médio

**Figura 17** – Diagrama  $\theta_0$  versus  $\nu$  que revela o aumento na capacidade de emaranhar graus de liberdade internos e externos com respeito à distribuição homogênea de moedas quânticas. Não estamos preocupados com uma porcentagem de ganho, de modo que os pontos pretos significam um aumento da média de emaranhamento em tempo longo, enquanto os pontos brancos denotam um enfraquecimento. O aumento do emaranhamento é predominante para os valores iniciais de  $\nu$ . À medida que  $\nu$  cresce, o aumento é restrito a valores próximos a  $\theta_0 = 0, \pi$  e  $2\pi$ , bem como  $\theta_0 = \pi/2$  e  $3\pi/2$ .



Fonte: Do autor, 2022.

$\bar{S}_E(t)$  variando o grau de aperiodicidade  $\nu$  no intervalo de  $[0, 4]$  com incremento  $\delta\nu = 0,01$ , para quatro configurações de  $\theta_0 : \pi/6, \pi/4, \pi/3$  e  $\pi/2$ . Para estabelecermos uma referência, marcamos linhas tracejadas que descrevem o emaranhamento para o caso homogêneo,  $\nu = 0$ , em cada um dos  $\theta_0$ . Observamos que, para várias configurações de aperiodicidade, o grau de emaranhamento é maior que para o caso homogêneo. Essas configurações são encontradas predominantemente para valores pequenos de  $\nu$ . Em contraste com a literatura, encontramos regimes propensos a apresentarem um sistema maximamente emaranhando. A medida em que aumentamos o grau de aperiodicidade, o aspecto aleatório que governa a distribuição das moedas quânticas impulsiona o enfraquecimento do emaranhamento posição-moeda, o que está de acordo com a descrição. Para o caso em que  $\theta_0 = \pi/2$  e  $\nu$  inteiro, o sistema apresenta emaranhamento nulo, uma vez que, em todas essas configurações, o estado do caminhante quântico encontra-se completamente localizado, implicando, assim, em  $\bar{S}_E = 0$ .

Para generalizarmos todo o comportamento do emaranhamento, estendemos nossos experimentos numéricos para oferecer um diagrama no plano  $\theta_0$ - $\nu$ , que revela esse aprimo-



ramento na capacidade de entrelaçar o estado interno com os de posições, ver figura 17. Aqui, não estamos preocupados com o percentual de aumento, apenas com o crescimento do emaranhamento médio quando comparado com seu respectivo valor no caso homogêneo. Assim, os pontos pretos indicam qualquer aumento no emaranhamento médio, enquanto os pontos brancos denotam um enfraquecimento nessa correlação. Para  $\theta_0 = \pi/2$  e  $\theta_0 = 3\pi/2$  observamos uma linha preta, descontínua somente em  $\nu$  inteiro, em uma vez que sistemas homogêneos de exibição de moedas *Pauli-X*,  $\overline{S}_E(t_\infty) = 0$ . O aumento no emaranhamento concentra-se em torno operadores moedas *Pauli-Z*, configurações em que o andador se afasta da posição inicial sem interferência e também mostra ausência de emaranhamento, para está configuração dentro de um regime homogêneo. Para pequenos valores de  $\nu$  o ganho na capacidade de gerar emaranhamento é predominante, enquanto tornando-se restrito a valores próximos de  $\theta_0 = 0, \pi$  e  $2\pi$  a medida em que  $\nu$  cresce.

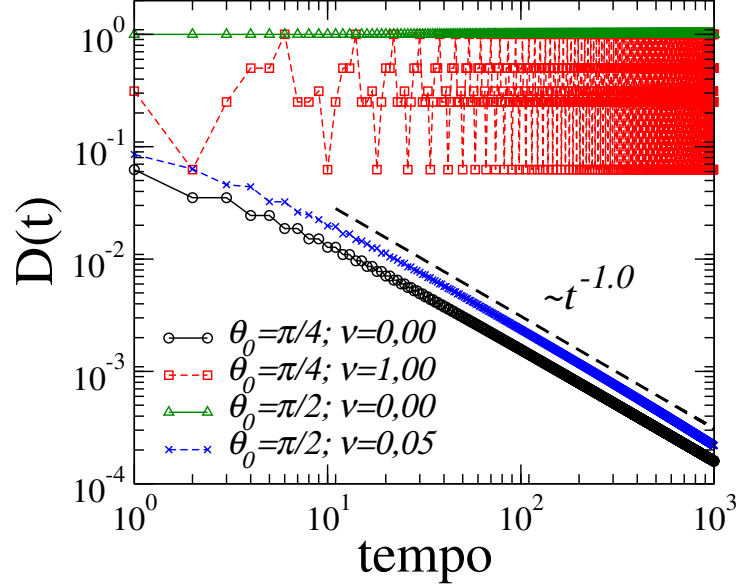
### 3.2.3 LIMITE ASSINTÓTICO

Outrora, no trabalho (50), os autores utilizaram dois argumentos para satisfazer o teorema proposto para mostrar que no limite assintótico, uma desordem dinâmica induzia o emaranhamento máximo entre os graus de liberdade de uma CQTD. Especificamente: (i) a necessidade do tipo de desordem inserida no sistema possuir um caráter dinâmico para permitir uma solução trivial e (ii) uma hipótese assintótica. Como foi mostrado na seção anterior, existem configurações de inomogeneidade aperiódica estática que levam o emaranhamento para seu valor máximo. Ademais, foi relatado que sistemas regidos por moedas quânticas Hadamard (113), sistemas com inomogeneidades dinâmicas e flutuantes apresentam limites assintóticos (50, 55). Por outro lado, sistemas com não-homogeneidade estática não têm limite assintótico (55), com o emaranhamento, após um tempo longo, flutuando em torno de um valor médio sem sinais de convergência. Nesse contexto, inserimos mais uma análise complementar. Agora, direcionada ao limite assintótico do emaranhamento.

O limite assintótico é definido sobre a matriz densidade reduzida  $\rho_C(t) \in H_C$ , onde  $\rho_C(t) = Tr_P[\rho(t)]$  e  $\rho \in H_C \otimes H_P$ . Em outras palavras, é definida sobre o espaço dos *spins*. Com isso, sempre que o sistema quântico satisfizer a condição

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_C(t+1) - \rho_C(t) = 0; \quad (42)$$

**Figura 18** – Evolução temporal da equação (44) para  $\theta_0 = \pi/4$ ,  $\nu = 0$  e 1;  $\theta_0 = \pi/2$ ,  $\nu = 0$  e 0,05. Como em sistemas governados por moedas de Hadamard, sistemas com não-homogeneidade estática também podem exibir valor assintótico, que obedece a uma lei de potência. A linha tracejada é um guia para os olhos mostrando  $D(t) \sim t^{-1}$ .



Fonte: Do autor, 2022.

Dizemos que esse sistema possui um limite assintótico e, consequentemente, sendo uma condição suficiente, mas não necessária, para levar o emaranhamento ao seu valor máximo, isto é,  $S_E \rightarrow 1$ . Nesse contexto, uma forma de validarmos essa condição, ainda que numericamente, é por meio do traço da distância entre a matriz densidade no passo de tempo  $t$  e na sua adjacente em  $t + 1$ . Assim, podemos escrever,

$$D[\rho_C(t+1), \rho_C(t)] = D(t) = \frac{1}{2} \text{Tr}[|\rho_C(t) - \rho_C(t-1)|]; \quad (43)$$

manipulando a equação (43), podemos escrevê-la em termos de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , previamente definidos no capítulo 1. Assim, temos,

$$D(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{[\alpha(t) - \alpha(t-1)]^2 + |\gamma(t) - \gamma(t-1)|^2}. \quad (44)$$

Na figura 18, mostramos os resultados dessa análise para as moedas Hadamard ( $\theta_0 = \pi/4$ ), *Pauli-X* ( $\theta_0 = \pi/2$ ) e para  $\nu = 0; 0,05$  e 1. No que tange os sistemas homogêneos,  $\nu = 0$ , com moedas Hadamard, temos que eles apresentam um limite assintótico. No entanto, encontramos  $D(t) \sim t^{-1}$ , em contraste com  $D(t) \sim t^{-1/2}$  relatado em (50). Atribuímos essa diferença às condições iniciais adotadas. Aqui, utilizamos como condição inicial um estado assimétrico completamente localizado em uma posição  $n_0$ , isto é,  $|\Psi_0\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |n_0\rangle$ .

O trabalho apresentado pelos autores foi construído por meio de uma média entre 16.384 condições iniciais deslocalizadas (sobreposição entre as posições  $|-1\rangle$  e  $|1\rangle$ ). Todavia, para  $\theta_0 = \pi/4$  e o grau de aperiodicidade  $\nu = 1$  o sistema não apresenta um limite assintótico, visto que, como podemos observar na curva em vermelho na figura 18, a distância entre os estados satura em uma quantidade finita. Para as moedas *Pauli-X*, a distância entre os estados exibe tendências opostas: embora não tenha limite assintótico no caso homogêneo,  $\nu = 0$ , com uma inomogeneidade aperiódica fraca,  $\nu = 0,05$  exibe um limite assintótico, que obedece a uma dependência de lei de potência  $D(t) \sim t^{-1}$ , curva em azul. Além disso, podemos ver o caso não-homogêneo de moedas *Pauli-X* exibindo um coeficiente linear ligeiramente inferior ao exibido por moedas Hadamard homogêneas. Assim, relatamos a possibilidade de induzir um limite assintótico mesmo em não-homogeneidade estática, fortalecendo os resultados apresentados na seção anterior.

### 3.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, estudamos as propriedades de localização e emaranhamento em caminhadas quânticas governadas por dependência espacial aperiódica na distribuição de moedas quânticas. Com uma distribuição ajustável por meio de um único parâmetro,  $\nu$ , mostramos a existência de caminhadas quânticas deslocalizadas e localizadas, bem como o ajuste adequado da aperiodicidade para desenvolver ambas. Com a análise dos espectros de energia, obtida a partir de um Hamiltoniano efetivo e da natureza de seus autovalores, tanto os regimes deslocalizados quanto os localizados puderam ser melhor compreendidos. Na fase inicial a heterogeneidade leva ao desaparecimento do (*gap*) entre duas bandas principais, o que justifica o comportamento deslocalizado observado para  $\nu < 0,5$ . Com o aumento de  $\nu$  surgem lacunas e bandas planas nos espectros de energia, o que justifica a supressão do transporte detectado para  $\nu > 0,5$ . Para  $\nu$  suficientemente alto, o espectro de energia se assemelha ao descrito pelo modelo 1D de Anderson. A simetria translacional na não-homogeneidade, recuperada para  $\nu \in \mathbb{Z}^*$ , mostra-se um aspecto relevante, que favorece caminhadas quânticas deslocalizadas.

Para o emaranhamento entre os espaços de posição e da moeda ( $H_P \otimes H_C$ ), tomando como referência a distribuição homogênea das moedas quânticas, identificamos muitos cenários em que se observa uma melhora na capacidade de gerar emaranhamento. Embora

os resultados tenham sido relatados para um caminhante cujo estado inicial é dado por  $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |n_0\rangle$ , observamos que a fenomenologia é predominante entre as diferentes configurações de estados de um *qubit* (ver anexo A). Assim, esse comportamento traz novas informações sobre o papel desempenhado pela aperiodicidade no emaranhamento quântico para sistemas estáticos não-homogêneos, relatado anteriormente como quase sempre reduzindo o emaranhamento quando comparado com o caso homogêneo.

Além disso, uma vez que sistemas com heterogeneidade estática foram relatados como não tendo limite assintótico, estendemos a análise para mostrar que a heterogeneidade espacial aperiódica é capaz de induzir um limite assintótico ao emaranhamento. Para concluir, com as recentes conquistas experimentais em configurações ópticas (41), acreditamos que o esquema aqui proposto é viável para circuitos integrados de guias de onda. A heterogeneidade espacial proposta aqui seria ajustada nos divisores de feixe dispostos em uma rede de interferômetros Mach-Zehnder, uma vez que cada divisor de feixe implementa a operação de moeda quântica.

## Caminhadas quânticas auto-armadilhadas

Sistemas nos quais a evolução efetiva é governada por uma equação não-linear, estão presentes em muitos ramos da ciência, como óptica (114, 115, 116), biologia (117), condensados de Bose-Einstein (CBEs) (118, 119, 120) e física do estado sólido (121, 121, 64, 122). Em meios ópticos, por exemplo, efeitos não-lineares decorrem de mudanças induzidas pelo campo no índice de refração do meio onde está ocorrendo a propagação (114, 115, 116), enquanto para os CBEs a não-linearidade está relacionada a interações interatômicas (118, 119, 120). Além disso, temos os efeitos não-lineares que surgem em decorrência das vibrações da rede na descrição dinâmica de excitações elementares (117, 121, 121, 64, 122). Entre os fenômenos mais interessantes relacionados à não-linearidade estão os estados de auto-aprisionamento. Quando associadas a modos deslocalizados, as excitações iniciais são exibidas como uma propagação de assinatura sem espalhamento (preservação da sua forma), devido a um equilíbrio entre efeitos da não-linearidade e correlação linear (dispersão, difração e difusão) (119, 120, 121, 121, 64, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130). Todavia, a ausência de propagação também é um efeito notável dos estados de auto-aprisionamento. Nesse caso, uma excitação inicial é induzida ao aprisionamento, com uma densidade de probabilidade finita de encontrá-la em uma região da rede quando o acoplamento não-linear está acima de um valor característico (131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138).

Ambos os cenários têm sido amplamente estudados em diferentes áreas. No contexto de fibras ópticas, por exemplo, o emprego de recursos do tipo sóliton para comunicações ópticas tem sido explorado por (123, 124, 125, 126). Estruturas tipo sólitons também foram relatadas como mecanismos subjacentes do transporte de portadores de carga de polímeros

condutores (64, 122, 128, 129, 130). Foram relatados feixes de vórtices auto-aprisionados azimutalmente estáveis em valores moderados da intensidade de entrada, nos quais a saturação da não-linearidade refrativa e o efeito supressor de instabilidade da absorção de três fótons desempenham um papel fundamental (134). Condensados de Bose-Einstein dirigido-dissipativos em um sistema Josephson de dois modos foram usados para obter o efeito Josephson de corrente alternada com mágnons, bem como auto-aprisionamento quântico macroscópico em um mágnon CBEs (138).

Um dos primeiros estudos e, quiza, um dos mais interessantes, relatando os fenômenos não-lineares emergentes em CQTDs foi o de Navarrete *et al.* (68). Os autores incrementaram uma auto-modulação de fase na função de onda durante a evolução do caminhante quântico. Com isso, foi possível classificar três cenários para a dinâmica do *qubit*. Essa classificação foi feita de acordo com o comportamento da distribuição de probabilidade a medida em que a intensidade não-linear ia sendo alterada lentamente. Restrito a CQTDs regidas apenas por moedas quânticas Hadamard, estruturas do tipo sóliton e dinâmicas caóticas foram relatadas. Deixando assim uma lacuna, o que aconteceria com a dinâmica do caminhante quântico se levássemos em consideração a aplicação de outras moedas quânticas em conjunto com a não-linearidade?

Embora aspectos não-lineares tenham sido relatados no contexto de caminhadas quânticas discretas no tempo (CQTDs), um entendimento completo da fenomenologia ainda está distante. Inúmeras maneiras de estudar estes efeitos, em que sua fonte emerge de diferentes estruturas, já foram introduzidas na literatura (139, 140, 141, 48, 142, 143). As caminhadas quânticas geralmente são reproduzidas experimentalmente através de elementos ópticos lineares que simulam o movimento de um caminhante quântico. No contexto da não-linearidade, essas podem ser introduzidas via óptica não-linear, ou permanecendo dentro da óptica linear, através da introdução de elementos de realimentação condicionados à saída de um fotodetector. Como por exemplo, em (139), Shikano *et al.* propuseram o modelo de caminhadas quânticas em tempo discreto realimentada, que consiste em um passeio quântico não-linear no qual o operador moeda quântica depende da distribuição de probabilidade dos estados da moeda nos sítios vizinhos mais próximos no instante de tempo anterior. Com isso, mostraram que nesse modelo as CQs apresentaram uma difusão lenta anômala, que é caracterizada pela equação de difusão de meios porosos, diferentemente do modelo convencional das CQTDs, apresentado no capítulo 2, que apresenta um transporte

balístico. Ainda utilizando o modelo de CQTDs com realimentação, os autores (140) mostraram que a dinâmica de uma partícula de Dirac não-linear pode ser simulada por meio de caminhadas quânticas não-lineares implementadas em um sistema óptico com um esquema de realimentação baseado em medição. Com isso, mostraram que a dinâmica induzida pela realimentação dependente do instante anterior introduz um mecanismo de auto-acoplamento, de modo que, as partículas de Dirac apresentem um comportamento tipo solitônico. Outra proposta experimental surge em (144), onde os autores propõem um esquema experimental de uma caminhada quântica bidimensional para um número de passos infinitos. A proposta é baseada no momento angular orbital dos fótons em conjunto com uma não-linearidade de Kerr cruzada. A simulação numérica mostra que uma configuração de parâmetro adequada garante a caminhada por passos infinitos em uma grade bidimensional com quase 100% de probabilidade de sucesso. Mais recentemente, os autores, em (141), inseriram um operador deslocamento condicional modificado, onde levou-se em consideração uma dependência com a probabilidade de ocupação local, em uma caminhada quântica Hadamard. Essa interação é responsável por uma contribuição não-linear de terceira ordem que é encontrada em muitos contextos físicos. Com isso, mostraram o surgimento de um rico conjunto de perfis dinâmico, incluindo auto-aprisionamento na posição inicial. Uma característica marcante desse modelo é a não preservação da normalização global.

Efeitos não-lineares em caminhadas quânticas também foram explorados adicionado não-linearidade diretamente na moeda quântica (142, 143). Em (142), os autores inseriram o fator não-linear com dependência das amplitudes de probabilidade locais no parâmetro que controla a quiralidade do operador moeda quântica ( $\theta$ ). Dessa forma, através de uma CQTDs com condições periódicas de contorno, mostraram a existência de um conjunto de modos respirantes estacionários e móveis com caudas espaciais super-exponenciais, isto é, as caudas das distribuições de probabilidade apresentam um decaimento mais rápido que exponencial. A competição entre desordem e interação não-linear também foi explorada. Em (143), Vakulchu *et. al.* utilizaram o protocolo das CQTDs para confirmarem um comportamento sub-difusivo universal com expoente  $1/3$ , que, outrora, apresentado nas redes de Gross-Pitaevskii. Isso ocorre porque qualquer força de não-linearidade diferente de zero moverá completamente o pacote de ondas, destruindo, assim, a localização de Anderson (145). Ao investigar o efeito da desordem espacial não-linear nos estados de borda

na interface entre duas regiões topologicamente diferentes, a preservação da propagação balística do caminhante foi descrita mesmo para acoplamentos não-lineares muito fortes em (146). No entanto, os autores chegaram a essa conclusão utilizando um tempo de evolução muito curto (1000 instantes de tempo), o que deixa o trabalho fragilizado e passível a críticas.

Neste capítulo, estudamos a existência e caracterização de fenômenos de auto-aprisionamento em caminhadas quânticas de tempo discreto. Considerando uma não-linearidade do tipo Kerr, associamos uma aquisição da fase dependente da densidade de probabilidade,  $P_n$ , do caminhante enquanto ele se propaga na rede. Ajustando o parâmetro não-linear e as moedas quânticas, mostraremos a existência de diferentes regimes dinâmicos para a caminhada quântica, incluindo aqueles com estruturas tipo sólitons viajantes ou localizados por auto-aprisionamento.

#### 4.1 CAMINHADA HADAMARD NÃO-LINEAR

Em 2007, Navarrete *et. al.* (68) apresentaram um dos primeiros modelos de caminhada quântica em tempo discreto com uma dependência não-linear. Nessa proposta, os autores adicionaram ao protocolo de evolução temporal um operador unitário que inclui uma fase com dependência da distribuição de probabilidade do caminhante quântico,  $P_n$ , no instante de tempo anterior. Nesta seção, iremos utilizar a mesma notação continua no trabalho em (68). Os autores consideraram que os estados de base no espaço da moeda,  $H_C$ , são dados pela representação:  $\{|u\rangle, |d\rangle\}$ , referentes a *up* e *down*, respectivamente. Com isso, um vetor de estado genérico é escrito como uma superposição linear entre esses dois estados, isto é,  $|\psi(t)\rangle = \sum_m [u_{m,t} |u, m\rangle + d_{m,t} |d, m\rangle]$ , onde  $u_{m,t}$  e  $d_{m,t}$  são amplitudes de probabilidade e satisfazem a condição de normalização. Para o caso não-linear proposto, a equação que rege a dinâmica é escrita como:

$$\hat{U}(t) = \hat{U}_d \hat{U}_C \hat{U}_{nl}(t-1), \quad (45)$$

onde,  $\hat{U}_C$ , é uma transformação de moeda quântica Hadamard,  $\hat{U}_d$ , o operador deslocamento condicional e,  $\hat{U}_{nl}$ , o operador unitário que adquire uma fase não-linear dependente da distribuição de probabilidade.



Para generalizarmos tal operador, podemos escrever que,

$$\hat{U}_{nl}(t) = \sum_{c=u,d} \sum_n e^{iF_c(n,t)} |c, n\rangle \langle c, n|, \quad (46)$$

$F_c(n, t) = (c = u, d)$  é uma função arbitrária da probabilidade  $P_n^u(t)$  e  $P_n^d(t)$ . O papel do operador  $\hat{U}_{nl}(t)$  é adicionar uma fase dependente da probabilidade de cada componente do grau de liberdade interno. Com esta formulação, quando  $F_C = 0$ , recuperamos a caminhada quântica Hadamard linear. Neste trabalho, os autores consideraram a forma mais simples, onde a fase não-linear é devido a uma não-linearidade do tipo Kerr que atua separadamente nos dois estados da moeda, isto é,

$$F_c(n, t) = 2\pi\alpha|c_{n,t}|^2, \quad (47)$$

com  $c = u, d$ . Assim, aplicando o operador dado pela equação (45), encontramos a seguinte relação de recorrência,

$$\begin{aligned} u_{n,t+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}u_{n-1,t}e^{i2\pi\alpha|u_{n-1,t}|^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}d_{n-1,t}e^{i2\pi\alpha|d_{n-1,t}|^2} \\ d_{n,t+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}u_{n+1,t}e^{i2\pi\alpha|u_{n+1,t}|^2} - \frac{1}{\sqrt{2}}d_{n+1,t}e^{i2\pi\alpha|d_{n+1,t}|^2}. \end{aligned} \quad (48)$$

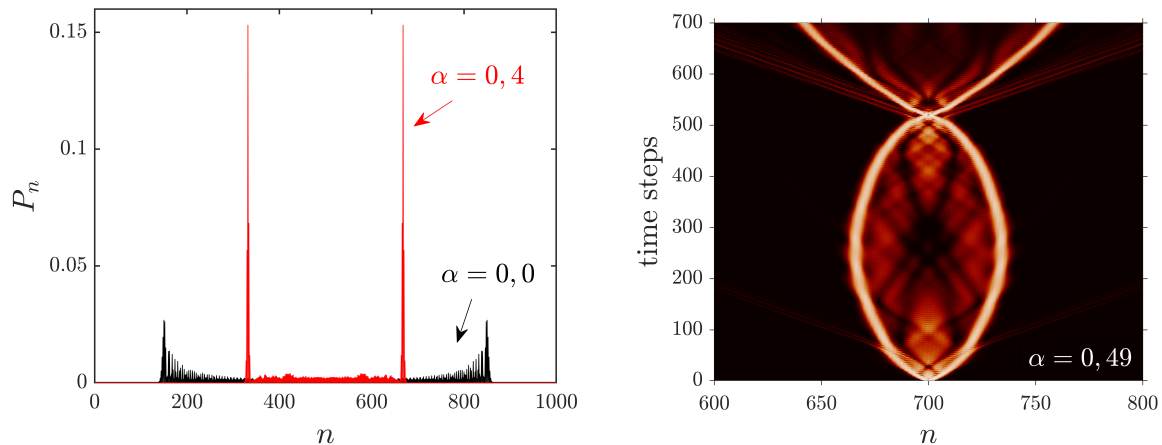
Notemos que, nesse modelo, a função de onda do caminhante quântico no instante de tempo  $t + 1$  depende da densidade de probabilidade no instante de tempo anterior,  $t$ .

A evolução temporal se dá através através das equações em (48) para um estado inicial simétrico,

$$|\psi\rangle = \frac{\delta_{m,0}}{\sqrt{2}}(u_{m,0} + id_{m,0}). \quad (49)$$

Na figura 19, mostramos dois resultados apresentados pelos autores. No painel esquerdo, representa a distribuição de probabilidade,  $P_n$ , para dois valores de interação não-linear:  $\alpha = 0$  (ou seja, caso linear) e  $\alpha = 0, 4$ , após 500 instantes de tempo. Quando  $\alpha = 0$ , observamos um típico comportamento de uma caminhada Hadamard. O caminhante quântico apresenta dois picos que se propagam em direções opostas e decaem monotonicamente com a medida em que o tempo passa, com isso, a largura da distribuição cresce proporcionalmente ao número de passos,  $t$ . Ao ligarmos o parâmetro não-linear, a forma da distribuição,  $P_n$ , é um pouco diferente. Agora, os dois picos de contêm a maior parte da probabilidade total e sua velocidade de propagação é reduzida. No entanto, a característica mais marcante dos picos de probabilidade neste caso não-linear é que seu tamanho e forma permanecem

**Figura 19** – O painel esquerdo mostra a distribuição de probabilidade,  $P_n$ , após 500 instantes de tempo para dois valores de não-linearidades,  $\alpha = 0$  (curva preta) e  $0,4$  (curva vermelha). Note que quando  $\alpha = 0$  recuperamos a bem conhecida caminhada Hadamard. Para  $\alpha = 0,4$  há o surgimento de estruturas do tipo sólitons. No painel esquerdo mostramos o perfil distribuição de probabilidade no plano espaço-tempo quando a interação não-linear é  $\alpha = 0,49$ . Após um determinado instante de tempo as duas frentes de onda colidem de forma inelástica.



Fonte: Do autor, 2022.

basicamente constantes com o tempo, exceto por pequenas oscilações em torno de um valor médio, remetendo a uma característica de sólitons.

Os autores identificaram e classificaram a dinâmica em três regimes, denominados fase I, II e III. Na fase I, quando a intensidade da interação não-linear  $\alpha$  é menor que  $\alpha_I \sim 0,474$ , a distribuição de probabilidade apresenta dois picos que se propagam em direções opostas em estruturas do tipo sólitons. Vale salientar que a medida em que aumentamos o valor de  $\alpha$  até o limite da fase I, a velocidade do caminhante quântico é reduzida. A fase II, é quando  $\alpha$  é maior que  $\alpha_I$  e menor que  $\alpha_{II} \sim 0,6565$ . Nesse regime, os dois sólitons começam a se mover em direções opostas, assim como na fase I, mas depois de alguns instantes de tempo sua velocidade diminui até que os sólitons atingem um ponto e então se movem para trás e colidem inelasticamente na posição inicial  $n_0 = N/2$ . Na figura 19, quadro da direita, mostramos um exemplo desse tipo de comportamento para um caminhante quântico inicialmente localizado em  $N/2$  em uma cadeia com  $N = 1400$  posições. O tamanho da cadeia é escolhido grande o suficiente para evitar efeitos de borda. Quando  $\alpha > \alpha_{II}$ , a dinâmica fica mais complicada de ser definida. A evolução dos sólitons se tornam extremamente sensíveis a qualquer variação mínima na intensidade da interação não-linear ( $\alpha$ ). Com isso, os autores caracterizaram a fase III como sendo uma fase caótica.

Grande parte dos estudos presentes na literatura (68, 147, 143), para citar alguns, mostram comportamentos obtidos onde consideram apenas a moeda quântica Hadamard. Entretanto, o que aconteceria na dinâmica do caminhante quântico se levássemos em consideração outras moedas quânticas? Como ficariam caracterizados os regimes apresentados por Navarrete *et. al.*? Ainda existiria estruturas do tipo-sólitons? Haveria o surgimento de regimes de auto-aprisionamento? Para responder a estas perguntas, propomos adiante um modelo generalizado para as caminhadas quânticas discretas não-lineares.

## 4.2 MODELO PROPOSTO

Aqui, utilizaremos a seguinte representação para os estados de base relacionados ao grau de liberdade interno do *qubit*,  $\{|R\rangle, |L\rangle\}$ , que representam os estados de polarização circular para a direita e para a esquerda, respectivamente. Desta forma, esses vetores são representados por:  $|R\rangle = (1, 0)^T$ ,  $|L\rangle = (0, 1)^T$ , onde  $T$  indica o transposto desses dois vetores. Como vimos na seção anterior, a equação que rege a dinâmica para uma caminhada quântica não-linear discreta no tempo é escrita como

$$\hat{U}(t) = \hat{U}_d \hat{U}_C \hat{U}_{NL}(t-1). \quad (50)$$

Diferentemente do proposto por Navarrete *et al.*, iremos utilizar como operador moeda quântica uma matriz de rotação com um parâmetro ajustável, isto é,

$$\hat{C} = \sum_n (c_{R,R} |R\rangle \langle R| + c_{R,L} |R\rangle \langle L| + c_{L,R} |L\rangle \langle R| - c_{L,L} |L\rangle \langle L|) \otimes |n\rangle \langle n| \quad (51)$$

onde  $c_{R,R} = c_{L,L} = \cos \theta$  e  $c_{R,L} = c_{L,R} = \sin \theta$  com o parâmetro  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Para introduzir a não-linearidade, adicionamos ao protocolo de evolução mais um operador que descreve a aquisição de uma fase dependente (não-linear) da densidade de probabilidade de cada estado no espaço da moeda quântica. Assim,  $\hat{U}(t) = \hat{S} \hat{C} \hat{U}_{NL}(t-1)$ , onde  $\hat{U}_{NL}$  é dado por

$$\begin{aligned} \hat{U}_{NL}(t) &= \sum_n \sum_{s=R,L} e^{iG(t,n,s)} |s\rangle \langle s| \otimes |n\rangle \langle n|, \\ &= \sum_n \left[ e^{iG(t,n,R)} |R\rangle \langle R| + e^{iG(t,n,L)} |L\rangle \langle L| \right] \otimes |n\rangle \langle n|; \end{aligned} \quad (52)$$

$G(t, n, s)$  pode ser qualquer função arbitrária com dependência temporal ( $t$ ), espacial ( $n$ ) e com o grau de liberdade interno ( $s$ ). Considerando uma não-linearidade do tipo Kerr podemos escrever que essa função é da forma

$$G(t, n, s) = \chi |\psi(t, n, s)|^2, \quad (53)$$

onde  $\chi$  descreve a intensidade da interação não-linear. Para  $\chi = 0$  recuperamos a caminhada quântica discreta linear. Usando o protocolo de evolução temporal para um estado  $|\psi\rangle$  arbitrário,  $|\psi(t)\rangle = \hat{U}^t |\psi(0)\rangle$  podemos derivar as equações de evolução para as amplitudes de probabilidade, ou seja,

$$\begin{aligned} \psi_{n,R}^{t+1} &= c_{R,R} e^{i\chi |\psi_{n+1,R}^t|^2} \psi_{n+1,R}^t + c_{R,L} e^{i\chi |\psi_{n+1,L}^t|^2} \psi_{n+1,L}^t, \\ \psi_{n,L}^{t+1} &= c_{L,R} e^{i\chi |\psi_{n-1,R}^t|^2} \psi_{n-1,R}^t + c_{L,L} e^{i\chi |\psi_{n-1,L}^t|^2} \psi_{n-1,L}^t. \end{aligned} \quad (54)$$

Assim, o estado do *qubit* no  $t$ -ésimo instante de tempo é dado pela função de onda de duas componentes  $\{\psi_{n,R}^t, \psi_{n,L}^t\}$ , onde  $\psi_{n,R}^t$  e  $\psi_{n,L}^t$  são as amplitudes de probabilidade de obtenção dos estados  $|R\rangle$  e  $|L\rangle$  na posição  $n$  e passo de tempo  $t$ , respectivamente. Consideramos ao longo da análise cadeias abertas como a condição de contorno, na qual a posição inicial  $n_0$  do caminhante quântico está em  $N/2$  onde  $N$  é o tamanho da cadeia.

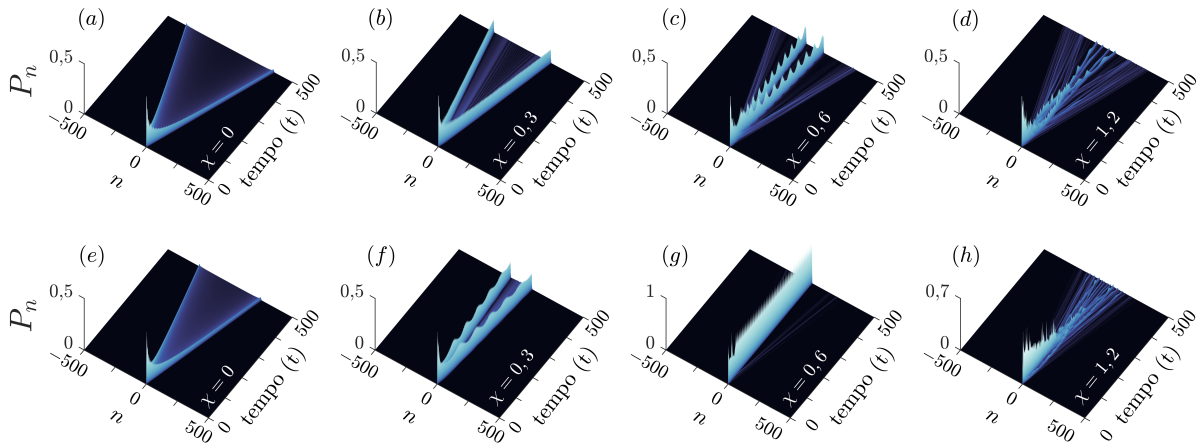
### 4.3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para melhor visualizar como as propriedades dinâmicas do caminhante quântico são alteradas quando este é submetido a interações não-lineares, acompanhamos a evolução temporal da sua densidade de probabilidade,  $P_n(t)$ , para alguns valores de interação,  $\chi$ . Para isso, preparamos inicialmente a função de onda de um *qubit* como uma combinação linear entre os estados de polarização  $\{|R\rangle, |L\rangle\}$ , ou seja,

$$|\Psi_0\rangle = \sum_n \frac{1}{\sqrt{2}} (|R\rangle + i|L\rangle) \otimes |n_0\rangle; \quad (55)$$

onde  $n_0$  é a posição inicial e a definimos em  $N/2$ , com  $N$  sendo o número total de sítios da cadeia. Na figura 20, mostramos a dinâmica para protocolos distintos regidos uniformemente por duas moedas quânticas:  $\theta = \pi/4$ , figura 20(a-d), e  $\theta = \pi/3$ , figura 20 (e-h). Como o esperado, na ausência de interação não-linear,  $\chi = 0$ , ambos os protocolos induzem o espalhamento da distribuição de probabilidade, exibindo dois picos bem característicos nas

**Figura 20** – Perfis da evolução temporal da densidade de probabilidade,  $P_n$ , no plano espaço-tempo, em cadeias compostas por moedas quânticas com ângulos de rotação (a)–(d)  $\theta = \pi/4$  e (e)–(h)  $\theta = \pi/3$  homoganeamente distribuídas. Ambas as portas quânticas exibem estruturas semelhantes a sólitons itinerantes na presença de não-linearidade, cuja velocidade diminui à medida que o parâmetro não-linear,  $\chi$ , aumenta. Embora ambos os cenários tendam em um cenário de colisões com espalhamento inelástico para não-linearidades suficientemente fortes, uma caminhada quântica auto-focalizada surge para  $\theta = \pi/3$ . O que sugere uma fenomenologia com dependência da moeda quântica.

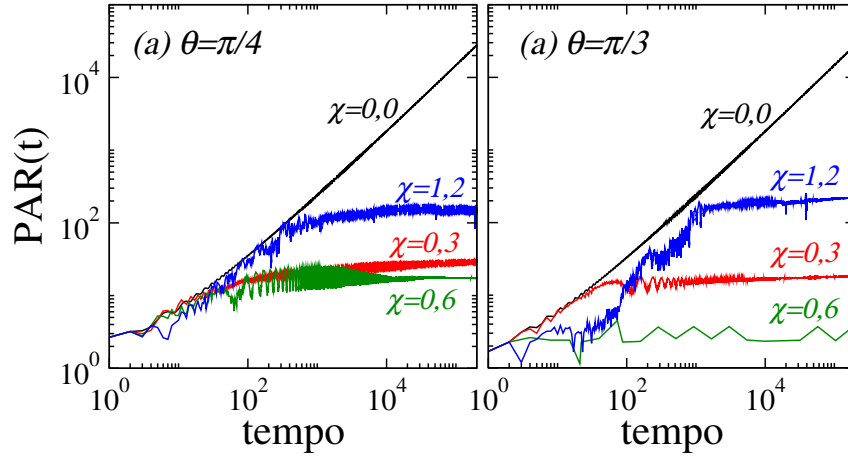


Fonte: Do autor, 2022.

bordas das distribuições, onde o valor máximo diminui monotonicamente à medida em que o tempo evolui [ver figura 20 (a)-(e)]. Por outro lado, quando ligamos a não-linearidade, este cenário é fortemente alterado. Como podemos ver na figura 20(b) e (f), na presença de um pequeno grau de não-linearidade ( $\chi = 0,3$ ), as distribuições de probabilidades permanecem concentradas, predominantemente, na forma de duas frentes de ondas cujos perfis permanecem, aproximadamente, com amplitudes e formas constantes no tempo, exceto por pequenas oscilações em torno de um valor médio, isto é, apresentam um caráter do tipo não-dispersivo. Desta forma, os estados do caminhante quântico são caracterizados como estruturas do tipo sóliton, que foram muito bem descritas por Navarrete *et.al* em (68). Além disso, o comportamento exibido nas figuras 20 (b) e (f) sugerem que a velocidade de propagação das estruturas tipo-sóliton diminui à medida em que a interação não-linear fica mais forte.

No regime de não-linearidade intermediária, figura 20 (c)-(g), uma nova fenomenologia emerge quando ajustamos os parâmetros ( $\theta$  e  $\chi$ ) adequadamente. Aumentando a intensidade da não-linearidade para  $\chi = 0,6$  e ajustando o parâmetro da moeda quântica em  $\theta = \pi/3$ , a densidade de probabilidade apresenta um comportamento bem localizado em torno da posição inicial,  $n_0$ . Ou seja, ocorre o fenômeno semelhante à auto-focalização,

**Figura 21** – Comportamento da função participação de um *qubit* em uma cadeia com  $N = 200000$  posições e  $N/2$  passos de tempo para quatro valores de  $\chi$ . Em (a) para uma caminhada Hadamard,  $\theta = \pi/4$ ; e (b) para  $\theta = \pi/3$ .

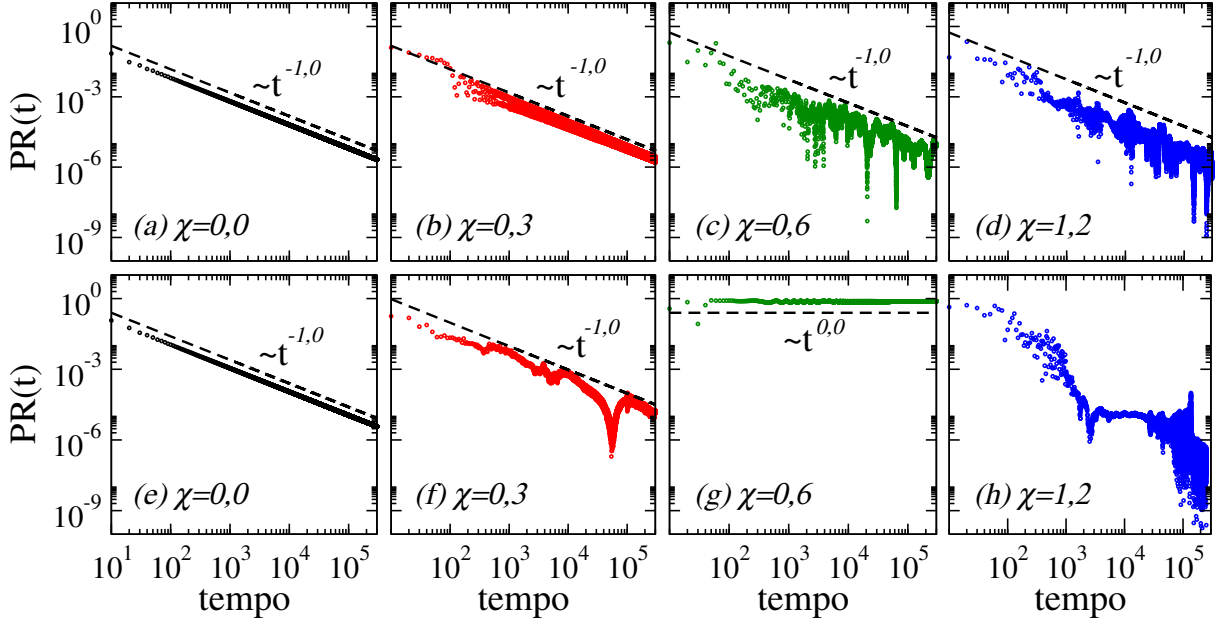


Fonte: Do autor, 2022.

cessando grande parte do transporte dos estados do caminhante quântico, ver figura 20 (g). No entanto, o mesmo comportamento não é alcançado para uma caminhada regida por moedas Hadamard, ( $\theta = \pi/4$ ), figura 20 (c). Para melhor caracterizarmos estas dinâmicas, calculamos numericamente a função participação,  $PAR$ , e a probabilidade de retorno na posição inicial,  $PR_{n_0}$ , supracitadas no Capítulo 3 e descritas pelas equações(36), (35), respectivamente. Para a construção da figura 21, utilizamos as mesmas configurações da figura 20.

Na figura 21, descrevemos o comportamento das CQTDs regidas uniformemente por moedas com  $\theta = \pi/4$  em (a) e em (b) com  $\theta = \pi/3$  para quatro configurações de não-linearidade:  $\chi = 0$  - em preto, 0,3 - vermelho, 0,6 - verde e 1,2 - em azul. A função participação nos dá uma estimativa do número de estados de posições no espaço  $H_P$  que o pacote de ondas do *qubit* visitou no tempo  $t$ . Assim, vemos que na ausência de interação não-linear,  $\chi = 0$ , para ambos os casos, a função participação apresenta um comportamento crescente com o número de passos, apresentando uma dinâmica que cresce com  $\sim t/\ln(t)$  (148). Por outro lado, quando ligamos a não-linearidade,  $\chi > 0$ , a função participação tende a saturar em valores finitos após um transiente inicial, o que sugere que os estados do caminhante quântico estão auto-aprisionados, de alguma forma, em torno de algumas posições no espaço  $H_P$ . Estas são as assinaturas das estruturas do tipo sóliton. No entanto, devemos ter o cuidado na hora de classificar esse auto-aprisionamento. A função participação sozinha não nos revela de que forma os estados do caminhante

Figura 22 – Evolução temporal da probabilidade de retorno em  $n_0$  para as mesmas configurações da figura 1. Nota-se que a quantidade confirma todos os aspectos relatados anteriormente. O comportamento de escala com  $PR(t) \sim t^{-1}$ , que é muito bem definido para quase todas as configurações. Enquanto que, para  $\theta = \pi/3$  e  $\chi = 0.6$  obtemos  $PR(t) \sim t^{-0}$ , o que configura uma caminhada quântica discreta auto-armadilhada entorno da posição inicial.

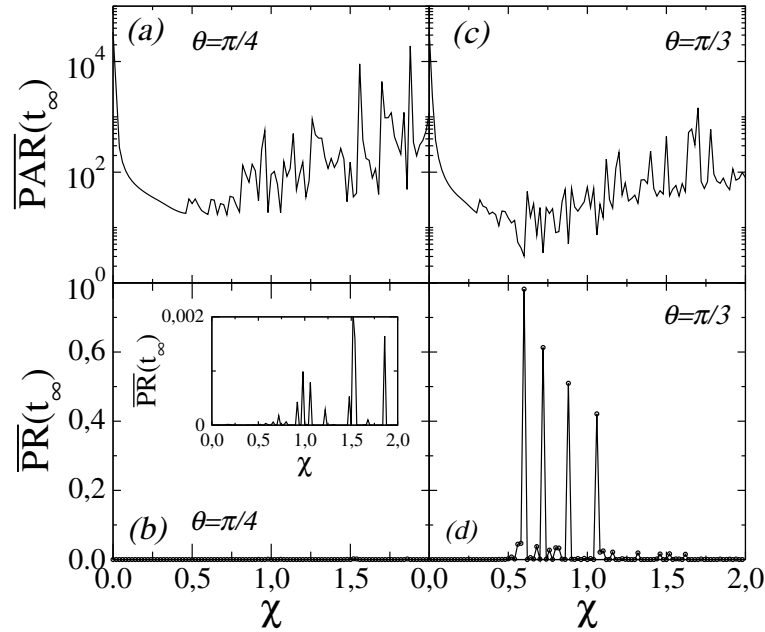


Fonte: Do autor, 2022.

quântico estão armadilhados. Podemos observar que para o caso onde  $\chi = 0,6$  (curvas em verde) os comportamentos em (a) e (b) são muito parecidos. Todavia, no quadro (b) observamos que o comportamento da curva gerada quando  $\chi = 0,6$  satura rapidamente em torno da posição inicial. O que gera um forte indício de que estes estados estão presos na posição inicial, ( $n_0$ ).

Calculamos também a probabilidade de encontrarmos o caminhante quântico na posição inicial, ( $n_0$ ), no tempo  $t$  para os mesmos parâmetros utilizadas nas figuras 20 e 21. Como visto anteriormente, na ausência de não-linearidade,  $\chi = 0$ , o caminhante se espalha pela cadeia para as duas configurações de moedas quânticas. Assim, a probabilidade de encontrarmos este *qubit* na posição inicial, após realizarmos uma medida, cai rapidamente para zero com um comportamento de escala  $PR(t) \sim 1/t$ . Como podemos ver nas figuras 22 (a)-(e). Este comportamento é corroborado pelos resultados apresentados na referência (149). Os autores mostraram que, independente do estado inicial escolhido, a probabilidade de retorno apresentará o mesmo comportamento de escala. Esse comportamento também é observado quando consideramos outros valores de interação. Para  $\theta = \pi/4$  e  $\chi = 0,3$ ,

**Figura 23** – Análise do comportamento da probabilidade de retorno média,  $\overline{PR}(t_\infty)$  e função participação média,  $\overline{PAR}(t_\infty)$ , para duas configurações de moedas quânticas,  $\theta = \pi/4$  (a)-(b) e  $\pi/3$  (c)-(d). Ambas as quantidades concordam com a existência de estruturas do tipo sóliton no regime de fraca não-linearidade  $\chi < 0,5$ . Quando  $\theta = \pi/3$ , há o surgimento de configurações em  $\chi$  que levam a função de onda do *qubit* para o estado de auto-aprisionamento na posição inicial. Como mostrado em (c)-(d), existem pontos em que  $\overline{PAR}(t_\infty)$  decai para valores próximo a um, enquanto  $\overline{PR}(t_\infty)$  aumenta.



Fonte: Do autor, 2022.

0,6 e 1,2, observamos a ausência de localização do caminhante, uma vez que, os modos do tipo sólitons viajam pela cadeia. Todavia, para  $\theta = \pi/3$ , um novo padrão é revelado. Quando a não-linearidade tem uma intensidade  $\chi = 0,6$  a probabilidade de retorno mostra um comportamento  $PR(t) \sim t^0$ . Isso significa que o *qubit* permanece localizado em torno da posição inicial, reforçando a ideia da existência de um auto-aprisionamento estacionário, como mostrado nas figuras 20 e 21. Além disso,  $PR(t)$  diminuindo para  $\chi = 1,2$  [figura 22 (h)] confirma a ausência de localização do caminhante no local inicial após uma longa evolução. A rugosidade nos dados sugere interferências destrutivas de estruturas semelhantes a sólitons à medida que o tempo evolui. Diferentemente do que ocorre em física do estado sólido, que quanto mais forte a interação não-linear, mais localizada a função de onda fica.

Os resultados apresentados até aqui sugerem que os regimes em que ocorrem o fenômeno de auto-aprisionamento em torno da posição inicial, possuem relação direta com as moedas quânticas que estão sendo utilizadas durante a evolução. Para entendermos melhor

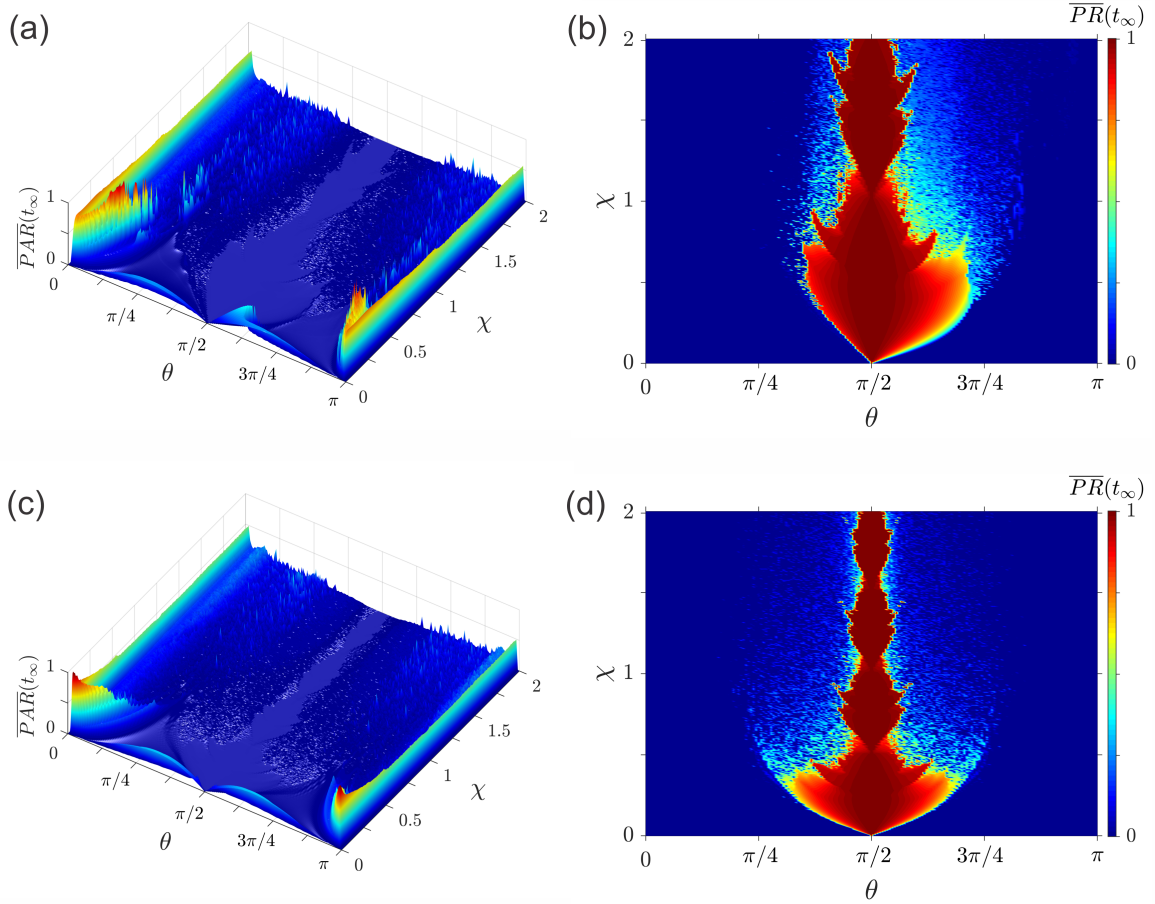


esta dependência, apresentarmos, na figura 23, uma descrição mais ampla e detalhada dos comportamentos médios da função participação,  $\overline{PAR}(t_\infty)$ , e da probabilidade de retorno,  $\overline{PR}(t_\infty)$ , no regime assintótico para duas configurações de moedas quânticas:  $\theta = \pi/4$  na figura. 23 (a)-(b) e  $\theta = \pi/3$  em fig. 23 (c)-(d). Para cada ponto dos gráficos variamos a intensidade da interação não-linear dentro do intervalo  $0 \leq \chi \leq 2$  com incremento  $\delta\chi = 10^{-3}$  e calculamos uma média sobre os últimos duzentos passos de tempo. Aqui, consideramos uma evolução sobre uma cadeia com  $N = 10^5$  sítios e  $N/2$  instantes de tempo.

Como visto, quando  $\chi = 0$  o sistema é linear. Assim, a função participação será sempre crescente e a probabilidade de retorno tenderá a zero,  $PR \rightarrow 0$ , a medida em que o tempo evolui, indicando que função de onda se espalha pela cadeia. No regime de fraca resposta não-linear,  $\chi < 0,45$ , ambas as quantidades físicas ainda sugerem um comportamento de estados deslocalizados para as duas moedas quânticas. No entanto, como mostrado em fig. 23 (a) e (c), a função participação média apresenta valores cada vez menores a medida em que a interação não-linear fica mais forte ( $\chi \rightarrow 0,45$ ), sugerindo, nesse contexto, a formação de estruturas do tipo sóliton. Por outro lado, em fig. 23 (b)-(d), a probabilidade de retorno indica que não há nenhuma porção do pacote de ondas na posição inicial. Quando aumentamos a intensidade de  $\chi > 0,45$ , a dinâmica do caminhante quântico entra em um regime caótico, muito sensível a qualquer alteração nas condições iniciais do problema. Por isso temos esse aspecto ruidoso na participação exibida em fig. 23 (a-c). Contudo, quando  $\theta = \pi/3$ , existem valores de interação não-linear que levam o *qubit* ao fenômeno de auto-armadilhamento na posição inicial. Este comportamento é consistente com o caráter dispersivo associado a distribuição uniforme das portas quânticas sobre a cadeia, uma vez que o surgimento e a dinâmica de estruturas semelhantes a sólitons estão associados ao equilíbrio entre efeitos de não-linearidade e correlações lineares (dispersão, difração e difusão).

Ampliamos nossos experimentos numéricos a fim de construir um diagrama sobre o comportamento geral da função participação e da probabilidade de retorno no plano  $\chi \times \theta$ . Para isso, deixamos que o sistema evoluísse até  $t = 100000$  passos de tempo em uma cadeia com  $N = 200000$  sítios e, em seguida, calculamos o valor médio dessas quantidades com os últimos 200 instantes de tempo. Ou seja,  $\overline{PAR}(t_\infty) = [\sum_{t-100}^t PAR(t)]/100$  e  $\overline{PR}(t_\infty) = [\sum_{t-100}^t PR(t)]/100$ . A figura 24 mostra os resultados para duas condições

Figura 24 – Diagramas do comportamento médio da probabilidade de retorno e função participação. Em (a)-(b) temos a dinâmica para um qubit inicialmente em um estado simétrico. Em (c)-(d) para uma condição inicialmente assimétrica.



Fonte: Do autor, 2022.

iniciais. Em (a-b) utilizamos um *qubit* com um estado simetricamente polarizado, equação (55), e em (c)-(d) o estado inicial totalmente polarizado para a direita <sup>1</sup>,  $|\Psi_0\rangle = |R\rangle \otimes |n_0\rangle$ .

Explorando simultaneamente os dois diagramas, notamos a ausência de estruturas aprisionadas para valores de  $\theta$  suficientemente pequenos, mesmo para uma forte interação não-linear. No regime (I), o caráter dispersivo é predominante, com uma pequena contribuição dos termos de interferência da moeda quântica  $\hat{C}$ . Além disso, nesse regime, o aumento de  $\overline{PAR}(t_\infty)$  sugere que a não-linearidade como mecanismo capaz de aumentar a propagação do caminhante quântico. Entretanto, esse comportamento não está relacionado à velocidade de espalhamento, mas sim à distribuição da função de onda, que agora exhibe

<sup>1</sup> Os resultados apresentados neste capítulo para o caminhante quântico que se encontra, no instante inicial, totalmente polarizado para a direita, são os mesmos para quando o estado está polarizado circularmente para a esquerda,  $|\Psi_0\rangle = |L\rangle \otimes |n_0\rangle$ .

um perfil mais uniforme do que aquele apresentado na ausência de não-linearidade. As frentes de ondas exibem aspectos semelhantes a estruturas solitônicas, mas que diminuem muito lentamente com o tempo. À medida em que aumentamos o parâmetro  $\theta$  em direção a  $\pi/2$ , diferentes cenários emergem a medida em que vamos alterando a intensidade da interação não-linear ( $\chi$ ). Na região (II), para  $\chi$  suficientemente pequeno,  $\overline{PAR}(t_\infty) \sim 0$  e  $\overline{PR}(t_\infty) \sim 0$  é consistente com a existência de estruturas do tipo sólitons que se propagam pela cadeia.

Como descrito anteriormente na figura 23, o aumento da intensidade em  $\chi$  promove um regime no qual a evolução dos sólitons torna-se extremamente sensível a pequenas variações do parâmetro não-linear, (III). Assim como os Navarrete *et al.* também encontraram. Esse comportamento é encontrado para valores de  $\chi$  suficientemente altos e é descrito por flutuações do  $\overline{PAR}(t_\infty)$  e  $\overline{PR}(t_\infty)$ . Caminhadas quânticas auto-aprisionadas em torno da posição inicial,  $n_0$ , em (IV), tornam-se evidentes à medida que observamos  $\overline{PAR}(t_\infty) \sim 0$  e  $\overline{PR}(t_\infty) \sim 1$ . Ambos os diagramas confirmam que, um incremento na interação não-linear  $\chi$  não significa um aumento no grau de localização. Assim, o limite entre os regimes deslocalizados e localizados exibe um aspecto incomum. Também observamos que o regime de auto-aprisionamento estacionário em  $n_0$  é predominante à medida em que regulamos o parâmetro  $\theta$  mais próximos da porta quântica *Pauli-X*, ou seja,  $\theta = \pi/2$ . Nessas configurações, cujo espectro de energia das duas bandas principais se assemelha ao de bandas degeneradas planas, como vimos no capítulo 3, a dinâmica *bit-flip* alterna entre os dois estados de polarização no espaço da moeda,  $|R\rangle \rightarrow |L\rangle$  e vice-versa, é reforçada pela fase não-linear dependente da probabilidade.

Uma característica ausente na discussão anterior é o aspecto assimétrico na função participação,  $\overline{PAR}(t_\infty)$ , e da probabilidade de retorno,  $\overline{PR}(t_\infty)$ , em torno da moeda quântica *Pauli-X*. Este comportamento está associado com a componente complexa que estado de polarização para a esquerda  $|L\rangle$  adquire a cada instante de tempo, que dá sinais opostos para  $\theta < \pi/2$  e  $\theta > \pi/2$  para o protocolo de evolução dinâmica devido à aquisição da fase que depende da intensidade (não-linear) descrita na equação (53). Essa afirmação se torna mais evidente quando mostramos os resultados obtidos através do emprego da mesma metodologia usada anteriormente na condição em que o estado inicial do caminhante quântico é dado por  $|R\rangle \otimes |n_0\rangle$ .

#### 4.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, investigamos a dinâmica de *qubits* em CQTDs não-lineares. Ao considerar uma não linearidade do tipo Kerr, associamos a aquisição de uma fase dependente da densidade de probabilidade,  $P_n$ , do caminhante enquanto ele se propaga em uma rede com  $N$  sítios. Sendo a força não-linear do meio como um parâmetro ajustável, exploramos o papel das moedas quânticas no surgimento de estruturas semelhantes a sólitons que se propagam, bem como o regime no qual o caminhante quântico exibe uma localização induzida por auto-aprisionamento. Neste último, o modo dispersivo é totalmente suprimido pela não-linearidade, tornando o caminhante fortemente preso na posição inicial,  $n_0$ , desenvolvendo um modo respiratório. O regime auto-aprisionado estacionário torna-se predominante à medida que o parâmetro da moeda,  $\theta$ , se aproxima das moedas quânticas *Pauli-X*. Mostramos também que o limiar entre regimes deslocalizados e localizados apresenta um aspecto incomum em que um incremento do parâmetro não-linear pode induzir a transição do sistema de um regime localizado para um regime deslocalizado. Para concluir, considerando que a não-linearidade atraiu muita atenção na ciência da informação quântica (144, 150, 151, 152), esperamos que nosso trabalho possa impulsionar novas investigações sobre caminhadas quânticas em meios ópticos não-lineares. Do ponto de vista experimental, consideramos os sistemas ópticos como os mais promissores na implementação do nosso estudo. Sugerimos o uso de meios ópticos do tipo Kerr nos caminhos ópticos de configurações experimentais capazes de exibir CQTDs ópticas, como em uma cavidade linear (35, 153), anéis ópticos (154), um interferômetro de Michelson (155) ou treliças (41).

## Mapeando tolerância a ruídos em caminhadas quânticas discretas via coerência quântica

Um dos maiores desafios para a implementação efetiva da computação quântica é levar em consideração em seus protocolos a interação entre os qubits e o ambiente, visto que, a presença de ruídos pode destruir a componente fundamental desse processo: os delicados estados quânticos dessas unidades de informação (156, 157, 158, 159, 160, 161). A decoerência é um fenômeno físico que normalmente surge dessa interação. Em CQTDs, a decoerência quando inseridas na moeda quântica leva o caminhante a uma taxa de propagação quadraticamente mais lenta, no limite de longo tempo, do que os casos onde não há interação ambiente-sistema (162, 163). Além disso, redes quebradas, medições simultâneas de quiralidade da moeda quântica e posição, fases aleatórias e flutuações em uma determinada operação unitária preestabelecida também podem induzir o mesmo comportamento difusivo (97, 164, 165, 166). Tais resultados foram corroborados por estudos experimentais que descrevem a decoerência induzindo uma transição na dinâmica quântica de balística para difusiva (39, 167, 168). Regimes sub-balísticos e localização de Anderson foram relatados para caminhadas quânticas com irregularidades específicas (169, 170, 171). Os efeitos da decoerência em CQTDs têm sido associados a um tempo de mistura<sup>1</sup> muito rápido e distribuição uniforme, independentemente do estado inicial do sistema e da paridade do tamanho da rede, mostrando que para pequenos graus de decoerência algumas propriedades das caminhadas quânticas discretas podem ser

<sup>1</sup> Na teoria da probabilidade, o tempo de mistura é o tempo necessário para que distribuição de probabilidade leva para atingir sua forma estacionária.

melhoradas (172, 173, 174, 175). Uma excelente revisão pode ser encontrada na referência (176).

Embora pareça natural considerar a linearidade no regime quântico, sistemas de mecânica quântica cuja evolução efetiva é governada por uma dinâmica não-linear têm sido muito explorados tanto em óptica (116) quanto em condensados de Bose-Einstein (118, 120), nos mesmos ambientes onde caminhadas quânticas mostraram um notável progresso experimental (39, 167, 168, 177, 178). Ao considerar que arquiteturas tolerantes a falhas são construídas a partir do entendimento de cada ingrediente possível, atuando simultaneamente ou não, estudamos aqui o peso de um ruído na dinâmica de um caminhante quântico dentro de uma estrutura não-linear. Consideramos uma pequena e instantânea quantidade de decoerência na distribuição de qubits, que expressa um processo de medição ou outra intervenção ambiental. O caráter não-linear está associado a aquisição de uma fase que possui uma dependência com a densidade de probabilidade do *qubit* no instante de tempo anterior, o que pode representar uma suscetibilidade não-linear emergente de terceira ordem em configurações fotônicas ou interações interatômicas em sistemas atômicos ultrafrios. Ao explorar sistematicamente medidas de coerência quântica, relatamos configurações apropriadas que favorecem o regime estável. Além disso, revelamos regimes instáveis em CQTDs nunca alcançados, como as dinâmicas de auto-focalização e modos respirantes. O limiar de estabilidade foi investigado variando as moedas quânticas, bem como o tamanho da rede, que estima o comportamento quântico no limite termodinâmico.

Adiante, estudamos as consequências de ruídos de curta duração enquanto uma aquisição de fase dependente da densidade de probabilidade,  $P_n$ , está associada a um *qubit* se propagando em um cadeia circular com  $N$  sítios. Ao empregar medidas de coerência quântica, relatamos regimes instáveis emergentes nos quais surge como auto-focalização e dinâmica de respiração. Nossos resultados numéricos e analíticos revelam configurações adequadas que favorecem o regime estável, com a distribuição assintótica sobrevivendo para não-linearidades fracas e desaparecendo no limite termodinâmico com  $1/N$ . O diagrama que mostra o limiar entre os diferentes regimes revela que as moedas quânticas próximas a *Pauli-Z* são mais tolerantes ao ruído. À medida que avançamos em direção ao operador quântico *Pauli-X*, tal aptidão diminui drasticamente e o limiar para o regime de auto-focalização torna-se quase inevitável. As moedas quânticas próximas a Hadamard exibem

um aspecto incomum, no qual um incremento da força não-linear pode remover a dinâmica do regime de autofocalização.

### 5.1 MODELO PROPOSTO

O modelo proposto carrega muita semelhança com o apresentado no capítulo 4. Consideramos um *qubit* que se move em uma rede unidimensional e, a medida em que o sistema evolui, seu estado adquire uma fase dependente da distribuição de probabilidade associada aos sítios vizinhos mais próximos no tempo anterior. Como já vimos, as CQTDs acontecem em um espaço de Hilbert formado por dois subespaços,  $\{H_C, H_P\}$ , que são o espaço da moeda quântica e das posições. Nesse capítulo, os estados de base do espaço  $H_C$  serão dados pelas representações:  $\{|R\rangle, |L\rangle\}$ , onde  $|R\rangle = [1, 0]^T$  e  $|L\rangle = [0, 1]^T$ , com T indicando o transporte. O operador de evolução temporal de CQTDs não-lineares é constituído por

$$\hat{U}(t) = \hat{S}(\hat{C} \otimes I_p) \hat{K}^{t-1}, \quad (56)$$

onde,  $\hat{K}$ , é o operador não-linear. Neste capítulo, a moeda quântica será dada pela matriz de rotação arbitrária da forma,

$$\hat{C} = \cos(\theta) |R\rangle \langle R| - \sin(\theta) |R\rangle \langle L| + \sin(\theta) |L\rangle \langle R| + \cos(\theta) |L\rangle \langle L| \quad (57)$$

onde  $\theta \in [0, 2\pi]$  é um parâmetro que nos permite controlar variância da distribuição de probabilidade do caminhante quântico. O operador deslocamento condicional atua deslocando os estados em uma rede com condições periódicas de contorno. Assim, vamos escrever  $\hat{S}$  como

$$\hat{S} = \sum_{n=1}^{N-1} |n+1\rangle \langle n| \otimes |R\rangle \langle R| + \sum_{n=2}^N |n-1\rangle \langle n| \otimes |L\rangle \langle L| + |1\rangle \langle N| \otimes |R\rangle \langle R| + |N\rangle \langle 1| \otimes |L\rangle \langle L|, \quad (58)$$

Consideramos uma não-linearidade quadrática dependente do estado de quiralidade no instante de tempo anterior. Assim, de acordo com a equação (52),

$$\hat{K}^t = \sum_n \left( e^{i2\pi\chi|\psi_{n,R}^t|^2} |R\rangle \langle R| + e^{i2\pi\chi|\psi_{n,L}^t|^2} |L\rangle \langle L| \right) \otimes |n\rangle \langle n|. \quad (59)$$

O parâmetro  $\chi$  representa a intensidade da não-linearidade do meio. Diferente do capítulo anterior (4), onde estudamos a propagação de um *qubit* inicialmente localizado em um

único sítio ( $n_0$ ), assumimos aqui um regime estacionário, em que o caminhante quântico já se propagou e encontra-se uniformemente distribuído por todos os sítios, isto é, em  $t = 0$ , o estado inicial é dado por

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{n=1}^N (|R\rangle + i|L\rangle) \otimes |n\rangle. \quad (60)$$

Adicionamos um pequeno ruído aleatório da ordem de  $\epsilon = 10^{-3}/\sqrt{2}$ , dentro do intervalo  $[1/\sqrt{2} - \epsilon, 1/\sqrt{2} + \epsilon]$ , em cada sítio  $n$  e renormalizamos a função de onda para manter a unitariedade durante a evolução, isto é,  $|\Psi/\rangle = |\Psi\rangle / \sqrt{\langle\Psi|\Psi\rangle}$ .

## 5.2 RESULTADOS E DISCUSSÕES

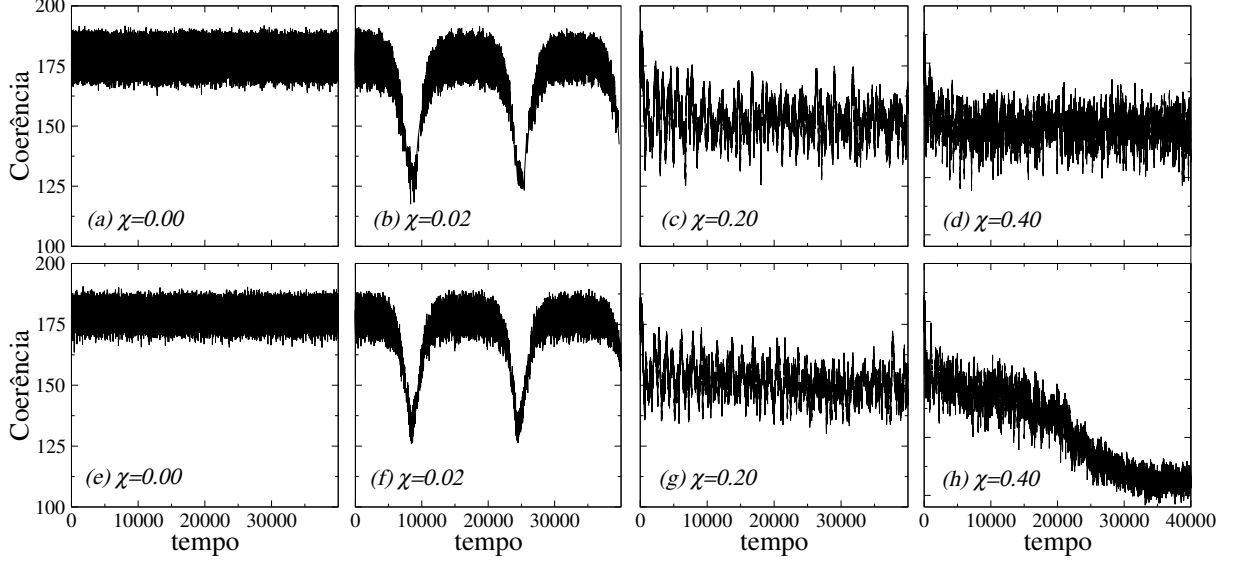
Acompanhamos a evolução temporal da coerência quântica norma-1, cuja rigorosa estrutura de medição só foi desenvolvida recentemente (92, 93)

$$C_{l,1}(t) = \sum_i \sum_{j \neq i} |\rho_{i,j}(t)|. \quad (61)$$

O grau de coerência quântica é definido como a soma dos valores absolutos de todos os elementos fora da diagonal da matriz densidade,  $\rho = |\psi(t)\rangle \langle\psi(t)|$ , sob a base de referência. Partindo de um estado inicial maximamente coerente, [ver equação (60)], mostramos na figura 25 a coerência,  $C_{l,1}$ , de todo o sistema em cada instante de tempo para uma cadeia circular com  $N = 101$  sítios. Consideramos as moedas quânticas Hadamard ( $\theta = \pi/4$ ), figuras 25 (a)–(d), e  $\theta = \pi/3$ , figuras 25 (e)–(h), homoganeamente distribuídas. Na ausência de não-linearidade,  $\chi = 0$ , ambas as moedas quânticas induzem uma dinâmica com flutuações em torno de um valor de saturação,  $C_{l,1} \sim 2N$ , totalmente consistente com a literatura anterior (93). Esse valor depende do tamanho do espaço de Hilbert e de como o ruído está distribuído ao longo da cadeia. No entanto, esse comportamento é drasticamente modificado à medida que aumentamos a interação não-linear,  $\chi$ . No regime com interações não-lineares muito fracas ( $\chi = 0,02$ ), observamos que a coerência quântica perde estabilidade e começa a executar respirações regulares, [ver figuras 25 (b) e (f)]. À medida que aumentamos ainda mais a intensidade da não-linearidade ( $\chi = 0,2$ ) a dinâmica respiratória dá lugar a flutuações cujo valor médio diminui quando comparado ao regime linear, como podemos ver em fig. 25 (c)–(g). Tais flutuações tornam-se mais ásperas, sugerindo um aspecto caótico. Entretanto, ambas as redes exibem comportamentos



**Figura 25** – Evolução temporal da coerência quântica para cadeias com  $N = 101$  sítios e regidos por moedas quânticas (a)–(d)  $\theta = \pi/4$  e (e)–(h)  $\theta = \pi/3$ . Padrões oscilatórios sugerem a falta de estabilidade da distribuição estacionária à medida que o parâmetro não-linear  $\chi$  aumenta, com o surgimento de dinâmicas respiratórias regulares e irregulares (caóticas). Para valores acima de uma força não-linear crítica, que depende da moeda quântica, a diminuição da coerência quântica após algum tempo transitório indica que o pacote de ondas se torna ainda mais estreito.

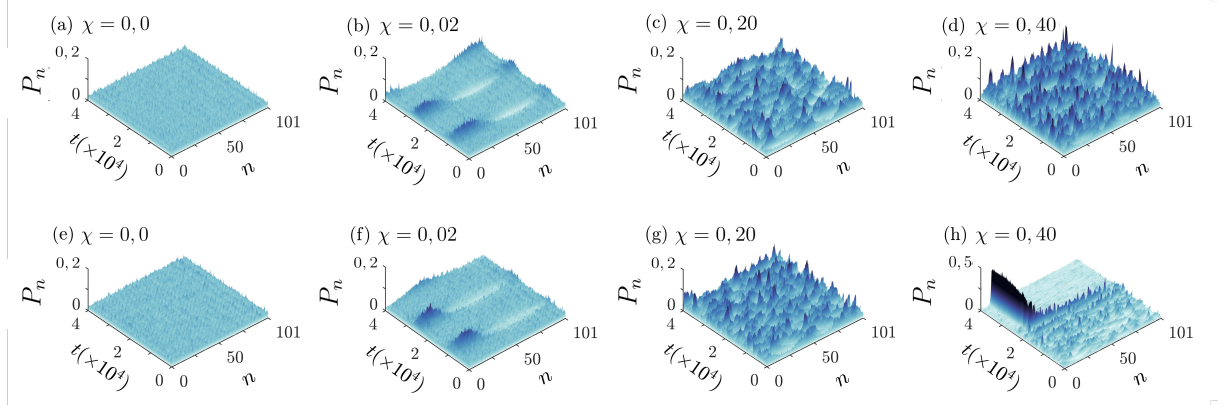


Fonte: Do autor, 2022.

diferentes à medida em que a interação não-linear se torna mais forte ( $\chi = 0, 4$ ), [ver figuras 25 (d) e (h)]. Nesse regime, as redes governadas por moedas quânticas Hadamard permanecem com coerência quântica exibindo flutuações em torno de um valor de saturação  $C_{11} \sim 3N/2$ , assim como  $\chi = 0, 20$ . Por outro lado, quando  $\theta = \pi/3$ , a coerência apresenta um decréscimo com oscilações em torno de  $C_{11} \sim N$ , após um transiente inicial.

Como as flutuações na coerência quântica estão relacionadas à natureza oscilatória da distribuição de probabilidade, acompanhamos o perfil de  $P_n$  no plano espaço-tempo para  $t = 400000$  instantes de tempo. Para isso, fizemos uso das mesmas configurações mostradas na figura 25. Isto é, as figuras 26 (a)–(d) e as 26 (e)–(f) ilustrando os comportamentos dinâmicos para caminhadas quânticas governadas por moedas quânticas  $\theta = \pi/4$  e  $\pi/3$ , respectivamente. Corroborando as medidas de coerência, o espalhamento da função de onda do *qubit* continua apresentando um comportamento estendido por toda a rede enquanto  $\chi = 0, 0$ . O que sinaliza a estabilidade da distribuição uniforme mesmo após a perturbação. Tal estabilidade pode desaparecer quando a não-linearidade se faz presente, dando lugar a diferentes regimes. Concordando plenamente com as expectativas criadas a partir das

**Figura 26** – Evolução temporal da densidade de probabilidade,  $P_n$ , no plano espaço-tempo, de um caminhante quântico para as mesmas configurações de  $\theta$  e  $\chi$  usadas na figura 25. Isto é, (a)–(d)  $\theta = \pi/4$  e (e)–(h)  $\theta = \pi/3$ . Corroborando os resultados anteriores, observamos assinaturas claras de dinâmicas respiratórias regulares para não-linearidades fracas. Embora ambos os cenários culminem em um regime caótico à medida que o parâmetro não-linear ( $\chi$ ) aumenta, a caminhada quântica apresenta um auto-focalização apenas para  $\theta = \pi/3$ , que sugere uma fenomenologia dependente da moeda quântica.

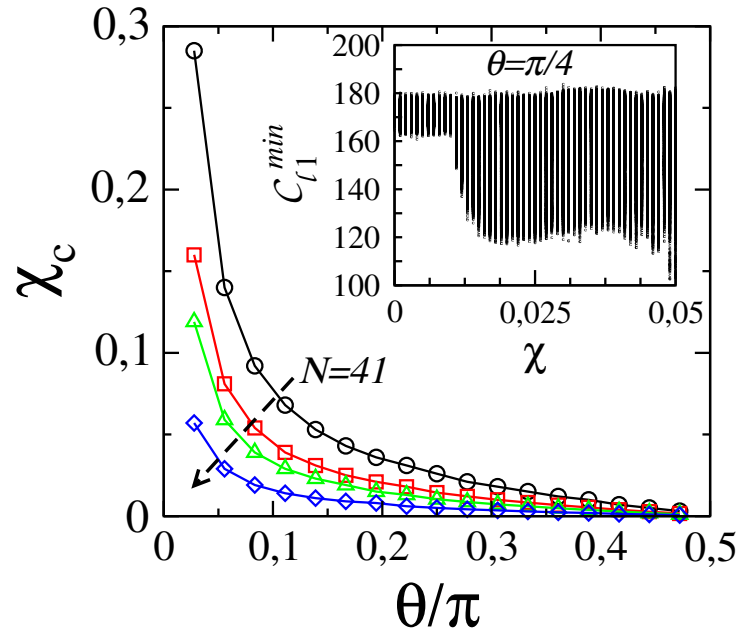


Fonte: Do autor, 2022.

medidas de coerência quântica, o pacote de ondas desenvolve respirações regulares para interações não-lineares muito fracas e respirações irregulares, com aspecto caótico, para não-linearidades suficientemente fortes. A similaridade entre ambas as redes desaparece quando a interação é da ordem de  $\chi = 0,40$ . Um regime de auto-focalização surge após um transiente inicial da função de onda, esclarecendo a forte diminuição da coerência quântica,  $C_{l1} \sim N$ , relatada para reticulados com  $\theta = \pi/3$ .

Como visto, a não-linearidade inserida em CQTDs faz emergir dinâmicas que dependem do ajuste entre a intensidade dessa interação e o parâmetro que controla a quiralidade da moeda,  $\theta$ . Acompanhamos a evolução temporal por um longo período de tempo procurando configurações  $\chi$  capazes de retirar a dinâmica de *qubits* da distribuição uniforme. Na figura 27 mostramos a relação entre as moedas quânticas ( $\theta$ ) e a não-linearidade crítica ( $\chi_c$ ), acima da qual a distribuição se torna instável. Observamos o regime estacionário sobrevivendo a uma gama maior de não-linearidades quando o sistema é gerenciado por moedas quânticas próximas a *Pauli-Z* ( $\theta = 0$ ). Por outro lado, sistemas governados por moedas quânticas próximas a *Pauli-X* ( $\theta = \pi/2$ ) são mais sensíveis, com não-linearidades críticas menores. Assim, moedas quânticas próximas a *Pauli-Z* são menos propensas a fornecer *qubits* com erros lógicos. O limiar do regime estacionário exhibe uma diminuição monotônica à medida que nos movemos em direção às moedas quânticas *Pauli-X*.

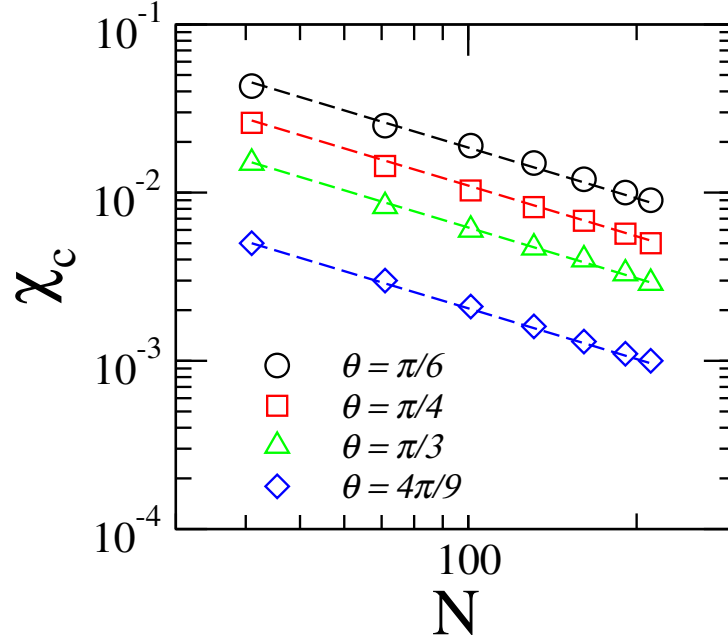
**Figura 27** – Não-linearidade crítica do estado estacionário,  $\chi_c$ , em função do parâmetro da moeda quântica,  $\theta$  (em unidades de  $\pi$ ) mostrando que moedas quânticas próximas a *Pauli-Z* apresentam uma capacidade maior de sustentar o regime estacionário. Um decaimento monotônico de  $\chi_c$  é observado a medida em que alteramos o parâmetro  $\theta$  em direção a moeda quântica *Pauli-X*. Utilizamos quatro tamanhos de rede:  $N = 41$  (curva preta com círculos), 71 (curva vermelha com quadrados), 101 (curva verde com triângulos) e  $N = 221$  (curva azul com losangos). A seta indica a direção do crescimento de  $N$ . O quadro interno representa todos os mínimos da coerência ( $C_{l,1}^{min}$ ) em função da força da não-linearidade,  $\chi$ , onde ilustra o ponto crítico sinalizado pela mudança significativa da largura de  $C_{l,1}^{min}$ , que vem da falta de estabilidade e da dinâmica respiratória emergente.



Fonte: Do autor, 2022.

Tal cenário demonstra claramente a sensibilidade associada aos termos de interferência das moedas quânticas, que tem sua influência amplificada pela componente não-linear. A figura também mostra uma relação entre a não-linearidade crítica e o tamanho  $N$ , com a seta apontando para o crescimento de  $N$ . O declínio monotônico de  $\chi_c$  à medida que deixamos os sistemas governados por *Pauli-Z* em direção aos sistemas *Pauli-X* permanece inalterado. No entanto, o aumento do tamanho da rede torna o sistema mais suscetível à instabilidade, uma vez que a faixa de não-linearidades capaz de sustentar o regime estacionário diminui. A figura interna ilustra o ponto crítico  $\chi_c$ , acima do qual a distribuição se torna instável. Registramos todos os mínimos de coerência ( $C_{l,1}^{min}$ ) para cada instante de tempo ao longo da evolução dinâmica de um sistema governado por moedas quânticas de Hadamard. Ao plotar  $C_{l,1}^{min}$  em função da força não-linear  $\chi$ , observamos uma mudança bem definida em largura de  $C_{l,1}^{min}$  que é consistente com a falta de estabilidade e a dinâmica respiratória emergente [ver figura 26].

**Figura 28** – Não-linearidade crítica do estado estacionário,  $\chi_c$ , calculada para diferentes tamanhos de cadeias  $N$  e para algumas moedas quânticas representativas. A análise  $\chi_c \times N$  confirma a dependência da não-linearidade crítica com o tamanho da cadeia e revela uma dependência de escala  $\chi_c \propto 1/N$ , independentemente da moeda quântica utilizada. O que sugere, para uma cadeia absurdamente grande,  $N \rightarrow \infty$ , operações sem erros para preservar o regime estável.



Fonte: Do autor, 2022.

A dependência entre a não-linearidade crítica ( $\chi_c$ ) e o tamanho da rede ( $N$ ), exibida na figura 27, é mostrada para algumas moedas quânticas representativas na figura 28. A análise  $\chi_c$  em função de  $N$  mostra um escala de não-linearidade crítica que apresenta um decaimento com  $1/N$ , independentemente da moeda quântica que seja utilizada. Este comportamento indica que o regime estacionário desaparece com  $N \rightarrow \infty$  para qualquer interação não-linear finita. Tal característica pode ser alcançada analiticamente usando a conexão entre a dinâmica dos caminhantes quânticos de tempo discreto e as partículas de Dirac. Na ausência de ruídos, estudos anteriores mostraram que uma partícula de Dirac pode ser simulada em uma caminhada quântica discreta no tempo, tanto para sistemas lineares [(179, 180, 181, 182)] quanto não-lineares (139). Seguindo o formalismo empregado nesse referencial teórico, que consiste em obter um Hamiltoniano efetivo para a dinâmica definindo um operador de deslocamento usando momento  $\hat{p}$  como

$$e^{\pm \hat{p} \Delta x} \psi(x) = \psi(x \pm \Delta x), \quad (62)$$

e relacionando-o ao operador de deslocamento, a evolução do passeio quântico em tempo discreto pode ser escrita de forma análoga à equação de Dirac 1 + 1 em unidades ( $\hbar$ ) como

$$i\partial_t\psi = (-i\alpha\partial_x + \beta mc^2 + \chi|\psi|^2)\psi. \quad (63)$$

Os termos equivalentes a massa, velocidade da luz e as matrizes de Dirac estão relacionados com as moedas quânticas e matrizes de Pauli. Embora o Hamiltoniano de Dirac exiba uma equação linear em momento, termos quadráticos, em momento, podem desempenhar um papel importante em cenários característicos, como para a formação de isolantes topológicos (183, 184). Aqui, nosso modelo também exigiu correções quadráticas  $\propto p^2$  para a equação de Dirac, justificada a partir de uma aproximação de segunda ordem em  $e^{\pm i\hat{p}\psi(t,x)}$  (140, 185), que resulta em uma equação de Dirac modificada como segue:

$$i\partial_t\psi = (-i\alpha\partial_x + \beta mc^2\partial_x^2 + \beta mc^2 + \chi|\psi|^2)\psi, \quad (64)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são matrizes hermitianas e satisfazem  $\alpha\beta + \beta\alpha = 0$ , com  $\alpha^2 = \beta^2 = \mathbb{I}$ . Considerando a parametrização feita na referência (185), a massa e a velocidade da luz são:  $m = \text{sen}\theta$  e  $c = 1$ , respectivamente,  $x$  é a coordenada espacial,  $\alpha = -\cos\theta\sigma_3 + \text{sen}\theta\sigma_1$ , e  $\beta = \sigma_2$ , onde  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) são as matrizes de Pauli.

Para realizar uma análise de estabilidade do regime estacionário quando sujeito a uma perturbação, começamos observando que a versão contínua da Eq. (8) suporta uma solução de onda contínua

$$\psi(t) = \psi_0 e^{-i(\beta mc^2 + \chi|\psi_0|^2)t}, \quad (65)$$

onde  $\psi_0 \in \mathbb{R}$ , sem perda de generalidade. Assim como fizemos na análise numérica, impomos uma pequena perturbação,  $\epsilon(x, t)$ , em sua amplitude. Desta forma, a equação de solução, equação (65), fica da forma

$$\psi(x, t) = [\psi_0 + \epsilon(x, t)]e^{-i(\beta mc^2 + \chi|\psi_0|^2)t}. \quad (66)$$

Ao considerar uma linearização padrão em função do estado inicial do qubit,  $\epsilon(x, t) \ll \psi_0$ , obtemos a seguinte equação de evolução temporal para a perturbação

$$i\partial_t\epsilon = (-i\alpha\partial_x + \beta mc^2\partial_x^2)\epsilon + \chi|\psi|^2(\epsilon + \epsilon^*). \quad (67)$$

Nesta última,  $\epsilon^*$  denota o complexo conjugado de  $\epsilon$ , onde abreviamos  $\epsilon = \epsilon(x, t)$ . Como uma perturbação aleatória de ruído branco exibe uma ampla faixa espectral, que inclui todas as contribuições harmônicas, vamos supor soluções dadas por

$$\epsilon(x, t) = a_1 e^{i(kx - \Omega t)} + a_2 e^{-i(kx - \Omega t)}, \quad (68)$$

onde  $a_1$  e  $a_2$  são amplitudes de modulação,  $k$  é o número de onda, e  $\Omega$  é a frequência. Com todas essas considerações, substituindo a equação a (68) em (67) e considerando sua solução não-trivial, obtemos a seguinte relação de dispersão

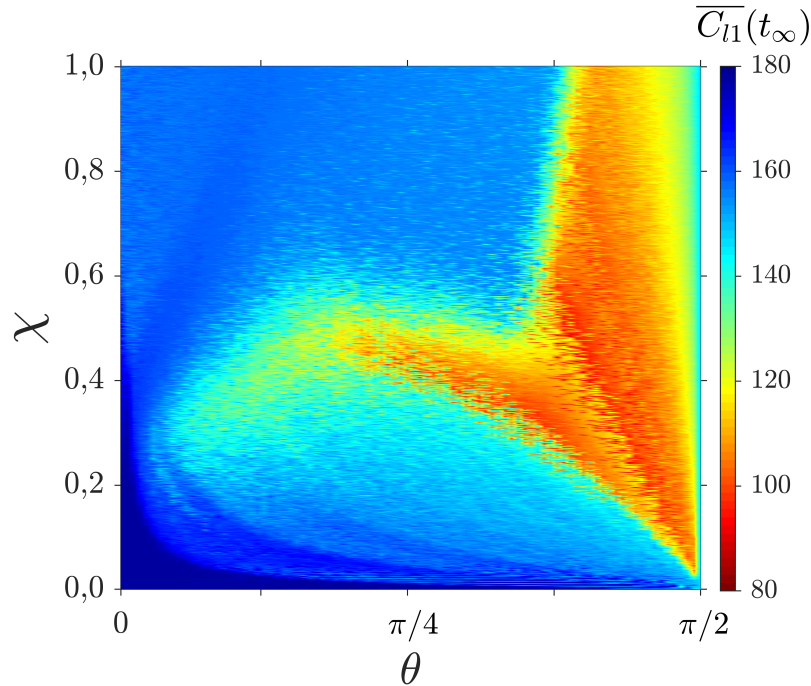
$$\Omega = c\alpha k \pm \sqrt{\beta m c^2 k^2 (\beta m c^2 k^2 - 2\chi |\psi_0|^2)}. \quad (69)$$

Este resultado mostra a estabilidade do regime estacionário para distúrbios com grandes vetores de onda, uma vez que  $\Omega$  permanece real. Em contraste,  $\Omega \in Im$  revela uma amplificação exponencial de todos os vetores de onda com  $k < (2\chi |\psi_0|^2 / \beta m c^2)^{1/2}$

$$k < \sqrt{2\chi |\psi_0|^2 / \beta m c^2}, \quad (70)$$

que resulta na quebra de ondas contínuas e, portanto, descreve a instabilidade da distribuição uniforme. Dada a natureza e as condições de contorno do sistema, as ondas harmônicas permitidas têm números de onda no intervalo  $2\pi/N < k < 2\pi$ . Como a normalização da função de onda para uma solução uniforme fornece  $\psi_0 = 1/\sqrt{N}$ , observamos a força não-linear característica acima do qual a solução é instável como sendo  $\chi_c \propto 1/N$ , com total concordância com a figura 28.

Por fim, construímos um diagrama do comportamento da coerência quântica média ( $\overline{C_{11}}(t_\infty)$ ) no plano  $\chi \times \theta$  [ver figura 29]. Variando o parâmetro da moeda quântica dentro do intervalo  $\theta \in [0, \pi/2]$  e a intensidade da não-linearidade entre  $[0, 1]$ , observamos uma diversidade de comportamentos. Para todas as configurações consideramos o estado inicial do caminhante quântico dado pela equação (60) em uma cadeia com  $N = 101$  sítios. Deixamos o sistema evoluir até  $t = 100000$  instantes de tempo e calculamos a média sobre os últimos 200 instantes. Os dados revelam três regimes principais. Olhando para a figura 29, vemos que o regime estacionário (alta coerência) sobrevive para intensidades de não-linearidades fracas, prevalecendo para sistemas configurados próximos a moeda Pauli-Z ( $\theta = 0$ ). Esse regime pode ser visualizado na pequena região onde o azul escuro é bem mais intenso, indicando na barra de cores  $\overline{C_{11}}(t_\infty) \approx 180$ . Aumentando um pouco

**Figura 29** – Mapa da coerência quântica norma-1 média,  $\overline{C}_{11}(t_\infty)$ , no plano  $\chi \times \theta$ .

Fonte: Do autor, 2022.

a não-linearidade, notamos que a cor azul fica um pouco mais clara, e se estende para mais valores de  $\theta$ , sugerindo que o caminhante quântico se encontra no regime onde o seu pacote de ondas apresenta modos respirantes ( $\overline{C}_{11}(t_\infty) \approx 170$ ).

Embora os resultados apresentados anteriormente nas figuras 26 e 25 indiquem que os regimes estacionário, respiratório, caótico e auto-focalizado apareçam a medida em que aumentamos a intensidade da não-linearidade ( $\chi$  crescente), a figura 29 desconstrói essa intuição. Ainda no regime de moedas próximas a *Pauli-Z*, para fortes intensidades de não-linearidade ( $\chi > 0,6$ ) o sistema exibe uma alta coerência. Por outro lado, sistemas com moedas quânticas próximas a *Pauli-X* ( $\theta = \pi/2$ ) apresentam a dinâmica de modos respirantes para uma faixa muito pequena de  $\chi$ . Como visto na figura 27 a interação não-linear necessária para retirar a função de onda do seu estado estacionário diminui a medida em que as moedas quânticas se aproximam de  $\theta = \pi/2$ . A emergência do regime caótico está predominantemente em torno das moedas quânticas  $\theta = \pi/6$ , que surge para uma não-linearidade intermediária, representada por uma cor ciano claro e uma coerência média em torno de [120, 140]. Regimes de auto-focalização, indicados pelo transiente de cores laranja/vermelho, surgem a partir de  $\theta = \pi/4$  (em torno) e  $\theta = \pi/2$ . No intervalo em

que  $\theta \in [7\pi/18, \pi/2]$  a auto-focalização tem uma tendência maior para ocorrer a medida em que a interação não-linear fica mais forte.

### 5.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, conseguimos realizar uma implementação de um protocolo quântico para avaliar a sensibilidade a ruídos de curta duração, instantâneo, enquanto fases não-lineares estão presentes em uma CQTD. A não-linearidade dependente da densidade de probabilidade,  $P_n$ , é baseada na possível suscetibilidade não-linear de terceira ordem em configurações ópticas ou interações interatômicas emergentes em sistemas atômicos ultrafrios, enquanto o ruído pode representar um processo de medição ou outra intervenção ambiental. Nossos resultados revelam um conjunto de parâmetros operacionais que favorecem uma operação estável. As moedas quânticas próximas a Pauli-Z ( $\theta = 0$ ) são mais tolerantes ao ruído, ao contrário do comportamento exibido pelas moedas quânticas próximas as moedas do tipo Pauli-X ( $\theta = \pi/2$ ). Quando perde a estabilidade, o sistema pode apresentar dinâmicas respiratórias e caminhadas quânticas auto-focalizadas.

A análise numérica e analítica exhibe uma transição onde a distribuição uniforme passa para o regime instável com um decaimento em  $1/N$ , revelando um sistema intolante a falhas no limite termodinâmico ( $N \rightarrow \infty$ ), ou seja, não-linearidades podem ser responsáveis pela incapacidade de codificar e decodificar *qubits*. Devido a sua versatilidade, consideramos os sistemas ópticos como os mais promissores para uma realização experimental atualmente, em que o uso de meios ópticos do tipo Kerr nos caminhos ópticos de configurações experimentais como cavidades lineares (186), anéis ópticos (153, 154), interferômetros de Michelson (155) e reticulados ópticos (41) seriam responsáveis pelo caráter não-linear. Outra possibilidade consiste em uma rede óptica com uma cascata de divisores de feixe, cuja transmissão ajustável estaria condicionada à saída de fotodetectores para cada caminho (139). Além de contribuir para a compreensão fundamental mais profunda sobre caminhadas quânticas de tempo discreto, caminhadas quânticas de respiração e auto-focalização também trazem perspectivas de aplicabilidade para microrressonadores, efeitos semelhantes a lentes e guia de ondas, que surge da auto-focalização acumulada.



## Super oscilações de Bloch e movimento unidirecional direcionados por superposição de fases

Como visto anteriormente, as caminhadas quânticas em tempo discreto têm se apresentado como uma ferramenta muito promissora. Com isso, têm sido muito exploradas em diferentes ambientes, com óptica linear (39, 91, 187), cavidades eletrodinâmicas (34), condensados de Bose-Einstein (29, 28), e guias de ondas fotônicos integrados (41, 188). Além disso, estudos em CQTDs examinaram diferentes ingredientes, como inhomogeneidade espacial (39, 41, 55, 170), não-linearidade (139, 189), interação entre caminhantes quânticos (190, 191) e não-hermiticidade (192, 193). Neste capítulo, estamos interessados em caminhadas quânticas discretas cuja adição de fases específicas emula a ação de campos elétricos (84, 194, 195, 196, 197).

Um dos primeiros modelos que consideraram a implementação de fases e relataram comportamentos similares a efeitos de campo elétrico foi proposto por Wójcik *et. al.* em (198). Os autores propõem modelo para uma generalização das CQTDs onde o caminhante quântico adquire uma fase dependente da posição em cada instante de tempo. Com isso, mostraram que pode surgir um comportamento oscilatório similar a oscilações de Bloch dependendo se a incrementação de fase for racional ou irracional. Em particular, para fases irracionais o modelo prevê uma localização dinâmica e fornece um bom limite máximo para o comprimento de localização. Cedzich *et al* (194) empregaram pela primeira vez a expressão "caminhada quântica elétrica" a um modelo de CQTDs com uma fase dependente linearmente da posição. Os autores descreveram as propriedades de propagação de um caminhante quântico como muito sensíveis as configurações de campos elétricos artificiais. Ainda neste trabalho, os autores relataram a existência de regimes onde o

comportamento das caminhadas quânticas discretas era balístico ou localizado quando se empregava campos elétricos com valores racionais e irracionais, respectivamente. Para campos racionais observa-se que o caminhante quântico oscilações bem definidas com períodos iguais a  $m$  ou  $2m$ . Por outro lado, a evolução não permanece exatamente periódica para um tempo muito longo. Pequenos erros se acumulam ao longo dos ciclos levando, em última análise, ao transporte balístico. Para campos irracionais suficientemente próximos de um campo racional também aparecem oscilações com períodos bem definidos. No entanto, para campos muito irracionais, aparece um comportamento tipo localização de Anderson. Em (84), os autores apresentaram uma realização experimental de CQTDs elétricas onde simularam o efeito de um campo elétrico em uma partícula carregada (84). Neste trabalho, usando átomos de Césio (Cs) em redes ópticas dependentes de *spin* e medidas por imagens de fluorescência, foi demonstrado que uma partícula quântica pode exibir características intimamente relacionadas às oscilações de Bloch.

Recentemente, em um trabalho muito engenhoso, autores (199) apresentaram uma plataforma promissora para simulações de caminhadas quânticas fotônicas, são as chamadas dimensões sintéticas. A geração de campos elétricos nesse tipo de rede em 2D oferece a possibilidade de guiar fótons e prendê-los através da criação de estruturas quânticas confinadas. Com isso, mostraram que o campo elétrico gerado leva a oscilações de Bloch e ao retorno do estado para a posição inicial após um certo número de passos dependentes da intensidade do campo. Além disso, mediram a probabilidade de retorno e demonstraram uma boa concordância entre os valores observados e os resultados teoricamente previstos. Em (200), através do ajuste do *gap* de energia do sistema, os autores estudaram, através de uma implementação experimentalmente, a interação entre a oscilação de Bloch e as transições Landau-Zener que influenciam na refocalização da distribuição inicial do pacote de ondas do caminhante quântico. Com isso, mostraram que as oscilações de Landau-Zener, ou seja, uma refocalização da distribuição de probabilidade devido a múltiplos tunelamentos Landau-Zener pode ser observado em processos de tempo discreto. Ao estudar a fenomenologia para um sistema bidimensional (2D), Bru *et al.* relataram que a dinâmica das partículas é facilmente afetada pela orientação do campo (195). A análise das interseções cônicas nas relações de dispersão sugere direções adequadas do campo para que ocorra um perfeito aprisionamento 2D. Uma descrição análoga às oscilações de

Bloch também foi descrita considerando fases dependentes do tempo em ambos protocolos CQTDs conhecidas como de passo único e de *split-step* (197, 201).

Resultados anteriores mostraram como fases dependentes ou independentes do tempo têm sido empregadas em CQTDs para obter localização dinâmica e/ou oscilações de Bloch. Aqui, nosso objetivo é abordar a seguinte questão: Como os CQTDs se comportam com a presença simultânea de ambos os ingredientes? Tal sistema corresponde a um caminhante quântico sujeito à ação concomitante de dois campos elétricos artificiais. O campo constante é emulado por uma fase com uma dependência linear da posição, enquanto o campo dependente do tempo vem de uma fase que tem uma modulação harmônica. Mostramos diferentes dinâmicas de caminhada quântica devido ao ajuste das características do campo elétrico. Observamos o desenvolvimento de super oscilações do tipo Bloch, uma dinâmica oscilatória que exibe frequências características que podem ser ajustadas controlando os campos elétricos artificiais. A transição de oscilações regulares para super-Bloch é estabelecido. Além disso, demonstramos que, sob condições ressonantes, o caminhante pode desenvolver uma deriva unidirecional para um lado preferencial da treliça. Tanto a velocidade de deriva quanto a direção do movimento são mostradas explicitamente como dependentes das configurações dos campos elétricos

### 6.1 OSCILAÇÕES DE BLOCH

De acordo com a teoria do elétron livre, se aplicarmos um campo elétrico uniforme sob um elétron, temos que este realiza uma dinâmica uniformemente acelerada, como previsto nas equações clássicas do movimento. No entanto, quando consideramos um elétron em uma cadeia cristalina e o sujeitamos a ação de um campo elétrico constante e paralelo à cadeia, a função de onda eletrônica apresenta um comportamento oscilatório com frequência proporcional a intensidade do campo elétrico aplicado. Essa fenomenologia é conhecida como oscilações de Bloch (202).

Podemos entender essa fenomenologia à luz de uma abordagem semi-clássica. O objetivo é realizar uma generalização da teoria do elétron livre para a situação em que levamos em consideração a presença de um potencial espacialmente periódico,  $V(x) = V(x + a)$ , onde  $a$  é magnitude do vetor de rede. Uma forma de fazermos isso, é substituindo  $\vec{p} \rightarrow \hbar\vec{k}$  na função Hamiltoniana clássica. Seja a hamiltoniana dada por:  $H = \epsilon(\vec{p}/\hbar) + V(x) - eEx$ ,

onde  $E$  é representa o campo elétrico aplicado. Desta forma, partindo das equações de Hamilton, podemos escrever que:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}, \quad (71)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}}. \quad (72)$$

A partir da primeira podemos encontrar uma equação para a velocidade para o pacote de onda eletrônico, uma vez que  $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ . Assim,  $\vec{v} = \partial H/\partial \vec{p}$ . Ou ainda,

$$\vec{v} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \epsilon(\vec{k})}{\partial \vec{k}}. \quad (73)$$

Através da equação, onde  $d\vec{p}/dt = \hbar d\vec{k}/dt$ , temos

$$\hbar \frac{d\vec{k}}{dt} = -eE, \quad (74)$$

uma vez que o potencial  $V(\vec{x})$  é constante. Uma primeira observação é que a variação temporal do vetor de onda  $\vec{k}$  é proporcional ao campo elétrico aplicado  $E$ . Através da expressão (74), podemos encontrar uma equação horária desse movimento no espaço  $\vec{k}$ , isto é,

$$\vec{k}(t) = \frac{-eE}{\hbar}t + \vec{k}_0. \quad (75)$$

Importante salientar que toda a análise realizada aqui é feita sobre uma perspectiva semiclássica. Assim, o sistema não permite nenhum efeito de tunelamento quântico. Sob ação de um campo constante, o sistema é carregado ao longo da banda (uma vez que o espaço  $\vec{k}$  é dividido em zonas de Brillouin) de energia onde está localizado. De modo que, a partícula desfruta de todas as propriedades dinâmicas oferecidas por essa banda. Quando o sistema alcança a borda da zona de Brillouin em  $\pi/a$ , ele é refletido e surge no outro lado da banda, em  $-\pi/a$ . Correlacionado a esse movimento, existe uma oscilação da velocidade no espaço real. Através de uma álgebra simples, conseguimos encontrar que a frequência de oscilação desse movimento é diretamente proporcional ao campo elétrico  $E$ , ou seja,  $\omega = (-e)Ea/\hbar$ .

### 6.1.1 OSCILAÇÕES DE BLOCH EM CQTDS

Nas CQTDS, o estado quântico evolui através da aplicação de um conjunto de operadores unitários que define uma etapa de tempo. No capítulo 3, vimos que este

operador é definido por:  $\hat{U} := \hat{S}\hat{C}$ , onde o lado esquerdo da equação representa os operadores deslocamento e moeda quântica, respectivamente. Para transformarmos o protocolo em um capaz de emular uma partícula sujeita a campos elétricos (84), teremos que adicionar um operador extra a  $\hat{U}$  para simularmos tal efeito. Fizemos isso também quando queríamos inserir efeitos não-lineares. Essa é a vantagem de utilizarmos CQTDs, sua versatilidade.

Uma possibilidade para implementar um campo elétrico externo uniforme é através de uma fase extra com uma dependência linear com a posição. Isto é o que Genske *et al.* propuseram em (84). Os autores simulam uma fase extra acelerando a rede óptica na qual o caminhante quântico, um átomo de Césio (Cs), está preso. Outra proposta é encontrada em redes ópticas através de uma modulação de fase com dependência com a posição (203). A ideia é multiplicar a fase dependente da posição da rede em todo o sistema, simulando assim o campo elétrico. Como isso, podemos escrever que o operador é definido por

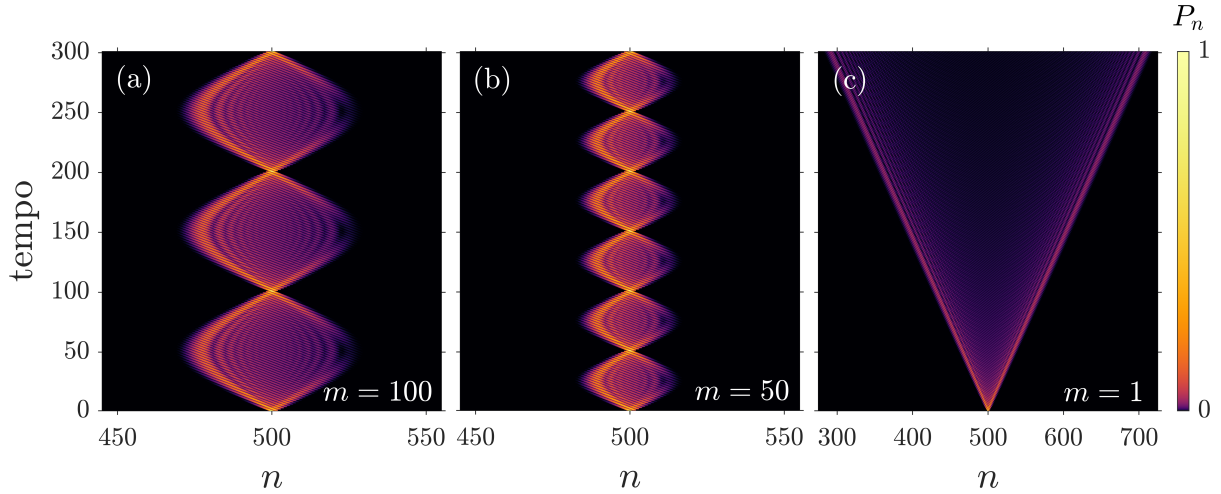
$$\hat{F}_E = \sum_n \exp[iG(n)], \quad (76)$$

onde  $G(n) = 2\pi/m$  e  $m$  é um parâmetro real que controla a intensidade do campo elétrico artificial. Assim, o operador evolução para o sistema sob ação de um campo elétrico artificial pode ser então formulado como,

$$\hat{U}_{ele} := \hat{F}_E \cdot \hat{S} \cdot (\hat{C} \otimes \mathbb{I}_P). \quad (77)$$

Para validarmos os códigos computacionais e para ilustrar tal comportamento, acompanhamos a evolução temporal do perfil da densidade de probabilidade,  $P_n$ , de um *qubit* inicialmente localizado no centro de uma cadeia com  $N = 1000$  sítios e com um estado inicial simétrico. Neste exemplo, utilizamos a moeda quântica Hadamard e o operador de deslocamento padrão, equações 12 e 10, respectivamente. A figura 30 exibe o desenho das oscilações do tipo Bloch em uma caminhada quântica em tempo discreto para três valores representativos de  $m$ . Em (a)  $m = 100$  e (b)  $m = 50$ , pode-se ver claramente que a presença do operador de campo elétrico resulta em um comportamento oscilatório da distribuição de probabilidade, que pode ser observado de forma análoga ao fenômeno das oscilações de Bloch. Nos primeiros instantes de tempo, o pacote de ondas viaja na mesma direção, sem nenhuma força aplicada. Então, porém, o pico começa a desaparecer e a emergir simultaneamente no lado oposto, dando continuidade do movimento. Quando  $m = 1$ ,

**Figura 30** – Perfil de oscilações do tipo Bloch em uma caminhada quântica em tempo discreto para alguns valores de parâmetros de força  $m$ . Em (a)  $m = 100$ ; (b)  $m = 50$ ; e (c)  $m = 1$  onde a distribuição de probabilidade do caminhante quântico não apresenta oscilações.



Fonte: Do autor, 2022.

recuperamos a caminhada Hadamard padrão, uma vez que a fase  $G = 2\pi$ , ver figura 30 (c). Para mais detalhes sobre esses comportamentos as referências (84, 194, 195, 196, 197) podem ser consultadas.

## 6.2 MODELO PROPOSTO

O estudo desse capítulo consiste em um caminhante quântico movendo-se em uma rede discreta unidimensional com  $N$  sítios sob a influência de uma superposição de campos elétricos artificiais: constante e com dependência temporal. Como visto no capítulo 2, o caminhante quântico corresponde a um *qubit* que possui um grau de liberdade interno, que vamos representar pelos vetores de base  $\{|\uparrow\rangle = [1, 0]^T, |\downarrow\rangle = [0, 1]^T\}$  pertencentes ao espaço da moeda,  $H_C$ .

A evolução temporal do caminhante quântico é realizada por meio de um operador evolução temporal  $\hat{U}$ , que consiste na aplicação sucessiva de dois operadores: deslocamento condicional ( $\hat{S}$ ) e a moeda quântica ( $\hat{C}$ ). Assim, um estado arbitrário *qubit* em um determinado instante de tempo  $t$  é dado pela equação:  $|\psi\rangle = \hat{U}^t |\psi_0\rangle$ . Como apresentado

outrora, o operador moeda quântica é uma matriz de rotação pertencente a  $SU(2)$  e é dado através da equação escrita em termos dos vetores de base utilizados neste capítulo:

$$\hat{C} = \cos \theta |\uparrow\rangle \langle \uparrow| + \sin \theta |\uparrow\rangle \langle \downarrow| + \sin \theta |\downarrow\rangle \langle \uparrow| - \cos \theta |\downarrow\rangle \langle \downarrow|, \quad (78)$$

onde  $\theta$  é um parâmetro que nos permite controlar o grau de quiralidade da moeda. O operador deslocamento condicional ( $\hat{S}$ ) é escrito como

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{N-1} |n+1\rangle \langle n| \otimes |\uparrow\rangle \langle \uparrow| + \sum_{n=2}^N |n-1\rangle \langle n| \otimes |\downarrow\rangle \langle \downarrow|, \quad (79)$$

de forma que, ao ser aplicado no estado  $|\psi_n\rangle$ , translada os estados internos do caminhante quântico em  $\pm 1$  sítio.

Como visto na seção anterior, para simularmos os efeitos de campo elétrico uniforme, precisamos adicionar um operador unitário extra ao protocolo de evolução temporal do caminhante quântico  $\hat{F}_E$ , ver equação (76). A função  $G$ , que compõe o operador  $\hat{F}_E$ , permite-nos uma variedade de possibilidades para simularmos os mais diversos efeitos. Aqui, estamos interessados em adicionar uma componente que depende do tempo e, com isso, estudarmos os efeitos de uma superposição de campos elétricos artificiais. Dessa forma, vamos reescrever a função  $G$  como  $G(t)$ . Isto é,

$$G(t) = \Phi_0 + \Delta\Phi \sin(\omega t + \phi). \quad (80)$$

O primeiro termo na equação (80) representa a componente uniforme do campo elétrico com magnitude  $\Phi_0 = 2\pi/m$ , onde  $m$  é um parâmetro pertencente aos reais. O segundo termo representa a parte harmônica do campo elétrico que possui uma amplitude de modulação definida por  $\Delta\Phi$ , frequência  $\omega$  e uma fase  $\phi$ .

A evolução temporal então é realizada por meio do operador campo elétrico que é definido através da equação (77). Por meio das equações do protocolo de evolução e um pouco de álgebra, podemos obter uma relação de recorrência para as amplitudes de probabilidade do *qubit*:

$$\begin{aligned} \psi_{t+1,n}^\uparrow &= e^{iG_t(n-N/2)} (\psi_{t,n-1}^\uparrow \cos \theta + \psi_{t,n-1}^\downarrow \sin \theta), \\ \psi_{t+1,n}^\downarrow &= e^{iG_t(n-N/2)} (\psi_{t,n+1}^\uparrow \sin \theta - \psi_{t,n+1}^\downarrow \cos \theta), \end{aligned} \quad (81)$$

onde  $\psi_{t,n}^\uparrow$  e  $\psi_{t,n}^\downarrow$  representam as amplitudes de probabilidade de obtermos os estados  $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$  na posição  $n$  em determinado instante de tempo  $t$ .

Nossos resultados foram obtidos seguindo as equações de recorrência para um *qubit* inicialmente localizado no centro da rede  $n_0 = N/2$ . Consideramos ao longo de todas as análises que as cadeias são abertas, cujos tamanhos  $N$  são grandes o suficiente para que a função de onda não atinja suas bordas durante o tempo avaliado, evitando assim qualquer tipo de efeito de borda.

### 6.3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Em todos os resultados apresentados adiante consideramos o estado inicial uma superposição simétrica entre os estados do espaço  $H_C$  localizado no centro da cadeia, ou seja,

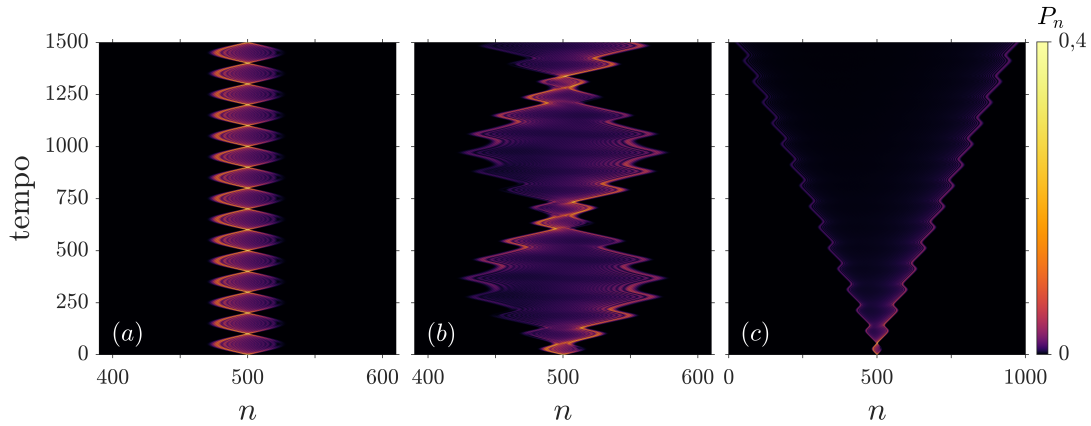
$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle) \otimes |n_0\rangle, \quad (82)$$

onde  $n_0 = N/2$  e, nesse primeiro momento,  $N = 10^3$  sítios. Aplicamos o operador Hadamard ( $\theta = \pi/4$ ) ao longo de todo o processo. Assumimos ainda que o caminhante quântico estava sob ação de um campo elétrico com  $m = 100$ , de modo que, a fase uniforme  $G$  tenha um incremento de  $\Phi_0 = 2\pi/100$ . Começamos nossa discussão ilustrando a evolução temporal do pacote de onda de um *qubit* sob o efeito de diferentes configurações de campos elétricos artificiais. Na figura 31, mostramos o perfil da densidade de probabilidade,  $P_n$ , dada pela equação (17), no plano espaço-tempo para três casos representativos.

Vimos, na seção anterior, que quando o sistema está sob a ação de uma fase constante com uma dependência linear com a posição, o caminhante quântico realiza oscilações em torno da posição inicial com um período e frequência (que chamaremos de  $\omega_B$ ) bem definido, isso é mostrado na figura 31 (a). A associação de campos externos periódicos pode promover, em condições de ressonância adequadas, o surgimento de dinâmicas que não podem ser extraídas da ação independente de campos elétricos uniformes e periódicos. Para explorar isso, adicionamos uma componente harmônica à fase  $G(t)$  que desempenha um papel semelhante a um campo elétrico artificial dependente do tempo [ver equação 80]. Quando a frequência do campo harmônico ( $\omega$ ) é muito próxima da frequência típica



**Figura 31** – Perfil da densidade de probabilidade de um *qubit* no plano espaço-tempo para três configurações de campo elétrico. Para todos os casos utilizou-se  $m = 100$ . Em (a), sob a presença de um campo elétrico uniforme  $G$  com  $(\Delta\Phi = 0)$ , o caminhante quântico apresenta oscilações bem definidas do tipo Bloch. (b) Quando sujeito a superposição das componentes de fase constante e harmônica com frequência  $\omega$  muito próxima da frequência de Bloch ( $\omega_B$ ), temos o surgimento de super oscilações com grandes amplitudes. Em (c), quando ajustamos os parâmetros para a condição de ressonância  $\omega = \omega_B$ , o pacote de ondas do caminhante quântico exibe um movimento com uma direção preferencial.



Fonte: Do autor, 2022.

de Bloch ( $\omega_B$ ), a função de onda do caminhante quântico realiza oscilações com grandes amplitude<sup>1</sup> Esse fenômeno surge apenas quando a frequência do campo harmônico

$$\omega = \omega_B + \Delta\omega, \quad (83)$$

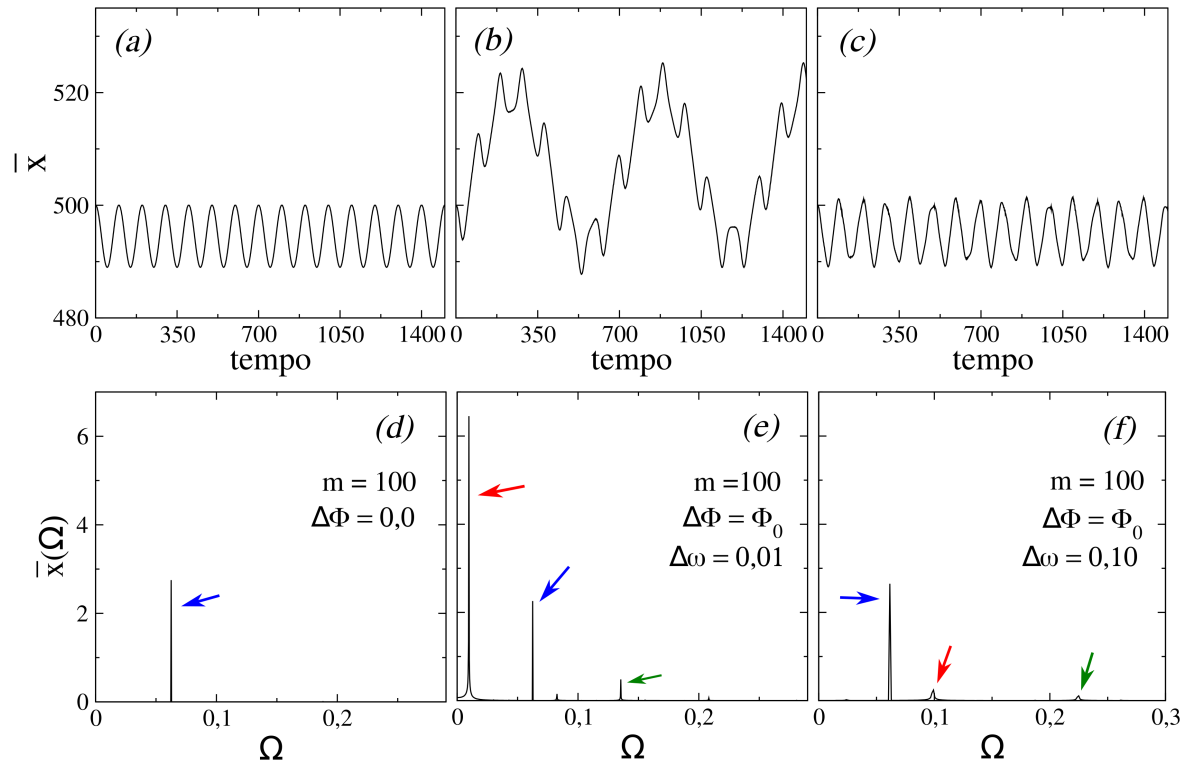
é ligeiramente dessintonizada ( $\Delta\omega \ll \omega_B$ ) da frequência de oscilação de Bloch ( $\omega_B = \Phi_0$ ). Essa dinâmica que rotulamos como super oscilações do tipo Bloch muda para uma propagação com uma direção preferencial quando ajustamos as frequências para o caso de ressonância exata. Na figura 31(c) assumimos que  $\Delta\omega \rightarrow 0$  de forma que  $\omega = \omega_B$ . O pacote de ondas do caminhante quântico desenvolve uma caminhada com uma direção preferencial, em estreita analogia com a dinâmica dos pacotes de ondas de um elétron que obedece a equação de Schrödinger sob condições de campo elétrico semelhantes [para mais detalhes indicamos as referências (82, 80, 204)].

Para uma descrição mais detalhada, calculamos numericamente a evolução temporal da posição média do pacote de onda do *qubit* para entendermos os efeitos causados pela dessintonização  $\Delta\omega$  em sua dinâmica. O centróide é definido por

$$\bar{x}(t) = \sum_n n P_n. \quad (84)$$

<sup>1</sup> Quando comparadas com o caso onde somente a fase uniforme ( $\Phi_0$ ) atua no sistema.

**Figura 32** – O painel superior exibe a evolução temporal do centróide para três configurações de campo elétrico artificial,  $G(t)$ . Em (a),  $G(t)$  é composto somente pela fase independente do tempo  $\Phi_0 = 2\pi/m$ , com  $m = 100$  resultando em oscilações de Bloch; Quando ligamos a componente harmônica, em (b), com uma frequência efetiva ( $\omega_{SOB}$ ) próxima a frequência de Bloch, o *qubit* realiza super oscilações de Bloch; Quando a diferença entre as frequências é grande ( $\delta\omega = 0,1$ ), o pacote de ondas volta realizar oscilações de Bloch. No painel inferior (d-f) mostramos o espectro de frequência de cada caso (a-c), respectivamente. O caso (b-e) chama atenção devido ao surgimento de três picos de frequências.



Fonte: Do autor, 2022.

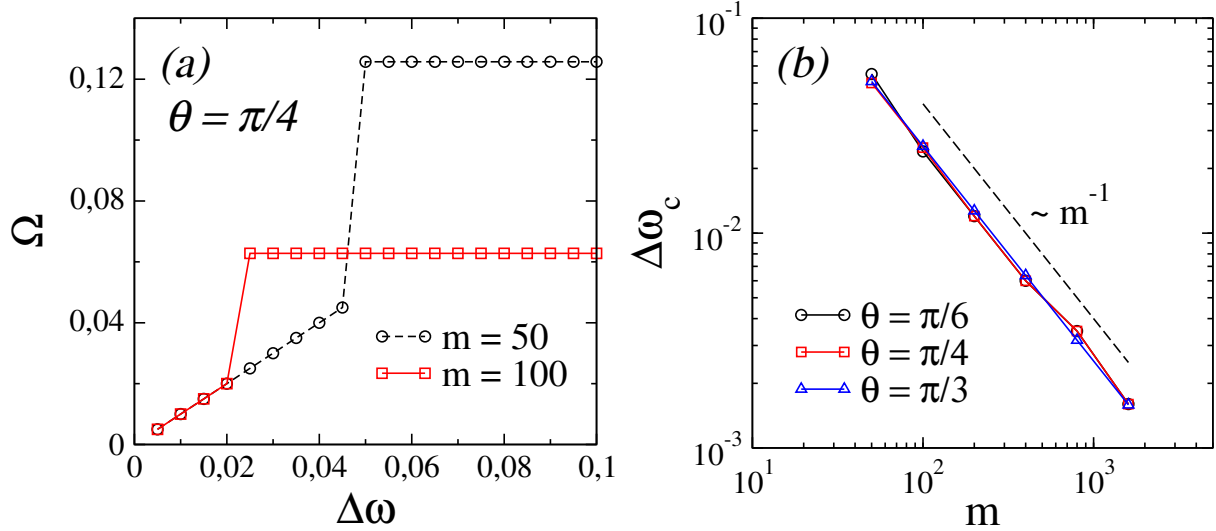
A figura 32 exibe a evolução do centróide três configurações de campos elétrico artificial. Na parte superior de (a-c), temos a evolução da equação (84) e, na parte inferior (d-f), temos o espectro de frequência dos comportamentos mostrados em (a-c), respectivamente. Em todos os casos o centróide exibe um padrão oscilatório. No entanto, mudando o valor de  $\Delta\omega$ , a dinâmica visita dois regimes. A figura 32 (a) mostra o caso em que o caminhante quântico está apenas sob a ação de um campo elétrico artificial uniforme,  $\Delta\Phi = 0$  e  $\Phi_0 = 2\pi/m$ . O centróide mostra oscilações coerentes com período de Bloch  $T_B$  igual ao valor de  $m$ , ou seja,  $T_B = m$ , corroborando com os resultados apresentados na seção anterior. Olhando para o espectro de Fourier, figura 32 (d), vemos que frequência de oscilação é proporcional à fase uniforme adquirida,  $\omega_B = \Phi_0 \approx 0,0628$ . A abscissa representa a frequência espectral ( $\Omega$ ). A dinâmica detalhada depende intimamente se

$\Phi_0/2\pi$  é um número irracional ou racional, como discutido nas (194, 84, 195). Aqui, surge um comportamento que difere do caso onde um elétron sujeito a ação de um campo elétrico constante e tem sua dinâmica regida pela equação de Schrödinger em tempo contínuo. Em física do estado sólido, quando o estado inicial do elétron é completamente localizado, chamamos um pacote tipo delta, a posição média da dinâmica eletrônica é na posição inicial. Ou seja, o centróide do elétron não realiza nenhum movimento oscilatório, embora sua função de onda oscile com frequência proporcional ao campo elétrico aplicado. Nas caminhadas quânticas discretas, o caminhante quântico tem dois graus de liberdade interno, que em conjunto com a fase adicionada pelo campo elétrico artificial, faz com que, mesmo o estado estando inicialmente completamente localizado em  $n_0$ , apresente uma posição média que oscila com frequência  $\omega_B \approx \Phi_0$ .

Quando ligamos a componente harmônica do campo elétrico artificial ( $\Delta\Phi \neq 0$ ) a dinâmica do caminhante quântico apresenta dois regimes que dependem da relação entre a frequência típica de Bloch ( $\omega_B$ ) e a frequência do campo elétrico artificial dependente do tempo ( $\omega$ ). Para analisarmos quais os resultados dessa relação sobre a dinâmica, vamos adicionar um parâmetro extra no argumento do campo harmônico de modo que a frequência efetiva seja dada por  $\omega_{SOB} = \omega + \Delta\omega$ . O termo  $\Delta\omega$  nos permite controlar a diferença entre as frequências. Na literatura é conhecido como termo de *detuning*. Quando  $\omega_{SOB}$  é muito próxima a frequência de Bloch ( $\omega_B$ ), ou seja, se a diferença entre estas frequências for da ordem de  $\Delta\omega = 0.01$ , o centróide do pacote de ondas do *qubit* realiza oscilações com amplitudes muito maiores do que as apresentadas em (a), como vemos na figura 32 (b). Além disso, consideramos a amplitude de modulação igual ao campo elétrico artificial constante, isto é,  $\Delta\Phi = \Phi_0$ .

A figura 32 (e) exibe o espectro de frequências para o centróide apresentado em fig. 32 (b). Neste caso, sua dinâmica possui três pontos de frequências muito característicos. A maior componente (seta em vermelho) representa a frequência das super oscilações de Bloch (SOB) e possui um valor  $\Omega$  igual a  $\Omega_{SOB} = \Delta\omega = 2\pi/m - \omega = 0,01$ . A segunda componente (seta em azul) é a frequência das pequenas oscilações, que depende apenas do componente uniforme  $\Phi_0 = 2\pi/100$ . Além dessas duas componentes principais, também é possível identificar uma terceira componente de frequência (seta em verde) que é a soma das frequências  $\omega_B + \omega + \Delta\omega \approx 0,136$ . É interessante salientar que a dinâmica das SOB é independente da fase  $\phi$  do campo harmônico artificial.

**Figura 33** – O quadro (a) mostra uma análise quantitativa da frequência espectral predominante ( $\Omega$ ) em função da diferença entre a frequência da componente harmônica ( $\omega$ ) e a frequência de Bloch ( $\omega_B$ ) para dois valores de campos elétricos uniformes artificiais  $\Phi_0 = 2\pi/m$ , com  $m = 50$  e  $100$ . Para isso, consideramos que a atuante no sistema é a Hadamard. Para pequenas diferenças de frequências,  $\Omega$  apresenta um comportamento linear onde o comportamento predominante são as super oscilações de Bloch. Acima de um valor característico  $\Delta\omega_c$  a frequência de Bloch se mostra predominante sobre a dinâmica. Em (b) mostramos que esse valor  $\Delta\omega_c$  apresenta um decaimento com o valor de  $m$  e independe da moeda quântica que esteja atuando sobre o sistema.

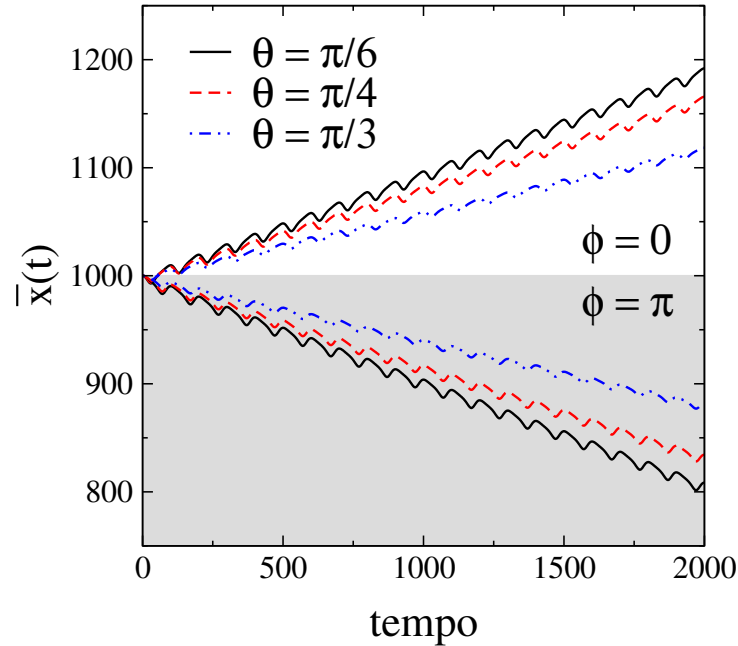


Fonte: Do autor, 2022.

Mostramos na figura 32 (c) o caso onde a diferença entre as frequências é ainda maior que o caso anterior,  $\Delta\omega = 0,1$ . Mantemos a mesma modulação de amplitude utilizada ( $\Delta\Phi$ ) na fig. 32. Nesse caso, a influência da componente harmônica do campo elétrico artificial dá origem apenas a oscilações lentas de pequena amplitude do centróide. Este comportamento parece se aproximar do caso onde somente a fase uniforme atua no sistema. Na figura 32 (f), vemos que a componente de frequência de Bloch é predominante (seta em azul), enquanto que a diferença entre as frequências  $\Delta\omega$  possui um pequeno pico em  $\Delta\omega = 0,1$  (seta em vermelho).

A análise anterior nos permite identificar dois regimes dinâmicos de acordo com a diferença entre a frequência do campo artificial harmônico e a frequência das oscilações padrão de Bloch,  $\Delta\omega$ . Esses dois regimes são caracterizados pela frequência espectral ( $\Omega$ ) predominante do centróide. Na figura 33 (a), relatamos  $\Omega$  como uma função de  $\Delta\omega$  para dois incrementos de fase distintos, isto é,  $m = 50$  e  $m = 100$ . Para diferença de frequências pequenas ( $\Delta\omega \leq \Delta\omega_c$ ), há uma dependência linear da frequência predominante  $\Delta\omega$  que está associada às super-oscilações de Bloch. O comprimento desse crescimento

**Figura 34** – Evolução temporal da posição média do caminhante quântico para três configurações de moedas quânticas,  $\theta = \pi/6, \pi/4$  e  $\pi/3$ . Os resultados mostram que a posição média do caminhante quântico realiza um movimento unidirecional onde a direção é controlada através da fase  $\phi$ .

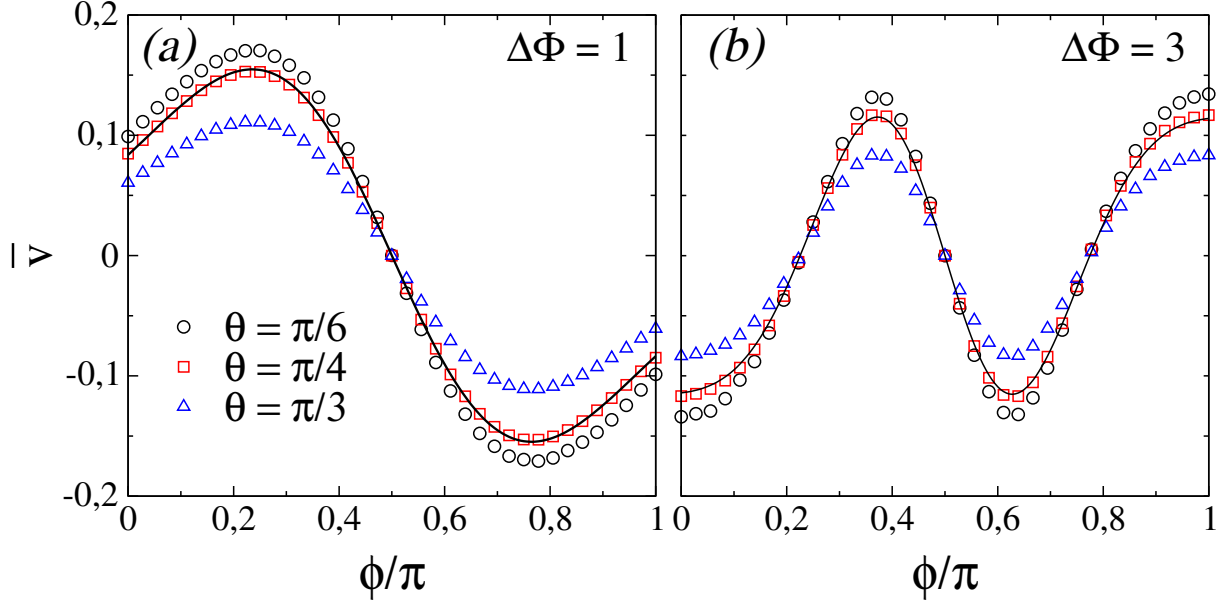


Fonte: Do autor, 2022.

linear depende do valor de  $m$ . Por outro lado, quando  $\Delta\omega > \Delta\omega_c$  a frequência típica de Bloch predomina sobre a dinâmica do pacote de ondas. Considerando uma cadeia com  $N = 2500$  sítios,  $t_{\max} = 40N$  passos de tempo e três configurações diferentes de moedas quânticas ( $\theta = \pi/6, \pi/4$  e  $\pi/3$ ), computamos na figura 33 (b) a frequência característica que separa os dois regimes dinâmicos em função de  $m$ . Mostramos que a diferença de frequência crítica independe da moeda quântica que estiver agindo sobre o sistema e apresenta um decaimento de  $1/m$ . Assim, revelamos que a frequência de transição é proporcional às oscilações do tipo Bloch padrão. Com base nos dados obtidos calculamos que  $\Delta\omega_c/\omega_B \simeq 0,3979$ .

Outra dinâmica interessante emerge na ausência de dessintonia de frequências, ou seja, quando  $\Delta\omega = 0$  ( $\omega = \omega_B$ ). Nestas configurações, o centróide do pacote de ondas do caminhante quântico desenvolve um movimento com uma direção preferencial totalmente controlável pela fase  $\phi$ . Para uma descrição mais quantitativa, calculamos numericamente a posição média do pacote de ondas do *qubit*, equação (84), sob condições de campo ressonante. A figura 34 mostra a evolução temporal da posição média para três configurações de moedas quântica,  $\theta = \pi/6$  (linha contínua),  $\pi/4$  (linha tracejada)

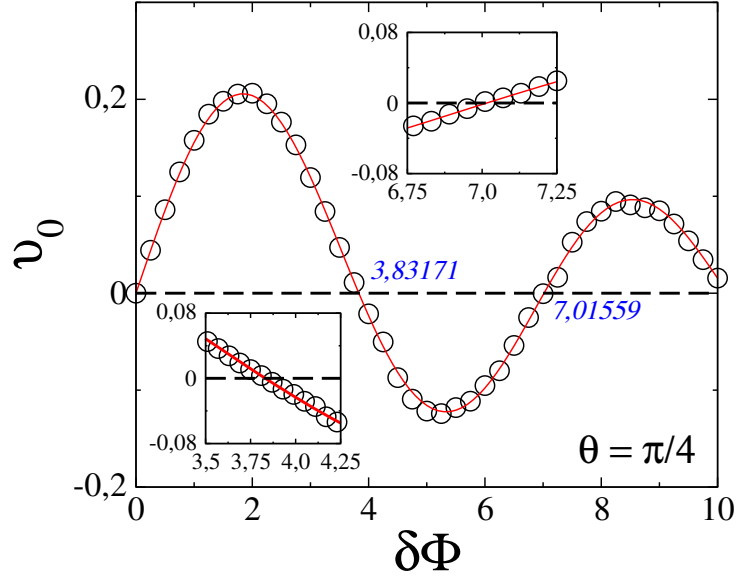
**Figura 35** – Dependência de fase da velocidade do centróide do caminhante quântico para três moedas quânticas distintas:  $\theta = \pi/3, \pi/4$  e  $\pi/6$ . Ambos os quadros (a)  $\Delta\Phi = 0$  e (b)  $\Delta\Phi = 3$  mostram tendências oscilatórias semelhantes. Com amplitudes globais dependente da razão  $\Delta\Phi/\Phi_0$ . Tais dependências corroboram o resultado teórico em tempo contínuo dado pela equação 85, representada pela linha contínua no caso onde  $\theta = \pi/4$ .



Fonte: Do autor, 2022.

e  $\pi/3$  (linha tracejada-pontilhada). Para isso consideramos uma cadeia com  $N = 2000$  sítios e utilizamos  $m = 100$ . Na região com  $\phi = 0$  o centróide do caminhante quântico se desloca para a esquerda da posição inicial  $n_0 = 0$ . Quando  $\phi = \pi$  o deslocamento é simetricamente invertido, caminhando para o lado direito da posição inicial. A velocidade média de propagação depende da fase relativa do campo AC artificial e do parâmetro  $\theta$  que compõe a moeda quântica. Este efeito se apresenta como uma excelente ferramenta de manipulação na dinâmica de *qubits*, ajustando somente a fase do campo harmônico artificial. A fim de melhor explorar o papel dessa fase  $\phi$  na caminhada unidirecional, induzida pela condição de ressonância, construímos um gráfico da velocidade média ( $\bar{v} = \Delta v/\Delta t$ ) do centróide em função de  $\phi$  no intervalo de  $[0, \pi]$ . A figura 35 mostra o resultado para dois valores de amplitudes de modulação da componente harmônica (a)  $\Delta\Phi = \Phi_0$  e (b)  $\Delta\Phi = 3\Phi_0$ . Desvendamos que, sob a condição de ressonância associada às componentes dos campos AC e DC, a dinâmica das partículas quânticas, inicialmente no estado quântico (82), sofre um movimento unidirecional com um movimento oscilatório na velocidade que depende da fase na componente AC para todas as moedas quânticas. No regime de pequenos incrementos de campo  $\Phi_0$ , espera-se uma analogia próxima entre a dinâmica

**Figura 36** – Velocidade média em relação a razão  $\delta\Phi = \Delta\Phi/\Phi_0$  para uma caminhada Hadamard ( $\theta = \pi/4$ ). A curva contínua (em vermelho) representa  $J_1(\delta\Phi) \cos \theta/2$ . Os quadros internos mostram os dois primeiros pontos onde a velocidade é nula,  $\delta\Phi = 3,83171$  e  $\delta\Phi = 7,01559$ .



Fonte: Do autor, 2022.

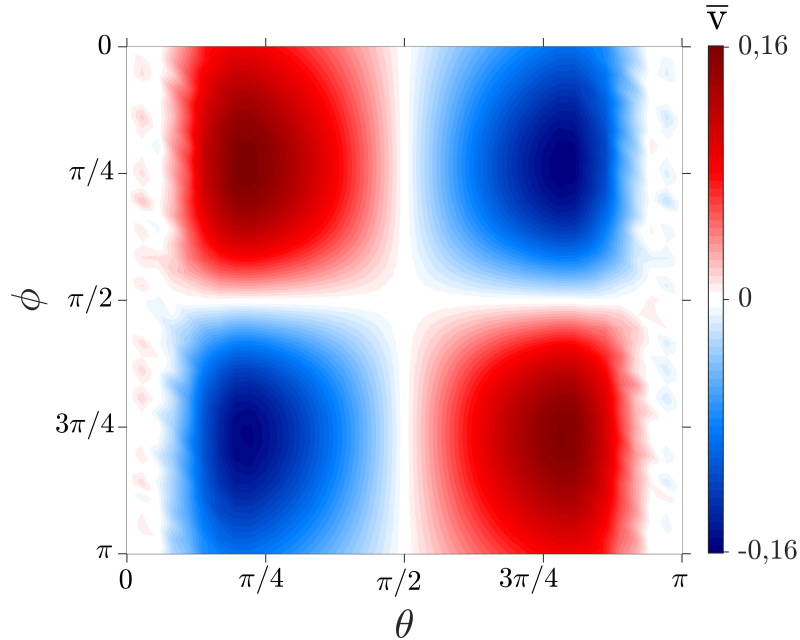
das CQTDs e a de um pacote de onda de partícula única governada por uma equação de Schrödinger em tempo contínuo dentro de uma aproximação de ligação forte. Neste caso, alguns autores demonstraram que a velocidade do pacote de ondas de uma partícula quando conduzida por um campo dependente do tempo em ressonância com a frequência típica de Bloch é dada por (80, 204)

$$\nu = \nu_0 \cos(\delta\Phi \cos(\phi) - \phi), \quad (85)$$

com  $\delta\Phi = \Delta\Phi/\Phi_0$  e  $v_0 \propto J_1(\delta\Phi)$  é a amplitude da velocidade. Sendo  $J_1(x)$  correspondente à função de Bessel do primeiro tipo e ordem 1. A equação 85 ajusta com precisão a dependência da velocidade em  $\phi$ , conforme mostrado pelas linhas sólidas na figura 35. Os resultados corroboram a dependência da amplitude da velocidade em relação a  $\delta\Phi$ , bem como a manutenção do comportamento geral ao variá-lo. Para  $\delta\Phi = 1$ , a velocidade máxima positiva é alcançada em  $\phi_1 = \delta\Phi \cos \phi_1 \approx 0,739$  e a negativa  $\phi_2 = \pi - \phi_1 \approx 2,402$ .

Além disso, investigamos como as amplitudes das velocidades estão relacionadas com as fases adquiridas  $\delta\Phi$  e  $\Phi_0$ . Baseado na equação (85), reescrevemos a velocidade média e mostramos  $v_0$  como uma função de  $\delta\Phi$ . Vemos na figura 36 resultados em total concordância com a análise anterior, com dados revelando que as amplitudes das velocidades

**Figura 37** – Mapa da velocidade média  $\bar{v}$  no plano fase da componente harmônica - moeda quântica ( $\phi$  versus  $\theta$ ). Consideramos o caso onde as frequências estão em ressonância ( $\omega = \omega_B$ ),  $m = 100$  e  $\Delta\Phi = \Phi_0 = 2\pi/m$ . Calculamos a velocidade média no transporte unidirecional do centróide. Observe que a velocidade do centróide pode ser controlada ajustando a fase do campo elétrico AC ou o parâmetro  $\theta$  da moeda quântica.



Fonte: Do autor, 2022.

são governadas pela função de Bessel  $J_1(\delta\Phi)$ . No limite de  $\Phi_0 \ll 1$ , uma aproximação de tempo contínuo nos fornece que  $v_0 = J_1(\delta\Phi) \cos \theta/2$ . Assim, as razões específicas de  $\Delta\Phi/\Phi_0$  correspondentes aos zeros da função de Bessel também são responsáveis por configurações em que o centróide apresenta velocidade nula para todos os valores de  $\theta$ . Os quadros internos na figura 36 mostram os instantes de  $v_0$  vs  $\delta\Phi$  que apresentam os primeiros dois zeros da função de Bessel,  $\Delta\Phi/\Phi_0 = 3,83171$  e  $\Delta\Phi/\Phi_0 = 7,01559$ . As linhas tracejadas são guias para os olhos que identificam  $v_0 = 0$ .

A energia de salto efetiva do caminhante quântico ao longo da cadeia é diretamente influenciado pelo parâmetro  $\theta$  da moeda quântica. Estendemos nossos experimentos numéricos a fim de oferecer um diagrama completo que apresenta a dependência da velocidade do centróide unidirecional do pacote de ondas no regime de ressonância como uma função de  $\theta$  e  $\phi$ . Nossos resultados são mostrados como um gráfico de densidade de cores na figura 37. Para  $\theta = 0$  e  $\pi$ , o pacote de ondas se espalha simetricamente, resultando em um centróide estacionário. Por outro lado, o pacote de ondas permanece preso em torno da posição inicial para a porta Pauli-X  $\theta = \pi/2$ . Velocidades extremas



(máximas e mínimas) são alcançadas em valores  $\theta$  finitos. No entanto, essas velocidades são deslocadas em direção a  $\theta = 0$  (ou  $\theta = \pi$ ) quando incrementos de fase ( $\Phi_0$ ) menores são considerados. Portanto, a velocidade do centróide do caminhante quântico pode ser controlada pelo ajuste da fase do campo AC ou do parâmetro da moeda, abrindo assim uma boa perspectiva para a manipulação de partículas que evoluem através do protocolo de caminhadas quânticas discretas. O ruído próximo a  $\theta = 0$  e  $\pi$  é devido a efeitos de tempo finito. Perto desses valores limites, a convergência para a dinâmica assintótica torna-se muito lenta e a predição de tempo contínuo de  $v_0 \propto \cos \theta$  é quebrada. No regime de longa duração, a dinâmica da caminhada quântica sob um campo uniforme torna-se instável devido à sua natureza de tempo discreto (194), degradando assim a condição de ressonância necessária para sustentar o movimento unidirecional.

#### 6.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, exploramos a dinâmica de um *qubit* submetido a uma sobreposição de fases com dependência temporal e espacial para simular campos elétricos uniforme e harmônico em uma CQTD. O campo constante efetivo está relacionado a uma fase com uma dependência linear da posição, enquanto o campo dependente do tempo surge de uma fase que exibe uma modulação harmônica. Com isso, mostramos que a caminhada quântica em tempo discreto apresenta diferentes dinâmicas que dependem das características do campo elétrico resultante. Quando o sistema está sob a ação apenas de um campo elétrico uniforme fraco, o pacote de ondas do caminhante quântico desenvolve oscilações quase estacionárias do tipo Bloch, com frequência de oscilação diretamente proporcional a fase  $\Phi_0$ . Quando ligamos a componente harmônica, temos a emergência de novas dinâmicas que dependem da relação entre a frequência do campo elétrico dependente do tempo e da frequência típica de Bloch. Em um primeiro momento, quando a frequência da componente harmônica está muito próxima da frequência de oscilação do caminhante quântico quando este está somente sujeito ao campo elétrico constante, vemos o surgimento de oscilações com grande amplitude e baixa frequência ( $\omega_{SOB}$ ), conhecidas como super oscilações de Bloch. Mostramos que esta componente de baixa frequência é predominante sempre que a diferença de frequências  $\Delta\omega$  estiver abaixo de uma fração característica de  $\omega_B$ . Além disso, surge uma terceira dinâmica quando ajustamos as fases na condição de ressonância,

$\omega = \omega_B$ , a caminhada desenvolve um movimento unidirecional, onde sua velocidade e direção do centróide dependem tanto das características do campo (amplitudes e fases) quanto da moeda quântica implementada. Em particular, a dependência da velocidade do pacote de ondas mostrou ser bem capturada por uma abordagem de tempo contínuo. O parâmetro do operador moeda controla a faixa de valores possíveis para a velocidade média. Considerando que caminhadas quânticas de tempo discreto podem ser implementadas em várias plataformas físicas, como redes ópticas, cavidades quânticas e condensados de Bose-Einstein, os presentes resultados mostram maneiras distintas de manipular e conduzir caminhantes quânticos ajustando as características de rede que governam a moeda específica. operador ou os parâmetros de campo de fase.



## Ondas traiçoeiras em caminhadas quânticas discretas

Ondas traiçoeiras, enormes paredes de água imprevisíveis e raras que aparecem do nada e desaparecem sem deixar rastros, são conhecidas e temidas há séculos pelos marinheiros. O primeiro relato sólido do fenômeno ocorreu em 1995, quando dados coletados na plataforma de petróleo Draupner, revelaram uma onda de 26 metros subindo de um fundo com cerca de metade da altura de onda significativa (205). Não demorou muito até que as analogias entre tais fenômenos de ondas oceânicas e a propagação da luz em fibras ópticas fossem traçadas na estrutura da equação não-linear de Schroedinger (206). Desde então, o interesse em eventos extremos, que são fenômenos de ondas onipresentes exibindo estatísticas de cauda longa (quando os valores discrepantes ocorrem com mais frequência que o esperado pelas estatísticas gaussianas) disparou em vários sistemas físicos (75). A óptica, em particular, tem sido um poderoso teste para investigar esse tipo de fenômeno devido às escalas espaciais e temporais envolvidas (quando comparadas com o oceano, por exemplo) e, além disso, pesquisas sobre ondas ópticas traiçoeiras incluem um punhado de fenômenos novos, não necessariamente apresentando uma contraparte hidrodinâmica (75, 207).

Um dos principais desafios da área em geral é descobrir com precisão como esses eventos surgem para poder prevêê-los e controlá-los. Há um debate de longa data sobre se as ondas traiçoeiras são impulsionadas por processos lineares ou não-lineares (208) e qual é o papel do ruído e da aleatoriedade (72). É natural supor que a não-linearidade desempenha um papel importante devido à instabilidade modulacional (209, 210), colisões entre sólitons (211), e assim por diante. Por outro lado, alguns estudos sugerem que interferências lineares de campos aleatórios são cruciais (79, 212, 213, 214, 77, 215, 216, 217, 78, 76, 218, 219),

com efeitos não-lineares responsáveis pela focalização extra de ondas (220, 221, 222). De uma forma ou de outra, é notável o fato de que modelos lineares podem exibir ondas traiçoeiras por conta própria quando aumentados com os ingredientes certos (212). Isso foi demonstrado experimentalmente, por exemplo, no transporte de microondas por meio de espalhadores distribuídos aleatoriamente (79), ressonadores de cristal fotônico 2D (77), e muito recentemente, medindo padrões de difração de luz linear na presença de efeitos de memória espacial de longo alcance na entrada aleatória (76).

Embora o interesse em torno da ocorrência de ondas gigantes em modelos lineares tenha aumentado consideravelmente nos últimos anos, a literatura apresentada carece de mais informações sobre esta fenomenologia ao considerarmos sistemas quânticos. Investigar o início de amplitudes quânticas traiçoeiras adiciona outra camada de propriedades às muitas dinâmicas quânticas conhecidas, especialmente em meios desordenados. Daqui em diante, neste capítulo, vamos nessa direção e investigamos a ocorrência de ondas traiçoeiras no quadro paradigmático das caminhadas quânticas. Aqui relatamos pela primeira vez o aparecimento de ondas traiçoeiras em caminhadas quânticas Hadamard unidimensionais, induzidas pela presença de flutuações em fases aleatórias durante a evolução. Fazemos isso revelando as estatísticas das amplitudes de probabilidade de ocupação, que é análoga à intensidade da luz em óptica, em todo o espaço. Discutimos a distribuição de amplitudes de cauda longa em forma de L, que é uma assinatura característica de eventos extremos. Mostramos que a o regime entre uma desordem fraca e intermediária maximiza a probabilidade de ocorrência de ondas traiçoeiras, o que tem a ver com um equilíbrio justo entre localização e mobilidade. Ao final relacionamos isso com o perfil de distribuição espaço-tempo das ondas traiçoeiras. Descobrimos que essas ondas traiçoeiras pertencem à família Gumbel de distribuições de valores extremos.

## 7.1 MODELO PROPOSTO

Consideramos um caminhante quântico que evolui de acordo com o protocolo das CQTDs em uma cadeia unidimensional do tipo anel com  $N$  sítios. Para relembramos, o caminhante quântico pode ser representado por qualquer sistema que possua dois níveis. Como por exemplo, os estados de *spin*:  $\{\uparrow, \downarrow\}$ , que será a representação para os vetores de base do espaço da moeda,  $H_C$ , que utilizaremos nesse capítulo. Os estados do espaço

das posições são definidos no espaço  $H_P$ , de modo que, o espaço de Hilbert total é escrito como:  $H = H_P \otimes H_C$ . Definindo um estado  $|\Psi\rangle$  arbitrário, sua evolução se dá de acordo com a seguinte equação:

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{S}(\hat{C} \otimes \mathbb{I}_P)\hat{D}|\Psi(t-1)\rangle. \quad (86)$$

Assim, o estado do *qubit* no tempo  $t$  depende do função de onda no instante de tempo anterior ( $t-1$ ). Como visto anteriormente,  $\hat{C}$  corresponde ao operador moeda quântica, que é, em linhas gerais, uma matriz de rotação pertencente ao grupo  $SU(2)$ . Nesta tese, escolhemos trabalhar com o grupo de moedas quânticas que possuem apenas um parâmetro de controle,  $\theta$ . Vimos que para  $\theta = \pi/4$ , a matriz de rotação  $\hat{C}$ , se torna a conhecida moeda Hadamard, que é a moeda quântica que utilizaremos nesse capítulo. Assim, temos que,

$$\hat{C} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|). \quad (87)$$

Assumimos que a cadeia é do tipo anel de tal forma que operador deslocamento condicional é dado por

$$\hat{S} = \sum_{n=1}^{N-1} |n+1\rangle\langle n| \otimes |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \sum_{n=2}^N |n-1\rangle\langle n| \otimes |\downarrow\rangle\langle\downarrow| + |1\rangle\langle N| \otimes |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |N\rangle\langle 1| \otimes |\downarrow\rangle\langle\downarrow|. \quad (88)$$

Observe que os dois últimos termos fornecem a condição para que o sistema possua condições periódicas de contorno. Por fim,  $\hat{D}$  é o operador de ganho de fase unitária, isto é,

$$\hat{D} = \sum_c \sum_n e^{iF(c,n,t)} |n\rangle\langle n| \otimes |c\rangle\langle c|, \quad (89)$$

onde  $F(c,n,t)$  é uma função real arbitrária e  $c = \uparrow, \downarrow$ .

Aplicando  $\hat{U}$  a um estado arbitrário  $|\Psi\rangle$  encontramos a seguinte relação recursiva para as amplitudes  $|\psi\rangle$ :

$$\begin{aligned} \psi_{n,\uparrow}^{t+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{iF_{n+1}^\uparrow} \psi_{n+1,\uparrow}^t + e^{iF_{n+1}^\downarrow} \psi_{n+1,\downarrow}^t \right); \\ \psi_{n,L}^{t+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{iF_{n-1}^\uparrow} \psi_{n-1,\uparrow}^t - e^{iF_{n-1}^\downarrow} \psi_{n-1,\downarrow}^t \right). \end{aligned} \quad (90)$$

A sequência de portas acima incorporada em  $\hat{U}$  permite uma rica variedade de dinâmicas, dada a flexibilidade na escolha de  $F(c,n,t)$ , pode-se produzir vários regimes dinâmicos. Por

exemplo, a configuração  $F = 0$  recupera o passeio quântico Hadamard padrão, no qual o caminhante se espalha balisticamente apresentando estados completamente deslocalizados. Olhando atentamente para o operador da equação (89), ele é semelhante ao operador utilizando nos capítulos 4 e 5 com algumas diferenças: (i) agora ele não possui dependência com a densidade de probabilidade dos sítios vizinhos e (ii) não possui uma dependência temporal. Aqui, em vez disso, definimos uma modulação de fase aleatória estática, tal que,  $F(c, n, t) = F(c, n) = 2\pi\gamma$ , onde  $\gamma$  é um número aleatório distribuído uniformemente no intervalo  $[-W, W]$ , com  $W$  sendo a largura da desordem. Como é conhecido que uma desordem estática pode levar à localização de Anderson, devemos perguntar se as ondas traçoeriras podem ser suportadas dadas as condições iniciais adequadas e a determinadas quantidades de ruídos incorporados em  $F(c, n)$ .

## 7.2 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Antes de tudo, precisamos definir os critérios quantitativos que iremos utilizar para identificarmos as ondas traçoeriras. Um abordagem padrão, empregada pela comunidade oceanográfica, utiliza o índice de anormalidade, que é a razão entre a altura da onda e a altura média sobre um terço das ondas mais altas em uma série, seja ela temporal, espacial ou espaço-temporal (72). Assim, todo evento cujo índice de anormalidade for maior que 2 é considerado uma onda traçoerira. Em nossas análises, não fugiremos dessa perspectiva. Consideraremos uma onda traçoerira, toda onda que possuir uma densidade de probabilidade,  $P_n$ , duas vezes maior do que a densidade de probabilidade média calculada sobre um terço das maiores amplitudes,  $\bar{P}_{1/3}$ , isto é,

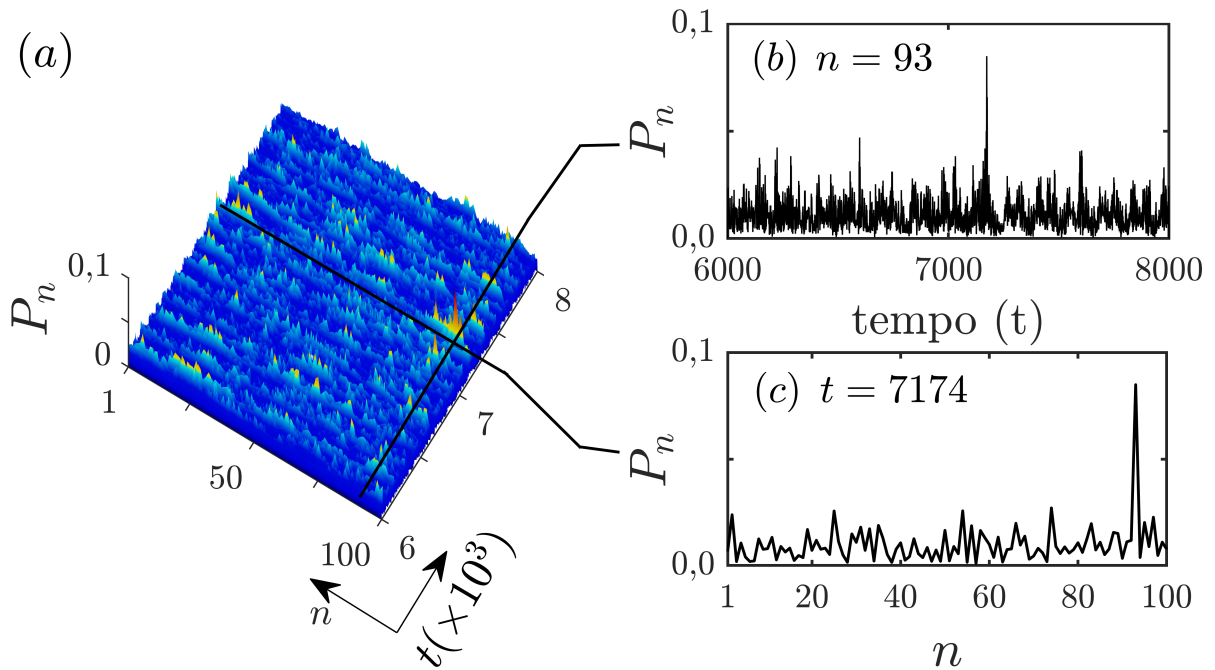
$$P_n(t) > 2\bar{P}_{1/3}. \quad (91)$$

Embora isso possa parecer um pouco arbitrário, tornou-se uma análise padrão em vários contextos (75).

A fim de evitar ambiguidade entre um evento extremo real e a inevitável localização de Anderson da função de onda em nossas estatísticas, inicializamos o sistema em um estado totalmente deslocalizado da forma

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{n=1}^N (|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle) \otimes |n\rangle. \quad (92)$$

Figura 38 – Perfil da evolução da densidade de probabilidade,  $P_n$ , para uma caminhada quântica Hadarmad, com estado inicial dado pela equação (92), em uma cadeia com  $N = 100$  sítios e uma largura de desordem  $W = 0,1$ . Deixamos o sistema evoluir até  $t = 10N$ . No entanto, realizamos um corte temporal,  $[6000, 8000]$ , para mostrar com clareza o instante do surgimento de uma onda traiçoeira. Em (a), temos esse perfil no plano espaço-temporal, (b) e (c) exibem séries temporais e um perfil espacial extraídos de (a), respectivamente. O evento traiçoeiro é visto em  $t = 7174$ .



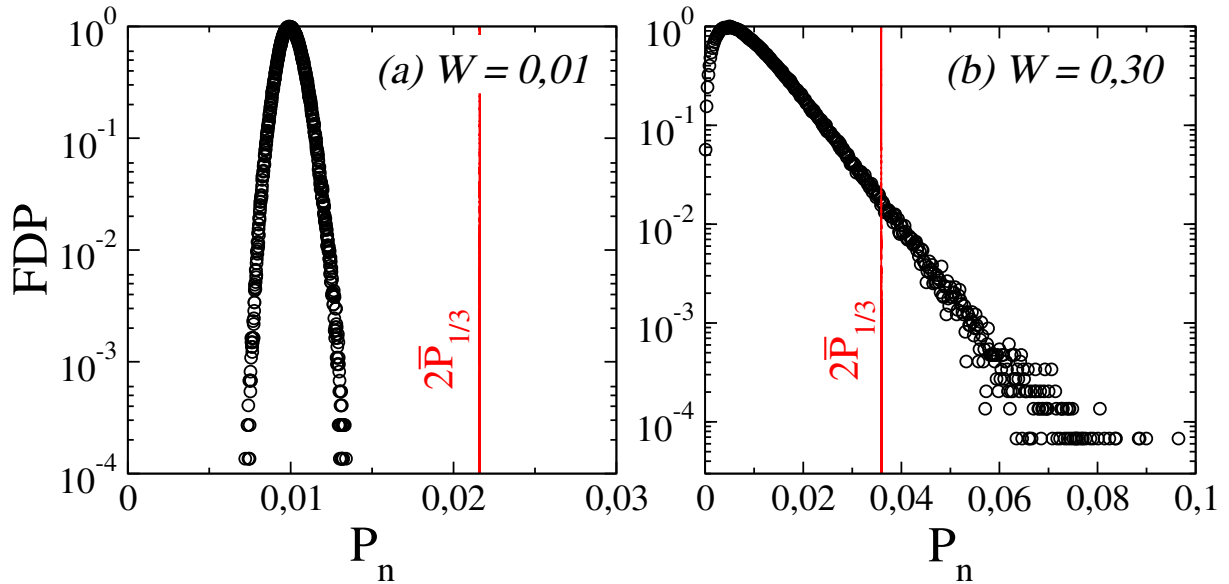
Fonte: Do autor, 2022.

Diferentemente do capítulo 5, aqui não vamos inserir um ruído no estado e renormalizar a função de onda. O ruído aqui já é unitário e surge através do operador  $\hat{D}$ . Nossas simulações são executadas em uma cadeia com  $N = 100$  sítios, inicialmente, e deixamos o sistema evoluir até  $t_{max} = 10N$ . Repetimos esse protocolo para 15000 realizações de desordem independentes.

A figura 38 exibe o perfil de uma típica onda traiçoeira, com  $P_n \approx 5\bar{P}_{1/3}$ , juntamente com uma visão detalhada do registro da densidade de probabilidade,  $P_n$ , ao longo do tempo e do espaço [figura 38 (b) e (c), respectivamente]. Este pico possui todas as características necessárias de uma onda traiçoeira. Além da grande amplitude em relação a média (em ambos os casos), é imprevisível e de curta duração.

Um critério que é empregado, em especial pela comunidade da óptica, para caracterizar a existência desse tipo de evento é olhando a forma que a função densidade de probabilidade (FDP) possui. Em geral, ondas traiçoeiras assinam sua existência quando

Figura 39 – Função densidade de probabilidade (FDP), normalizada, para duas larguras de desordem representativas. Em (a)  $W = 0,01$ , uma desordem fraca e (b)  $W = 0,3$ , uma largura intermediária. A distinção é clara, enquanto a figura (b) apresenta uma assinatura de calda longa, em (a) vemos uma FDP que segue uma estatística gaussiana. A linha em vermelho representa o limite para classificação de tais eventos.



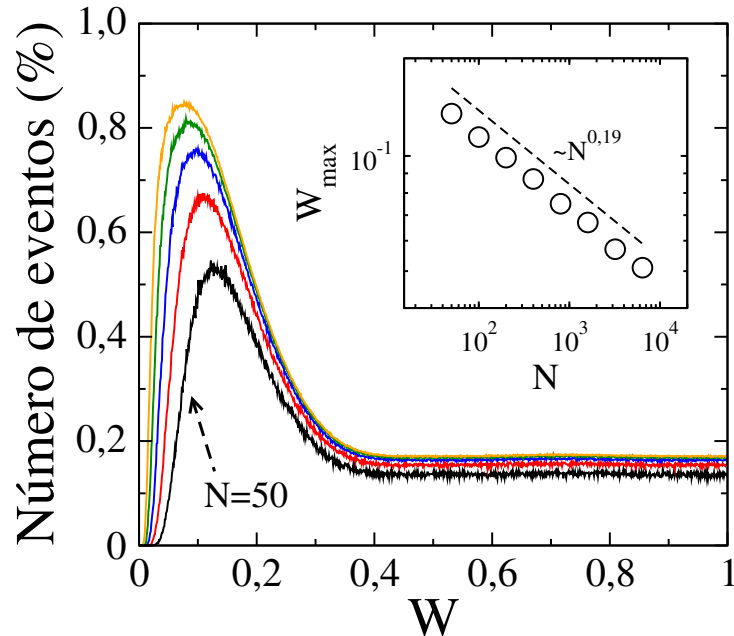
Fonte: Do autor, 2022.

apresentam uma FDP com perfil não-gaussiano e de cauda longa, ou, em forma de  $L$ . No entanto, essa é uma condição necessária mas não suficiente para determinarmos tais eventos. Na figura 39, mostramos algumas funções densidade de probabilidade normalizadas para alguns graus de desordem,  $W = 0,01$  (fraco), e  $W = 0,3$  (intermediário). A distinção é clara, na medida em que a figura 39 (b) exibe uma das assinaturas-chave da ocorrência de eventos extremos, isto é, uma distribuição de calda longa positivamente assimétrica com um número significativo de pontos na faixa de alta intensidade de  $P_n$ . Relativamente raro entre o número total de eventos ainda mais quando comparadas a partir das estatísticas gaussianas [ver figura 39 (a)s]. Além disso, esse resultado nos sugere que para uma largura de desordem pequena, não teremos o surgimento de ondas traçoeiras, enquanto que, para uma largura de desordem maior, os eventos raros se tornam mais frequentes. Então, se continuarmos aumentando a largura da desordem,  $W$ , o número de eventos extremos se tornaram mais e mais frequentes?

Para analisar essas distribuições em um nível mais quantitativo, computamos o número de eventos que satisfazem a condição necessária para se enquadrar como uma onda traçoeira, dada pela equação (91), para todas as larguras de desordem no intervalo



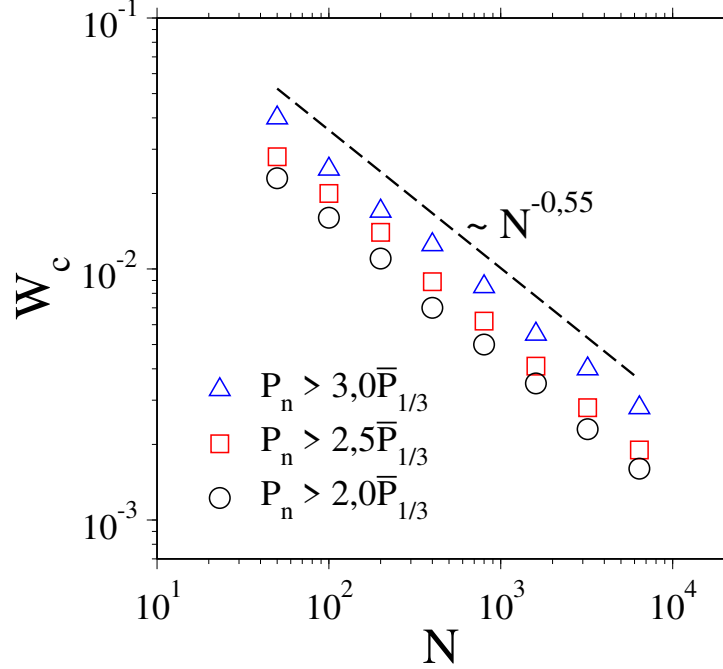
**Figura 40** – Número de eventos indicando a existência de ondas traiçoeiras em função do grau de desordem,  $W$ , do sistema para  $N = 50, 100, 200, 400$  e  $800$  sítios (no sentido da curva em preto para curva em laranja, respectivamente). O quadro interno mostra a escala do grau de desordem que maximiza as chances de medirmos uma onda traiçoeira,  $W_{\max}$  com  $N$ .



Fonte: Do autor, 2022.

$W \in [0, 1]$ , com incremento de  $\delta W = 10^{-3}$ . A figura 40 mostra a porcentagem média do conjunto de eventos que atendem tal condição para cinco tamanhos de rede:  $N = 50, 100, 200, 400$  e  $800$  sítios. O resultado acima revela que ondas traiçoeiras surgem sempre que a desordem é forte o suficiente para produzir estados efetivamente localizados em uma cadeia finita com  $N$  sítios. Curiosamente, existe um nível ótimo de desordem que maximiza as chances de observarmos um evento traiçoeiro em algum lugar ao longo da rede. Isso sugere que as ondas traiçoeiras são mais propensas a se desenvolver quando se equilibra adequadamente mobilidade com os efeitos de localização. Para valores de desordem acima de  $W > 0,3$  o número de ocorrências não apresenta uma diferença significativa para tamanhos de redes diferentes. O quadro interno, na figura 40, mostra o valor da largura da desordem que maximiza a ocorrência desses eventos em cada tamanho de rede  $N$ , denominamos esse valor por  $W_{\max}$ . Com isso, tivemos que  $W_{\max}$  apresenta um decaimento da forma  $\propto N^{-\nu}$ , com  $\nu \approx 0,19$  na faixa de tamanhos de cadeia considerados. Devido a limitações computacionais, não conseguimos computar o número de eventos para cadeias extremamente grandes,  $N \rightarrow \infty$ . No entanto, nossos resultados sugerem que, quando  $N$

**Figura 41** – Largura da desordem,  $W_c$ , acima da qual as ondas traiçoeiras têm uma probabilidade de ocorrência finita para níveis de *anormalidade* diferentes:  $2,0\bar{P}_{1/3}$ ,  $2,5\bar{P}_{1/3}$  e  $3,0\bar{P}_{1/3}$ . O decaimento  $W_c \propto N^{-1/2}$  revela que em  $W_c$  o comprimento de localização  $\lambda \propto 1/W^2$  é da ordem do tamanho da cadeia.



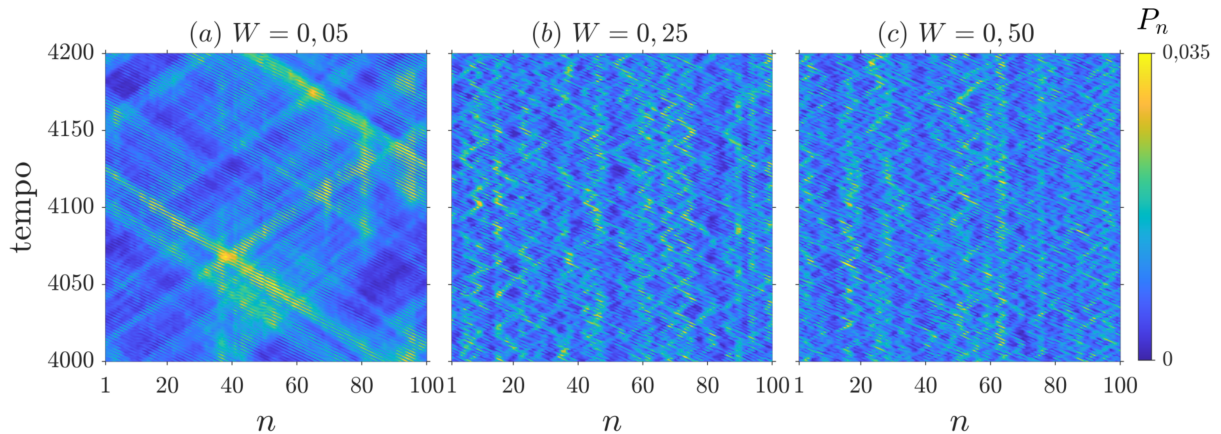
Fonte: Do autor, 2022.

for absurdamente grande, qualquer largura infinitesimal de desordem,  $\delta W$ , será suficiente para gerar ondas traiçoeiras no ponto de maximização.

Essa premissa é corroborada quando olhamos a largura da desordem mínima necessária para que esses eventos apareçam em nosso protocolo de CQTD. A figura 41 mostra o ponto de largura de desordem crítica,  $W_c$ , necessária para que o sistema apresente eventos que satisfazem a condição da equação (91) para vários tamanhos de rede:  $N = 50, 100, 200, 400, 800, 1600, 3200, 6400$  sítios. Isto é, mostra a dependência da largura da desordem,  $W_c$ , com o tamanho da cadeia,  $N$ . Além disso, mostramos que mesmo alterado o valor de *anormalidade* ( $2,0\bar{P}_{1/3}$ ,  $2,5\bar{P}_{1/3}$  e  $3,0\bar{P}_{1/3}$ ) o comportamento que  $W_c$  apresenta com  $N$  é o mesmo. O decaimento  $W_c \propto N^{-1/2}$  revela que em  $W_c$  o comprimento de localização  $\lambda \propto 1/W^2$  é da ordem do tamanho da cadeia.

Uma maior probabilidade de ocorrência de ondas irregulares entre forças de desordem fracas e intermediárias foi observada em experimentos recentes realizados em redes fotônicas 1D apresentando desordem no local e de acoplamento (78). Isso também sugere que a interação entre estados localizados e deslocalizados é um ingrediente chave

**Figura 42** – Padrões do perfil da densidade de probabilidade,  $P_n$  do caminhante quântico no espaço-tempo para larguras de desordem: (a)  $W = 0,05$ , (b)  $W = 0,25$  e (c)  $W = 0,5$ , (realizações únicas). Pontos com amarelo mais intenso são eventos de ondas gigantes que cumprem a condição da equação (91) para cada amostra. Em (a), com um grau de desordem fraco, notamos que as condições de sincronização para formar uma onda traiçoeira são atendidas mais facilmente.

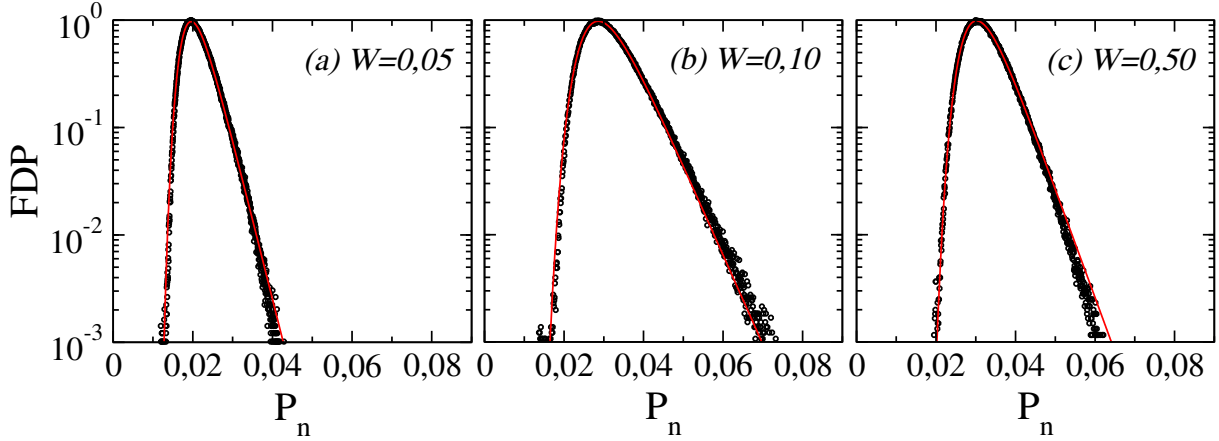


Fonte: Do autor, 2022.

para a para a geração de eventos extremos em sistemas lineares. Além disso, flutuações correlacionadas conhecidas por produzir propriedades de transporte ricas (223) – foram exploradas para aumentar a probabilidade de ocorrência de ondas traiçoeiras (217, 76), algumas delas excedendo amplamente o limite de amplitude (referidas como super ondas traiçoeiras) (76).

Grandes flutuações em  $F(c, n)$  tendem a tornar os efeitos de localização mais nítidos, mas isso não significa necessariamente que a ocorrência de ondas traiçoeiras seguirá esse crescimento. Devemos sempre ter em mente que uma onda traiçoeira é um evento raro e súbito cuja amplitude  $P_n$  deve exceder algum limite baseado na média das amplitudes locais (espaço-tempo). A fim de produzir tal interferência construtiva com grandes amplitudes em algum local por meio de dinâmica puramente linear, precisamos de uma sincronização adequada de ondas aleatórias passando por diferentes caminhos e, portanto, algum grau de mobilidade. A figura 42 mostra a evolução do perfil da densidade de probabilidade,  $P_n$ , para três larguras de desordem distintas: (a)  $W = 0,01$ ; (b)  $0,25$  e (c)  $0,5$ . No caso de um grau de desordem fraco, notamos que sempre que as condições de sincronização para formar uma onda traiçoeira são atendidas, ela geralmente cobre alguns sítios na vizinhança antes de desaparecer, como podemos visualizar na figura 42 (a), nos locais onde o amarelo aparece mais intensamente. Para graus de desordem intermediários,  $W = 0,25$ , os eventos traiçoeiros tornam-se esparsos, porém, mais frequentes, à medida que um perfil

**Figura 43** – Funções densidade de probabilidade de valores extremos em escala semilog para  $N = 100$  para três larguras de desordem distintas: (a)  $W = 0,05$  (desordem fraca), (b)  $W = 0,1$  (intermediária) e (c)  $W = 0,5$  (forte). Em cada instante de tempo a amplitude de probabilidade máxima,  $P_{\max}$  é coletada. A curva sólida em vermelho é um ajuste do tipo Gumbel, dado pela equação (93).



Fonte: Do autor, 2022.

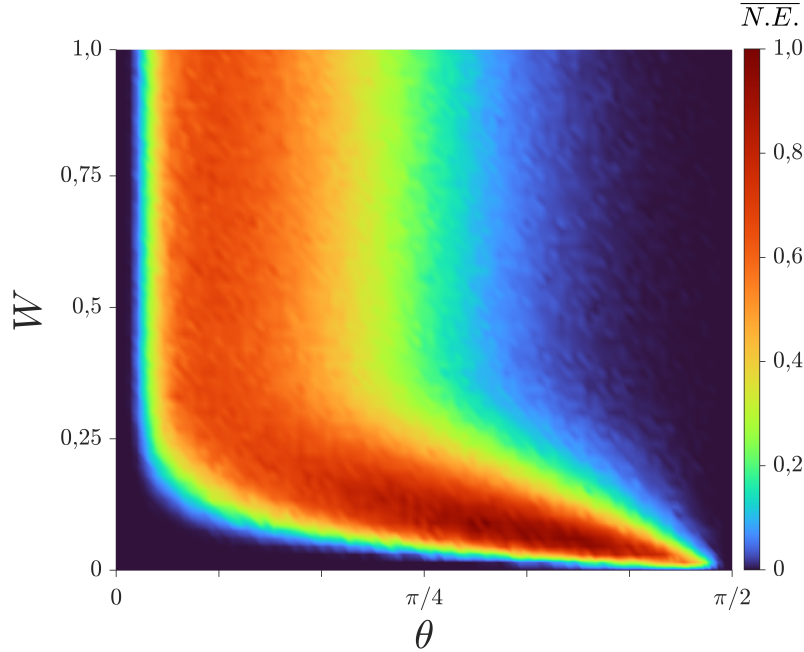
de ramificação mais complexo emerge, ver figura 42 (b). Se continuarmos aumentando a largura da desordem  $W$ , haverá um estágio acima do qual a mobilidade, se houver, será restrita a domínios espaciais mais curtos devido ao início das ressonâncias locais. Isso é visto na figura 42 (c) na forma de domínios de amplitude bem definidos, com poucos deles dando origem a ondas traiçoeiras. É por isso que a probabilidade de ocorrência de ondas traiçoeiras satura para grandes valores de  $W$  e mal responde ao tamanho do sistema  $N$ , como vimos na figura 40.

Por último, mas não menos importante, realizamos uma análise de valores extremos selecionando a amplitude máxima em cada passo de tempo durante a evolução. Fizemos isso para muitas amostras para gerar outras distribuições e ver se elas enquadram-se em um dos três tipos de distribuições: Weibull, Fréchet ou Gumbel, de acordo com um teorema geral da teoria de valores extremos (224). A figura 43 exhibe que nossos eventos extremos pertencem à classe de Gumbel, uma distribuição que é utilizada quando se tem interesse em estudar os valores mínimos prováveis de um fenômeno. Assim, ajustado com uma distribuição

$$y(x) \propto \exp[-ax - b \exp(-ax)], \quad (93)$$

com  $a$  e  $b$  dependentes de  $W$  e  $N$ . Para larguras de desordem intermediário, como na figura 43 (b), o intervalo da densidade de probabilidade,  $P_n$ , é ainda mais esticado, o que indica, novamente, boas chances de observarmos um evento traiçoeiro.

**Figura 44** – Número médio de eventos normalizado no plano formado pela variação da largura da desordem e a quiralidade da moeda quântica ( $W \times \theta$ ).



Fonte: Do autor, 2022.

Por fim, estendemos nossos experimentos numérico para todas as moedas quânticas no intervalo  $\theta \in [0, \pi/2]$ . Na figura 44, calculamos o número médio de eventos normalizados ( $\overline{N.E.}$ ) variando a largura da desordem no intervalo  $W \in [0, 1]$  com incrementos de  $\delta W = 0,01$ . No regime de fraca desordem e moedas quânticas muito próximas da *Pauli-Z* ( $\theta = 0$ ), o sistema não apresenta ondas traiçoeiras, isto é,  $\overline{N.E.} \rightarrow 0$  (região de azul escuro muito intenso). Essa estatística muda quando  $\theta \rightarrow \pi/2$ , mesmo para larguras suficientemente pequenas de desordem. Por outro lado, vemos que as configurações de moedas quânticas que facilitam o surgimento de ondas traiçoeiras encontra-se a esquerda de  $\theta = \pi/4$ . Nosso diagrama sugere que, para moedas quânticas à direita de  $\theta = \pi/4$ , os eventos extremos só ocorrem no regime de fraca desordem, onde acima de um valor  $W_C$  finito a dinâmica é regida por estado localizados evitando, assim, que o caminhante quântica tenha a mobilidade necessária para a ocorrência desses eventos.

### 7.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Relatamos a ocorrência de eventos de ondas traiçoeiras em CQTDs desordenadas e mostramos que esses de fato pertencem a uma classe de fenômenos de valor extremo.

Usando a abordagem emprestada da oceanografia, também descobrimos o perfil de cauda longa das distribuições. Descobrimos que um grau intermediário de desordem  $W_{max} \propto N^{-\nu}$  produz a máxima ocorrência de ondas traiçoeiras devido a um equilíbrio adequado entre mecanismos de aprisionamento e mobilidade para os quais  $W_{max} \propto N^{2\nu}$ . Isso exige uma investigação mais aprofundada para avaliar a relação intrínseca entre o comprimento de localização e a geração de ondas traiçoeiras, especialmente no caso de fases correlacionadas que demonstraram aumentar a ocorrência de eventos extremos (215, 217).

As CQTDS aqui estudadas também oferece a possibilidade de inserir a não-linearidade em  $F(c, n, t)$ , como visto nos capítulos 4 e 5, por exemplo, onde consideramos uma auto-modulação de fase do tipo Kerr e relatamos a formação de pulsos tipo sólton e a ocorrência de auto-focalização pode ocorrer para certas configurações de moedas quânticas. O palco está assim montado para avaliar a competição entre mecânica linear e não-linear na geração de ondas traiçoeiras em caminhadas quânticas.

Esperamos que nosso estudo semeie o interesse por eventos extremos da mecânica quântica de modo geral, especialmente no contexto da teoria da matéria condensada, para enfrentar os fenômenos de localização de Anderson sob uma luz diferente, bem como no campo do processamento de informação quântica, onde eventos dessa natureza podem levar a riscos potenciais na avaliação de algum protocolo, dada a presença inevitável de imperfeições de fabricação dos componentes físicos.

## Considerações finais gerais

Nesta tese, estudamos em detalhes as propriedades de transporte, emaranhamento e coerência quântica em caminhadas quânticas discretas no tempo quando inserimos alguns ingredientes em sua dinâmica, como: inhomogeneidade determinística, não-linearidade, flutuações aleatórias e campos externos. Em linhas gerais, abordamos a versão de tempo discreto onde o caminhante é acionado por uma sequência predefinida de operadores quânticos. A versão mais simples da caminhada quântica em tempo discreto consiste em um conjunto de estados de posição, cada um associado a dois graus de liberdade internos. A evolução temporal ocorre através de duas operações, após que um operador de “lançamento de moeda” é aplicado para gerar superposições de estados localmente, um operador deslocamento move as amplitudes de probabilidade da esquerda para a direita, e vice-versa, dependendo do estado interno. Para uma dada entrada, este procedimento é repetido repetidamente de forma a obter a saída desejada através da interferência adequada das amplitudes quânticas e dá realização de uma medida. As possibilidades de configurações são infinitas. Isso faz das CQTDs uma ferramenta poderosa para construção de algoritmos quânticos e simulação de uma ampla gama de fenômenos complexos, incluindo transição de fase quântica e localização de Anderson.

No capítulo 3, realizamos nossa primeira contribuição em caminhadas quânticas discretas no tempo (ordem cronológica). Acrescentamos a primeira novidade. Analisamos como a inserção de inhomogeneidade estática determinística, por meio de uma distribuição aperiódica generalizada, nos operadores moedas quânticas afetava os atributos e propriedades da dinâmica e de emaranhamento quântico de um *qubit*. Em resumo, mostramos que as propriedades de transporte dividem-se em duas classes: (i) onde os estados

do caminhante quântico encontram-se localizados em torno da posição inicial,  $n_0$ , e (ii) encontram-se estendidos ao longo da cadeia. Com uma distribuição aperiódica ajustável por um único parâmetro  $\nu$  mostramos possíveis combinações de configurações para colocar o caminhante quântico nesses regimes. Caracterizamos esses comportamentos com auxílio da probabilidade de retorno e da função participação. Ademais, utilizamos uma análise do espectros de energia, obtida de um hamiltoniano efetivo associado, para que tanto os regimes deslocalizados quanto os localizados pudessem ser melhor compreendidos.

Em relação ao emaranhamento quântico, identificamos muitos cenários nos quais um aumento na capacidade de gerar emaranhamento é observado. Devemos destacar que, para um grau de aperiodicidade pequeno,  $\nu \leq 0.5$ , o sistema apresentou emaranhamento máximo para um número de passos grande, contrastando, inclusive, com resultados apresentando outrora na literatura, onde relatam que uma não-homogeneidade estática é responsável por quase sempre reduzir o emaranhamento quântico em CQTDs quando comparados com o caso homogêneo. Embora os resultados tenham sido relatados para um caminhante cujo estado inicial é um dos autoestados do operador  $S_z$ , observamos que a fenomenologia é predominante entre diferentes configurações de estados, como pode-se observar através do material suplementar contido no anexo A. Assim, esse comportamento traz novas informações sobre o papel desempenhado pela aperiodicidade no emaranhamento em sistemas não-homogêneos estáticos. Além disso, fechamos toda a discussão com uma análise sobre o limite assintótico da distribuição. Corroborando com todos os resultados apresentados.

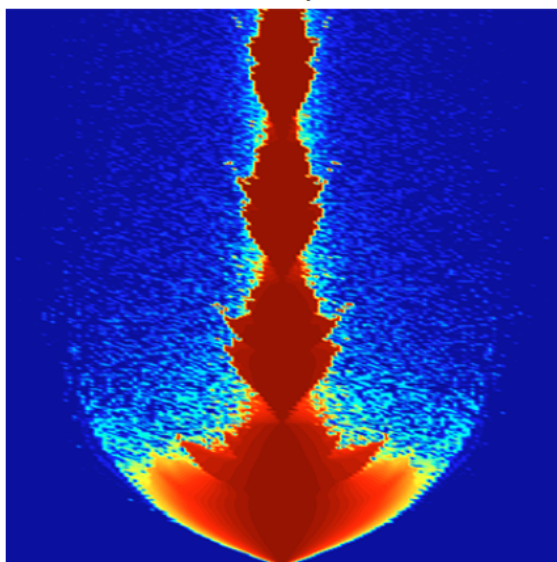
No capítulo 4, investigamos a dinâmica de *qubits* em CQTDs não-lineares. Efeitos não-lineares têm sido extensivamente estudados pela comunidade científica (144, 150, 151, 152, 225, 226, 227). Diversas maneiras de inserir a não-linearidade em CQTDs têm já foram introduzidas tanto no âmbito teórico quanto no experimental (68, 147, 228). Todavia, em nenhum dos trabalhos, no contexto de caminhadas quânticas discretas no tempo, falou-se na generalização dos efeitos não-lineares ao explorarmos outras moedas quânticas atuando na dinâmica do caminhante quântico.

Assim, propomos um modelo onde poderíamos variar o parâmetro da moeda quântica,  $\theta$ . Sendo a intensidade da não-linearidade ajustável por um parâmetro real,  $\chi$ , observamos o surgimento de estruturas tipo sólitons que se propagam pela cadeia,



Figura 45 – Figura selecionada pelos editores para fazer parte do caleidoscópio da revista *Physical Review A* do mês de fevereiro. O trabalho faz parte do corpo desta tese como capítulo 4. Além disso, encontra-se no anexo B.

## Kaleidoscope



From the article:

[Self-trapped quantum walks](#)

A. R. C. Buarque and W. S. Dias

Phys. Rev. A **101**, 023802 (2020)

Fonte: Do autor, 2022.

bem como um regime no qual a função de onda do *qubit* exibe uma localização induzida pela não-linearidade para algumas moedas quânticas. No regime localizado, chamamos de fenômeno de auto-focalização, o modo dispersivo é totalmente suprimido pela não-linearidade, tornando o caminhante fortemente preso na posição inicial,  $n_0$ . Mapeamos que o regime auto-focalização torna-se predominante à medida que atuamos moedas quânticas que se aproximam do operador *Pauli-X*. Mostramos também que o limiar entre regimes deslocalizados e localizados apresenta um aspecto incomum em que um incremento do parâmetro não-linear pode induzir a transição do sistema de um regime localizado para um regime deslocalizado. Tal dinâmica revelou-se bastante rica e contribuindo com a caracterização desse tipo de sistema, pavimentando, assim, os caminhos para aplicações mais robustas na construção de algoritmos quânticos (227) de buscas e simulação de sistemas complexos (228). Por fim, um dos diagramas do corpo desse capítulo foi selecionado pelos editores da revista *Physical Review A* para fazer parte do caleidoscópio do mês de fevereiro no ano em que o estudo foi publicado, 2020, ver figura 45.

Com os resultados do capítulo 4 em mãos, pensamos em propor um modelo que levasse em consideração a presença de ruídos e interações não-lineares. Então, no capítulo 5, propomos a implementação de um protocolo quântico com a capacidade de avaliar

a sensibilidade a ruídos, enquanto interações não-lineares estão presentes em CQTDs. Mantemos o perfil da não-linearidade com as mesmas características apresentadas no capítulo 4, isto é, dependente da densidade de probabilidade,  $P_n$ , e baseada na possível suscetibilidade não-linear de terceira ordem. O ruído pode representar um processo de medição ou outra intervenção externa. Até que ponto essa interação não-linearidade/ruído mantém o sistema estável? Nossos resultados revelam um conjunto de parâmetros operacionais que favorecem uma operação estável. As moedas quânticas próximas a *Pauli-Z*,  $\theta = 0$ , são mais tolerantes ao ruído, ao contrário do comportamento exibido pelas moedas quânticas próximas as moedas do tipo *Pauli-X*,  $\theta = \pi/2$ . Quando perde a estabilidade, o sistema pode apresentar dinâmicas respiratórias e caminhadas quânticas auto-focalizadas. Realizamos uma análise, numérica e analítica, onde exibimos que os pontos transição entre o regime estável e instável decaia à medida em  $1/N$  revela um sistema intolerante a ruídos no limite termodinâmico ( $N \rightarrow \infty$ ), ou seja, não-linearidades podem ser responsáveis pela incapacidade de codificar e decodificar *qubits*. Além de contribuir para a compreensão fundamental mais profunda sobre CQTDs, modos de respiração e auto-focalização também trazem perspectivas de aplicabilidade para microrressonadores, efeitos semelhantes a lentes e guia de ondas, que surge da auto-focalização acumulada.

No capítulo 6, em uma parceria com o professor Marcelo Lyra, realizamos um trabalho em que buscamos explorar a dinâmica de um *qubit* quando submetido a uma sobreposição de fases com dependência temporal e espacial na tentativa de simular efeitos de campos elétricos em CQTDs. Classificamos o sistema com uma rica dinâmica que depende da relação entre as frequências típicas de Bloch e a frequência da componente harmônica da superposição de campos elétricos artificiais. Quando o sistema está sob a ação apenas de um campo elétrico uniforme fraco, o pacote de ondas do caminhante quântico desenvolve oscilações quase estacionárias do tipo Bloch, com frequência de oscilação diretamente proporcional a fase  $\Phi_0$ . Quando a frequência da componente harmônica está muito próxima da frequência de oscilação do caminhante quântico quando somente o campo elétrico constante atua, vemos o surgimento de oscilações com grande amplitude e baixa frequência ( $\omega_{SOB}$ ), conhecidas como super oscilações de Bloch. Mostramos que esta componente de baixa frequência é predominante sempre que a diferença de frequências  $\Delta\omega$  estiver abaixo de uma fração característica de  $\omega_B$ . Além disso, surge uma terceira dinâmica quando ajustamos as fases na condição de ressonância,  $\omega = \omega_B$ , a caminhada desenvolve um

movimento unidirecional. Considerando que CQDTs podem ser implementadas em várias plataformas físicas, como redes ópticas, cavidades quânticas e condensados de Bose-Einstein, os presentes resultados mostram maneiras distintas de manipular e conduzir caminhantes quânticos ajustando as características de rede que governam a moeda específica. operador ou os parâmetros de campo de fase.

Por fim, mas não menos importante, no capítulo 7, em uma colaboração com os professores: Guilherme Almeida, Francisco Fidelis e Marcelo Lyra, relatamos as primeiras ocorrências de ondas traiçoeiras em CQDTs. Mostramos que esses de fato pertencem a uma classe de fenômenos de valor extremo. Descobrimos que um grau intermediário de desordem  $W_{max} \propto N^{-\nu}$  produz a máxima ocorrência de ondas traiçoeiras devido a um equilíbrio adequado entre mecanismos de aprisionamento e mobilidade para os quais  $W_{max} \propto N^{2\nu}$ . Além disso, nosso trabalho abre portas para uma investigação mais aprofundada para avaliar a relação intrínseca entre o comprimento de localização e a geração de ondas traiçoeiras, especialmente no caso de fases correlacionadas que demonstraram aumentar a ocorrência de eventos extremos (215, 217). Por exemplo, poderíamos pensar em como ficaria o acontecimento de ondas traiçoeiras em caminhadas quânticas com as correlações aperiódicas apresentadas no capítulo 1?

Ademais, o modelo proposto aqui oferece a possibilidade de embutir a não-linearidade em  $F(c, n, t)$ , assim como a fizemos nos capítulos 4 e 5. Especificamente falando sobre este último, será que não temos o surgimento de ondas traiçoeiras no regime onde o sistema apresenta uma dinâmica caótica? Será que o pontapé inicial para o fenômeno de auto-focalização apresentado no capítulo 5 não se dá por meio do surgimento de ondas extremas? O palco está assim montado para avaliar a competição entre mecânica linear e não-linear na geração de ondas traiçoeiras em caminhadas quânticas. Esperamos que nosso trabalho fomente o interesse por eventos extremos da mecânica quântica em geral, especialmente no campo do processamento de informação quântica, onde eventos dessa natureza podem levar a riscos potenciais na avaliação de algum protocolo, dada a presença inevitável de imperfeições de fabricação dos componentes físicos.

Por fim, acreditamos que os estudos apresentados no corpo desta tese contribuam de alguma forma para um maior entendimento sobre os protocolos de caminhadas quânticas discretos no tempo em diversos cenários. Nesse contexto, traçamos como perspectivas

o desenvolvimento de outros modelos que pavimentem vários caminhos para aplicações desses protocolos quânticos.

Todos os trabalhos foram apresentados em eventos locais, regionais, nacionais e internacionais. A seguir exibimos a lista de eventos e os trabalhos que foram apresentados divididos por ano.

2021

**Apresentações**

**XII Workshop da pós-graduação do IF/UFAL (28/09 - 01/10)**

Trabalho: Rogue waves in discrete-time quantum walks

**XLIV Congresso Paulo Leal Ferreira de Física (25/10 - 27/10)**

Trabalho: Ondas desonestas em caminhadas quânticas discretas

**Participação em eventos**

Quantum Latino 2021 (09-11/06);

2021 Qiskit Global Summer School on Quantum Machine Learning;

Ensino de Física na Educação Básica – IIP (03-27/08)

2020

**Apresentações**

**Live da quarentena - UFAL conectada (08/04)**

Trabalho: Caminhadas quânticas não-lineares em tempo discreto

**Young Italian Quantum Information Science conference (28/09 - 02/10)**

Trabalho: Self-trapped quantum walks

**Colóquios do grupo de informação quântica e física estatística da UFOB (02/10)**

Trabalho: Caminhadas quânticas discretas não-lineares

**XLIII Congresso Paulo Leal Ferreira de Física (26-30/10)**

Trabalho: Self-trapped quantum walks

**Encontrinho Enlight 2020 - UFG (18-20/11)**

Trabalho: Bloch-like superoscillations in discrete-time quantum walks

**IX workshop da pós-graduação em Física da UFPI (19-20/11)**

Trabalho: Bloch-like superoscillations in discrete-time quantum walks

**XXXVII Semana da Física UFG: O Impacto Social da Informação e da Tecnologia Quântica (02-04/12)**

Trabalho: Caminhadas quânticas discretas conduzidas por uma superposição de fases

**Encontro da pós-graduação do IF-UFAL 2020 (16-18/12) - Organização**

Trabalho: Probing coherence and noise tolerance in discrete-time quantum walks

2019

**Apresentações**

**XII Workshop da pós-graduação do IF/UFAL**

Trabalho: Caminhadas quânticas não-lineares em tempo discreto

2018

**Apresentações**

**I simpósio nacional de física e suas aplicações (03-06/08)**

Trabalho: Ausência de localização em caminhadas quânticas desordenadas em tempo discreto.

**XI Workshop da pós-graduação do IF/UFAL (08-11/10)**

Trabalho: Ausência de localização em caminhadas quânticas desordenadas em tempo discreto.

## Referências

- 1 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. Quantum computation and quantum information. American Association of Physics Teachers, 2002.
- 2 ABDELDAYEM, H.; FRAZIER, D. O. Optical computing: need and challenge. *Communications of the ACM*, ACM New York, NY, USA, v. 50, n. 9, p. 60–62, 2007.
- 3 AONO, M.; HARA, M.; AIHARA, K. Amoeba-based neurocomputing with chaotic dynamics. *Communications of the ACM*, ACM New York, NY, USA, v. 50, n. 9, p. 69–72, 2007.
- 4 MARR, D. W.; MUNAKATA, T. Micro/nanofluidic, computing: Beyond silicon: new computing paradigms. *Communications of the ACM*, v. 50, n. 9, 2007.
- 5 DEUTSCH, D. Rapid solution of problems by quantum computation. *Proceedings of the Royal Society A*, v. 435, p. 563–574, 1991.
- 6 DIVINCENZO, D. P. Quantum computation. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 270, n. 5234, p. 255–261, 1995.
- 7 LOSS, D.; DIVINCENZO, D. P. Quantum computation with quantum dots. *Physical Review A*, APS, v. 57, n. 1, p. 120, 1998.
- 8 SCHLOSSHAUER, M. Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics. *Reviews of Modern physics*, APS, v. 76, n. 4, p. 1267, 2005.
- 9 CHILDS, A. M. Universal computation by quantum walk. *Physical review letters*, APS, v. 102, n. 18, p. 180501, 2009.
- 10 LOVETT, N. B.; COOPER, S.; EVERITT, M.; TREVERS, M.; KENDON, V. Universal quantum computation using the discrete-time quantum walk. *Physical Review A*, APS, v. 81, n. 4, p. 042330, 2010.
- 11 SINGH, S.; CHAWLA, P.; SARKAR, A.; CHANDRASHEKAR, C. Universal quantum computing using single-particle discrete-time quantum walk. *Scientific Reports*, Nature Publishing Group, v. 11, n. 1, p. 1–13, 2021.

- 12 PREISS, P. M.; MA, R.; TAI, M. E.; LUKIN, A.; RISPOLI, M.; ZUPANCIC, P.; LAHINI, Y.; ISLAM, R.; GREINER, M. Strongly correlated quantum walks in optical lattices. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 347, n. 6227, p. 1229–1233, 2015.
- 13 AHARONOV, Y.; DAVIDOVICH, L.; ZAGURY, N. Quantum random walks. *Physical Review A*, APS, v. 48, n. 2, p. 1687, 1993.
- 14 VENEGAS-ANDRACA, S. E. Quantum walks: a comprehensive review. *Quantum Information Processing*, Springer, v. 11, n. 5, p. 1015–1106, 2012.
- 15 KEMPE, J. Quantum random walks: an introductory overview. *Contemporary Physics*, Taylor & Francis, v. 44, n. 4, p. 307–327, 2003.
- 16 ANDRADE, F.; LUZ, M. da. Green-function approach for scattering quantum walks. *Physical Review A*, APS, v. 84, n. 4, p. 042343, 2011.
- 17 VENANCIO, B.; LUZ, M. da. Construction of distinct discrete time scattering quantum walk formulations on the honeycomb lattice. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 396, p. 517–545, 2018.
- 18 VAKULCHYK, I.; FISTUL, M. V.; QIN, P.; FLACH, S. Anderson localization in generalized discrete-time quantum walks. *Physical Review B*, APS, v. 96, n. 14, p. 144204, 2017.
- 19 BAGRETS, D.; KIM, K. W.; BARKHOFEN, S.; DE, S.; SPERLING, J.; SILBERHORN, C.; ALTLAND, A.; MICKLITZ, T. Probing the topological anderson transition with quantum walks. *Physical Review Research*, APS, v. 3, n. 2, p. 023183, 2021.
- 20 PLENIO, M. B.; HUELGA, S. F. Dephasing-assisted transport: quantum networks and biomolecules. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 10, n. 11, p. 113019, 2008.
- 21 KITAGAWA, T. Topological phenomena in quantum walks: elementary introduction to the physics of topological phases. *Quantum Information Processing*, Springer, v. 11, n. 5, p. 1107–1148, 2012.
- 22 EL-LATIF, A. A. A.; ABD-EL-ATTY, B.; MAZURCZYK, W.; FUNG, C.; VENEGAS-ANDRACA, S. E. Secure data encryption based on quantum walks for 5g internet of things scenario. *IEEE Transactions on Network and Service Management*, IEEE, v. 17, n. 1, p. 118–131, 2020.
- 23 LATIF, A. A. Abd el; ATTY, B. Abd-el; AMIN, M.; ILIYASU, A. M. Quantum-inspired cascaded discrete-time quantum walks with induced chaotic dynamics and cryptographic applications. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 10, n. 1, p. 1–16, 2020.
- 24 CHEN, X.-B.; WANG, Y.-L.; XU, G.; YANG, Y.-X. Quantum network communication with a novel discrete-time quantum walk. *IEEE Access*, IEEE, v. 7, p. 13634–13642, 2019.
- 25 MUKAI, K.; HATANO, N. Discrete-time quantum walk on complex networks for community detection. *Physical Review Research*, APS, v. 2, n. 2, p. 023378, 2020.
- 26 BIAMONTE, J.; FACCIN, M.; DOMENICO, M. D. Complex networks from classical to quantum. *Communications Physics*, Nature Publishing Group, v. 2, n. 1, p. 1–10, 2019.



- 27 KARSKI, M.; FÖRSTER, L.; CHOI, J.-M.; STEFFEN, A.; ALT, W.; MESCHEDÉ, D.; WIDERA, A. Quantum walk in position space with single optically trapped atoms. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 325, n. 5937, p. 174–177, 2009.
- 28 SCHMITZ, H.; MATJESCHK, R.; SCHNEIDER, C.; GLUECKERT, J.; ENDERLEIN, M.; HUBER, T.; SCHAETZ, T. Quantum walk of a trapped ion in phase space. *Physical review letters*, APS, v. 103, n. 9, p. 090504, 2009.
- 29 ZÄHRINGER, F.; KIRCHMAIR, G.; GERRITSMAN, R.; SOLANO, E.; BLATT, R.; ROOS, C. Realization of a quantum walk with one and two trapped ions. *Physical review letters*, APS, v. 104, n. 10, p. 100503, 2010.
- 30 DU, J.; LI, H.; XU, X.; SHI, M.; WU, J.; ZHOU, X.; HAN, R. Experimental implementation of the quantum random-walk algorithm. *Physical Review A*, APS, v. 67, n. 4, p. 042316, 2003.
- 31 RYAN, C. A.; LAFOREST, M.; BOILEAU, J.-C.; LAFLAMME, R. Experimental implementation of a discrete-time quantum random walk on an nmr quantum-information processor. *Physical Review A*, APS, v. 72, n. 6, p. 062317, 2005.
- 32 PERETS, H. B.; LAHINI, Y.; POZZI, F.; SOREL, M.; MORANDOTTI, R.; SILBERBERG, Y. Realization of quantum walks with negligible decoherence in waveguide lattices. *Physical review letters*, APS, v. 100, n. 17, p. 170506, 2008.
- 33 BOUWMEESTER, D.; MARZOLI, I.; KARMAN, G. P.; SCHLEICH, W.; WOERDMAN, J. Optical galton board. *Physical Review A*, APS, v. 61, n. 1, p. 013410, 1999.
- 34 SANDERS, B. C.; BARTLETT, S. D.; TREGENNA, B.; KNIGHT, P. L. Quantum quincunx in cavity quantum electrodynamics. *Physical Review A*, APS, v. 67, n. 4, p. 042305, 2003.
- 35 KNIGHT, P. L.; ROLDÁN, E.; SIPE, J. Quantum walk on the line as an interference phenomenon. *Physical Review A*, APS, v. 68, n. 2, p. 020301, 2003.
- 36 DO, B.; STOHLER, M. L.; BALASUBRAMANIAN, S.; ELLIOTT, D. S.; EASH, C.; FISCHBACH, E.; FISCHBACH, M. A.; MILLS, A.; ZWICKL, B. Experimental realization of a quantum quincunx by use of linear optical elements. *JOSA B*, Optical Society of America, v. 22, n. 2, p. 499–504, 2005.
- 37 NEJADSATTARI, F.; ZHANG, Y.; BOUCHARD, F.; LAROCQUE, H.; SIT, A.; COHEN, E.; FICKLER, R.; KARIMI, E. Experimental realization of wave-packet dynamics in cyclic quantum walks. *Optica*, Optical Society of America, v. 6, n. 2, p. 174–180, 2019.
- 38 MANOUCHEHRI, K.; WANG, J. Quantum walks in an array of quantum dots. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 41, n. 6, p. 065304, 2008.
- 39 SCHREIBER, A.; CASSEMIRO, K.; POTOCEK, V.; GABRIS, A.; JEX, I.; SILBERHORN, C. Decoherence and disorder in quantum walks: from ballistic spread to localization. *Physical review letters*, APS, v. 106, n. 18, p. 180403, 2011.

- 40 HAMILTON, C. S.; GÁBRIS, A.; JEX, I.; BARNETT, S. M. Quantum walk with a four-dimensional coin. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 13, n. 1, p. 013015, 2011.
- 41 CRESPI, A.; OSELLAME, R.; RAMPONI, R.; GIOVANNETTI, V.; FAZIO, R.; SANSONI, L.; NICOLA, F. D.; SCIARRINO, F.; MATALONI, P. Anderson localization of entangled photons in an integrated quantum walk. *Nature Photonics*, Nature Publishing Group, v. 7, n. 4, p. 322–328, 2013.
- 42 RUBANO, A.; CARDANO, F.; PICCIRILLO, B.; MARRUCCI, L. Q-plate technology: a progress review. *JOSA B*, Optical Society of America, v. 36, n. 5, p. D70–D87, 2019.
- 43 ZHANG, P.; LIU, B.-H.; LIU, R.-F.; LI, H.-R.; LI, F.-L.; GUO, G.-C. Implementation of one-dimensional quantum walks on spin-orbital angular momentum space of photons. *Physical Review A*, APS, v. 81, n. 5, p. 052322, 2010.
- 44 GOYAL, S. K.; ROUX, F. S.; FORBES, A.; KONRAD, T. Implementing quantum walks using orbital angular momentum of classical light. *Physical review letters*, v. 110, n. 26, p. 263602, 2013.
- 45 GIORDANI, T.; POLINO, E.; EMILIANI, S.; SUPRANO, A.; SPAGNOLO, N.; SCIARRINO, F.; INNOCENTI, L.; MAJURY, H.; PATERNOSTRO, M.; FERRARO, A. *et al.* Engineering of quantum states through quantum walk in the angular momentum. p. F5A–48, 2019.
- 46 CARDANO, F.; MAFFEI, M.; MASSA, F.; PICCIRILLO, B.; LISIO, C. D.; FILIPPIS, G. D.; CATAUDELLA, V.; SANTAMATO, E.; MARRUCCI, L. Statistical moments of quantum-walk dynamics reveal topological quantum transitions. *Nature communications*, Nature Publishing Group, v. 7, n. 1, p. 1–8, 2016.
- 47 CARDANO, F.; MASSA, F.; QASSIM, H.; KARIMI, E.; SLUSSARENKO, S.; PAPARO, D.; LISIO, C. de; SCIARRINO, F.; SANTAMATO, E.; BOYD, R. W.; MARRUCCI, L. Quantum walks and wavepacket dynamics on a lattice with twisted photons. *Science Advances*, v. 1, n. 2, p. e1500087, 2015.
- 48 GERASIMENKO, Y.; TARASINSKI, B.; BEENAKKER, C. Attractor-repeller pair of topological zero modes in a nonlinear quantum walk. *Physical Review A*, APS, v. 93, n. 2, p. 022329, 2016.
- 49 MENDES, C.; ALMEIDA, G.; LYRA, M.; MOURA, F. de. Localization-delocalization transition in discrete-time quantum walks with long-range correlated disorder. *Physical Review E*, APS, v. 99, n. 2, p. 022117, 2019.
- 50 VIEIRA, R.; AMORIM, E. P. M.; RIGOLIN, G. Dynamically disordered quantum walk as a maximal entanglement generator. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 111, p. 180503, Oct 2013.
- 51 DEREVYANKO, S. Anderson localization of a one-dimensional quantum walker. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 8, n. 1, p. 1–11, 2018.
- 52 ABRAHAMS, E.; ANDERSON, P.; LICCIARDELLO, D.; RAMAKRISHNAN, T. Scaling theory of localization: Absence of quantum diffusion in two dimensions. *Physical Review Letters*, APS, v. 42, n. 10, p. 673, 1979.

- 53 KRAMER, B.; MACKINNON, A. Localization: theory and experiment. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 56, n. 12, p. 1469, 1993.
- 54 LEE, P. A.; RAMAKRISHNAN, T. Disordered electronic systems. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 57, n. 2, p. 287, 1985.
- 55 VIEIRA, R.; AMORIM, E. P.; RIGOLIN, G. Entangling power of disordered quantum walks. *Physical Review A*, APS, v. 89, n. 4, p. 042307, 2014.
- 56 GRINIASTY, M.; FISHMAN, S. Localization by pseudorandom potentials in one dimension. *Physical review letters*, APS, v. 60, n. 13, p. 1334, 1988.
- 57 GULLO, N. L.; AMBARISH, C. V.; BUSCH, T.; DELL'ANNA, L.; CHANDRASHEKAR, C. M. Dynamics and energy spectra of aperiodic discrete-time quantum walks. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 96, p. 012111, Jul 2017.
- 58 PIRES, M. A.; QUEIRÓS, S. D. Quantum walks with sequential aperiodic jumps. *Physical Review E*, APS, v. 102, n. 1, p. 012104, 2020.
- 59 ROMANELLI, A. The fibonacci quantum walk and its classical trace map. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 388, n. 18, p. 3985–3990, 2009.
- 60 ANDRADE, R.; SOUZA, A. Discrete-time quantum walks generated by aperiodic fractal sequence of space coin operators. *International Journal of Modern Physics C*, World Scientific, v. 29, n. 10, p. 1850098, 2018.
- 61 RIBEIRO, P.; MILMAN, P.; MOSSERI, R. Aperiodic quantum random walks. *Physical review letters*, APS, v. 93, n. 19, p. 190503, 2004.
- 62 ROMANELLI, A. Driving quantum-walk spreading with the coin operator. *Physical Review A*, APS, v. 80, n. 4, p. 042332, 2009.
- 63 AYCOCK, L. M.; HURST, H. M.; EFIMKIN, D. K.; GENKINA, D.; LU, H.-I.; GALITSKI, V. M.; SPIELMAN, I. Brownian motion of solitons in a bose–einstein condensate. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 114, n. 10, p. 2503–2508, 2017.
- 64 SU, W.; SCHRIEFFER, J.; HEEGER, A. J. Solitons in polyacetylene. *Physical review letters*, APS, v. 42, n. 25, p. 1698, 1979.
- 65 LONGHI, S.; JANNER, D. Self-focusing and nonlinear periodic beams in parabolic index optical fibres. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, IOP Publishing, v. 6, n. 5, p. S303, 2004.
- 66 LEBLOND, H.; KREMER, D.; MIHALACHE, D. Few-cycle spatiotemporal optical solitons in waveguide arrays. *Physical Review A*, APS, v. 95, n. 4, p. 043839, 2017.
- 67 LEE, C.-W.; KURZYŃSKI, P.; NHA, H. Quantum walk as a simulator of nonlinear dynamics: Nonlinear dirac equation and solitons. *Physical Review A*, APS, v. 92, n. 5, p. 052336, 2015.
- 68 NAVARRETE-BENLLOCH, C.; PÉREZ, A.; ROLDÁN, E. Nonlinear optical galton board. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 75, p. 062333, Jun 2007.

- 69 EL-LATIF, A. A. A.; ABD-EL-ATTY, B.; VENEGAS-ANDRACA, S. E.; ELWAHSH, H.; PIRAN, M. J.; BASHIR, A. K.; SONG, O.-Y.; MAZURCZYK, W. Providing end-to-end security using quantum walks in iot networks. *IEEE Access*, IEEE, v. 8, p. 92687–92696, 2020.
- 70 FILHO, V. C.; LIMA, R.; LYRA, M. Interplay between modulational instability and self-trapping of wavepackets in nonlinear discrete lattices. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, AIP Publishing LLC, v. 25, n. 6, p. 063101, 2015.
- 71 AKHMEDIEV, N.; SOTO-CRESPO, J. M.; ANKIEWICZ, A. How to excite a rogue wave. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 80, p. 043818, Oct 2009.
- 72 BONATTO, C.; FEYEREISEN, M.; BARLAND, S.; GIUDICI, M.; MASOLLER, C.; LEITE, J. R. R.; TREDICCE, J. R. Deterministic optical rogue waves. *Physical review letters*, APS, v. 107, n. 5, p. 053901, 2011.
- 73 DYACHENKO, A. I.; ZAKHAROV, V. E. Modulation instability of stokes wave→ freak wave. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, Springer, v. 81, n. 6, p. 255–259, 2005.
- 74 FEDELE, F.; BRENNAN, J.; LEÓN, S. P. D.; DUDLEY, J.; DIAS, F. Real world ocean rogue waves explained without the modulational instability. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 6, n. 1, p. 1–11, 2016.
- 75 DUDLEY, J. M.; GENTY, G.; MUSSOT, A.; CHABCHOUB, A.; DIAS, F. Rogue waves and analogies in optics and oceanography. *Nature Reviews Physics*, Nature Publishing Group, v. 1, n. 11, p. 675–689, 2019.
- 76 BONATTO, C.; PRADO, S. D.; METZ, F. L.; SCHOFFEN, J. R.; CORREIA, R. R.; HICKMANN, J. M. Super rogue wave generation in the linear regime. *Physical Review E*, APS, v. 102, n. 5, p. 052219, 2020.
- 77 LIU, C.; WEL, R. E. V. D.; ROTENBERG, N.; KUIPERS, L.; KRAUSS, T. F.; FALCO, A. D.; FRATALOCCHI, A. Triggering extreme events at the nanoscale in photonic seas. *Nature Physics*, Nature Publishing Group, v. 11, n. 4, p. 358–363, 2015.
- 78 RIVAS, D.; SZAMEIT, A.; VICENCIO, R. A. Rogue waves in disordered 1d photonic lattices. *Scientific Reports*, Nature Publishing Group, v. 10, n. 1, p. 1–8, 2020.
- 79 HÖHMANN, R.; KUHL, U.; STÖCKMANN, H.-J.; KAPLAN, L.; HELLER, E. Freak waves in the linear regime: A microwave study. *Physical review letters*, APS, v. 104, n. 9, p. 093901, 2010.
- 80 CAETANO, R.; LYRA, M. Wave packet dynamics under superposed dc and ac fields: Super bloch oscillations, resonant directed motion and delocalization. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 375, n. 28-29, p. 2770–2774, 2011.
- 81 BUARQUE, A.; DIAS, W. Unidirectional quantum walk of two correlated particles: Manipulating bound-pair and unbound wave-packet components. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 381, n. 37, p. 3173–3177, 2017.
- 82 HALLER, E.; HART, R.; MARK, M. J.; DANZL, J. G.; REICHSÖLLNER, L.; NÄGERL, H.-C. Inducing transport in a dissipation-free lattice with super bloch oscillations. *Physical review letters*, APS, v. 104, n. 20, p. 200403, 2010.

- 83 PASSOS, F.; DIAS, W. From super-bloch oscillations to sudden self-trapping in bose–einstein condensates with inter-atomic interactions. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 102, n. 1, p. 329–337, 2020.
- 84 GENSKE, M.; ALT, W.; STEFFEN, A.; WERNER, A. H.; WERNER, R. F.; MESCHÉDE, D.; ALBERTI, A. Electric quantum walks with individual atoms. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 110, p. 190601, May 2013.
- 85 AMBAINIS, A.; BACH, E.; NAYAK, A.; VISHWANATH, A.; WATROUS, J. One-dimensional quantum walks. Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, p. 37–49, 2001.
- 86 QIANG, X.; LOKE, T.; MONTANARO, A.; AUNGSKUNSIRI, K.; ZHOU, X.; O'BRIEN, J. L.; WANG, J. B.; MATTHEWS, J. C. Efficient quantum walk on a quantum processor. *Nature communications*, Nature Publishing Group, v. 7, n. 1, p. 1–6, 2016.
- 87 DOUGLAS, B.; WANG, J. Efficient quantum circuit implementation of quantum walks. *Physical Review A*, APS, v. 79, n. 5, p. 052335, 2009.
- 88 CHAKRABARTI, A.; LIN, C.; JHA, N. K. Design of quantum circuits for random walk algorithms. In: IEEE. *2012 IEEE Computer Society Annual Symposium on VLSI*. [S.l.], 2012. p. 135–140.
- 89 ACASIETE, F.; AGOSTINI, F. P.; MOQADAM, J. K.; PORTUGAL, R. Implementation of quantum walks on ibm quantum computers. *Quantum Information Processing*, Springer, v. 19, n. 12, p. 1–20, 2020.
- 90 CARNEIRO, I.; LOO, M.; XU, X.; GIRERD, M.; KENDON, V.; KNIGHT, P. L. Entanglement in coined quantum walks on regular graphs. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 7, n. 1, p. 156, 2005.
- 91 WANG, Q.-Q.; XU, X.-Y.; PAN, W.-W.; SUN, K.; XU, J.-S.; CHEN, G.; HAN, Y.-J.; LI, C.-F.; GUO, G.-C. Dynamic-disorder-induced enhancement of entanglement in photonic quantum walks. *Optica*, Optical Society of America, v. 5, n. 9, p. 1136–1140, 2018.
- 92 BAUMGRATZ, T.; CRAMER, M.; PLENIO, M. B. Quantifying coherence. *Physical review letters*, APS, v. 113, n. 14, p. 140401, 2014.
- 93 HE, Z.; HUANG, Z.; LI, L.; SITU, H. Coherence of one-dimensional quantum walk on cycles. *Quantum Information Processing*, Springer, v. 16, n. 11, p. 1–14, 2017.
- 94 LÓPEZ, C. C.; PAZ, J. P. Phase-space approach to the study of decoherence in quantum walks. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 68, p. 052305, Nov 2003.
- 95 CARUSO, F. Universally optimal noisy quantum walks on complex networks. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 16, n. 5, p. 055015, 2014.
- 96 SU, Y.-L.; LIU, S.-Y.; WANG, X.-H.; FAN, H.; YANG, W.-L. Coherence as resource in scattering quantum walk search on complete graph. *Scientific Reports*, Nature Publishing Group, v. 8, n. 1, p. 1–13, 2018.

- 97 SHAPIRA, D.; BIHAM, O.; BRACKEN A. J. E HACKETT, M. One-dimensional quantum walk with unitary noise. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 68, p. 062315, Dec 2003.
- 98 PANAHIYAN, S.; FRITZSCHE, S. Controlling quantum random walk with a step-dependent coin. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 20, n. 8, p. 083028, 2018.
- 99 BANULS, M.-C.; NAVARRETE, C.; PÉREZ, A.; ROLDÁN, E.; SORIANO, J. Quantum walk with a time-dependent coin. *Physical Review A*, APS, v. 73, n. 6, p. 062304, 2006.
- 100 TELES, L. I. da S.; AMORIM, E. P. Localization in quantum walks with a single lattice defect: A comparative study. *Brazilian Journal of Physics*, Springer, v. 51, n. 4, p. 911–918, 2021.
- 101 GHOSH, J. Simulating anderson localization via a quantum walk on a one-dimensional lattice of superconducting qubits. *Physical Review A*, APS, v. 89, n. 2, p. 022309, 2014.
- 102 ZENG, M.; YONG, E. H. Discrete-time quantum walk with phase disorder: localization and entanglement entropy. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 7, n. 1, p. 1–9, 2017.
- 103 ZHANG, R.; XUE, P.; TWAMLEY, J. One-dimensional quantum walks with single-point phase defects. *Physical Review A*, APS, v. 89, n. 4, p. 042317, 2014.
- 104 XUE, P.; ZHANG, R.; BIAN, Z.; ZHAN, X.; QIN, H.; SANDERS, B. C. Localized state in a two-dimensional quantum walk on a disordered lattice. *Physical Review A*, APS, v. 92, n. 4, p. 042316, 2015.
- 105 LAVICKA, H.; POTOCEK, V.; KISS, T.; LUTZ, E.; JEX, I. Quantum walk with jumps. *The European Physical Journal D*, Springer, v. 64, n. 1, p. 119–129, 2011.
- 106 MOLFETTA, G. D.; SOARES-PINTO, D. O.; QUEIRÓS, S. M. D. Elephant quantum walk. *Physical Review A*, APS, v. 97, n. 6, p. 062112, 2018.
- 107 SEN, P. Unusual scaling in a discrete quantum walk with random long range steps. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 514, p. 266–273, 2019.
- 108 ORTHEY, A. C.; AMORIM, E. P. Asymptotic entanglement in quantum walks from delocalized initial states. *Quantum Information Processing*, Springer, v. 16, n. 9, p. 1–16, 2017.
- 109 SHIKANO, Y.; KATSURA, H. Localization and fractality in inhomogeneous quantum walks with self-duality. *Physical Review E*, APS, v. 82, n. 3, p. 031122, 2010.
- 110 SARMA, S. D.; HE, S.; XIE, X. Localization, mobility edges, and metal-insulator transition in a class of one-dimensional slowly varying deterministic potentials. *Physical Review B*, APS, v. 41, n. 9, p. 5544, 1990.
- 111 SARMA, S. D.; HE, S.; XIE, X. Mobility edge in a model one-dimensional potential. *Physical review letters*, APS, v. 61, n. 18, p. 2144, 1988.

- 112 TSUKERMAN, E. Inverse participation ratios in the xx spin chain. *Physical Review B*, American Physical Society, v. 95, p. 115121, Mar 2017.
- 113 ABAL, G.; SIRI, R.; ROMANELLI, A.; DONANGELO, R. Quantum walk on the line: Entanglement and nonlocal initial conditions. *Physical Review A*, APS, v. 73, n. 4, p. 042302, 2006.
- 114 HENNIG, D.; TSIRONIS, G. P. Wave transmission in nonlinear lattices. *Physics Reports*, Elsevier, v. 307, n. 5-6, p. 333–432, 1999.
- 115 FLEISCHHAUER, M.; IMAMOGLU, A.; MARANGOS, J. P. Electromagnetically induced transparency: Optics in coherent media. *Reviews of modern physics*, APS, v. 77, n. 2, p. 633, 2005.
- 116 LEDERER, F.; STEGEMAN, G. I.; CHRISTODOULIDES, D. N.; ASSANTO, G.; SEGEV, M.; SILBERBERG, Y. Discrete solitons in optics. *Physics Reports*, Elsevier, v. 463, n. 1-3, p. 1–126, 2008.
- 117 SCOTT, A. Davydov's soliton. *Physics Reports*, Elsevier, v. 217, n. 1, p. 1–67, 1992.
- 118 DALFOVO, F.; GIORGINI, S.; PITAEVSKII, L. P.; STRINGARI, S. Theory of bose-einstein condensation in trapped gases. *Reviews of modern physics*, APS, v. 71, n. 3, p. 463, 1999.
- 119 KARTASHOV, Y. V.; MALOMED, B. A.; TORNER, L. Solitons in nonlinear lattices. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 83, n. 1, p. 247, 2011.
- 120 MORSCH, O.; OBERTHALER, M. Dynamics of bose-einstein condensates in optical lattices. *Reviews of modern physics*, APS, v. 78, n. 1, p. 179, 2006.
- 121 HOLSTEIN, T. Studies of polaron motion: Part i. the molecular-crystal model. *Annals of physics*, Elsevier, v. 8, n. 3, p. 325–342, 1959.
- 122 HEEGER, A. J.; KIVELSON, S.; SCHRIEFFER, J.; SU, W.-P. Solitons in conducting polymers. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 60, n. 3, p. 781, 1988.
- 123 HAUS, H. A.; WONG, W. S. Solitons in optical communications. *Reviews of modern physics*, APS, v. 68, n. 2, p. 423, 1996.
- 124 KRUGLOV, V. I.; HARVEY, J. D. Solitary waves in optical fibers governed by higher-order dispersion. *Physical Review A*, APS, v. 98, n. 6, p. 063811, 2018.
- 125 HAUSE, A.; MAHNKE, C.; MITSCHKE, F. Impact of fiber loss on two-soliton states: Substantial changes in eigenvalue spectrum. *Physical Review A*, APS, v. 98, n. 3, p. 033814, 2018.
- 126 KIPPENBERG, T. J.; GAETA, A. L.; LIPSON, M.; GORODETSKY, M. L. Dissipative kerr solitons in optical microresonators. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 361, n. 6402, 2018.
- 127 BUARQUE, A.; DIAS, W. Creation and mobility of self-trapped electronic states in nonlinear chains. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 63, p. 365–372, 2018.

- 128 HEEGER, A. J. Nobel lecture: Semiconducting and metallic polymers: The fourth generation of polymeric materials. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 73, n. 3, p. 681, 2001.
- 129 MEIER, E. J.; AN, F. A.; GADWAY, B. Observation of the topological soliton state in the su–schrieffer–heeger model. *Nature communications*, Nature Publishing Group, v. 7, n. 1, p. 1–6, 2016.
- 130 LIU, J.; WEI, Z.; ZHANG, Y.; MENG, Y.; DI, B. Dynamics of polarons in organic conjugated polymers with side radicals. *The Journal of Physical Chemistry B*, ACS Publications, v. 121, n. 10, p. 2366–2370, 2017.
- 131 CHIAO, R. Y.; GARMIRE, E.; TOWNES, C. H. Self-trapping of optical beams. *Physical review letters*, APS, v. 13, n. 15, p. 479, 1964.
- 132 MINGALEEV, S. F.; KIVSHAR, Y. S. Self-trapping and stable localized modes in nonlinear photonic crystals. *Physical review letters*, APS, v. 86, n. 24, p. 5474, 2001.
- 133 CHEN, Y. Self-trapped light in saturable nonlinear media. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 16, n. 1, p. 4–6, 1991.
- 134 REYNA, A. S.; BOUDEBS, G.; MALOMED, B. A.; ARAÚJO, C. B. de. Robust self-trapping of vortex beams in a saturable optical medium. *Physical Review A*, APS, v. 93, n. 1, p. 013840, 2016.
- 135 PORRAS, M. A. Self-trapped pulsed beams with finite power in kerr media excited by time-diffracting, space-time beams. *Optics express*, Optical Society of America, v. 26, n. 15, p. 19606–19613, 2018.
- 136 BUSTAMANTE, C.; MOLINA, M. Universal features of self-trapping in nonlinear tight-binding lattices. *Physical Review B*, APS, v. 62, n. 23, p. 15287, 2000.
- 137 DIAS, W.; LYRA, M.; MOURA, F. de. Effects of nonlinearity on wave-packet dynamics in square and honeycomb lattices. *Physical Review B*, APS, v. 82, n. 23, p. 233102, 2010.
- 138 NAKATA, K.; HOOGDAL, K. A. van; SIMON, P.; LOSS, D. Josephson and persistent spin currents in bose-einstein condensates of magnons. *Physical Review B*, APS, v. 90, n. 14, p. 144419, 2014.
- 139 SHIKANO, Y.; WADA, T.; HORIKAWA, J. Discrete-time quantum walk with feed-forward quantum coin. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 4, n. 1, p. 1–7, 2014.
- 140 LEE, C.-W.; KURZYNSKI, P.; NHA, H. Quantum walk as a simulator of nonlinear dynamics: Nonlinear dirac equation and solitons. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 92, p. 052336, Nov 2015.
- 141 MENDONÇA, J. P.; MOURA, F. A. B. F. de; LYRA, M. L.; ALMEIDA, G. M. A. Emergent nonlinear phenomena in discrete-time quantum walks. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 101, p. 062335, Jun 2020.



- 142 VAKULCHYK, I.; FISTUL, M.; ZOLOTARYUK, Y.; FLACH, S. Almost compact moving breathers with fine-tuned discrete time quantum walks. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, AIP Publishing LLC, v. 28, n. 12, p. 123104, 2018.
- 143 VAKULCHYK, I.; FISTUL, M. V.; FLACH, S. Wave packet spreading with disordered nonlinear discrete-time quantum walks. *Physical review letters*, APS, v. 122, n. 4, p. 040501, 2019.
- 144 GAO, W.-C.; CAO, C.; LIU, X.-F.; WANG, T.-J.; WANG, C. Implementation of a two-dimensional quantum walk using cross-kerr nonlinearity. *OSA Continuum*, Optical Society of America, v. 2, n. 5, p. 1667–1675, 2019.
- 145 FLACH, S.; KRIMER, D.; SKOKOS, C. Universal spreading of wave packets in disordered nonlinear systems. *Physical Review Letters*, APS, v. 102, n. 2, p. 024101, 2009.
- 146 VERGA, A. D. Edge states in a two-dimensional quantum walk with disorder. *The European Physical Journal B*, Springer, v. 90, n. 3, p. 1–9, 2017.
- 147 MOLFETTA, G. D.; DEBBASCH, F.; BRACHET, M. Nonlinear optical galton board: Thermalization and continuous limit. *Physical Review E*, APS, v. 92, n. 4, p. 042923, 2015.
- 148 AO, P. R. N. F.; BUARQUE, A. R. C.; DIAS, W. S.; ALMEIDA, G. M. A.; LYRA, M. L. Universal dynamical scaling laws in three-state quantum walks. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 104, p. 054106, Nov 2021.
- 149 XU, X.-P. Discrete-time quantum walks on one-dimensional lattices. *The European Physical Journal B*, Springer, v. 77, n. 4, p. 479–488, 2010.
- 150 SHAPIRO, J. H. Single-photon kerr nonlinearities do not help quantum computation. *Physical Review A*, APS, v. 73, n. 6, p. 062305, 2006.
- 151 BROD, D. J.; COMBES, J. Passive cphase gate via cross-kerr nonlinearities. *Physical review letters*, APS, v. 117, n. 8, p. 080502, 2016.
- 152 NYSTEEN, A.; MCCUTCHEON, D. P.; HEUCK, M.; MORK, J.; ENGLUND, D. R. Limitations of two-level emitters as nonlinearities in two-photon controlled-phase gates. *Physical Review A*, APS, v. 95, n. 6, p. 062304, 2017.
- 153 KNIGHT, P. L.; ROLDÁN, E.; SIPE, J. E. Optical cavity implementations of the quantum walk. *Optics Communications*, Elsevier, v. 227, n. 1-3, p. 147–157, 2003.
- 154 SCHREIBER, A.; CASSEMIRO, K. N.; POTOČEK, V.; GÁBRIS, A.; MOSLEY, P. J.; ANDERSSON, E.; JEX, I.; SILBERHORN, C. Photons walking the line: a quantum walk with adjustable coin operations. *Physical review letters*, APS, v. 104, n. 5, p. 050502, 2010.
- 155 PANDEY, D.; SATAPATHY, N.; MEENA, M.; RAMACHANDRAN, H. Quantum walk of light in frequency space and its controlled dephasing. *Physical Review A*, APS, v. 84, n. 4, p. 042322, 2011.

- 156 BENNETT, C. H.; DIVINCENZO, D. P.; SMOLIN, J. A.; WOOTTERS, W. K. Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 54, p. 3824–3851, Nov 1996.
- 157 LIDAR, D. A.; CHUANG, I. L.; WHALEY, K. B. Decoherence-free subspaces for quantum computation. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 81, p. 2594–2597, Sep 1998.
- 158 DEGEN, C. L.; REINHARD, F.; CAPPELLARO, P. Quantum sensing. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 89, p. 035002, Jul 2017.
- 159 WALLMAN, J. J.; EMERSON, J. Noise tailoring for scalable quantum computation via randomized compiling. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 94, p. 052325, Nov 2016.
- 160 CAMPBELL, E. T.; TERHAL, B. M.; VUILLOT, C. Roads towards fault-tolerant universal quantum computation. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 549, n. 7671, p. 172–179, 2017.
- 161 BEALE, S. J.; WALLMAN, J. J.; GUTIÉRREZ, M.; BROWN, K. R.; LAFLAMME, R. Quantum error correction decoheres noise. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 121, p. 190501, Nov 2018.
- 162 BRUN, T. A.; CARTERET, H. A.; AMBAINIS, A. Quantum to classical transition for random walks. *Physical review letters*, APS, v. 91, n. 13, p. 130602, 2003.
- 163 BRUN, T. A.; CARTERET, H. A. e.; AMBAINIS, A. Quantum random walks with decoherent coins. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 67, p. 032304, Mar 2003.
- 164 ROMANELLI, A.; SIRI, R.; ABAL, G.; AUYUANET, A.; DONANGELO, R. Decoherence in the quantum walk on the line. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 347, p. 137–152, 2005. ISSN 0378-4371.
- 165 OLIVEIRA, R. P. e. R. D. A. C. Decoherence in two-dimensional quantum walks. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 74, p. 012312, Jul 2006.
- 166 KOSIK, V. B. e. M. H. J. Quantum walks with random phase shifts. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 74, p. 022310, Aug 2006.
- 167 BROOME, M. A.; FEDRIZZI, A.; LANYON, B. P.; KASSAL, I.; ASPURU-GUZI, A.; WHITE, A. G. Discrete single-photon quantum walks with tunable decoherence. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 104, p. 153602, Apr 2010.
- 168 REGENSBURGER, A.; BERSCH, C.; HINRICHS, B.; ONISHCHUKOV, G.; SCHREIBER, A.; SILBERHORN, C.; PESCHEL, U. Photon propagation in a discrete fiber network: An interplay of coherence and losses. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 107, p. 233902, Dec 2011.
- 169 MENDES, C. V. C.; ALMEIDA, G. M. A.; LYRA, M. L.; MOURA, F. A. B. F. de. Localization-delocalization transition in discrete-time quantum walks with long-range correlated disorder. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 99, p. 022117, Feb 2019.

- 170 BUARQUE, A.; DIAS, W. Aperiodic space-inhomogeneous quantum walks: Localization properties, energy spectra, and enhancement of entanglement. *Physical Review E*, APS, v. 100, n. 3, p. 032106, 2019.
- 171 PIRES, M. A.; QUEIRÓS, S. M. D. Negative correlations can play a positive role in disordered quantum walks. *Scientific Reports*, Nature Publishing Group, v. 11, n. 1, p. 1–11, 2021.
- 172 KENDON, V.; TREGENNA, B. Decoherence can be useful in quantum walks. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 67, p. 042315, Apr 2003.
- 173 ALAGIC, G.; RUSSELL, A. Decoherence in quantum walks on the hypercube. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 72, p. 062304, Dec 2005.
- 174 RICHTER, P. C. Quantum speedup of classical mixing processes. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 76, p. 042306, Oct 2007.
- 175 LIU, C.; PETULANTE, N. Quantum walks on the  $n$ -cycle subject to decoherence on the coin degree of freedom. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 81, p. 031113, Mar 2010.
- 176 KENDON, V. Decoherence in quantum walks—a review. *Mathematical Structures in Computer Science*, Cambridge University Press, v. 17, n. 6, p. 1169–1220, 2007.
- 177 DADRAS, S.; GRESCH, A.; GROISEAU, C.; WIMBERGER, S.; SUMMY, G. S. Quantum walk in momentum space with a bose-einstein condensate. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 121, p. 070402, Aug 2018.
- 178 XU, X.-Y.; WANG, Q.-Q.; PAN, W.-W.; SUN, K.; XU, J.-S.; CHEN, G.; TANG, J.-S.; GONG, M.; HAN, Y.-J.; LI, C.-F.; GUO, G.-C. Measuring the winding number in a large-scale chiral quantum walk. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 120, p. 260501, Jun 2018.
- 179 STRAUCH, F. W. Relativistic quantum walks. *Physical Review A*, APS, v. 73, n. 5, p. 054302, 2006.
- 180 CHANDRASHEKAR, C.; BANERJEE, S.; SRIKANTH, R. Relationship between quantum walks and relativistic quantum mechanics. *Physical Review A*, APS, v. 81, n. 6, p. 062340, 2010.
- 181 MOLFETTA, G. D.; DEBBASCH, F. Discrete-time quantum walks: Continuous limit and symmetries. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 53, n. 12, p. 123302, 2012.
- 182 KUMAR, N. P.; BALU, R.; LAFLAMME, R.; CHANDRASHEKAR, C. Bounds on the dynamics of periodic quantum walks and emergence of the gapless and gapped dirac equation. *Physical Review A*, APS, v. 97, n. 1, p. 012116, 2018.
- 183 ZHANG, H.; LIU, C.-X.; QI, X.-L.; DAI, X.; FANG, Z.; ZHANG, S.-C. Topological insulators in bi 2 se 3, bi 2 te 3 and sb 2 te 3 with a single dirac cone on the surface. *Nature physics*, Nature Publishing Group, v. 5, n. 6, p. 438–442, 2009.

- 184 GROTH, C. W.; WIMMER, M.; AKHMEROV, A. R.; TWORZYDŁO, J.; BEENAKKER, C. W. J. Theory of the topological anderson insulator. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 103, p. 196805, Nov 2009.
- 185 CHANDRASHEKAR, C. Two-component dirac-like hamiltonian for generating quantum walk on one-, two-and three-dimensional lattices. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 3, n. 1, p. 1–10, 2013.
- 186 KNIGHT, P. L.; ROLDÁN, E.; SIPE, J. E. Quantum walk on the line as an interference phenomenon. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 68, p. 020301, Aug 2003.
- 187 SU, Q.-P.; ZHANG, Y.; YU, L.; ZHOU, J.-Q.; JIN, J.-S.; XU, X.-Q.; XIONG, S.-J.; XU, Q.; SUN, Z.; CHEN, K. *et al.* Experimental demonstration of quantum walks with initial superposition states. *npj Quantum Information*, Nature Publishing Group, v. 5, n. 1, p. 1–7, 2019.
- 188 GRÄFE, M.; SZAMEIT, A. Integrated photonic quantum walks. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, IOP Publishing, v. 53, n. 7, p. 073001, 2020.
- 189 BUARQUE, A.; DIAS, W. Self-trapped quantum walks. *Physical Review A*, APS, v. 101, n. 2, p. 023802, 2020.
- 190 BERRY, S. D.; WANG, J. B. Two-particle quantum walks: Entanglement and graph isomorphism testing. *Physical Review A*, APS, v. 83, n. 4, p. 042317, 2011.
- 191 CARSON, G.; LOKE, T.; WANG, J. B. Entanglement dynamics of two-particle quantum walks. *Quantum Information Processing*, Springer, v. 14, n. 9, p. 3193–3210, 2015.
- 192 MOCHIZUKI, K.; KIM, D.; OBUSE, H. Explicit definition of pt symmetry for nonunitary quantum walks with gain and loss. *Physical Review A*, APS, v. 93, n. 6, p. 062116, 2016.
- 193 LONGHI, S. Non-bloch pt symmetry breaking in non-hermitian photonic quantum walks. *Opt. Lett.*, v. 44, 2019.
- 194 CEDZICH, C.; RYBÁR, T.; WERNER, A. H.; ALBERTI, A.; GENSKE, M.; WERNER, R. F. Propagation of quantum walks in electric fields. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 111, p. 160601, Oct 2013.
- 195 BRU, L. A.; HINAREJOS, M.; SILVA, F.; VALCÁRCEL, G. J. de; ROLDÁN, E. Electric quantum walks in two dimensions. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 93, p. 032333, Mar 2016.
- 196 ARNAULT, P.; PEPPER, B.; PÉREZ, A. Quantum walks in weak electric fields and bloch oscillations. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 101, p. 062324, Jun 2020.
- 197 SAJID, M.; ul Ain, Q.; QURESHI, H.; TAYYEBA, T. One-dimensional quantum walks with a time and spin-dependent phase shift. *Physics Letters A*, v. 416, p. 127674, 2021. ISSN 0375-9601.

- 198 WÓJCIK, A.; ŁUCZAK, T.; KURZYŃSKI, P.; GRUDKA, A.; BEDNARSKA, M. Quasiperiodic dynamics of a quantum walk on the line. *Physical review letters*, APS, v. 93, n. 18, p. 180601, 2004.
- 199 CHALABI, H.; BARIK, S.; MITTAL, S.; MURPHY, T. E.; HAFEZI, M.; WAKS, E. Guiding and confining of light in a two-dimensional synthetic space using electric fields. *Optica*, Optical Society of America, v. 7, n. 5, p. 506–513, 2020.
- 200 D'ERRICO, A.; BARBOZA, R.; TUDOR, R.; DAUPHIN, A.; MASSIGNAN, P.; MARRUCCI, L.; CARDANO, F. Bloch–landau–zener dynamics induced by a synthetic field in a photonic quantum walk. *APL Photonics*, AIP Publishing LLC, v. 6, n. 2, p. 020802, 2021.
- 201 RAMASESH, V. V.; FLURIN, E.; RUDNER, M.; SIDDIQI, I.; YAO, N. Y. Direct probe of topological invariants using bloch oscillating quantum walks. *Physical review letters*, APS, v. 118, n. 13, p. 130501, 2017.
- 202 ASHBOLT, A. I. *Tear Down the Walls: Sixties Radicalism and the Politics of Space in the San Francisco Bay Area*. [S.l.]: The Australian National University (Australia), 1989.
- 203 CHRISTODOULIDES, D.; YANG, J. *et al. Parity-time symmetry and its applications*. [S.l.]: Springer, 2018. v. 280.
- 204 KUDO, K.; MONTEIRO, T. Theoretical analysis of super–bloch oscillations. *Physical Review A*, APS, v. 83, n. 5, p. 053627, 2011.
- 205 HAVER, S. A possible freak wave event measured at the draupner jacket january 1 1995. In: *Rogue waves*. [S.l.: s.n.], 2004. v. 2004, p. 1–8.
- 206 SOLLI, D. R.; ROPERS, C.; KOONATH, P.; JALALI, B. Optical rogue waves. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 450, n. 7172, p. 1054–1057, 2007.
- 207 DUDLEY, J. M.; DIAS, F.; ERKINTALO, M.; GENTY, G. Instabilities, breathers and rogue waves in optics. *Nature Photonics*, Nature Publishing Group, v. 8, n. 10, p. 755–764, 2014.
- 208 DEMATTEIS, G.; GRAFKE, T.; ONORATO, M.; VANDEN-EIJNDEN, E. Experimental evidence of hydrodynamic instantons: the universal route to rogue waves. *Physical Review X*, APS, v. 9, n. 4, p. 041057, 2019.
- 209 BARONIO, F.; CONFORTI, M.; DEGASPERIS, A.; LOMBARDO, S.; ONORATO, M.; WABNITZ, S. Vector rogue waves and baseband modulation instability in the defocusing regime. *Physical review letters*, APS, v. 113, n. 3, p. 034101, 2014.
- 210 XU, G.; CHABCHOUB, A.; PELINOVSKY, D. E.; KIBLER, B. Observation of modulation instability and rogue breathers on stationary periodic waves. *Physical Review Research*, APS, v. 2, n. 3, p. 033528, 2020.
- 211 AKHMEDIEV, N.; SOTO-CRESPO, J.; ANKIEWICZ, A. How to excite a rogue wave. *Physical Review A*, APS, v. 80, n. 4, p. 043818, 2009.
- 212 ARECCHI, F.; BORTOLOZZO, U.; MONTINA, A.; RESIDORI, S. Granularity and inhomogeneity are the joint generators of optical rogue waves. *Physical review letters*, APS, v. 106, n. 15, p. 153901, 2011.

- 213 METZGER, J. J.; FLEISCHMANN, R.; GEISEL, T. Statistics of extreme waves in random media. *Physical Review Letters*, APS, v. 112, n. 20, p. 203903, 2014.
- 214 MATHIS, A.; FROEHLI, L.; TOENGER, S.; DIAS, F.; GENTY, G.; DUDLEY, J. M. Caustics and rogue waves in an optical sea. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 5, n. 1, p. 1–9, 2015.
- 215 MATTHEAKIS, M.; PITSIOS, I.; TSIRONIS, G.; TZORTZAKIS, S. Extreme events in complex linear and nonlinear photonic media. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 84, p. 73–80, 2016.
- 216 DEREVYANKO, S.; REDYUK, A.; VERGELES, S.; TURITSYN, S. Invited article: Visualisation of extreme value events in optical communications. *APL Photonics*, AIP Publishing LLC, v. 3, n. 6, p. 060801, 2018.
- 217 PEYSOKHAN, M.; KEENEY, J.; MAFI, A. Impact of spatial correlation in fluctuations of the refractive index on rogue wave generation probability. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 44, n. 9, p. 2244–2247, 2019.
- 218 FROSTIG, H.; VIDAL, I.; FISCHER, R.; SHEINFUX, H. H.; SILBERBERG, Y. Observation of rogue events in non-markovian light. *Optica*, Optical Society of America, v. 7, n. 8, p. 864–871, 2020.
- 219 SILVA, R. da; PRADO, S. D. A simple study of the correlation effects in the superposition of waves of electric fields: The emergence of extreme events. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 384, n. 11, p. 126231, 2020.
- 220 ONORATO, M.; OSBORNE, A. R.; SERIO, M.; BERTONE, S. Freak waves in random oceanic sea states. *Physical review letters*, APS, v. 86, n. 25, p. 5831, 2001.
- 221 YING, L.; ZHUANG, Z.; HELLER, E.; KAPLAN, L. Linear and nonlinear rogue wave statistics in the presence of random currents. *Nonlinearity*, IOP Publishing, v. 24, n. 11, p. R67, 2011.
- 222 SAFARI, A.; FICKLER, R.; PADGETT, M. J.; BOYD, R. W. Generation of caustics and rogue waves from nonlinear instability. *Physical review letters*, APS, v. 119, n. 20, p. 203901, 2017.
- 223 IZRAILEV, F. M.; KROKHIN, A. A.; MAKAROV, N. Anomalous localization in low-dimensional systems with correlated disorder. *Physics Reports*, Elsevier, v. 512, n. 3, p. 125–254, 2012.
- 224 ANJOS, F. D.; LYRA, M.; GLÉRIA, I.; ARGOLO, C.; SOUZA, A. J. de. Emerging extreme value and fermi-dirac distributions in the lévy branching and annihilating process. *Physical Review E*, APS, v. 101, n. 5, p. 052136, 2020.
- 225 MEYER, D. A.; WONG, T. G. Nonlinear quantum search using the gross–pitaevskii equation. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 15, n. 6, p. 063014, 2013.
- 226 MEYER, D. A.; WONG, T. G. Quantum search with general nonlinearities. *Physical Review A*, APS, v. 89, n. 1, p. 012312, 2014.

---

227 MOLFETTA, G. D.; HERZOG, B. Searching via nonlinear quantum walk on the 2d-grid. *Algorithms*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 13, n. 11, p. 305, 2020.

228 WANG, J.; MANOUCHEHRI, K. *Physical implementation of quantum walks*. [S.l.]: Springer, 2013.

# Apêndices





## Relação entre CQTDs e as equações de Klein-Gordon e de Dirac

A estrutura dinâmica das CQTDs foi vista em detalhes no capítulo 2. Vimos que o *qubit* possui um grau de liberdade interno com componentes de movimento para a direita ( $\uparrow$ ) e para a esquerda ( $\downarrow$ ). Em um instante de tempo arbitrário  $t$  e posição  $n$ , o caminhante quântico possui um estado com duas componentes, de modo que sua função vetorial é escrita como

$$\Psi(n, t) = \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow}(n, t) \\ \psi_{\downarrow}(n, t) \end{bmatrix}.$$

O operador deslocamento é descrito por um par de operadores  $\exp(i\hat{P})$  e  $\exp(-i\hat{P})$  que são definidos da forma

$$e^{\pm i\hat{P}}\Psi(n, t) = \Psi(n \pm 1, t), \quad (94)$$

Portanto, o operador de deslocamento pode ser escrito simplesmente como

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} e^{i\hat{P}} & 0 \\ 0 & e^{-i\hat{P}} \end{pmatrix}.$$

Consideraremos um operador de moeda quântica com um único parâmetro de controle  $\theta$ , assim,

$$C = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Como vimos, em uma única etapa o operador de moeda é seguido pelo operador de deslocamento e a função de onda no tempo  $t + 1$  é dada em termos da função de onda no tempo  $t$ . Isto é,

$$\Psi(n, t + 1) = \hat{S}[\hat{C} \otimes \mathbb{I}_P]\Psi(n, t). \quad (95)$$

$$\begin{bmatrix} \psi_{\uparrow}(n, t+1) \\ \psi_{\downarrow}(n, t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\hat{P}} \cos \theta & e^{i\hat{P}} \text{sen} \theta \\ e^{-i\hat{P}} \text{sen} \theta & -e^{-i\hat{P}} \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow}(n, t) \\ \psi_{\downarrow}(n, t) \end{bmatrix}$$

Aplicando sucessivamente os operadores  $\hat{C}$  e  $\hat{S}$ , encontramos as seguintes equações de recorrência:

$$\psi_{\uparrow}(n, t+1) = \cos \theta \psi_{\uparrow}(n+1, t) + \text{sen} \theta \psi_{\downarrow}(n+1, t) \quad (96)$$

$$\psi_{\downarrow}(n, t+1) = \cos \theta \psi_{\downarrow}(n-1, t) - \text{sen} \theta \psi_{\uparrow}(n-1, t). \quad (97)$$

Esse conjunto de equações descreve a dinâmica geral do passeio quântico em tempo discreto fornecendo as novas amplitudes de probabilidade no tempo  $t+1$  em termos das antigas no passo de tempo  $t$ .

### A.1 CQTDS DESACOPLADAS NA FORMA DE KLEIN-GORDON

Para chegar a forma da equação de Klein-Gordon, teremos que desacoplar as componentes  $\psi_{\uparrow}(n, t)$  e  $\psi_{\downarrow}(n, t)$  nas equações (96) e (97). Assim, resolvendo inicialmente para  $\psi_{\uparrow}(n, t)$ , temos:

$$\psi_{\uparrow}(n-1, t) = \frac{1}{\text{sen} \theta} [\psi_{\downarrow}(n, t+1) - \cos \theta \psi_{\downarrow}(n-1, t)] \quad (98)$$

implicando em,

$$\psi_{\uparrow}(n, t+1) = \frac{1}{\text{sen} \theta} [\psi_{\downarrow}(n+1, t+2) - \cos \theta \psi_{\downarrow}(n, t+1)], \quad (99)$$

$$\psi_{\uparrow}(n+1, t) = \frac{1}{\text{sen} \theta} [\psi_{\downarrow}(n+2, t+1) - \cos \theta \psi_{\downarrow}(n+1, t)]. \quad (100)$$

Usando as equações acima, vamos substituir  $\psi_{\uparrow}(n, t+1)$  e  $\psi_{\uparrow}(n+1, t)$  na (96) e resolvendo para  $\psi_{\downarrow}$ , temos

$$\psi_{\downarrow}(n, t+1) + \psi_{\downarrow}(n, t-1) = \cos \theta [\psi_{\downarrow}(n+1, t) + \psi_{\downarrow}(n-1, t)], \quad (101)$$

aqui, diminuimos os índices  $n$  e  $t$  em uma unidade. O mesmo procedimento será feito para isolar a componente  $\psi_{\uparrow}$ . Resolvendo a equação (96) para  $\psi_{\downarrow}$ ,

$$\psi_{\downarrow}(n, t+1) = \frac{1}{\text{sen} \theta} [\psi_{\uparrow}(n-1, t+2) - \cos \theta \psi_{\uparrow}(n, t+1)], \quad (102)$$

$$\psi_{\downarrow}(n-1, t) = \frac{1}{\text{sen} \theta} [\psi_{\uparrow}(n-2, t+1) - \cos \theta \psi_{\uparrow}(n-1, t)]. \quad (103)$$

Usando as equações acima, vamos substituir  $\psi_{\downarrow}(n, t + 1)$  e  $\psi_{\uparrow}(n - 1, t)$  na (97). Com isso, encontramos que

$$\psi_{\uparrow}(n, t + 1) + \psi_{\uparrow}(n, t - 1) = \cos \theta [\psi_{\uparrow}(n + 1, t) + \psi_{\downarrow}(n - 1, t)], \quad (104)$$

onde aumentamos o índice  $n$  e diminuimos  $t$  em uma unidade. Com isso, temos as duas equações desacopladas

$$\psi_{\downarrow}(n, t + 1) + \psi_{\downarrow}(n, t - 1) = \cos \theta [\psi_{\downarrow}(n + 1, t) + \psi_{\downarrow}(n - 1, t)], \quad (105)$$

$$\psi_{\uparrow}(n, t + 1) + \psi_{\uparrow}(n, t - 1) = \cos \theta [\psi_{\uparrow}(n + 1, t) + \psi_{\downarrow}(n - 1, t)]. \quad (106)$$

Subtraindo em ambos os laos da equação (105) um fator de  $2\psi_{\downarrow}(n, t) + 2\cos\theta\psi_{\downarrow}(n, t)$  e da (106) um fator  $2\psi_{\uparrow}(n, t) + 2\cos\theta\psi_{\uparrow}(n, t)$ , encontramos que

$$\begin{aligned} & [\psi_{\downarrow}(n, t + 1) - 2\psi_{\downarrow}(n, t) + \psi_{\downarrow}(n, t - 1)] - 2\cos\theta\psi_{\downarrow}(n, t) \\ &= \cos\theta[\psi_{\downarrow}(n + 1, t) - 2\psi_{\downarrow}(n, t) + \psi_{\downarrow}(n - 1, t)] - 2\psi_{\downarrow}(n, t), \end{aligned} \quad (107)$$

$$\begin{aligned} & [\psi_{\uparrow}(n, t + 1) - 2\psi_{\uparrow}(n, t) + \psi_{\uparrow}(n, t - 1)] - 2\cos\theta\psi_{\uparrow}(n, t) \\ &= \cos\theta[\psi_{\uparrow}(n + 1, t) - 2\psi_{\uparrow}(n, t) + \psi_{\uparrow}(n - 1, t)] - 2\psi_{\uparrow}(n, t). \end{aligned} \quad (108)$$

Vamos utilizar uma aproximação que consiste basicamente em empregar um operador diferencial no lugar de um operador de diferença. O operador de diferença  $\nabla(t)$  que corresponde ao operador diferencial  $\partial/\partial t$  é dado por

$$\nabla(t) = \frac{\Psi(n, t + \delta/2) - \Psi(n, t - \delta/2)}{\delta}. \quad (109)$$

Sem perda de generalidade, podemos definir  $\delta = 1$ , de modo que

$$\nabla(t) = \Psi(n, t + 0, 5) - \Psi(n, t - 0, 5), \quad (110)$$

refere-se ao operador diferencial  $\partial/\partial t$ . Assim, através de uma álgebra simples, o operador  $\partial^2/\partial^2 t$  corresponde a

$$\begin{aligned} \nabla^2(t) &= \frac{[\Psi(n, t + \delta) - \Psi(n, t)] - [\Psi(n, t) - \Psi(n, t - \delta)]}{\delta^2} \\ &= \Psi(n, t + 1) - 2\Psi(n, t) + \Psi(n, t - 1). \end{aligned} \quad (111)$$

De modo similar, podemos obter o operador de diferença em relação a  $n$ , isto é,  $\nabla(n)$  e  $\nabla^2(n)$ . Em resumo, encontramos a seguinte expressão

$$\nabla^2(n) = \Psi(n + 1, t) - 2\Psi(n, t) + \Psi(n - 1, t). \quad (112)$$

Substituindo as equações (111) e (112) em (107) e (108), obtemos que

$$\left[ \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial n^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \psi_{\downarrow}(n, t) = 2[1 - \cos \theta] \psi_{\downarrow}(n, t), \quad (113)$$

$$\left[ \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial n^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \psi_{\uparrow}(n, t) = 2[1 - \cos \theta] \psi_{\uparrow}(n, t). \quad (114)$$

Ao comparar com a equação de Klein-Gordon

$$\left[ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \phi - \mu^2 \phi = 0 \quad (115)$$

podemos ver que as componentes  $\psi_{\uparrow}(n, t)$  e  $\psi_{\downarrow}(n, t)$  têm um caráter relativístico de uma partícula livre de *spin*-0 e seu equivalente a velocidade da luz  $c$  e massa  $m$  no âmbito das CQTDS é  $c = \sqrt{\cos \theta}$  e  $\mu = mc/\hbar = \sqrt{2(\sec \theta - 1)}$ , ou ainda,  $m = \sqrt{2(\sec \theta - 1)}/\cos \theta$ .

## A.2 CQTDS ACOPLADAS NA FORMA DE DIRAC

Todos os procedimentos nesta seção serão feitos através de álgebra matricial. Partindo das equações (96) e (97), vamos escrevê-las na forma das matrizes que a produzem, isto é,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow}(n, t+1) \\ \psi_{\downarrow}(n, t+1) \end{bmatrix} &= \cos \theta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow}(n+1, t) \\ \psi_{\downarrow}(n-1, t) \end{bmatrix} + \sin \theta \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow}(n-1, t) \\ \psi_{\downarrow}(n+1, t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow}(n, t+1) \\ \psi_{\downarrow}(n, t+1) \end{bmatrix} &= \hat{C}(\theta) \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow}(n+1, t) \\ \psi_{\downarrow}(n-1, t) \end{bmatrix} - \sin \theta \begin{bmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow}(n+1, t) - \psi_{\uparrow}(n-1, t) \\ \psi_{\downarrow}(n+1, t) - \psi_{\downarrow}(n-1, t) \end{bmatrix} \\ &= (\cos \theta \hat{\mathbb{I}} + \sin \theta \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_y) \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow}(n+1, t) \\ \psi_{\downarrow}(n-1, t) \end{bmatrix} - \sin \theta \hat{\sigma}_y \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow}(n+1, t) - \psi_{\uparrow}(n-1, t) \\ \psi_{\downarrow}(n+1, t) - \psi_{\downarrow}(n-1, t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (116)$$

Subtraindo ambos os lados da equação (116) por

$$\begin{bmatrix} \psi_{\uparrow}(n, t) \\ \psi_{\downarrow}(n, t) \end{bmatrix} + (\cos \theta \hat{\mathbb{I}} + \sin \theta \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_y) \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow}(n, t) \\ \psi_{\downarrow}(n, t) \end{bmatrix} \quad (117)$$

teremos que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow}(n+1, t) - \psi_{\uparrow}(n-1, t) \\ \psi_{\downarrow}(n+1, t) - \psi_{\downarrow}(n-1, t) \end{bmatrix} &= (\cos \theta \hat{\mathbb{I}} + \text{sen} \theta \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_y) \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow}(n+1, t) - \psi_{\uparrow}(n, t) \\ \psi_{\downarrow}(n-1, t) - \psi_{\downarrow}(n, t) \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow}(n, t) \\ \psi_{\downarrow}(n, t) \end{bmatrix} + (\cos \theta \hat{\mathbb{I}} + \text{sen} \theta \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_y) \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow}(n, t) \\ \psi_{\downarrow}(n, t) \end{bmatrix} \\ &\quad - \text{sen} \theta \hat{\sigma}_y \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow}(n+1, t) - \psi_{\uparrow}(n-1, t) \\ \psi_{\downarrow}(n+1, t) - \psi_{\downarrow}(n-1, t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (118)$$

A forma de diferença na expressão (118) pode ser reduzida à uma forma diferencial

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow}(n, t) \\ \psi_{\downarrow}(n, t) \end{bmatrix} &= \left\{ (\cos \theta \hat{\mathbb{I}} + \text{sen} \theta \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_y) \begin{bmatrix} \partial/\partial n \\ -\partial/\partial n \end{bmatrix} - 2\text{sen} \theta \hat{\sigma}_y \begin{bmatrix} \partial/\partial n \\ \partial/\partial n \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + (\cos \theta \hat{\mathbb{I}} + \text{sen} \theta \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_y - \hat{\mathbb{I}}) \right\} \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow}(n, t) \\ \psi_{\downarrow}(n, t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (119)$$

Reorganizando esta equação e multiplicando por  $i\hbar$ , encontramos que

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = i\hbar \left[ (\cos \theta \hat{\sigma}_z - 3\text{sen} \theta \hat{\sigma}_y) \frac{\partial}{\partial n} + (\cos \theta \hat{\mathbb{I}} + \text{sen} \theta \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_y - \hat{\mathbb{I}}) \right] \Psi. \quad (120)$$

Quando  $\theta = 0$ , a expressão (120) assume a seguinte forma

$$i\hbar \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \hat{\sigma}_z \frac{\partial}{\partial n} \right] \Psi(n, t) = 0. \quad (121)$$

Comparando com a equação de Dirac 1 + 1-dimensional é

$$\left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar c \hat{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} - \beta m c^2 \right] = 0, \quad (122)$$

onde  $m$  é a massa,  $c$  a velocidade da luz. Além disso,  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  são matrizes hermitianas e satisfazem as condições:  $\hat{\alpha}^2 = \hat{\beta}^2 = \hat{\mathbb{I}}$  e  $\hat{\alpha}\hat{\beta} = -\hat{\beta}\hat{\alpha}$ . Comparando então a equação (121) com o protocolo das CQTDS com  $\theta = 0$ , vemos que ambas as equações possuem uma estrutura similar.

# Anexos


*A*

**Aperiodic space-inhomogeneous quantum walks:  
Localization properties, energy spectra, and  
enhancement of entanglement**

## Aperiodic space-inhomogeneous quantum walks: Localization properties, energy spectra, and enhancement of entanglement

A. R. C. Buarque and W. S. Dias

*Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas, 57072-900 Maceió, Alagoas, Brazil*

 (Received 7 December 2018; revised manuscript received 30 July 2019; published 4 September 2019)

We study the localization properties, energy spectra, and coin-position entanglement of the aperiodic discrete-time quantum walks. The aperiodicity is described by spatially dependent quantum coins distributed on the lattice, whose distribution is neither periodic (Bloch-like) nor random (Anderson-like). Within transport properties we identified delocalized and localized quantum walks mediated by a proper adjusting of aperiodic parameter. Both scenarios are studied by exploring typical quantities (inverse participation ratio, survival probability, and wave packet width), as well as the energy spectra of an associated effective Hamiltonian. By using the energy spectra analysis, we show that the early stage the inhomogeneity leads to a vanishing gap between two main bands, which justifies the predominantly delocalized character observed for  $\nu < 0.5$ . With increase of  $\nu$  arise gaps and flat bands on the energy spectra, which corroborates the suppression of transport detected for  $\nu > 0.5$ . For  $\nu$  high enough, we observe an energy spectra, which resembles that described by the one-dimensional Anderson model. Within coin-position entanglement, we show many settings in which an enhancement in the ability to entangle is observed. This behavior brings new information about the role played by aperiodicity on the coin-position entanglement for static inhomogeneous systems, reported before as almost always reducing the entanglement when comparing with the homogeneous case. We extend the analysis in order to show that systems with static inhomogeneity are able to exhibit asymptotic limit of entanglement.

DOI: [10.1103/PhysRevE.100.032106](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.032106)

### I. INTRODUCTION

With different transport properties to its classical analog, quantum walks have been proven to be a versatile and highly controllable platform to describe quantum systems [1–18] and quantum algorithms [19–24]. Besides the presence in different branches of science such as ferromagnetic films [3], bacteria in biological systems [4], quantum dots [5], and photosynthetic systems [7], quantum walks have also been the central subject of a wide range of experimental studies, either using nuclear magnetic resonance [11,12], trapped atoms [13,14], linear optics [15,16], or integrated photonics circuits [17,18].

Categorized in two classes, the evolution of the walker is determined completely by a unitary time evolution. In continuous-time quantum walks the dynamics is described by a Hamiltonian, which defines a progress on continuous time and discrete space, without coinlike degrees of freedom [13,19]. In discrete-time quantum walks the walker propagates in discrete steps determined by a dynamic internal degree of freedom, which plays the role of a quantum coin [1,9,11]. The generating Hamiltonian is not needed, although it can be related to the procedure of integrating a certain Hamiltonian over a finite time [9,11].

Restricting to disordered systems, continuous-time quantum walks have been studied for years, presenting today a well-established theoretical framework. The main characteristic is the localization effect, where studies about the role played by system dimensionality [25–27], correlations [28–32], and electron-electron interaction [33–36], for example, were shown both in theoretical and experimental scope.

More recently proposed and with more degrees of freedom, disordered discrete quantum walks need a better understanding, making it the reason of many studies on the theme. In this regime, the disorder may be associated to the quantum coin or the displacement operator [15,18,37–54].

In general terms, the disorder (inhomogeneity) induces deviations from quadratic spreading of the wave packet, including the emergence of Anderson localization. For a dynamic disorder, the quantum coin is the same at all lattice sites but changes at each time step [37–44]. In this context, the analysis of the time evolution of a quantum walker in the presence of unitary noise in the Hadamard operator shows that the standard deviation of the spatial distribution acquires a diffusive behavior for long times, like the classical random walk [37]. For quantum coins arranged in aperiodic sequences, such as Fibonacci [39] and Thue-Morse [43], the transport properties of a quantum walker in a one-dimensional (1D) chain reveals a superdiffusive wave packet spreading. For Fibonacci distributions, this behavior has been connected with the power-law decay of the time-correlation function of the chaotic trace map [41]. By using a time dependence for the coin operator, different types of asymptotic behaviors (such as subdiffusive and localized) for the wave-function spreading were reported [44].

A localized behavior has also been described for systems with spatial inhomogeneity, either for different coins randomly distributed along the lattice sites but fixed during the time evolution [15,18,45,46,52], as well as for systems with position-dependent phase defects [47–49,54]. Both descriptions have experimental studies by using optical setups, which demonstrates the relevance of such structures for the advance



of quantum information science [15,18,49]. The absence of localization was described for different quasiperiodic distributions in the inhomogeneity of the coin operators [43]. By using the distribution of two coins on the lattice, Fibonacci and the Thue-Morse sequences induce a superdiffusive behavior for the walker whereas the Rudin-Shapiro sequence shows a subdiffusive one [43]. A fractal nature was reported for quasiperiodic distributions in which the period of coin operators is distributed analogous to the Aubry-André model. The localized behavior described for the inverse period of coins is an irrational number [53].

Changes in the wave packet spreading has also been reported for systems whose disorder (inhomogeneity) is related to the step lengths at every step [55–57]. With nonperfect multiport connectivity, where there is small probability of the multiports to connect to another multiport at a fixed distance, a transition from the case of ballistic diffusion (for unperturbed quantum walks) for sub-ballistic one has been reported [55]. By including a non-Markovianity on the quantum walks in a one-dimensional lattice, Molfetta *et al.* describes a hyperballistic diffusion, with diffusion exponent equal to 3 [56].

It is observed that many studies focus on associating the inhomogeneity implementation to transport properties of the walker. However, the coin-position entanglement has relevant aspects in quantum computation protocols and quantum information [58]. Contrary to the homogeneous quantum walk, systems with dynamical inhomogeneity create maximally coin-position entangled states in the asymptotic limit, independent of the initial condition of the walker [59]. On the other hand, the static inhomogeneity is almost always worse than the homogeneous quantum walk in terms of entanglement generation [45]. In addition, an absence of asymptotic limit for such systems was reported [45]. The decrease (enhancement) of entanglement due to static (dynamic) inhomogeneity has also been described for 1D systems with on-site phase disorder [47]. The effect of delocalization of the initial state shows a relation between the initial angles of the spin amplitudes, which always leads to the maximal entanglement for Hadamard and Fourier walks [60].

Faced with the above descriptions, we study space-inhomogeneous discrete quantum walks, which exhibit transitions between localized and delocalized regimes. Here, the inhomogeneity is described by a deterministic distribution of quantum coins along the lattice, whose characteristic is neither periodic (Bloch-like) nor random (Anderson-like). The model proposed here may be seen as a generalization of the model investigated in Ref. [53], whose description for the coin operator can be restored by a proper adjustment of the aperiodicity presented here. Transport properties are studied by exploring typical quantities (inverse participation ratio and survival probability), as well as the energy spectra of an associated effective Hamiltonian. Localized and delocalized quantum walks are mapped, which seems useful to control quantum information and quantum processing. We also study the coin-position entanglement. The role played by correlations on the coin-position entanglement, as well as the ability of systems with static inhomogeneity to create maximally entangled states or have an asymptotic limit were issues explored in our study.

## II. MODEL

We consider a quantum walker moving in an infinite 1D lattice of interconnected sites. The walker consists of a qubit (two-state quantum system) with the internal degree of freedom (e.g., spin [1] or polarization [15]). The quantum walker state  $|\psi\rangle$  belongs to a Hilbert space  $H = H_c \otimes H_p$ , where  $H_c$  is a complex vector space of dimension 2 associated with the internal degree of freedom of the qubit, and  $H_p$  denotes a countable infinite-dimensional space associated to site positions. Here, the internal degree of freedom of the walker (coin) is spanned by the orthonormal basis  $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ , while the position space is spanned by the orthonormal basis  $\{|n\rangle: n \in \mathbb{Z}\}$ . Thus, a general initial state ( $t = 0$ ) can be written as

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n [a(n, 0)|\uparrow\rangle \otimes |n\rangle + b(n, 0)|\downarrow\rangle \otimes |n\rangle], \quad (1)$$

with  $\sum_n [|a(n, 0)|^2 + |b(n, 0)|^2] = 1$ .

The evolution of the system depends on both internal and spatial degree of freedom. We start the quantum walker in the initial position and act upon it with a unitary operator  $\hat{C}$ , well known as quantum coin or quantum gate, followed by a conditional displacement operation  $\hat{S}$  at each time step. That is, the position of a particle evolves according to its internal coin state. Thus, the state of the walker after  $t$  steps is given by applying the unitary transformation  $|\psi(t)\rangle = \hat{U}^t |\psi(0)\rangle$  to the initial state, where  $\hat{U}^t = \prod_{i=1}^t \hat{S} \cdot (\hat{C}_i \otimes \mathbb{1}_p)$ . The displacement operator has the form

$$\hat{S} = \sum_n (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |n+1\rangle\langle n| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |n-1\rangle\langle n|), \quad (2)$$

while  $\mathbb{1}_p$  is the identity operator defined over  $H_p$ .

Here, we introduce a spatial inhomogeneity in the coin operators given by an aperiodic distribution

$$\hat{C}_n = \cos(\theta_0 n^\nu) |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \sin(\theta_0 n^\nu) |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + \sin(\theta_0 n^\nu) |\downarrow\rangle\langle\uparrow| - \cos(\theta_0 n^\nu) |\downarrow\rangle\langle\downarrow|. \quad (3)$$

Thus, the coin operators depend on their positions  $n$  and  $\nu$  is a tunable parameter that controls the aperiodicity degree on the rotation angle  $\theta_0 = [0, 2\pi]$ . Taking  $\nu$  as positive, the smaller values describe a very slow spatial inhomogeneity on the coin operators. However, this spatial inhomogeneity increases as  $\nu$  grows, so as to behave as pseudorandom distribution for high enough  $\nu$ . Thus, the model proposed here may be seen as a generalization of the model investigated in Ref. [53], where its description for the coin operator can be restored by setting  $\nu = 1$ . On the other hand, by setting  $\nu = 0$ , we recover the homogeneous quantum walk. Thus, the  $\nu > 0$  parameter induces a static inhomogeneity on the system with position-dependent quantum coin operations fixed during the time evolution, i.e.,  $\hat{C}(\theta_0, n, t) = \hat{C}(\theta_0, n) = \hat{C}_n(\theta_0)$ .

## III. RESULTS AND DISCUSSION

### A. Transport properties and energy spectra

Initially, we investigate the influence of aperiodicity on the transport features of the walker. Thus, we start following the time evolution of the probability density distribution for a walker whose initial state is  $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |n_0\rangle$ ,

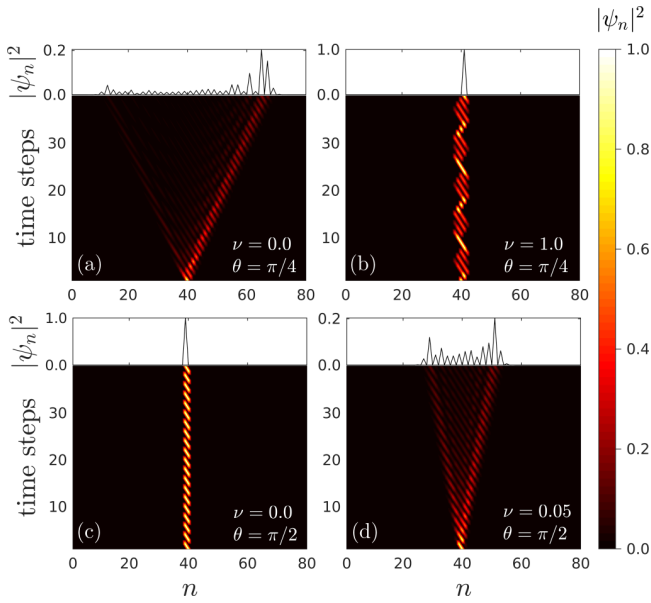


FIG. 1. Time evolution of the density of probability in position space of a quantum walker with initial state  $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |40\rangle$  and ruled by (a)  $\theta_0 = \pi/4$  and  $\nu = 0.00$ ; (b)  $\theta_0 = \pi/4$  and  $\nu = 1.00$ ; (c)  $\theta_0 = \pi/2$  and  $\nu = 0.00$ ; (d)  $\theta_0 = \pi/2$  and  $\nu = 0.05$ . Specific spatial inhomogeneities on well-known quantum coins (Hadamard and Pauli-X) induce opposite dynamics those shown by homogeneous systems.

with  $n_0 = 40$ . In order to better understand the influence of aperiodic spatial inhomogeneity on the quantum walk, we choose two well-known quantum coins as reference: Hadamard,  $\theta_0 = \pi/4$ ; and Pauli-X,  $\theta_0 = \pi/2$ . While Hadamard coins uniformly distributed on the lattice sites induce a spread of the probability distribution [Fig. 1(a)], a spatial inhomogeneity with  $\nu = 1.0$  gives rise to localized behavior whose probability distribution remains restricted around the initial sites [Fig. 1(b)]. On the other hand, whereas Pauli-X coins bring a localized behavior whose probability distribution stays oscillating around the initial site [Fig. 1(c)], a spatial inhomogeneity with  $\nu = 0.05$  leads to a delocalized distribution [Fig. 1(d)].

The above dynamics can be better characterized by computing the survival probability

$$SP(t) = \sum_{\alpha=\uparrow,\downarrow} |\langle n | \otimes \langle \alpha | \psi(t) \rangle|^2 |_{n=n_0} \quad (4)$$

and the inverse participation ratio

$$IPR(t) = \frac{1}{\sum_n |\psi_n(t)|^4}. \quad (5)$$

The first describes the probability that the walker returns to the initial position at time  $t$ , whereas  $IPR(t)$  gives the estimate number of sites over which the wave packet is spread at time  $t$ . Thus, in the long-time regime the survival probability saturates at a finite value for a localized wave function, while  $SP(t) \rightarrow 0$  means that the walker escapes from its initial location. On the other hand, in the long-time regime the  $IPR(t) \propto N^0$  indicates that the walker remains localized, whereas  $IPR(t) \propto N$  corresponds to the regime

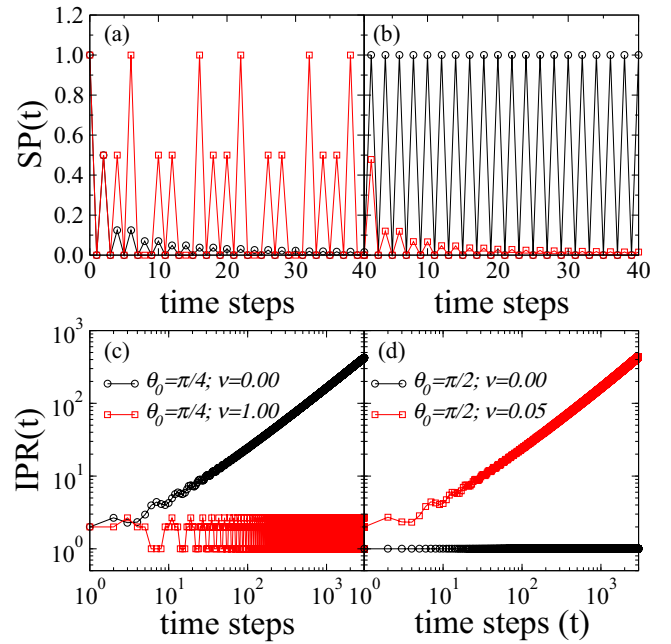


FIG. 2. Time evolution of (top) survival probability (SP) and (bottom) the inverse participation ratio (IPR) for same configurations of  $\theta_0$  and  $\nu$  used in Fig. 1: (a)–(c)  $\theta_0 = \pi/4$  with  $\nu = 0.00$  and  $\nu = 1.00$ ; (b)–(d)  $\theta_0 = \pi/2$  with  $\nu = 0.00$  and  $\nu = 0.05$ . Both quantities ratify the transitions between delocalized and strong-localized regimes ruled by aperiodic inhomogeneity.

where the wave function is distributed over the lattice. With this analysis in mind, we computed both quantities for the same configurations used in Fig. 1 and we observe the results reinforcing the previous description (see Fig. 2). For systems ruled by Hadamard coins homogeneously distributed on the lattice the  $SP(t) \rightarrow 0$  and  $IPR(t)$  grows linearly as time evolves. A localized behavior, where the wave function is split into equiprobable portions and grouped into its initial position, describes the dynamics for an inhomogeneous case of  $\theta_0 = \pi/4$  and  $\nu = 1.00$ . For homogenous systems of Pauli-X coins a bit-flip dynamics is well characterized, with  $SP(t)$  successively alternating between 0 and 1 and  $IPR(t)$  remaining fixed in 1. When we tune  $\nu = 0.05$  for  $\theta_0 = \pi/2$  we observe  $SP(t) \rightarrow 0$  and  $IPR(t)$  growing linearly as time evolves.

To understand the origin of changes in the mobility of the walker we introduce an associated effective Hamiltonian and explore the nature of its eigenvalues. As described above, the dynamics of the quantum walker is given by a unitary time-step operator, which consists of a change of internal degree of freedom (coin flip) followed by a coin-dependent displacement operation:

$$|\psi(t+1)\rangle = \hat{U} |\psi(t)\rangle. \quad (6)$$

Since  $\hat{U}$  is time independent, by choosing the time unit as the period of the time evolution and the unit of position as the period of the lattice,  $\hat{U}$  can be interpreted as a Floquet operator [46,51] associated with a time-independent effective Hamiltonian ( $H_{\text{eff}}$ ) defined as

$$\hat{U} = e^{-iH_{\text{eff}}}. \quad (7)$$

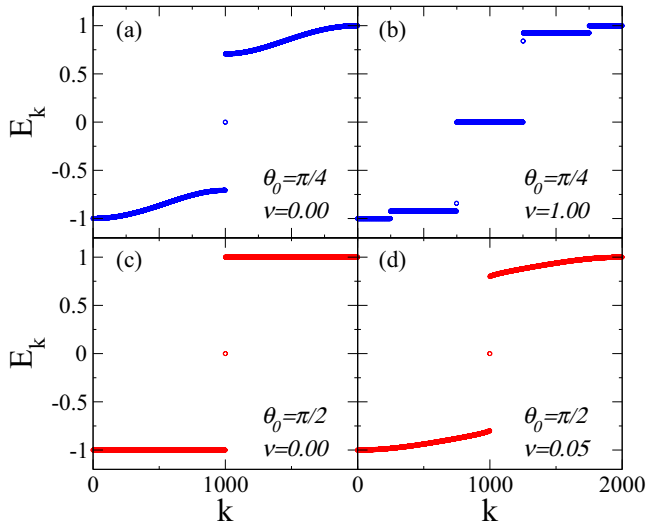


FIG. 3. Energy spectrum  $E_k = -i \log(\lambda_k)$ , with  $\lambda_k$  being the eigenvalues of the operator  $\hat{U}$  for same configurations used in Fig. 1. Allied to the presence of the internal degree of freedom, both systems exhibit two main bands in absence of inhomogeneity: Hadamard coins show a continuous energy spectrum inside the two main bands, while Pauli-X coins show a flat degenerate energy spectrum into both bands. The inhomogeneity for  $\theta_0 = \pi/4$  opens new gaps in the main energy bands, besides imposing a degeneracy on them. On the other hand, the inhomogeneity breaks the high degeneracy level within two sub-bands for  $\theta_0 = \pi/2$ .

Thus, by using the same methodology employed in Ref. [43], we compute  $E_k = -i \log(\lambda_k)$ , where  $\lambda_k$  are the eigenvalues of the operator  $\hat{U}$ . In Fig. 3 we explore the energy spectra of same configurations shown in previous figures. In general terms, homogeneous systems exhibit two main bands, which is related to the presence of the internal degree of freedom (coin). For homogeneous systems composed by Hadamard coins ( $\theta_0 = \pi/4$ ) we observe two main bands, gapped away from each other, but with a continuous energy spectrum inside them. On the other hand, Pauli-X coins ( $\theta_0 = \pi/2$ ) uniformly distributed give a flat degenerate energy spectrum for both bands, so that the linear combination of eigenstates results in the well-known bit-flip dynamics [58] exhibited in Fig. 1(c) and Figs. 2(b), 2(d). Both descriptions are in agreement with previous literature [43,46]. In Fig. 3(b) we observe that the spatial inhomogeneity of  $\nu = 1.0$  for  $\theta_0 = \pi/4$  induces the emergence of new gaps within the main energy bands, giving rise new sub-bands. The eigenstates are then still compactly localized inside these sub-bands, so as to exhibit a degenerate aspect. Thus, a linear combination of eigenstates results in a localized dynamics restricted to a few sites. On the other hand, the spatial inhomogeneity of  $\nu = 0.05$  for  $\theta_0 = \pi/2$  breaks the high degeneracy within main bands. Thus, the inhomogeneity of  $\theta_0$  induces an enlargement of bands and a decrease of gap between them. These aspects favor the spread of wave function along the lattice, as seen in Fig. 1(d) and Figs. 2(b), 2(d). The spatial inhomogeneity altering the dispersion and gaps of energy corroborates the association of  $\theta_0$  to the kinetic energy made in Ref. [46].

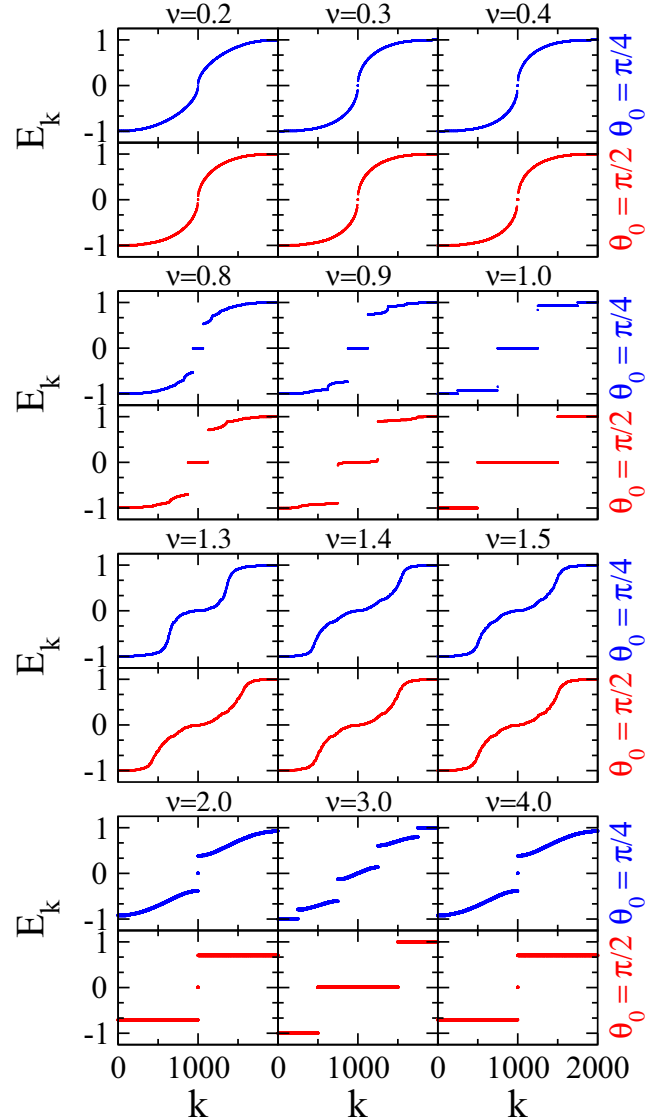


FIG. 4. Energy spectrum  $E_k = -i \log(\lambda_k)$ , with  $\lambda_k$  being the eigenvalues of the operator  $\hat{U}$  for  $\theta_0 = \pi/4$  (blue) and  $\theta_0 = \pi/2$  (red). Top:  $\nu = 0.2, 0.3, 0.4$ ; second group:  $\nu = 0.8, 0.9, 1.0$ ; third group:  $\nu = 1.3, 1.4, 1.5$ , and bottom:  $\nu = 2.0, 3.0, 4.0$ . In the early stage the inhomogeneity leads to vanishing gap between two main bands. With increase of  $\nu$  it is observed the presence of gaps and flat-bands structures. The adjustment of  $\nu > 1$  provides an irregular spectrum which resembles that described by 1D Anderson model, except when the translational symmetry on the inhomogeneity is recovered ( $\nu \in \mathbb{Z}^*$ ).

A more extensive description about the relation between the energy spectrum and dynamics behavior of inhomogeneous quantum walks is shown Fig. 4, where we compute  $E_k$  for both coins ( $\theta_0 = \pi/2, \pi/4$ ) for different settings of  $\nu$ . In the early stage the inhomogeneity induces the width of each band to its maximal value, which leads to a vanishing gap, i.e. a gapless spectrum. This nature recalls the spectrum obtained from homogeneous Pauli-Z coins ( $\theta_0 = 0$ ), whose characteristic mobility is well known [58]. With increase of  $\nu$  arises new gaps, sub-bands, and degenerate eigenstates. The

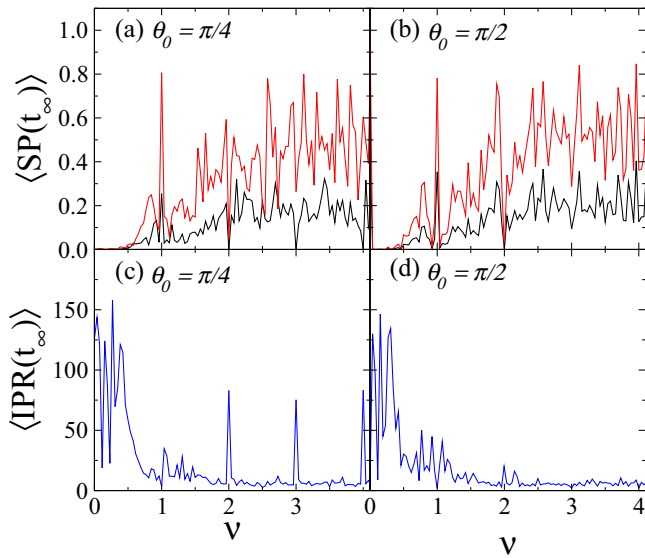


FIG. 5. Long-time average of the survival probability ( $\langle SP(t_\infty) \rangle$ ) and the inverse participation ratio ( $\langle IPR(t_\infty) \rangle$ ) versus  $\nu$ , for  $\theta_0 = \pi/2, \pi/4$ . We display for  $\langle SP(t_\infty) \rangle$  the average probability of the walker returns to the initial (bottom/black) and around the initial position (top/red), see description in text. Delocalized (localized) quantum walks are predominant for  $\nu < 0.5$  ( $\nu > 0.5$ ), consistent with energy spectra analysis. The translational symmetry on the inhomogeneity ( $\nu \in \mathbb{Z}^*$ ) favors the spread of wave function along the lattice.

emergence of flat-band states can be understood as states located within a small part of the lattice. With the energy spectrum independent of momentum, the kinetic energy is quenched, the group velocity vanishes, and the suppression of transport is observed. For  $\nu$  high enough the energy spectra, which resemble that described by the 1D Anderson model, are observed. This analysis is consistent with the arrangement of the quantum coins along the lattice, whose slowly varying distribution exhibited for small  $\nu$  becomes randomlike as  $\nu$  increases. However, this latter aspect is absent for  $\nu \in \mathbb{Z}^*$  (see bottom panels). With the translational symmetry on the inhomogeneity some aspects inherent to the original coin are recovered, which can favor the quantum transport.

The above analysis suggests the  $\nu$  parameter as able to tune delocalized and localized quantum walks, such that the delocalized character is predominant in the low-inhomogeneity regime. In order to confirm, we explore in Fig. 5 the long-time average of survival probability [ $\langle SP(t_\infty) \rangle$ ] and the inverse participation ratio [ $\langle IPR(t_\infty) \rangle$ ] for both coins ( $\theta_0 = \pi/2, \pi/4$ ), by ranging  $\nu$  from 0–4. As before, we follow considering an asymmetric initial state  $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |n_0\rangle$ , with  $n_0 = 500$ . Besides the average probability of the walker returns to the initial position [ $n = n_0$  in Eq. (4)] after a long time (bottom, black), we show in Figs. 5(a), 5(b) the average probability of finding the walker around [ $n = n_0, n_0 \pm 1$  in Eq. (4)] the initial position (top, red). The behavior described by the two coins is quite similar for small  $\nu$ , where delocalized quantum walks are well described for both coins in low-inhomogeneity regime ( $\nu < 0.5$ ). Besides  $\langle SP(t_\infty) \rangle \rightarrow 0$ , we observe  $\langle IPR(t_\infty) \rangle$  predominantly high. Some configurations

with low  $\langle IPR(t_\infty) \rangle$  are related to delocalized quantum walks whose probability density is restricted to few sites, similar to the walker subjected to homogeneously distributed Pauli-Z coins [38,58]. The localized nature is predominant for higher  $\nu$  values. Here, a peculiarity inherent to Pauli-X coin is its localized nature for  $\nu = 0$ . Thus, the Pauli-X coin is forwarded to a delocalized state to small value of  $\nu$ , but returns again to a localized state as  $\nu$  increases. By using a connection between discrete and continuous quantum walks [61], we interpret this aperiodic inhomogeneity (within a low  $\nu$  regime) as a potential difference between neighboring sites proportional to  $n^{\nu-1}$ , which vanishes in the thermodynamic limit and favors a broadening of walker. For abrupt variations on the distribution of quantum coins the internal correlations become effectively short ranged, promoting destructive interferences and inducing a localized quantum walk. In good agreement with the Fig. 4, this premise is reinforced by delocalization of wave function around  $\nu \in \mathbb{Z}^*$ , when inhomogeneity on the quantum coins distribution recovers a translational symmetry. However, the spatial dependence imposes intrinsic correlations on the interference terms of the quantum coins, making the translational symmetry not always predominant over the delocalization criterion.

A more extensive description about the dynamics behavior of quantum walker is shown in Fig. 6, where we display diagrams for long-time average of the survival probability [ $\langle SP(t_\infty) \rangle$ ] and the inverse participation ratio [ $\langle IPR(t_\infty) \rangle$ ] versus  $\nu$  versus  $\theta_0$ . Here, we consider the maximal IPR between collected data in order to plot on the vertical axis a normalized  $\langle IPR(t_\infty) \rangle$ . The periodic dependence exhibited for  $\nu = 0$  (disorder-free) describes the well-known behavior for different quantum coins: For Pauli-Z coins the quantum walker will move away from initial position and the wave function will only be seen at the position  $+t$  [for  $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |n_0\rangle$ ] or  $-t$  [for  $|\psi(0)\rangle = |\downarrow\rangle \otimes |n_0\rangle$ ] with nonzero probability. On the other hand, for Pauli-X coins the quantum walker will remain localized around initial position for all time  $t$ . By including a spatial dependence ( $\nu \neq 0$ ), the previous description is changed. As previously suggested, delocalized (localized) quantum walks are predominant for  $\nu < 0.5$  ( $\nu > 0.5$ ). The translational symmetry on the inhomogeneity, recovered by  $\nu \in \mathbb{Z}^*$ , appear to be a relevant aspect about the spread of wave function along the lattice.

As previously reported, the disorder and/or inhomogeneity induces deviations from ballistic spreading of the wave packet. Thus, in order to offer a complementary analysis, we explore the wave packet spreading by using

$$\sigma(t) = \sqrt{\sum_n [n - \langle n(t) \rangle]^2 |\psi_n(t)|^2}, \quad (8)$$

where  $\langle n(t) \rangle = \sum_n n |\psi_n(t)|^2$  is the walker's mean position. After a long time  $\sigma(t) \propto t^1$  describes a ballistic dynamics with constant velocity, while a  $\sigma(t)$  that remains constant reports a localized behavior. Thus, by computing the long-time average of wave packet width for  $\theta_0 = \pi/4$ , we show in Fig. 7 the size dependence of the wave packet width for chain sizes ranging from  $N = 4000$  to  $N = 64000$  and some values of  $\nu$ . As expected, the fully delocalized regime for Hadamard coins ( $\theta_0 = \pi/4$  with  $\nu = 0.0$ ) results in a  $\langle \sigma(t_\infty) \rangle \propto N$ .

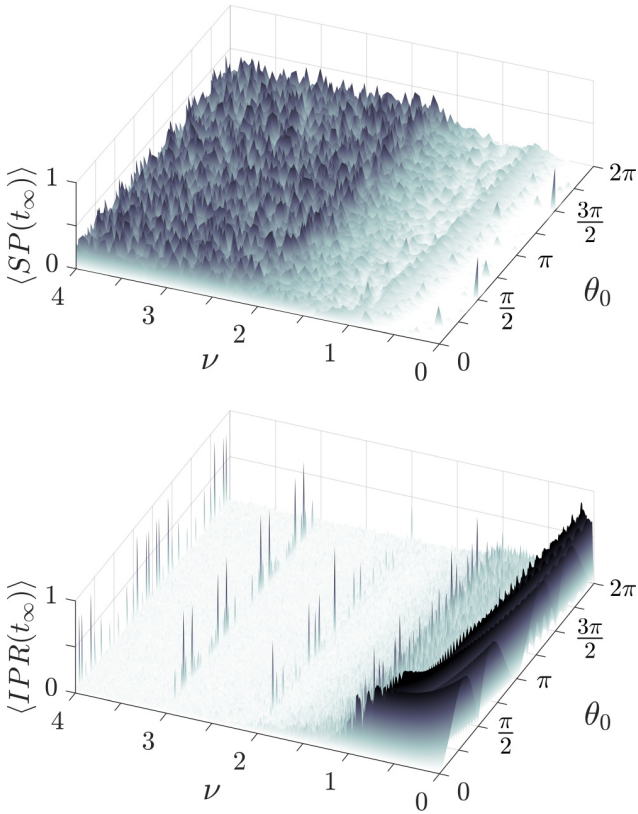


FIG. 6. Diagram of long-time average of the survival probability ( $\langle SP(t_\infty) \rangle$ ) and the inverse participation ratio ( $\langle IPR(t_\infty) \rangle$ ) versus  $\nu$  versus  $\theta_0$ . Delocalized quantum walks are predominant for  $\nu < 0.5$ , while the localized nature is predominant with increasing  $\nu$ , except for  $\nu \in \mathbb{Z}^*$ . The latter, which may be associated with the translational symmetry of inhomogeneity, appear to be a relevant aspect about the spread of wave function along the lattice.

However, as we increase  $\nu$  a crossover is observed from the ballistic profile to the size-independent ( $\nu = 1.0, 2.50$ ), which corroborates the previous results. In the intermediate regime the wave packet width displays an effective sublinear

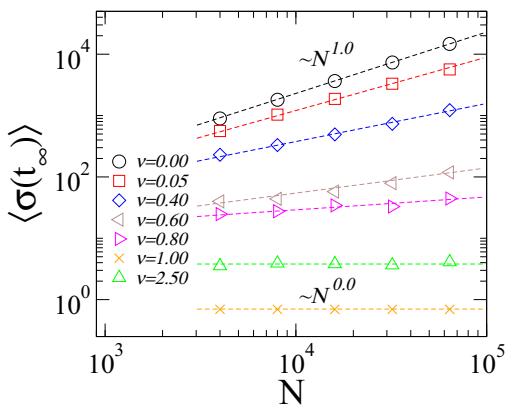


FIG. 7. Long-time average of the standard deviation of the spatial distribution [ $\langle \sigma(t_\infty) \rangle$ ] versus  $N$  for some representative values of  $\nu$ . The crossover from the ballistic scaling to the size-independent regime can be effectively described by a sub-ballistic behavior.

finite-size scaling. We emphasize that  $\langle \sigma(t_\infty) \rangle$  does not display a continuously smooth variation as  $\nu$  increases. As previously shown, with the  $\nu$  increasing we identified some configurations whose probability density is restricted to few sites, but with the walker developing an oriented quantum walk (similar to the walker subjected to homogeneously distributed Pauli-Z coins). We add that, in general terms, the behavior found for  $\theta_0 = \pi/4$  are applicable for other values of  $\theta_0$ , which corroborates the great similarities between the data of  $\theta_0 = \pi/4$  and  $\theta_0 = \pi/2$  previously displayed.

### B. Entanglement properties

By considering the changes on the spreading behavior of the quantum walker described previously, we investigate the entanglement between the coin state and the particle position. In this scenario, where the evolution of the whole system is given by a unitary transformation in which the coin operation at each step directly controls the interference pattern of the quantum walker, we compute the von Neumann entropy of the reduced density matrix given by [45,47,58–60]

$$S_E(t) = -\text{Tr}[\rho_c(t) \log_2 \rho_c(t)], \quad (9)$$

where  $\rho_c$  is the reduced density matrix obtained by tracing over the position degree of freedom the full density matrix  $\rho = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$  of the quantum walk system. Within the most general quantum state at some arbitrary step  $t$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n [a_n(t)|\uparrow\rangle + b_n(t)|\downarrow\rangle] \otimes |n\rangle, \quad (10)$$

the reduced density matrix is given by

$$\rho_c(t) = \sum_m \langle m|\rho|m\rangle = \sum_m \begin{bmatrix} \alpha(t) & \gamma(t) \\ \gamma^*(t) & \beta(t) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

with  $\alpha(t) = \sum_m |a_m(t)|^2$ ,  $\beta(t) = \sum_m |b_m(t)|^2$ ,  $\gamma(t) = a_m(t)b_m^*(t)$ , and the probability distribution  $|\psi_n(t)|^2 = \alpha(t) + \beta(t) = 1$ . By diagonalizing  $\rho_c(t)$  we obtain

$$S_E[\rho_c(t)] = -\lambda_+ \log_2 \lambda_+ - \lambda_- \log_2 \lambda_-, \quad (12)$$

where  $\lambda_\pm$  are the eigenvalues of matrix  $\rho_c$ ,

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2} \{1 \pm \sqrt{1 - 4[\alpha(t)\beta(t) - |\gamma(t)|^2]}\}. \quad (13)$$

Thus,  $S_E(t) \in [0, 1]$ , with separable states (not entangled) giving  $S_E = 0$  and maximally entangled states providing  $S_E = 1$ . For a disorder-free system ruled by Hadamard coins with local initial conditions it has been shown within an asymptotic regime that  $S_E(t \rightarrow \infty) \approx 0.872$  [62,63]. Taking into account the above results, we start by computing the time evolution of von Neumann entropy  $S_E(t)$  for a walker with initial state  $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |n_0\rangle$ ,  $n_0 = 500$ , subjected to the same configurations shown in Fig. 1, i.e.,  $\theta_0 = \pi/4$  with Fig. 1(a)  $\nu = 0.0$  and Fig. 1(b)  $\nu = 1.0$ , as well as  $\theta_0 = \pi/2$  with Fig. 1(a)  $\nu = 0.0$  and Fig. 1(b)  $\nu = 0.05$ . The results in Fig. 8 reflect the localized or delocalized transition observed in Fig. 1. For homogeneous case, Hadamard coins induce a coin-position entanglement, which saturates around 0.872, in full agreement with Refs. [62,63]. By adding spatial inhomogeneity ( $\nu = 1.0$ ) the coin-position entanglement exhibits an oscillatory behavior with values  $0 \leq S_E(t) \leq 1$ , i.e., between

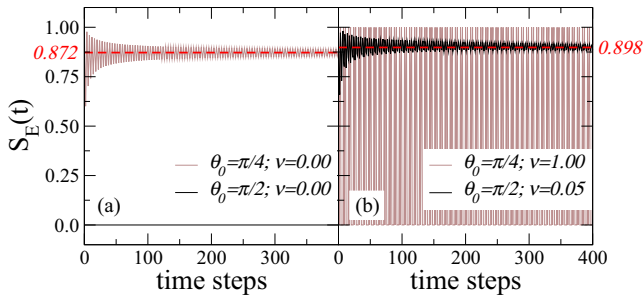


FIG. 8. Time evolution of von Neumann entropy for same configurations of Fig. 1, i.e., Hadamard and Pauli-X coins in (a) absence and (b) presence of spatial inhomogeneity. Within a disorder-free ( $\nu = 0.0$ ) system, Hadamard coins induce a coin-position entanglement, which saturates around 0.872, in fully agreement with Refs. [62,63]. On the other hand, Pauli-X coins shows absence of entanglement. Aperiodic inhomogeneity can alter significantly the entanglement properties.

not entangled and fully entangled. This feature is consistent with dynamics behavior described in Fig. 1 and the energy spectrum composed by flat bands exhibited in Fig. 3. On the other hand, while homogeneous  $\theta_0 = \pi/2$  coins show absence of entanglement for homogeneous distribution, an aperiodicity with  $\nu = 0.05$  brings an entanglement, which oscillates close 0.898. This latter feature comes from the emergence of dispersion on the energy spectrum, as described in Fig. 3.

It has been reported that static inhomogeneity exhibits the worst results in terms of entanglement generation, almost always reducing the entanglement when comparing with the homogeneous case [45,47]. In the face of significant changes on the entanglement power induced by aperiodic spatial dependence (previously reported in Fig. 8), we investigate whether this type of static inhomogeneity is able to make it more prone to increase the coin-position entanglement. In Fig. 9 we focus on settings that exhibit a delocalized character (see top panels). We consider  $\theta_0 = \pi/6, \pi/4, \pi/3$ , where systems with spatial inhomogeneity ( $\nu = 0.05$ ) are shown on the right panels. We observe an increasing of entanglement power induced by inhomogeneity, even for a configuration that has a strong entanglement into a homogeneous regime ( $\theta_0 = \pi/3$ ). Such ability has not been reported for static inhomogeneity, only for dynamic and fluctuating inhomogeneities [45,47]. Since both studies describe random distributions, for the quantum coins [45] or on-site phase [47], we identified that inner correlations on the distribution of disorder can enhance the efficiency in the ability to entangle internal (spin or polarization) and external (position) degrees of freedom.

In order to better understand this phenomenology we compute in the Fig. 10 the long-time average of the entanglement [ $\langle S_E(t_\infty) \rangle$ ] versus  $\nu$ , for  $\theta_0 = \pi/6, \pi/4, \pi/3$  and  $\pi/2$ . To establish reference we show dashed lines that describe the  $\langle S_E(t_\infty) \rangle$  for the respective homogeneous system. We observe many configurations of inhomogeneity in which there is an enhancement on the entanglement power. These configurations are predominantly found for the smaller values of  $\nu$ . As  $\nu$  grows, the randomlike aspect that governs the quantum coins distribution impels the coin-position

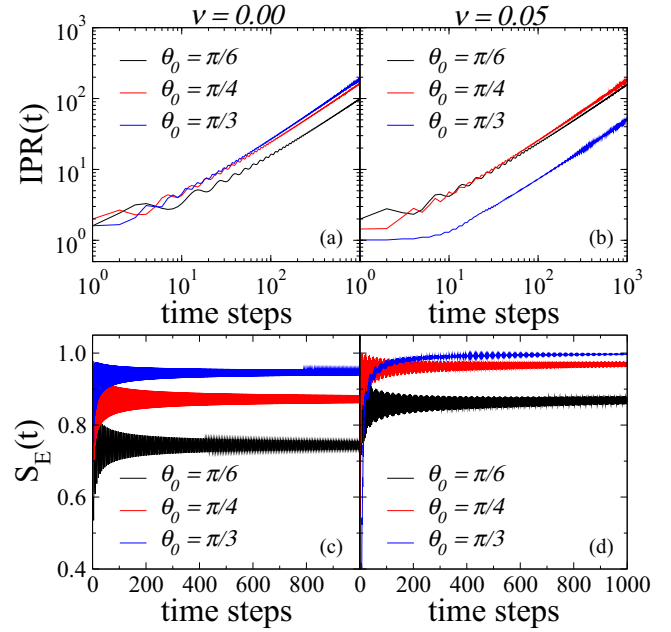


FIG. 9. Time evolution of the inverse participation ratio  $IPR(t)$  (top) and von Neumann entropy  $S_E(t)$  (bottom) for coins  $\theta_0 = \pi/6, \pi/4, \pi/3$  in the (a), (c) absence and (b), (d) presence of inhomogeneity. While  $IPR(t)$  exhibits a delocalized character of coins in both regimes, we observe an increasing of entanglement power induced by inhomogeneity, even for a configuration with a strong entanglement in the homogeneous configuration ( $\theta_0 = \pi/3$ ).

entanglement to weakening, which agrees with the description of Refs. [45,47].

By considering the rise in the entanglement power an important aspect, we extend our numerical experiments in order to offer a diagram  $\theta_0$  versus  $\nu$ , which reveals this enhancement in the ability to entangle internal (spin or polarization) and external (position) degrees of freedom (see Fig. 11). Here, we are not concerned with the increase percentage, only with the growth of the long-time average entanglement as compared with its respective value for homogeneous case. Thus, black points mean any increase in long-time average of entanglement, while white points denote a weakening. For  $\theta_0 = \pi/2$  and  $\theta_0 = 3\pi/2$  we observe a continuous black line, since homogeneous systems of Pauli-X coins display  $\langle S_E(t_\infty) \rangle = 0$ . This latter is related to the energy spectrum composed by two main flat bands, which induces a bit-flip dynamics. The increase in entanglement concentrates around Pauli-Z coins, configurations in which the walker moves away of initial position without interference and also shows absence of entanglement within a homogeneous regime. For initial  $\nu$  values the gain of entanglement power is predominant, while becoming restricted to close values of  $\theta_0 = 0, \pi$ , and  $2\pi$  as  $\nu$  grows.

### C. Asymptotic limit

A complementary analysis was directed to the asymptotic limit of entanglement. It has been reported that systems ruled by Hadamard quantum coins [63], systems with dynamic [45,59], and fluctuating [45] inhomogeneities display

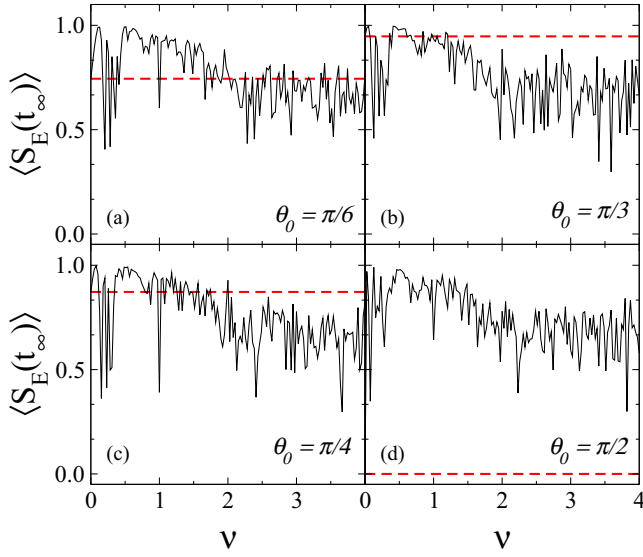


FIG. 10. The long-time average of the entanglement [ $\langle S_E(t_\infty) \rangle$ ] versus  $\nu$ , for  $\theta_0 = \pi/6, \pi/4, \pi/3$  and  $\pi/2$ . Dashed lines describe the respective  $\langle S_E(t_\infty) \rangle$  in homogeneous systems. We observe many configurations of inhomogeneity in which there is an enhancement in the entanglement power, being predominantly found for the smaller values of  $\nu$ . As  $\nu$  grows, the randomlike aspect that governs the quantum coins distribution impels the entanglement to weakening.

an asymptotic limit. On the other hand, systems with static inhomogeneity have no asymptotic limit [45], with the long-time entanglement fluctuating about a mean value with no signs of convergence to its mean. Thus, by using the same

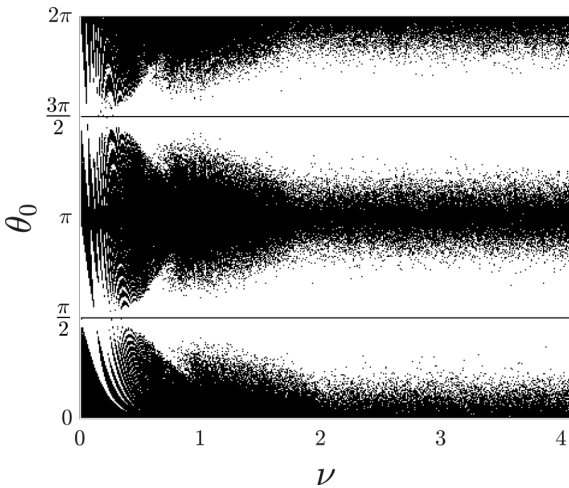


FIG. 11. Diagram  $\theta_0$  versus  $\nu$  which reveals the enhancement in the ability to entangle internal (spin or polarization) and external (position) degrees of freedom with respect to homogeneous distribution of quantum coins. We are not concerned about a gain percentage, so that black points mean an increase of long-time average of entanglement, while white points denote a weakening. The increase in entanglement is predominant for initial values of  $\nu$ . As  $\nu$  grows, the increasing is restricted to values close to  $\theta_0 = 0, \pi$ , and  $2\pi$ , as well as  $\theta_0 = \pi/2$  and  $3\pi/2$ .

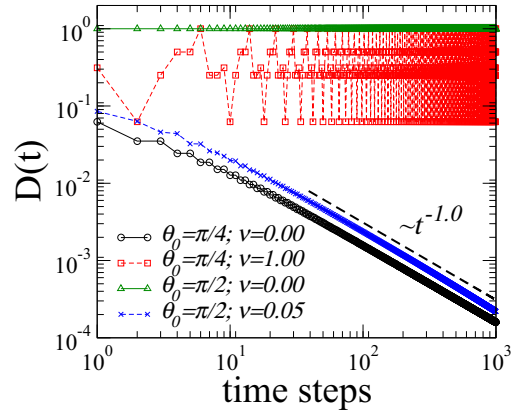


FIG. 12. Time evolution of trace distance for  $\theta_0 = \pi/4, \nu = 0.00$ ,  $\theta_0 = \pi/4, \nu = 1.00$ ,  $\theta_0 = \pi/2, \nu = 0.00$ , and  $\theta_0 = \pi/2, \nu = 0.05$ . Such as in systems governed by Hadamard coins, systems with static inhomogeneity can also exhibit asymptotic value, which obeys a power law. Dashed line is a guide to the eyes showing  $D(t) \sim t^{-1.0}$ .

procedure employed in Ref. [45], we compute the trace distance

$$D[\rho_c(t+1), \rho_c(t)] = D(t) = \frac{1}{2} \text{Tr} |\rho_c(t) - \rho_c(t-1)| \quad (14)$$

in order to study the asymptotic limit of our aperiodic quantum walks. This quantity gives how close are two quantum states, which in the dynamic context can be played as how well information is preserved by some physical process. Thus, whenever a quantum walk leads to

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D[\rho_c(t+1), \rho_c(t)] = D(t) = 0, \quad (15)$$

it is said that the system has an asymptotic limit. In Fig. 12 we show the results of this analysis for Hadamard coins ( $\theta_0 = \pi/4$ ), Pauli-X ( $\theta_0 = \pi/2$ ), and  $\theta_0 = \pi/3$ . Homogeneous systems of Hadamard coins show an asymptotic limit, which obeys a power-law dependence, in agreement with Ref. [45]. However, we found  $D(t) \sim t^{-1.0}$ , in contrast with  $D(t) \sim t^{-1/2}$  reported by Ref. [45]. We attribute this difference to the initial conditions, which have been considered here as localized initial condition [ $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$ ], while it was built through an average of 16.384 delocalized initial conditions (superposition between positions  $|-1\rangle$  and  $|1\rangle$ ) in Ref. [45]. We also note  $\theta_0 = \pi/4$  tuned with spatial dependence  $\nu = 1.0$  performing quantum walks that do not come close to a particular state and do not have an asymptotic limit. For Pauli-X coins the asymptotic limit displays opposite trends: while it has no asymptotic limit in homogeneous case, with an aperiodic inhomogeneity ruled by  $\nu = 0.05$  it exhibits an asymptotic limit, which obeys a power-law dependence  $D(t) \propto t^{-1.0}$ . Furthermore, we can see the inhomogeneous case of Pauli-X coins displaying a linear coefficient slightly lower than that displayed by homogeneous Hadamard coins. Thus, we report a possibility to induce an asymptotic limit even in static inhomogeneity.

#### IV. SUMMARY AND CONCLUSIONS

In summary, we have studied the localization and entanglement properties in quantum walks ruled by aperiodic

(inhomogeneous) spatial dependence on the quantum coins distribution. With an adjustable distribution ruled by a single parameter  $\nu$  we show the existence of delocalized and localized quantum walks, as well as the proper adjusting of the aperiodicity in order to develop both. With the energy spectra analysis, obtained from an associated effective Hamiltonian and the nature of its eigenvalues, both delocalized and localized regimes could be better understood. In the early stage the inhomogeneity leads to a vanishing gap between two main bands, which justifies the delocalized behavior observed for  $\nu < 0.5$ . With increase of  $\nu$  arise gaps and flat bands on the energy spectra, which justifies the suppression of transport detected for  $\nu > 0.5$ . For  $\nu$  high enough the energy spectra resembles that described by the 1D Anderson model. The translational symmetry on the inhomogeneity, recovered for  $\nu \in \mathbb{Z}^*$ , shows to be a relevant aspect, which favors delocalized quantum walks. For the coin-position entanglement, taking as reference the homogeneous distribution (disorder-free) of quantum coins, we identified many settings in which an enhancement in the ability to entangle is observed. Although the results have been reported for a walker whose initial state is given by  $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |n_0\rangle$ , we observe that the phenomenology is predominant among different settings of

initial coin states of the quantum walker (see Supplemental Material [64]). Thus, this behavior brings new information about the role played by aperiodicity on the coin-position entanglement for static inhomogeneous systems, reported before as almost always reducing the entanglement when comparing with the homogeneous case [45,47]. Furthermore, since systems with static inhomogeneity have been reported as having no asymptotic limit [45], we extend the analysis in order to show that aperiodic spatial inhomogeneity is able to induce an asymptotic limit to entanglement. To conclude, with the recent experimental achievements in optical setups [18], we believe that the scheme proposed here is feasible for integrated waveguide circuits. The spatial inhomogeneity proposed here would be adjusted in the beam splitters arranged in a lattice of Mach-Zehnder interferometers, since each beam splitter implements the quantum coin operation.

#### ACKNOWLEDGMENTS

This work was partially supported by CNPq (The Brazilian National Council for Scientific and Technological Development), CAPES (Federal Brazilian Agency), and FAPEAL (Alagoas State Agency).

- 
- [1] Y. Aharonov, L. Davidovich, and N. Zagury, *Phys. Rev. A* **48**, 1687 (1993).
- [2] W. S. Dias, E. M. Nascimento, M. L. Lyra, and F. A. B. F. de Moura, *Phys. Rev. B* **76**, 155124 (2007).
- [3] M. Ezawa, *Phys. Lett. A* **375**, 3610 (2011).
- [4] S. Lloyd, *J. Phys.: Conf. Series* **302**, 012037 (2011).
- [5] K. Manouchehri and J. B. Wang, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41**, 065304 (2008).
- [6] W. S. Dias, F. A. B. F. de Moura, and M. L. Lyra, *Phys. Rev. A* **93**, 023623 (2016).
- [7] M. Mohseni, P. Rebentrost, S. Lloyd, and A. Aspuru-Guzik, *J. Chem. Phys.* **129**, 174106 (2008).
- [8] A. Peruzzo, M. Lobino, J. C. F. Matthews, N. Matsuda, A. Politi, K. Poulivos, X.-Q. Zhou, Y. Lahini, N. Ismail, K. Wörhoff, Y. Bromberg, Y. Silberberg, M. G. Thompson, and J. L. O'Brien, *Science* **329**, 1500 (2010).
- [9] A. Alberti and S. Wimberger, *Phys. Rev. A* **96**, 023620 (2017).
- [10] A. R. C. Buarque and W. S. Dias, *Phys. Lett. A* **381**, 3173 (2017).
- [11] D. Lu, J. D. Biamonte, J. Li, H. Li, T. H. Johnson, V. Bergholm, M. Faccin, Z. Zimborás, R. Laflamme, J. Baugh, and S. Lloyd, *Phys. Rev. A* **93**, 042302 (2016).
- [12] C. A. Ryan, M. Laforest, J. C. Boileau, and R. Laflamme, *Phys. Rev. A* **72**, 062317 (2005).
- [13] P. M. Preiss, R. Ma, M. E. Tai, A. Lukin, M. Rispoli, P. Zupancic, Y. Lahini, R. Islam, and M. Greiner, *Science* **347**, 1229 (2015).
- [14] M. Karski, L. Förster, J.-M. Choi, A. Steffen, W. Alt, D. Meschede, and A. Widera, *Science* **325**, 174 (2009).
- [15] A. Schreiber, K. N. Cassemiro, V. Potoček, A. Gábris, I. Jex, and C. Silberhorn, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 180403 (2011).
- [16] Z.-H. Bian, J. Li, X. Zhan, J. Twamley, and P. Xue, *Phys. Rev. A* **95**, 052338 (2017).
- [17] L. Sansoni, F. Sciarrino, G. Vallone, P. Mataloni, A. Crespi, R. Ramponi, and R. Osellame, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 010502 (2012).
- [18] A. Crespi, R. Osellame, R. Ramponi, V. Giovannetti, R. Fazio, L. Sansoni, F. D. Nicola, F. Sciarrino, and P. Mataloni, *Nature Photon.* **7**, 322 (2013).
- [19] E. Farhi and S. Gutmann, *Phys. Rev. A* **58**, 915 (1998).
- [20] N. Shenvi, J. Kempe, and K. B. Whaley, *Phys. Rev. A* **67**, 052307 (2003).
- [21] A. M. Childs, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 180501 (2009).
- [22] S. E. Venegas-Andraca, *Quantum Inf. Process.* **11**, 1015 (2012).
- [23] N. B. Lovett, S. Cooper, M. T. Matthew Everitt, and V. Kendon, *Phys. Rev. A* **81**, 042330 (2010).
- [24] D. Koch and M. Hillery, *Phys. Rev. A* **97**, 012308 (2018).
- [25] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 673 (1979).
- [26] P. A. Lee and T. V. Ramakrishnan, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 287 (1985).
- [27] B. Kramer and A. MacKinnon, *Rep. Prog. Phys.* **56**, 1469 (1993).
- [28] J. C. Flores, *J. Phys.: Condens. Matter* **1**, 8471 (1989).
- [29] P. Phillips and H.-L. Wu, *Science* **252**, 1805 (1991).
- [30] F. A. B. F. de Moura and M. L. Lyra, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3735 (1998).
- [31] F. M. Izrailev and A. A. Krokhin, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4062 (1999).
- [32] U. Kuhl, F. M. Izrailev, A. A. Krokhin, and H.-J. Stöckmann, *Appl. Phys. Lett.* **77**, 633 (2000).
- [33] D. L. Shepelyansky, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2607 (1994).
- [34] K. Byczuk, W. Hofstetter, and D. Vollhardt, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 056404 (2005).
- [35] W. S. Dias and M. L. Lyra, *Physica A* **411**, 35 (2014).



- [36] A. Müller-Groeling, H. A. Weidenmüller, and C. H. Lewenkopf, *Europhys. Lett.* **22**, 193 (1993).
- [37] D. Shapira, A. J. B. Ofer Biham, and M. Hackett, *Phys. Rev. A* **68**, 062315 (2003).
- [38] S. Panahiyan and S. Fritzsche, *New J. Phys.* **20**, 083028 (2018).
- [39] P. Ribeiro, P. Milman, and R. Mosseri, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 190503 (2004).
- [40] M. C. Bañuls, C. Navarrete, A. Pérez, E. Roldán, and J. C. Soriano, *Phys. Rev. A* **73**, 062304 (2006).
- [41] A. Romanelli, *Physica A* **388**, 3985 (2009).
- [42] G. D. Molfetta and F. Debbasch, *Quant. Studies: Math. Found.* **3**, 293 (2016).
- [43] N. L. Gullo, C. V. Ambarish, Th. Busch, L. Dell'Anna, and C. M. Chandrashekar, *Phys. Rev. E* **96**, 012111 (2017).
- [44] A. Romanelli, *Phys. Rev. A* **80**, 042332 (2009).
- [45] R. Vieira, E. P. M. Amorim, and G. Rigolin, *Phys. Rev. A* **89**, 042307 (2014).
- [46] I. Vakulchyk, M. V. Fistul, P. Qin, and S. Flach, *Phys. Rev. B* **96**, 144204 (2017).
- [47] M. Zeng and E. H. Yong, *Sci. Rep.* **7**, 12024 (2017).
- [48] R. Zhang, P. Xue, and J. Twamley, *Phys. Rev. A* **89**, 042317 (2014).
- [49] P. Xue, R. Zhang, Z. Bian, X. Zhan, H. Qin, and B. C. Sanders, *Phys. Rev. A* **92**, 042316, (2015).
- [50] R. Zhang and P. Xue, *Quant. Inf. Proc.* **13**, 1825 (2014).
- [51] A. Romanelli, A. Auyuanet, R. Siri, G. Abal, and R. Donangelo, *Physica A* **352**, 409 (2005).
- [52] J. Ghosh, *Phys. Rev. A* **89**, 022309 (2014).
- [53] Y. Shikano and H. Katsura, *Phys. Rev. E* **82**, 031122 (2010).
- [54] A. Wójcik, T. Łuczak, P. K. Tomasz Łuczak, A. Grudka, T. Gdala, and M. Bednarska-Bzdega, *Phys. Rev. A* **85**, 012329 (2012).
- [55] H. Lavička, V. Potoček, T. Kiss, E. Lutz, and I. Jex, *Eur. Phys. J. D* **64**, 119 (2011).
- [56] G. Di Molfetta, D. O. Soares-Pinto, and S. M. D. Queirós, *Phys. Rev. A* **97**, 062112 (2018).
- [57] P. Sen, *Physica A* **514**, 266 (2019).
- [58] M. A. Nielsen and I. L. Chuan, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [59] R. Vieira, E. P. M. Amorim, and G. Rigolin, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 180503 (2013).
- [60] A. C. Orthey, Jr. and E. P. M. Amorim, *Quant. Inf. Proc.* **16**, 224 (2017).
- [61] F. W. Strauch, *Phys. Rev. A* **74**, 030301(R) (2006).
- [62] I. Carneiro, M. Loo, X. Xu, M. Girerd, V. Kendon, and P. L. Knight, *New J. Phys.* **7**, 156 (2005).
- [63] G. Abal, R. Siri, A. Romanelli, and R. Donangelo, *Phys. Rev. A* **73**, 042302 (2006).
- [64] See Supplemental Material at <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevE.100.032106> for a complementary study with different settings of initial states.

# Supplementary Material to “Aperiodic space-inhomogeneous quantum walks: localization properties, energy spectra and enhancement of entanglement”

A. R. C. Buarque and W.S. Dias

*Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas, 57072-900 Maceió, Alagoas, Brazil*

Here we show a complementary study about the role played by the initial coin state of the quantum walker on the transport and entanglement properties studied in the main text. Although results displayed there have been reported by using a walker whose initial state is  $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |n_0\rangle$ , the following results demonstrate that the phenomenology is predominant among different settings of initial states.

## I. INTRODUCTION

As described in main text, we study the localization properties and coin-position entanglement of the aperiodic discrete-time quantum walks. Within transport properties we identified delocalized/localized quantum walks mediated by a proper adjusting of aperiodic parameter. Within coin-position entanglement, we show many settings in which an enhancement in the ability to entangle is observed. This behavior brings new informations about the role played by aperiodicity on the coin-position entanglement for static inhomogeneous systems, reported before as almost always reducing the entanglement when comparing with the homogeneous case [1, 2].

Although the results of main text have been reported for a walker whose initial state is given by  $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |n_0\rangle$ , we observe that the phenomenology is predominant among different settings of initial states. In order to corroborate this statement, we work here with 2592 separable localized initial conditions of

$$|\psi(0)\rangle = (\cos \alpha_c |\uparrow\rangle + e^{i\beta_c} \sin \alpha_c |\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle, \quad (1)$$

defined by employing different pairs of  $\alpha_c$  and  $\beta_c$ , with  $\alpha_c \in [0, \pi]$  and  $\beta_c \in [0, 2\pi]$ . More explicitly, we take on the initial condition  $(\alpha_c, \beta_c) = (0, 0)$  as the first realization and we promoted independent increments of  $\pi/5$  for  $\alpha_c$  and  $\beta_c$  until  $\alpha = \pi$  and  $\beta = 2\pi$ .

## II. TRANSPORT PROPERTIES

In order to investigate the above statement within the transport properties context, we start by following the time evolution of the inverse participation ratio (IPR)

$$\text{IPR}(t) = \frac{1}{\sum_n |\psi_n(t)|^4}, \quad (2)$$

where the curves were obtained by averaging over the 2592 initial conditions above described. Aiming a better description, we use the overline to describe the average over the initial conditions for the participation and the other quantities. To establish a comparative analysis, we use  $\theta_0 = \pi/4$  and  $\theta_0 = \pi/2$  for the homogeneous context

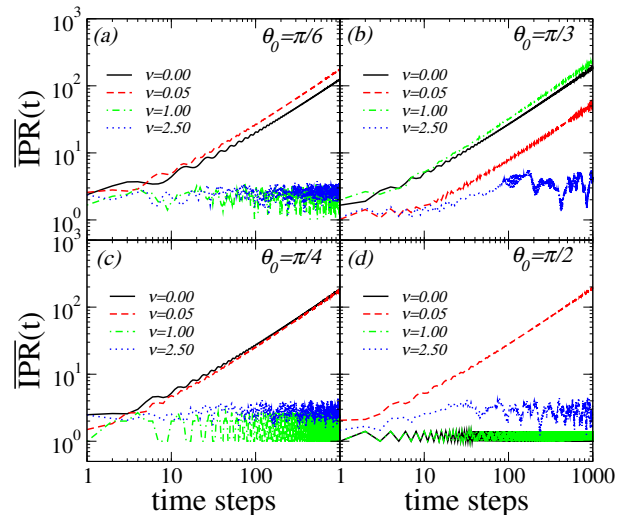


FIG. 1. (Color on-line) Time evolution of the inverse participation ratio (IPR) for  $\theta_0 = \pi/6, \pi/3, \pi/4, \pi/2$  and  $\nu = 0.00, 0.05, 1.00, 2.50$ . ratify the transitions between delocalized and strong-localized regimes ruled by aperiodic inhomogeneity. We observe transitions between delocalized and localized regimes ruled by aperiodic inhomogeneity, with smaller  $\nu$  values suggesting to favor delocalized quantum walks.

( $\nu = 0.0$ ) and distinct values of  $\nu$ , the same configurations used in fig. 1 and 2 of the main text. Furthermore, we also show results for  $\theta_0 = \pi/6$  and  $\theta_0 = \pi/3$ . Corroborating the results reported in ref. [1], we observe in fig. 1 a domain of delocalized regime for systems ruled by Hadamard coins homogeneously distributed ( $\nu = 0.0$ ). Meanwhile, in agreement with main text, the localized behavior described for  $\theta_0 = \pi/4$  with  $\nu = 1.0$  demonstrates the predominant scenario between all computed initial conditions. We also observe the predominance of delocalized behavior for systems governed by  $\theta_0 = \pi/2$  with  $\nu = 0.05$ , while a localized behavior describes an absence of spreading for  $\nu = 0.0$ . By comparing both descriptions with the fig. 2 of the main text, we observe an indication that the phenomenology presented in the main text extends to different initial conditions. The results also suggest that small values of  $\nu$  favor delocalized quantum walks, while the opposite behavior appears to higher values of  $\nu$ .

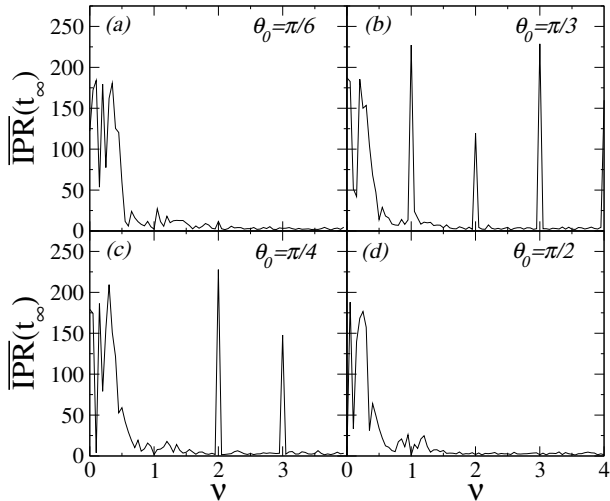


FIG. 2. (Color on-line) Long-time average of the inversal participation ratio ( $\langle \overline{\text{IPR}}(t_\infty) \rangle$ ) versus  $\nu$ , for  $\theta_0 = \pi/6, \pi/4, \pi/3$  and  $\pi/2$ . Corroborating the the main text, the results suggests delocalized (localized) quantum walks predominantly found for  $\nu < 0.5$  ( $\nu > 0.5$ ).

Aiming to offer a more broader characterization, we achieve a complementary analysis by computing the long-time average for both the inversal participation ratio (defined above) and the survival probability, defined by

$$\text{SP}(t) = \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} |\langle n | \otimes \langle \sigma | \psi(t) \rangle|^2 \Big|_{n=n_0}. \quad (3)$$

In fig.2 we show long-time average of the inversal participation ratio ( $\langle \overline{\text{IPR}}(t_\infty) \rangle$ ) versus  $\nu$  for (a)  $\theta_0 = \pi/6$ , (b)  $\theta_0 = \pi/3$ , (c)  $\theta_0 = \pi/4$  and (d)  $\theta_0 = \pi/2$ . In general lines, we observe the behavior described by all quantum coins as quite similar. For the smaller  $\nu$  values we observe  $\langle \overline{\text{IPR}}(t_\infty) \rangle$  predominantly high, which suggests that the most of intial conditions of the quantum walker exhibits a delocalized behavior. On the other hand, the localized nature is predominant for higher  $\nu$  values, where  $\langle \overline{\text{IPR}}(t_\infty) \rangle$  exhibits values very close to the unit. In good agreement with the case where the walker's initial state is given by  $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |n_0\rangle$  (see main text), the translational symmetry on the inhomogeneity (recovered for  $\nu \in \mathbb{Z}^*$ ) shows to be an aspect favorable the delocalized quantum walks.

The above description is corroborated by analyzing the long-time average of the survival probability ( $\langle \overline{\text{SP}}(t_\infty) \rangle$ ), exhibited in fig.3. Besides the average probability of the walker returning to the initial position ( $n = n_0$  in eq. 3), we also show the average probability of finding the walker around the initial position ( $n = n_0, n_0 \pm 1$  in eq. 3), identified by top/red data. While we observe  $\langle \overline{\text{SP}}(t_\infty) \rangle \rightarrow 0$  for  $\nu < 0.5$ , high values of the survival probability reinforce the predominance of localized nature for  $\nu > 0.5$ . Thus, by comparing these aspects with the description exhibited in main text, we note that the predictions made for

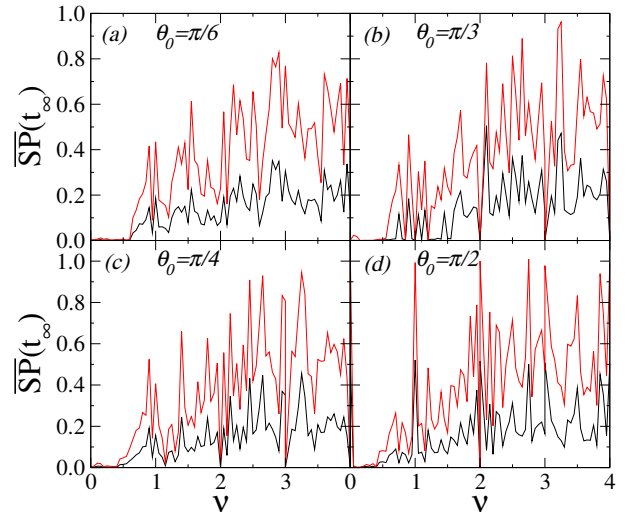


FIG. 3. (Color on-line) Long-time average of the survival probability ( $\langle \overline{\text{SP}}(t_\infty) \rangle$ ) versus  $\nu$ , for  $\theta_0 = \pi/6, \pi/4, \pi/3$  and  $\pi/2$ . We display for  $\langle \overline{\text{SP}}(t_\infty) \rangle$  the average probability of the walker returns to the initial (bottom/black) and around the initial position (top/red) - see descripton in text. Just as in the main text, delocalized (localized) quantum walks are predominant for  $\nu < 0.5$  ( $\nu > 0.5$ ).

$|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |n_0\rangle$  are also valid for most of the quantum walker's initial configurations.

### A. Entanglement properties

Besides the transport properties, we also investigate the role played the by the initial coin state of the quantum walker on the entanglement properties. As described before, we follow the time evolution of quantum walker in order to obtain an average behavior over the 2592 initial conditions based on eq. 1. Just as in the main text, the entanglement between the coin state and the particle position has been investigated by computing the von Neumann entropy of the reduced density matrix given by [1–5]

$$S_E(t) = -\text{Tr} [\rho_c(t) \log_2 \rho_c(t)] \quad (4)$$

where  $\rho_c$  is the reduced density matrix obtained by tracing over the position degree of freedom the full density matrix  $\rho = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$  of the quantum walk system. As described in main text,  $S_E(t) \in [0, 1]$ , in which separable states (not entangled) give  $S_E = 0$  and maximally entangled states provide  $S_E = 1$ .

Here, we start by computing the time evolution of von Neumann entropy  $\overline{S}_E(t)$  for (a)  $\theta_0 = \pi/6$ , (b)  $\theta_0 = \pi/3$ , (c)  $\theta_0 = \pi/4$  and (d)  $\theta_0 = \pi/2$ . For all, we use homogeneous ( $\nu = 0.0$ ) and inhomogeneous systems with  $\nu = 0.05, 2.5$ . It is observed for all scenarios (see fig. 4)

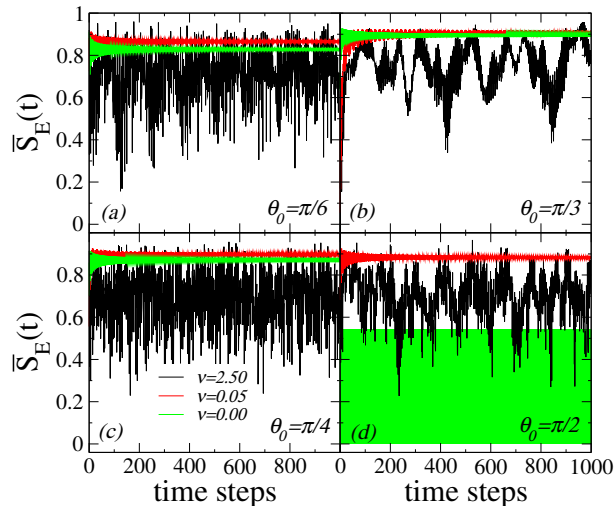


FIG. 4. (Color on-line) Time evolution of average entanglement (von Neumann entropy) for (a)  $\theta_0 = \pi/6$ , (b)  $\theta_0 = \pi/3$ , (c)  $\theta_0 = \pi/4$  and (d)  $\theta_0 = \pi/2$ . For all we use homogeneous ( $\nu = 0.0$ ) and inhomogeneous systems with  $\nu = 0.05, 2.5$ . We observed an increasing of entanglement power induced by inhomogeneity ruled by  $\nu = 0.05$ , which suggests this ability as predominant for smaller values of  $\nu$ , except for  $\theta_0 = \pi/2$ , since reference value for the average entanglement (established by homogeneous systems) is very small.

the static inhomogeneity as able to increase the coin-position entanglement, as compared to the entanglement without spatial inhomogeneity (i.e  $\nu = 0.0$ ). Furthermore, the results suggest an enhancement in the entanglement power being predominantly found for the smaller values of  $\nu$ , which corroborates the predictions made for  $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |n_0\rangle$  in the main text.

In order to better understand this phenomenology, we offer a more broader characterization by computing the long-time average of the entanglement ( $\langle \overline{S_E(t_\infty)} \rangle$ ) versus  $\nu$ , for the same configurations used before (i.e  $\theta_0 = \pi/6, \pi/4, \pi/3$  and  $\pi/2$ ). We establish reference by showing dashed lines that describe the  $\langle \overline{S_E(t_\infty)} \rangle$  for the respective homogeneous system. By observing the fig. 5,

note many configurations of inhomogeneity exhibiting an enhancement on the entanglement power. In good agreement with the predictions made for  $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |n_0\rangle$  in the main text, this configurations are predominantly found for the smaller values of  $\nu$ . The similarity of these data to those shown in fig. 10 of the main text, as well as the above descriptions, makes us believe that the great majority of initial conditions of the quantum walker exhibit the same phenomenology described in detail (see main text) for quantum walkers whose initial state is described by  $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |n_0\rangle$ .

These results provide new information about the entanglement between the coin state and the particle position, by considering that until now the static inhomogeneity exhibits the worst results in terms of entanglement generation. As reported in references [1, 2], the static inhomogeneity almost always reduces the entanglement when comparing with the homogeneous case.

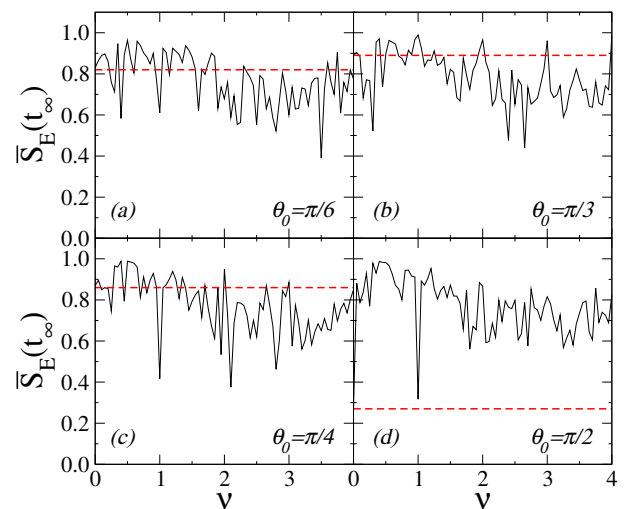


FIG. 5. (Color on-line) long-time average of the entanglement ( $\overline{S_E(t)}$ ) versus  $\nu$ , for  $\theta_0 = \pi/6, \pi/4, \pi/3$  and  $\pi/2$ . Dashed lines describe the respective  $\langle S_E(t_\infty) \rangle$  in homogeneous systems. Just as in the main text, we observe many configurations of inhomogeneity in which there is an enhancement in the entanglement power, being predominantly found for the smaller values of  $\nu$ .

[1] Vieira, R., Amorim, E. P. M., and Rigolin, G. *Physical Review A* **89**, 042307 (2014).  
 [2] Zeng, M. and Yong, E. H. *Scientific Reports* **7**, 12024 (2017).  
 [3] Nielsen, M. A. and Chuan, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press,

(2000).  
 [4] Vieira, R., Amorim, E. P. M., and Rigolin, G. *Physical Review Letters* **111**, 180503 (2013).  
 [5] Jr., A. C. O. and Amorim, E. P. M. *Quantum Information Processing* **16**(224) (2017).

*B***Self-trapped quantum walks**

## Self-trapped quantum walks

A. R. C. Buarque  and W. S. Dias*Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas, 57072-900 Maceió, Alagoas, Brazil*

(Received 22 October 2019; accepted 10 January 2020; published 4 February 2020)

We study the existence and characterization of self-trapping phenomena in discrete-time quantum walks. By considering a Kerr-like nonlinearity, we associate an acquisition of the intensity-dependent phase with the walker while it propagates on the lattice. Adjusting the nonlinear parameter  $\chi$  and the quantum gates  $\theta$ , we will show the existence of different quantum walking regimes, including those with traveling solitonlike structures or localized by self-trapping. The latter scenario is absent for quantum gates close enough to the Pauli- $X$  gate. It appears for intermediate configurations and becomes predominant as quantum gates get closer to the Pauli- $Z$  gate. By using  $\chi$  versus  $\theta$  diagrams, we will show that the threshold between quantum walks with delocalized or localized regimes exhibits an unusual aspect in which an increment of the nonlinear strength can induce the system to transition from a localized to a delocalized regime.

DOI: [10.1103/PhysRevA.101.023802](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.101.023802)

### I. INTRODUCTION

Quantum-mechanical systems in which the effective evolution is governed by a nonlinear equation are present in many branches of science such as optics [1–3], biology [4,5], Bose-Einstein condensates [6–8], and solid-state physics [9–12]. In optical media, for example, nonlinearity arises from field-induced changes in the refractive index of the propagation medium [1–3], while for Bose-Einstein condensates the nonlinearity is related to interatomic interactions [6–8]. Nonlinearity also appears as a result of lattice vibrations in the dynamic description of elementary excitations [4,5,9–12].

Among the most interesting subjects related to nonlinearity are the self-trapping states. When associated with delocalized modes, initial excitations display as a signature propagation without spreading (shape preserving), due to a balance between nonlinearity and linear correlation (dispersion, diffraction, and diffusion) effects [1,3–5,7–20]. However, the absence of propagation is also a remarkable effect of self-trapping states. In this case, an initial excitation is induced to trapping, with a significant time-averaged probability of finding it in a finite region of the system when the nonlinear coupling is above a threshold value [21–29].

Both scenarios have been widely studied in different areas. In the context of optical fibers, for example, the employment of solitonlike features for optical communications has been studied [13–16]. Soliton and solitonlike structures have also been reported as underlying mechanisms of charge carrier transport of conducting polymers [11,12,18–20]. Self-trapped vortex beams azimuthally stable at moderate values of the input intensity have been reported, in which the saturation of the refractive nonlinearity and the instability-suppressing effect of the three-photon absorption display a fundamental role [24]. Driven-dissipative Bose-Einstein condensates (BECs) in a two-mode Josephson system have been used to obtain the alternating current Josephson effect with magnons as well as macroscopic quantum self-trapping in a magnon BEC [28].

Although nonlinear aspects have been reported in the context of discrete-time quantum walks (DTQWs), a full understanding of the phenomenology is still distant. One of the earliest studies that reported a nonlinear self-phase modulation on the wave function during the walker evolution showed the formation of nondispersive pulses [30]. An anomalous slow diffusion has been reported for a nonlinear quantum walk in which the coin operator depends on the coin states of the nearest-neighbor sites [31]. The dynamics of a nonlinear Dirac particle has been simulated by using a nonlinear quantum walk, with a description of solitonic behavior and the collisional phenomena between them [32]. By using DTQWs which combine zero modes with a particle-conserving nonlinear relaxation mechanism, a conversion of two zero modes of opposite chirality into an attractor-repeller pair of nonlinear dynamics was reported [33]. By investigating the effect of nonlinear spatial disorder on the edge states at the interface between two topologically different regions, the preservation of the ballistic propagation of the walker has been described even for very strong nonlinear couplings [34]. Nonlinear effects on the quantum walks ruled by Pauli- $X$  gates homogeneously distributed have revealed the existence a set of stationary and moving breathers with almost compact superexponential spatial tails [35]. Disordered nonlinear DTQWs were used to confirm that the subdiffusive spreading of wave packets (well known in Gross-Pitaevskii lattices) persists over an additional four decades, which suggests that this subdiffusive behavior is universal [36]. Cross Kerr nonlinearity and orbital angular momentum have been used as two distinct degrees of freedom in the position space in order to propose a scheme able to perform infinite steps of two-dimensional DTQWs [37].

A quantum walk is known to be usually faster than its classical counterpart due to coherent superposition and quantum interference [38,39]. This feature makes it a versatile tool for the realization of quantum algorithms and quantum simulation [39–41]. In this context, the number of studies on quantum computation based on optics is growing, in which

the left and right polarization states of a single photon make up a natural computational basis of qubits. Thus, motivated by the wide nonlinear phenomenology in optical systems, we investigate the dynamics of quantum walkers in nonlinear DTQWs. Different from nonlinear feedforward DTQWs [31], we associate the acquisition of the intensity-dependent phase with the walker while it propagates on the lattice. This nonlinear phase, together with each of the spinor components, may be the result of a Kerr-like optical medium in the optical paths. With the nonlinearity described by adding an operator to the standard protocol of DTQWs [30,42], we study the transport properties by exploring typical quantities such as the inverse participation ratio, the survival probability, and the wavefunction profile. Keeping in mind Ref. [30], which presented a preliminary study restricted to Hadamard's quantum gates only, we explore the adjustment of the nonlinear parameter and quantum gates to show the existence of different quantum walking regimes, including those with traveling solitonlike structures or localized by self-trapping. In the latter, the dispersive mode is fully suppressed by nonlinearity, making the walker strongly trapped in the initial position, developing a breathing mode. This scenario is absent for quantum gates close enough to the Pauli-X gate. It appears for intermediate configurations and becomes predominant as quantum gates get closer to the Pauli-Z gate. The threshold between quantum walks with delocalized or localized regimes exhibits an unusual aspect in which an increment of the nonlinear strength can induce the transition of the system from a localized to a delocalized regime.

## II. MODEL

In this work we deal with a quantum walker moving in an infinite one-dimensional nonlinear lattice of interconnected sites. The walker consists of a qubit whose internal degree of freedom (spin or polarization) determines the direction of movement in discrete steps. Thus, the quantum walker state  $|\psi\rangle$  belongs to a Hilbert space  $H = H_c \otimes H_p$ , where  $H_c$  is a complex vector space of dimension 2 associated with the internal degree of freedom of the qubit and  $H_p$  denotes a countably-infinite-dimensional space associated with lattice sites. We describe the internal degree of freedom spanned by orthonormal basis  $\{|R\rangle = (1, 0)^T, |L\rangle = (0, 1)^T\}$ , where the superscript denote transpose, in Hilbert space  $H_c$ . The position space  $H_p$  is spanned by the orthonormal basis  $\{|n\rangle : n \in \mathbb{Z}\}$ , with  $n$  ranging from  $n = 1$  to  $N$ . Thus, a general state in the  $t$ th time step can be given as

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n [a(n, t)|R\rangle + b(n, t)|L\rangle] \otimes |n\rangle, \quad (1)$$

so the normalization condition  $\sum_n [|a(n, t)|^2 + |b(n, t)|^2] = 1$  is satisfied.

In general, the dynamical evolution of a discrete-time quantum walk is governed by the unitary transformation  $|\psi(t)\rangle = \hat{U}^t |\psi(t-1)\rangle$ , where  $\hat{U}^t = \hat{S}(\hat{C} \otimes I_p)$ , with  $I_p$  the identity operator in the space of positions. The conditional shift operator has the form

$$\hat{S} = S_+ \otimes |R\rangle\langle R| + S_- \otimes |L\rangle\langle L|, \quad (2)$$

where  $S_{\pm} = \sum_{n=1}^N |n \pm 1\rangle\langle n|$ , while  $\hat{C}$  (well known as a quantum coin) is an arbitrary SU(2) unitary operator given by

$$\hat{C} = \sum_n [c_{R,R}|R\rangle + c_{L,R}|L\rangle]\langle R| + [c_{R,L}|R\rangle - c_{L,L}|L\rangle]\langle L| \otimes |n\rangle\langle n|, \quad (3)$$

with  $c_{R,R} = c_{L,L} = \cos(\theta)$  and  $c_{R,L} = c_{L,R} = \sin(\theta)$ . The parameter  $\theta \in [0, 2\pi]$  controls the variance of the probability distribution of the walk [43].

Here, in order to introduce the nonlinearity, we add to the dynamical evolution protocol one more operator that describes the acquisition of an intensity-dependent (nonlinear) phase by each of the spinor components [30]. Thus,  $\hat{U}^t = \hat{S}(\hat{C} \otimes I_p)\hat{U}_{NL}^{t-1}$ , where  $\hat{U}_{NL}$  is given by

$$\begin{aligned} \hat{U}_{NL}^t &= \sum_{s=R,L} \sum_n e^{iG^t(n,s)} |s\rangle\langle s| \otimes |n\rangle\langle n| \\ &= \sum_n (e^{iG^t(n,R)} |R\rangle\langle R| + e^{iG^t(n,L)} |L\rangle\langle L|) \otimes |n\rangle\langle n|. \end{aligned} \quad (4)$$

Here  $G^t(n, s)$  is an arbitrary function of the probabilities, depending on the internal degree of freedom (coin state) and the lattice site (spatial state).

We consider the experimental implementation feasible by inserting nonlinear optical media into optical setups able to describe DTQWs, such as a linear cavity [44], optical rings [45–47], a Michelson interferometer [48], or optical lattices [49]. By considering a Kerr-like nonlinearity, we set  $G^t(n, s) = 2\pi\chi|\psi_{n,s}^t|^2$ , in which  $\chi$  describes the nonlinear strength of the medium and the linear discrete-time quantum walk can be recovered by setting  $\chi = 0$ . By using the time-evolution protocol  $|\psi(t)\rangle = \hat{U}^t |\psi(t-1)\rangle$  we can derive the recursive evolution equations for the probability amplitudes

$$\begin{aligned} \psi_{n,R}^{t+1} &= c_{R,R} e^{i2\pi\chi|\psi_{n+1,R}^t|^2} \psi_{n+1,R}^t + c_{R,L} e^{i2\pi\chi|\psi_{n+1,L}^t|^2} \psi_{n+1,L}^t, \\ \psi_{n,L}^{t+1} &= c_{L,R} e^{i2\pi\chi|\psi_{n-1,R}^t|^2} \psi_{n-1,R}^t - c_{L,L} e^{i2\pi\chi|\psi_{n-1,L}^t|^2} \psi_{n-1,L}^t. \end{aligned} \quad (5)$$

Thus, the state of the quantum particle in the  $t$ th time step is given by the two-component wave function  $\{\psi_{n,R}^t, \psi_{n,L}^t\}$ , where  $\psi_{n,R}^t$  and  $\psi_{n,L}^t$  are the probability amplitudes of obtaining the states  $|R\rangle$  and  $|L\rangle$  at position  $n$  and time step  $t$ , respectively. We consider throughout the analysis open chains as the boundary condition, in which the initial position  $n_0$  of the quantum walker is located in the central site of the lattice. We emphasize that the lattice sizes are large enough so that the wave function does not reach the edges over the time course described.

## III. RESULTS AND DISCUSSION

We start following the time evolution of the probability density distribution  $|\psi_n(t)|^2$  for some representative values of the nonlinear parameter  $\chi$ . With the initial state of the walker adjusted as a superposition of left- and right-handed circular polarization  $|\Psi(0)\rangle = 1/\sqrt{2}(|R\rangle + i|L\rangle) \otimes |n_0\rangle$ , we show in Fig. 1 the dynamics described in chains ruled by quantum gates  $\theta = \pi/4$  [Figs. 1(a)–1(d)] and  $\theta = \pi/3$  [Figs. 1(e)–1(h)] homogeneously distributed. As expected, in the absence of nonlinearity ( $\chi = 0.0$ ) both quantum gates induce a spread of the probability distribution through the lattice, exhibiting

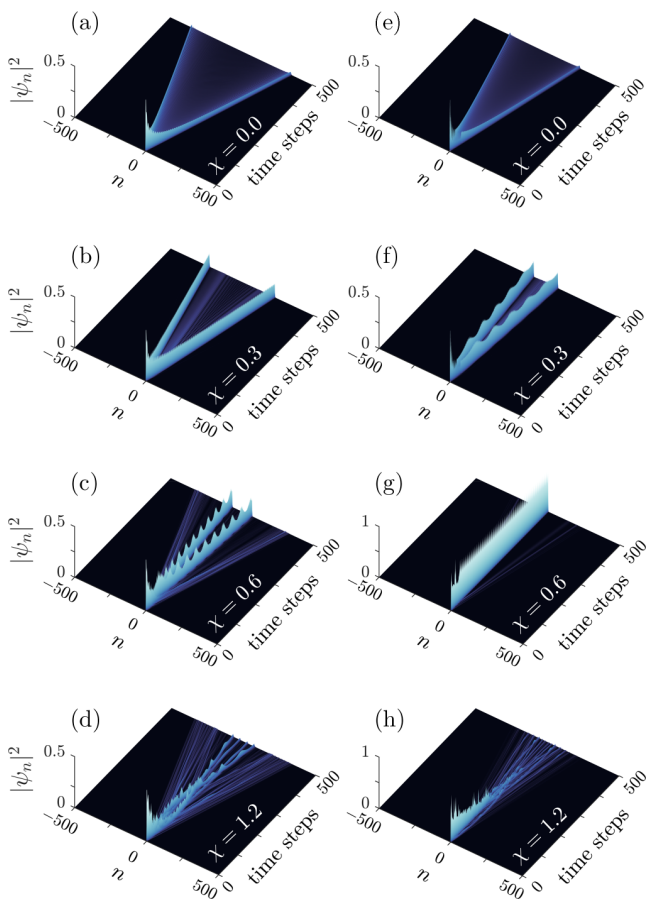


FIG. 1. Time evolution of the density of probability in position space of a quantum walker on chains composed of quantum gates (a)–(d)  $\theta = \pi/4$  and (e)–(h)  $\theta = \pi/3$  homogeneously distributed. Both quantum gates exhibit traveling solitonlike structures in the presence of nonlinearity, whose velocity decreases as the nonlinear parameter  $\chi$  increases. Although both scenarios culminate in a scenario of collisions with inelastic scattering for sufficiently strong nonlinearities, a self-trapped quantum walk emerges only for  $\theta = \pi/3$ , which suggests a phenomenology with gate dependence.

two peaks at the borders of the distribution, whose maximum value monotonically decreases with time. However, this scenario is heavily altered as  $\chi$  grows. For  $\chi = 0.3$ , we observe the probability distribution predominantly concentrated at a few lattice positions, by establishing two mobile peaks whose size and shape remain approximately constant in time, except for small oscillations around a mean value. Traveling self-trapped states are consistent with the observation of solitonlike structures described in Ref. [30] and also have been reported in other systems [17,50]. The results of Hadamard quantum gates ( $\theta = \pi/4$ ) suggest that the velocity of the solitonlike formations decreases as  $\chi$  increases in such way that, for sufficiently strong nonlinearities, a scenario of collisions with inelastic scattering arises. However, as we increase the nonlinear parameter for the system ruled by  $\theta = \pi/3$ , a different behavior is observed. For  $\chi = 0.6$  the probability distribution remains predominantly trapped around the initial position, i.e., a stationary self-trapped quantum walk. Furthermore, contrary to expectation, the concentration of the

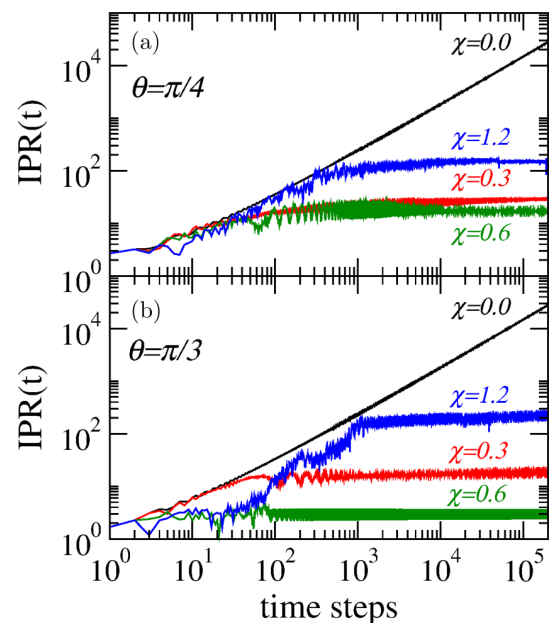


FIG. 2. Time evolution of the inverse participation ratio for the same configurations used in Fig. 1. We observe the  $IPR(t)$  recovering relevant aspects reported before, from the standard quantum walk ( $\chi = 0$ ) to the self-trapped quantum walk ( $\theta = \pi/3$  with  $\chi = 0.6$ ).

walker around the initial position does not grow as  $\chi$  increases. Just like  $\theta = \pi/4$ , collisions with inelastic scattering arise for sufficiently strong nonlinearities.

In order to better characterize the previous results we compute the inverse participation ratio

$$IPR(t) = \frac{1}{\sum_n |\psi_n(t)|^4}, \quad (6)$$

which gives the estimated number of lattice sites over which the wave packet is spread at time  $t$ . Thus, in Fig. 2 we use the same configurations shown in Fig. 1, with Figs. 2(a) and 2(b) describing the systems ruled by quantum coins  $\theta = \pi/4$  and  $\theta = \pi/3$ , respectively. We see that  $IPR(t)$  recovers relevant aspects reported before. While the spread of the quantum walker is described by  $IPR(t)$  growing over time in the absence of nonlinearity, the dynamics involving solitonlike structures (for  $\chi = 0.3, 0.6, 1.2$ ) is described by  $IPR(t)$  approximately constant after an initial transient. The lower inverse participation ratio for  $\theta = \pi/3$  and  $\chi = 0.6$  corroborates the localization induced by self-trapping phenomena described above. On the other hand, multiple collisions between solitonlike structures induce a walker scattering, which explains the behavior of  $\chi = 1.2$ .

We achieve a complementary analysis by computing the survival probability

$$SP(t) = \sum_{s=R,L} |\langle n | \otimes \langle s | \psi(t) \rangle|^2 \Big|_{n=n_0}. \quad (7)$$

This quantity describes the probability of the walker being found at the starting position at time  $t$ . In the long-time regime the survival probability saturates at a finite value for



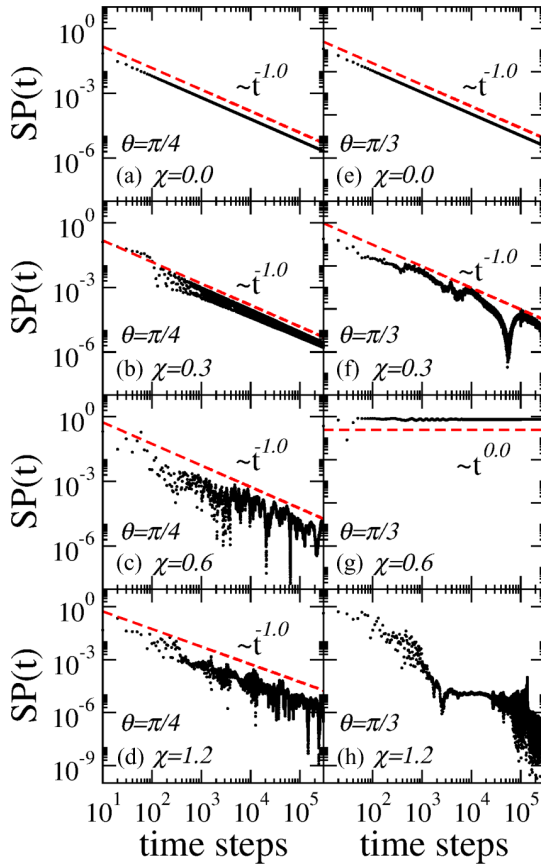


FIG. 3. Time evolution of the survival probability for the same configurations used in Fig. 1. We observe the  $SP(t)$  confirming all aspects reported before. The scaling behavior  $SP(t) \sim t^{-1}$ , which is well defined for almost all configurations, gives way to  $SP(t) \sim t^0$  for  $\theta = \pi/3$  with  $\chi = 0.6$ , which corroborates a self-trapped quantum walk.

a localized quantum walk, while  $SP(t) \rightarrow 0$  means that the walker is escaping from its initial location.

In Fig. 3 we show the time evolution of  $SP(t)$  for the same configurations used before, with Figs. 3(a)–3(d) [Figs. 3(e)–3(h)] giving  $\theta = \pi/4$  ( $\theta = \pi/3$ ). In the absence of nonlinearity, the spreading of the walker on the lattice is described by a scaling behavior  $SP(t) \sim t^{-1}$ , which is in full agreement with an explicit expression in Ref. [51]. We also observe this scaling behavior for  $\theta = \pi/4$  and  $\chi = 0.3, 0.6, 1.2$ , which is consistent with solitonlike modes traveling through the lattice, i.e., the absence of the walker localization. On the other hand, for  $\theta = \pi/3$  another pattern is revealed: For  $\chi = 0.6$  we have  $SP(t) \sim t^0$  after an initial transient, which describes the walker remaining localized around its initial position. In agreement with Fig. 2,  $SP(t)$  close to unity for  $\chi = 0.6$  [see Fig. 3(g)] reinforces the idea of stationary trapping. In addition,  $SP(t)$  decreasing for  $\chi = 1.2$  confirms the absence of walker localization at the initial site after a long time evolution. The roughness in  $SP(t)$  data suggests destructive interferences of solitonlike structures as time evolves.

Previous results suggest the regime of localized self-trapped quantum walks as gate dependent, i.e., restricted to some configurations of quantum gates. This behavior is

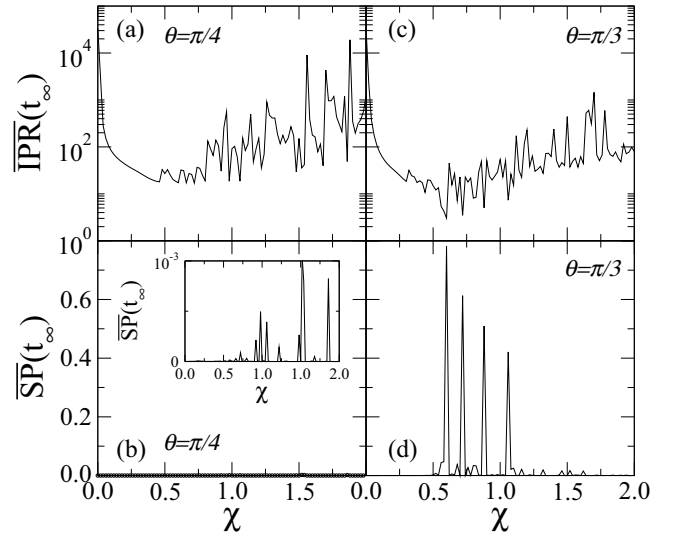


FIG. 4. Long-time average of the inverse participation ratio and survival probability versus the nonlinear parameter  $\chi$  for quantum gates  $\theta = \pi/4$  and  $\theta = \pi/3$ . Both quantities agree with the existence of traveling solitonlike structures for sufficiently small nonlinearities and with a chaoticlike regime for sufficiently strong nonlinearities. However, the emergence of  $\chi$  settings for  $\theta = \pi/3$  in which  $\overline{IPR}(t_\infty)$  and  $\overline{SP}(t_\infty)$  are close to unity corroborates the quantum walker localization by self-trapping, as well as its gate dependence.

consistent with the dispersive character associated with the distribution of quantum gates on the lattice [52], since the emergence and dynamics of solitonlike structures are associated with balancing between nonlinearity and linear correlation (dispersion, diffraction, and diffusion) effects [1,3–5,7–20]. In order to provide a broader and accurate description, we explore the asymptotic regime of  $\overline{IPR}(t)$  and  $\overline{SP}(t)$  for distinct  $\theta$  settings. We keep considering infinite lattices, but now we compute the average of both quantities around  $10^4$  time steps, identified by  $\overline{IPR}(t_\infty)$  and  $\overline{SP}(t_\infty)$ . In Fig. 4 we explore  $\theta = \pi/4$  and  $\theta = \pi/3$  for a range of the nonlinear parameter  $\chi$  between 0 and 2. For the early stage of nonlinearity, both  $\overline{IPR}(t_\infty)$  and  $\overline{SP}(t_\infty)$  suggest delocalized quantum walks in which the walker spreads out on the lattice. Mobile solitonlike structures arise as  $\chi$  grows, described by the decrease in  $\overline{IPR}(t_\infty)$  and  $\overline{SP}(t_\infty) \sim 0$ . The emergence of  $\chi$  settings for  $\theta = \pi/3$  in which  $\overline{IPR}(t_\infty)$  and  $\overline{SP}(t_\infty)$  are close to unity, corroborates the quantum walker localization by self-trapping, as well as its gate dependence. For sufficiently strong nonlinearities, a chaoticlike regime has been found not only for  $\theta = \pi/4$  [30], but also for  $\theta = \pi/3$ . Here the walker dynamics becomes extremely sensitive to small variations of the nonlinear parameter. This regime comprises quantum walks with delocalized solitonlike structures (where modes are continuously moving apart) and solitonlike dynamics with multiple modes and collisions. This chaoticlike behavior has been shown in other nonlinear systems [17,50].

For Fig. 5 we extend our numerical experiments in order to offer  $\chi$  versus  $\theta$  diagrams. In Fig. 5(a) we consider the maximal IPR between collected data in order to plot on the vertical axis a normalized  $\overline{IPR}(t_\infty)$ . For Fig. 5(b) we compute the  $\overline{SP}(t_\infty)$  as before. The initial state of the walker is again

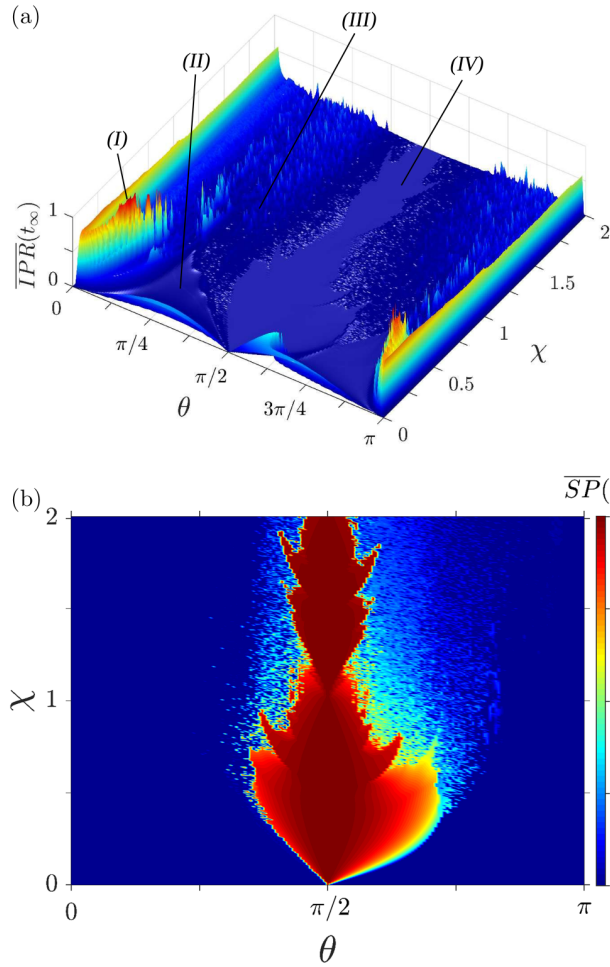


FIG. 5. Plot of  $\chi$  versus  $\theta$  for the long-time average of the inverse participation ratio and the survival probability. The initial state of the walker is again described as a superposition of left- and right-handed circular polarization, i.e.,  $|\Psi(0)\rangle = 1/\sqrt{2}(|R\rangle + i|L\rangle) \otimes |n_0\rangle$ , with the initial position  $n_0$  of the quantum walker located at the central site of the lattice. We note the absence of trapped structures for sufficiently small  $\theta$  values, even for a strong nonlinear parameter (I). As we increase  $\theta$  toward  $\pi/2$ , different scenarios emerge as we change the  $\chi$  value: (II) solitonlike structures propagating through the lattice, (III) a chaoticlike regime, and (IV) stationary self-trapped quantum walks.

described as a superposition of left- and right-handed circular polarization, i.e.,  $|\Psi(0)\rangle = 1/\sqrt{2}(|R\rangle + i|L\rangle) \otimes |n_0\rangle$ , with the initial position  $n_0$  of the quantum walker located in the central site of the lattice. By simultaneously exploring both diagrams, we note the absence of trapped structures for sufficiently small  $\theta$  values, even for a strong nonlinear parameter. In this regime (I), the dispersive character is predominant, with a small contribution from the interference terms of the  $\hat{C}$  matrix. Moreover, in this regime, the increase of  $\overline{\text{IPR}}(t_\infty)$  suggests the nonlinearity as a mechanism able to increase the spread of the walker. However, this behavior is not related to the spreading velocity, but rather to the wave-function distribution, which now exhibits a more uniform profile than the one presented in the absence of nonlinearity. The wavefronts exhibit aspects close to a solitonlike structure, but decrease slowly with time.

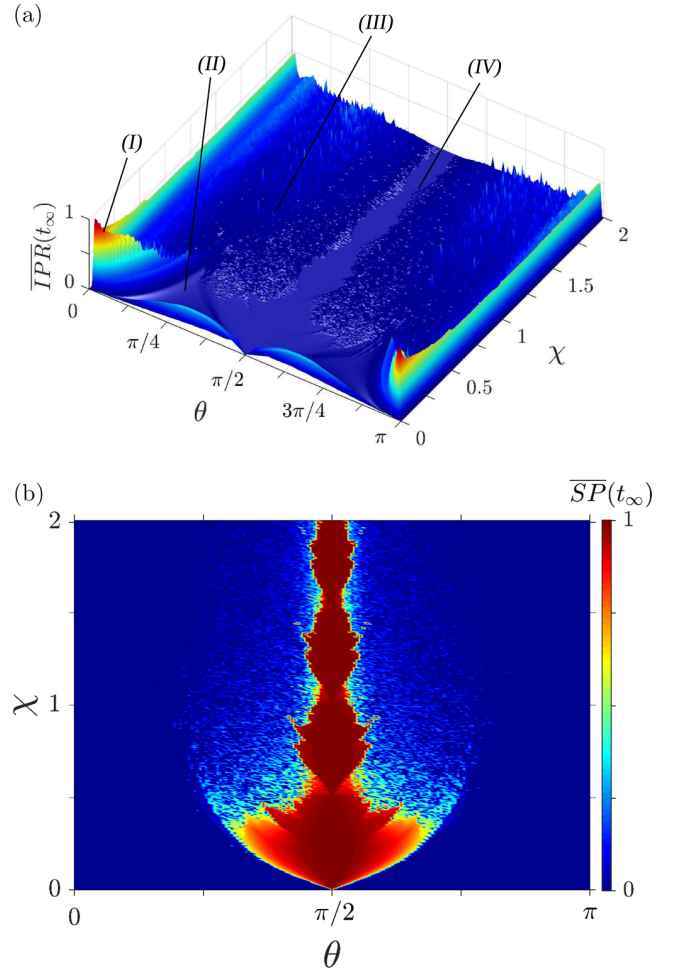


FIG. 6. Plot of  $\chi$  versus  $\theta$  for the long-time average of the inverse participation ratio and the survival probability. The initial state of the walker now is given by  $|\Psi(0)\rangle = |R\rangle \otimes |n_0\rangle$ , with the initial position  $n_0$  of the quantum walker located at the central site of the lattice. In general, the phenomenology is homologous to behavior described by the initial state  $|\Psi(0)\rangle = 1/\sqrt{2}(|R\rangle + i|L\rangle) \otimes |n_0\rangle$ . However, we observe now a symmetric profile around  $\theta = \pi/2$  and the regime of stationary self-trapped quantum walks is even more concentrated around  $\theta = \pi/2$ .

As we increase  $\theta$  toward  $\pi/2$ , different scenarios emerge as we change the  $\chi$  value. For  $\chi$  sufficiently small, the normalized  $\overline{\text{IPR}}(t_\infty) \sim 0$  with  $\overline{\text{SP}}(t_\infty) \sim 0$  is consistent with the existence of solitonlike structures propagating through the lattice (II). As described before (see Fig. 4), the increase of  $\chi$  promotes a regime in which the evolution of the solitons becomes extremely sensitive to small variations of the nonlinear parameter (III). This behavior is found for high enough  $\chi$  values and is described by fluctuations of the normalized  $\overline{\text{IPR}}(t_\infty)$  and  $\overline{\text{SP}}(t_\infty)$ . Stationary self-trapped quantum walks (IV) become evident as we observe the normalized  $\overline{\text{IPR}}(t_\infty) \sim 0$  and  $\overline{\text{SP}}(t_\infty) \sim 1$ . Both diagrams confirm that, once within a stationary self-trapped regime, an increment of  $\chi$  does not mean an increase of the localization degree. Thus, the threshold between delocalized and localized regimes exhibits an unusual aspect. We also observe the stationary self-trapped

regime becoming predominant as  $\theta$  gets closer to Pauli-Z quantum gates ( $\theta = \pi/2$ ). In this configuration, whose energy spectrum of the two main bands resembles that of flat degenerate bands [52], the dynamics that transitions  $|R\rangle$  to  $|L\rangle$  and  $|L\rangle$  to  $|R\rangle$  is reinforced by the nonlinear (probability-dependent) phase.

A characteristic absent in the previous discussion is the asymmetric aspect of the normalized  $\overline{\text{IPR}}(t_\infty)$  and  $\overline{\text{SP}}(t_\infty)$  diagrams around Pauli-Z quantum gates. This behavior is associated with the complex component of the left-handed circular polarization of the initial state of the walker, which gives opposite signals for  $\theta < \pi/2$  and  $\theta > \pi/2$  for the dynamical evolution protocol due to acquisition of the intensity-dependent (nonlinear) phase described in Eq. (4). This statement becomes more evident when we show results obtained by employing the same methodology used earlier on the condition in which the initial state of the walker is given by  $|\Psi(0)\rangle = |R\rangle \otimes |n_0\rangle$  (see Fig. 6). In general, the phenomenology is homologous, with normalized  $\overline{\text{IPR}}(t_\infty)$  and  $\overline{\text{SP}}(t_\infty)$  diagrams exhibiting the same regimes, but with the symmetric profile around  $\theta = \pi/2$ . Now the regime of stationary self-trapped quantum walks is even more concentrated around  $\theta = \pi/2$ .

#### IV. CONCLUSION

In summary, we have studied the dynamics of quantum walkers in nonlinear DTQWs. By considering a Kerr-like nonlinearity, we associated the acquisition of an intensity-dependent phase with the walker while it propagates on the

lattice. With the nonlinear strength of the medium as an adjustable parameter, we explored the role of quantum gates in the emergence of mobile solitonlike structures and quantum walker dynamics, as well as the regime in which the quantum walker exhibits a localization induced by self-trapping. In the latter the dispersive mode is fully suppressed by nonlinearity, making the walker strongly trapped in the initial position, developing a breathing mode. The stationary self-trapped regime becomes predominant as  $\theta$  gets closer to Pauli-Z quantum gates. We also have shown that the threshold between delocalized and localized regimes exhibits an unusual aspect in which an increment of the nonlinear parameter can induce the transition of the system from a localized to a delocalized regime. To conclude, by considering that nonlinearity has attracted much attention in quantum information science [37,53–55], we hope that our work may impel further investigations on quantum walks in nonlinear optical media. From an experimental point of view, we consider optical systems as the most promising in the implementation of our study. We suggest the use of Kerr-like optical media in the optical paths of experimental settings able to exhibit optical DTQWs, such as in a linear cavity [44], optical rings [45–47], a Michelson interferometer [48], or optical lattices [49].

#### ACKNOWLEDGMENTS

This work was partially supported by CNPq (Brazilian National Council for Scientific and Technological Development), CAPES (Federal Brazilian Agency), and FAPEAL (Alagoas State Agency).

- 
- [1] D. Hennig and G. Tsironis, *Phys. Rep.* **307**, 333 (1999).
  - [2] M. Fleischhauer, A. Imamoglu, and J. P. Marangos, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 633 (2005).
  - [3] F. Lederer, G. I. Stegeman, D. N. Christodoulides, G. Assanto, M. Segev, and Y. Silberberg, *Phys. Rep.* **463**, 1 (2008).
  - [4] A. S. Davydov, *Solitons in Molecular Systems, Mathematics and Its Applications* (Springer Netherlands, Dordrecht, 1985).
  - [5] A. Scott, *Phys. Rep.* **217**, 1 (1992).
  - [6] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
  - [7] Y. V. Kartashov, B. A. Malomed, and L. Torner, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 247 (2011).
  - [8] O. Morsch and M. Oberthaler, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 179 (2006).
  - [9] T. D. Holstein, *Ann. Phys. (NY)* **8**, 325 (1959).
  - [10] T. D. Holstein, *Ann. Phys. (NY)* **8**, 343 (1959).
  - [11] W. P. Su, J. R. Schrieffer, and A. J. Heeger, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1698 (1979).
  - [12] A. J. Heeger, S. Kivelson, J. R. Schrieffer, and W. P. Su, *Rev. Mod. Phys.* **60**, 781 (1988).
  - [13] H. A. Haus and W. S. Wong, *Rev. Mod. Phys.* **68**, 423 (1996).
  - [14] V. I. Kruglov and J. D. Harvey, *Phys. Rev. A* **98**, 063811 (2018).
  - [15] A. Hause, C. Mahnke, and F. Mitschke, *Phys. Rev. A* **98**, 033814 (2018).
  - [16] T. J. Kippenberg, A. L. Gaeta, M. Lipson, and M. L. Gorodetsky, *Science* **361**, eaan8083 (2018).
  - [17] A. R. C. Buarque and W. S. Dias, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **63**, 365 (2018).
  - [18] A. J. Heeger, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 681 (2001).
  - [19] E. J. Meier, F. A. An, and B. Gadway, *Nat. Commun.* **7**, 5382 (2016).
  - [20] J. J. Liu, Z. J. Wei, Y. L. Zhang, Y. Meng, and B. Di, *J. Phys. Chem. B* **121**, 2366 (2017).
  - [21] R. Y. Chiao, E. Garmire, and C. H. Townes, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 479 (1964).
  - [22] S. F. Mingaleev and Y. S. Kivshar, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5474 (2001).
  - [23] Y. Chen, *Opt. Lett.* **16**, 4 (1991).
  - [24] A. S. Reyna, G. Boudebs, B. A. Malomed, and C. B. de Araújo, *Phys. Rev. A* **93**, 013840 (2016).
  - [25] M. A. Porras, *Opt. Express* **26**, 19606 (2018).
  - [26] C. A. Bustamante and M. I. Molina, *Phys. Rev. B* **62**, 15287 (2000).
  - [27] W. S. Dias, M. L. Lyra, and F. A. B. F. de Moura, *Phys. Rev. B* **82**, 233102 (2010).
  - [28] K. Nakata, K. A. van Hoogdalem, P. Simon, and D. Loss, *Phys. Rev. B* **90**, 144419 (2014).
  - [29] A. L. S. Pereira, M. L. Lyra, F. A. B. F. de Moura, A. R. Neto, and W. S. Dias, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **64**, 89 (2018).
  - [30] C. Navarrete-Benlloch, A. Pérez, and E. Roldán, *Phys. Rev. A* **75**, 062333 (2007).

- [31] Y. Shikano, T. Wada, and J. Horikawa, *Sci. Rep.* **4**, 4427 (2014).
- [32] C.-W. Lee, P. Kurzyński, and H. Nha, *Phys. Rev. A* **92**, 052336 (2015).
- [33] Y. Gerasimenko, B. Tarasinski, and C. W. J. Beenakker, *Phys. Rev. A* **93**, 022329 (2016).
- [34] A. D. Verga, *Eur. Phys. J. B* **90**, 41 (2017).
- [35] I. Vakulchyk, M. V. Fistul, Y. Zolotaryuk, and S. Flach, *Chaos* **28**, 123104 (2018).
- [36] I. Vakulchyk, M. V. Fistul, and S. Flach, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 040501 (2019).
- [37] W.-C. Gao, C. Cao, X.-F. Liu, T.-J. Wang, and C. Wang, *OSA Continuum* **2**, 1667 (2019).
- [38] Y. Aharonov, L. Davidovich, and N. Zagury, *Phys. Rev. A* **48**, 1687 (1993).
- [39] M. A. Nielsen and I. L. Chuan, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [40] N. Shenvi, J. Kempe, and K. B. Whaley, *Phys. Rev. A* **67**, 052307 (2003).
- [41] A. M. Childs, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 180501 (2009).
- [42] G. Di Molfetta, F. Debbasch, and M. Brachet, *Phys. Rev. E* **92**, 042923 (2015).
- [43] C. M. Chandrashekar, R. Srikanth, and S. Banerjee, *Phys. Rev. A* **76**, 022316 (2007).
- [44] P. L. Knight, E. Roldán, and J. E. Sipe, *Phys. Rev. A* **68**, 020301 (2003).
- [45] P. L. Knight, E. Roldán, and J. Sipe, *Opt. Commun.* **227**, 147 (2003).
- [46] P. L. Knight, E. Roldán, and J. Sipe, *Opt. Commun.* **232**, 443 (2004).
- [47] A. Schreiber, K. N. Cassemiro, V. Potoček, A. Gábris, P. J. Mosley, E. Andersson, I. Jex, and C. Silberhorn, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 050502 (2010).
- [48] D. Pandey, N. Satapathy, M. S. Meena, and H. Ramachandran, *Phys. Rev. A* **84**, 042322 (2011).
- [49] A. Crespi, R. Osellame, R. Ramponi, V. Giovannetti, R. Fazio, L. Sansoni, F. D. Nicola, F. Sciarrino, and P. Mataloni, *Nat. Photon.* **7**, 322 (2013).
- [50] P. K. Datta and A. M. Jayannavar, *Phys. Rev. B* **58**, 8170 (1998).
- [51] X.-P. Xua, *Eur. Phys. J. B* **77**, 479 (2010).
- [52] A. R. C. Buarque and W. S. Dias, *Phys. Rev. E* **100**, 032106 (2019).
- [53] J. H. Shapiro, *Phys. Rev. A* **73**, 062305 (2006).
- [54] D. J. Brod and J. Combes, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 080502 (2016).
- [55] A. Nysteen, D. P. S. McCutcheon, M. Heuck, J. Mørk, and D. R. Englund, *Phys. Rev. A* **95**, 062304 (2017).



**Probing coherence and noise tolerance in discrete-time  
quantum walks: Unveiling self-focusing and breathing  
dynamics**

## Probing coherence and noise tolerance in discrete-time quantum walks: Unveiling self-focusing and breathing dynamics

A. R. C. Buarque  and W. S. Dias *Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas, 57072-900 Maceió, Alagoas, Brazil*

(Received 28 October 2020; accepted 30 March 2021; published 16 April 2021)

The sensitivity of quantum systems to external disturbances is a fundamental problem for the implementation of functional quantum devices, quantum information, and computation. Based on remarkable experimental progress in optics and ultracold gases, we study the consequences of a short-time (instantaneous) noise while an intensity-dependent phase acquisition is associated with a qubit propagating on an  $N$  cycle. By employing quantum coherence measures, we report emerging unstable regimes in which quantum walks arise, such as self-focusing and breathing dynamics. Our numerical and analytical results unveil appropriate settings which favor the stable regime, with the asymptotic distribution surviving for weak nonlinearities and disappearing in the thermodynamic limit with  $1/N$ . The diagram showing the threshold between different regimes reveals the quantum gates close to Pauli-Z as more noise tolerant. As we move towards the Pauli-X quantum gate, such aptness dramatically decreases and the threshold to the self-focusing regime becomes almost unavoidable. Quantum gates close to Hadamard exhibit an unusual aspect, in which an increment of the nonlinear strength can remove the dynamics from the self-focusing regime.

DOI: [10.1103/PhysRevA.103.042213](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.103.042213)

### I. INTRODUCTION

Quantum walks on a lattice have been indicated as a powerful environment for developing quantum algorithms, as well as a versatile and intuitive framework capable of performing any quantum computation [1–3]. In addition, quantum walks have been shown to be ideal testbeds for studying and exploring quantum systems [4–6]. Thus, designing and controlling such quantum processes for the long-time dynamics is a fundamental issue that requires a deep understanding.

Quantum noises are the main obstacle for performance improvement of quantum computing, since their presence can destroy a fundamental component: the delicate quantum state of qubits [7–12]. Decoherence is a physical phenomenon that typically arises from the interaction of quantum systems and their environment. In discrete-time quantum walks (DTQWs), the decoherence in the quantum gates drives the walker to a spreading rate quadratically slower in the long-time limit [13–15]. Broken links, simultaneous measurements of chirality and position, random phases, and fluctuations in a given preestablished unitary operation can also induce the same behavior [16–19]. Such results have been corroborated by experimental studies that describe the decoherence inducing a crossover of quantum dynamics from ballistic to diffusive [20–22]. Sub-ballistic and Anderson localized regimes have been reported for quantum walks with specific irregularities [23–25]. Effects of decoherence on discrete-time quantum walks have been associated with a very fast mixing time and uniform distribution regardless of the initial state of the system and the parity of lattice size [26–31].

Nonlinear phenomena on a DTQW have also been investigated, in which its source emerges from different frameworks

[32–38]. An anomalous slow diffusion has been reported for feed-forward DTQWs, a nonlinear quantum walk in which the coin operator depends on the coin states of the nearest-neighbor sites [32]. Feed-forward DTQWs have provided the dynamics of a nonlinear Dirac particle, with a description of solitonic behavior and the collisional phenomena between them [33]. A modified conditional shift operator displaying a dependence on the local occupation probability shows solitonlike propagation and a chaotic regime [34]. By using DTQWs which combine zero modes with a particle-conserving nonlinear relaxation mechanism, a conversion of two zero modes of opposite chirality into an attractor-repeller pair of nonlinear dynamics was reported [36]. One of the earliest studies reporting the emergent nonlinear phenomena on DTQWs studied the nonlinear self-phase modulation on the wave function during the walker evolution [37]. Restricted only to Hadamard quantum gates, nondispersive pulses and chaoticlike dynamics have been reported. A detailed study exploring other quantum gates reveals a rich set of dynamical profiles, including the self-trapped quantum walks, a localized regime in which the quantum walker remains localized around its initial position [38]. An interesting mathematical treatment on nonlinear DTQWs is described in Ref. [35].

Although it seems natural to consider linearity in the quantum regime, quantum-mechanical systems the effective evolution of which is governed by a nonlinear dynamics have been described in both optics [39] and Bose-Einstein condensates [40,41], the same environments where quantum walks have shown a remarkable experimental progress [6,20–22,42,43]. By considering that fault-tolerant architectures are built from the understanding of each possible ingredient, acting simultaneously or not, we studied here the weight of a

noise on the dynamics of a quantum walker within a nonlinear framework. We consider a small and instantaneous amount of decoherence on the qubit distribution, which expresses a measurement process or other environmental intervention. Nonlinear character is associated with an intensity-dependent phase acquisition with a qubit propagating on the lattice, which can represent an emerging third-order nonlinear susceptibility at photonic setups or interatomic interactions in ultracold atomic systems. By systematically exploring quantum coherence measures, we report appropriate settings which favor the stable regime. However, unstable regimes unveil DTQWs never once attained, such as the self-focusing and breathing dynamics. The stability threshold was investigated by varying the quantum gates, as well as the lattice size, which estimates the quantum behavior in the thermodynamic limit.

## II. MODEL

Here, we consider an intensity-dependent (nonlinear) phase acquisition associated with a quantum walker propagating on a one-dimensional lattice of interconnected sites [37,38]. More precisely, the walker consists of a qubit, the state  $|\psi\rangle$  of which is associated with its position and internal state (chirality), which can be described by spin or polarization states. Thus,  $|\psi\rangle$  belongs to a Hilbert space  $H = H_c \otimes H_p$ , with positions described by the orthonormal basis  $\{|n\rangle: n \in \mathbb{Z}\}$  spanning the position Hilbert space  $H_p$ , while the internal state is associated with a two-dimensional Hilbert space  $H_c$  spanned by an orthonormal basis  $\{|R\rangle = (1, 0)^T, |L\rangle = (0, 1)^T\}$ .

Each step of evolution consists in quantum gates  $\hat{C}$  located in the lattice sites which act on the quantum walker and shuffles its internal state, followed by spatial shifts to adjacent sites (left or right) according to its new chirality. Thus, given a general state written as

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n [a_{n,t}|R\rangle + b_{n,t}|L\rangle] \otimes |n\rangle, \quad (1)$$

in which amplitudes  $a_{n,t}$  and  $b_{n,t}$  are complex numbers that satisfy  $\sum_n (|a_{n,t}|^2 + |b_{n,t}|^2) = 1$ , a single step of dynamical evolution is performed by applying the unitary transformation  $|\psi(t+1)\rangle = \hat{U}|\psi(t)\rangle$ .

The standard (linear) protocol regards  $\hat{U} = \hat{S}(\hat{C} \otimes I_p)$ .  $I_p$  describes the identity operator in space of positions and  $\hat{C}$  is an arbitrary  $SU(2)$  unitary operator given by

$$\begin{aligned} \hat{C} = & \cos(\theta)|R\rangle\langle R| - \sin(\theta)|R\rangle\langle L| \\ & + \sin(\theta)|L\rangle\langle R| + \cos(\theta)|L\rangle\langle L|, \end{aligned} \quad (2)$$

in which the parameter  $\theta \in [0, 2\pi]$  controls the variance of the probability distribution of the walk. The conditional shift operator  $\hat{S}$  then performs  $\hat{S}(|R\rangle \otimes |n\rangle) = |R\rangle \otimes |n+1\rangle$  and  $\hat{S}(|L\rangle \otimes |n\rangle) = |L\rangle \otimes |n-1\rangle$ .

In our quantum algorithm, the qubit acquires an intensity-dependent (nonlinear) phase in each step of the previous protocol. We consider a quadratic nonlinearity depending on the chirality state, which can represent either nonlinear optical media in photonic setups or the interactions between atoms for ultracold atomic systems. Thus, we add to dynamical

evolution protocol ( $\hat{U}$ ) one more operator

$$\begin{aligned} \hat{K}^t = & \sum_n (e^{i2\pi\chi|\psi'_{n,R}|^2}|R\rangle\langle R| \\ & + e^{i2\pi\chi|\psi'_{n,L}|^2}|L\rangle\langle L|) \otimes |n\rangle\langle n|, \end{aligned} \quad (3)$$

such that  $\hat{U}(t) = \hat{S}(\hat{C} \otimes I_p)\hat{K}^{t-1}$ . The parameter  $\chi$  denotes the nonlinear strength of the medium and  $\chi = 0$  restores the standard (linear) protocol. Furthermore, periodic boundary conditions are assumed on the conditional shift operator

$$\begin{aligned} \hat{S} = & \sum_{n=1}^{N-1} |n+1\rangle\langle n| \otimes |R\rangle\langle R| + \sum_{n=2}^N |n-1\rangle\langle n| \otimes |L\rangle\langle L| \\ & + |1\rangle\langle N| \otimes |R\rangle\langle R| + |N\rangle\langle 1| \otimes |L\rangle\langle L|, \end{aligned} \quad (4)$$

in order to describe the  $N$ -cycle architecture employed here. The important framework of DTQWs on cycles has been used to display how quantum algorithms can be quadratically faster than its classical correspondent [2] and how decoherence can be useful in quantum walks [26], for example. Rigorous treatment for noiseless DTQWs on  $N$  cycles has proved the long-time average probability distribution of finding the qubit in each site as being uniform on the sites for odd  $N$  and nonuniform for even  $N$  [2,44]. Thus, we assume odd- $N$  lattices with the initial state of a qubit given by

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{n=1}^N (|R\rangle + i|L\rangle) \otimes |n\rangle, \quad (5)$$

superposed to a weak noise ( $\epsilon = 10^{-3}/\sqrt{2N}$ ). The latter expresses the interaction with environment, which can represent a measurement process. Hence, we evolve the state of a quantum walker the initial amplitudes of which at each site are randomly distributed in the interval  $[\frac{1}{\sqrt{2N}} - \epsilon, \frac{1}{\sqrt{2N}} + \epsilon]$ , in which a proper normalization is employed to ensure the unitary norm of the resulting distribution.

## III. RESULTS

We start following the dynamical evolution protocol described above and computing the quantum coherence, the rigorous measurement framework of which has only been developed recently [45,46]. Among the advisable measures, we compute the  $l1$  norm coherence

$$\mathcal{C}_{l1}(t) = \sum_i \sum_{i \neq j} |\rho_{i,j}(t)|, \quad (6)$$

defined as a sum of the absolute values of all off-diagonal elements in the density matrix  $\rho = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$  under the reference basis. By considering the experimental character an important issue, we observe such quantity being employed to directly measure quantum coherence of an unknown quantum state [47]. Starting from an initial state maximally coherent [Eq. (5)] [45,46], we show in Fig. 1 the  $l1$  norm coherence of the whole system at each time step for lattices with  $N = 101$  sites ruled by quantum gates Hadamard ( $\theta = \pi/4$ ) [Figs. 1(a)–1(d)] and  $\theta = \pi/3$  [Figs. 1(e)–1(h)] homogeneously distributed. In absence of nonlinearity ( $\chi = 0.00$ ) both quantum gates induce a dynamics with fluctuations over time around a saturation value ( $\mathcal{C}_{l1}(t) \sim 2N$ ), which are

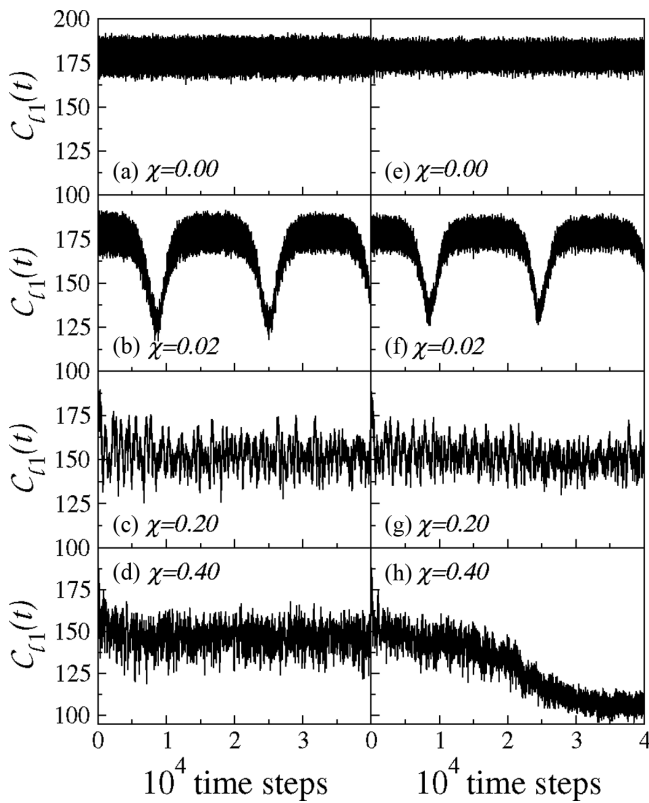


FIG. 1. Time evolution of the  $l_1$  norm coherence of the whole system for lattices with  $N = 101$  sites and ruled by quantum gates (a)–(d)  $\theta = \pi/4$  and (e)–(h)  $\theta = \pi/3$  homogeneously distributed. Oscillatory patterns suggest the lack of stability of the stationary distribution as the nonlinear parameter  $\chi$  increases, with the emergence of regular and irregular (chaoticlike) breathing dynamics. Above a critical nonlinear strength, which seems to depend on the quantum gate, the further decrease in quantum coherence after some transient time indicates the wave packet becoming even narrower.

fully consistent with previous literature [46]. However, this behavior is heavily modified as  $\chi$  grows. In Figs. 1(b) and 1(f), we observe the quantum coherence losing stability and developing regular breaths for a small amount of nonlinearity ( $\chi = 0.02$ ). As we further increase the nonlinearity, breathing dynamics gives way to fluctuations the average value of which is decreased when compared to the linear regime. Such fluctuations become more rough, suggesting a chaotic aspect. However, both lattices exhibit different behaviors as  $\chi$  increases even more. Lattices governed by Hadamard quantum gates remain with coherence exhibiting rough fluctuations around a decreased saturation value ( $C_{l1}(t) \sim 3N/2$ ), just as  $\chi = 0.20$ . On the other hand, the coherence for lattices ruled by  $\theta = \pi/3$  quantum gates reveals an additional decrease after an initial transient, with oscillations  $C_{l1}(t) \sim N$  [see Figs. 1(d) and 1(h)].

Since fluctuations in quantum coherence are related to the oscillatory nature of the probability distribution [26], we investigate the probability density distribution  $|\psi_n(t)|^2$ . We use in Fig. 2 the same configurations shown in Fig. 1, with Figs. 2(a)–2(d) and Figs. 2(e)–2(f) illustrating the dynamical behaviors for lattices governed by  $\theta = \pi/4$  and  $\pi/3$  quantum

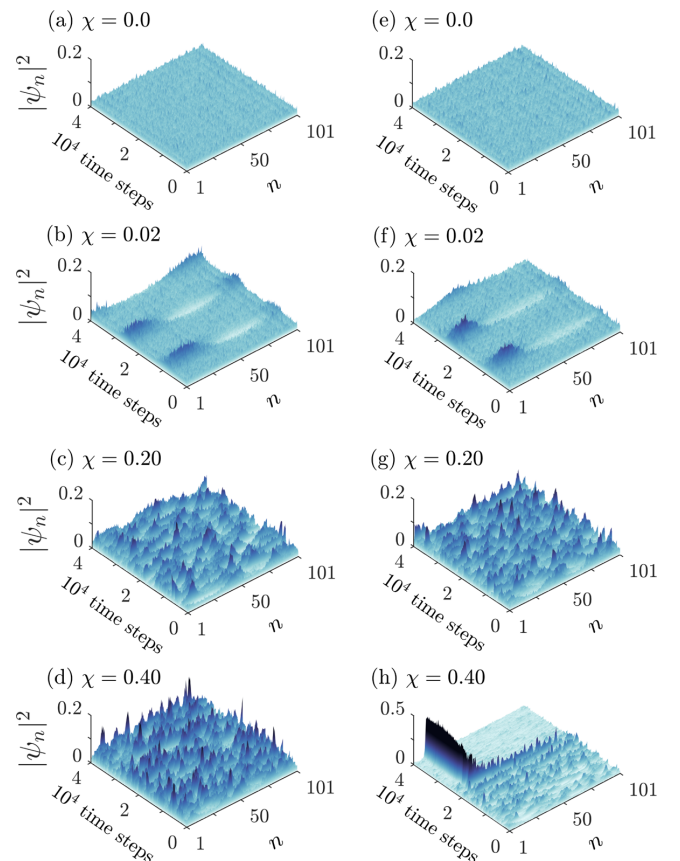


FIG. 2. Time evolution of the density of probability in position space of a quantum walker for the same configurations of  $\theta$  and  $\chi$  used in Fig. 1: (a)–(d)  $\theta = \pi/4$  and (e)–(h)  $\theta = \pi/3$ . Corroborating the previous results, we observe clear signatures of regular breathing dynamics for weak nonlinearities. Although both scenarios culminate in a chaoticlike regime as the nonlinear parameter ( $\chi$ ) increases, the self-focusing quantum walk emerges only for  $\theta = \pi/3$ , which suggests a phenomenology with quantum gate dependence.

gates, respectively. Corroborating the coherence measures, the spreading of the qubit remains uniformly extended over the entire lattice while  $\chi = 0.0$ , which signals the stability of the uniform distribution even after the disturbance. Such stability may disappear when nonlinearity is present, giving way to different regimes. Fully agreeing with the expectations created from the coherence measures, the wave packet develops regular breathings for very small nonlinearities and irregular breathings, with a chaoticlike aspect, for strong enough nonlinearities. The similarity between both lattices vanishes with  $\chi = 0.40$ . A self-focusing regime emerging after an initial transient clarifies the strong decreasing of the coherence reported for lattices with  $\theta = \pi/3$ .

In order to better understand, we follow the time evolution for a long time looking for  $\chi$  configurations able to remove the qubit dynamics from the limiting distribution. In Fig. 3 we show the relationship between the quantum gates ( $\theta$ ) and the critical nonlinearity ( $\chi_{sd}$ ), above which the distribution becomes unstable. We observe the stationary regime surviving to a greater range of nonlinearities when the system is managed by quantum gates close to Pauli-Z ( $\theta = 0$ ). On the



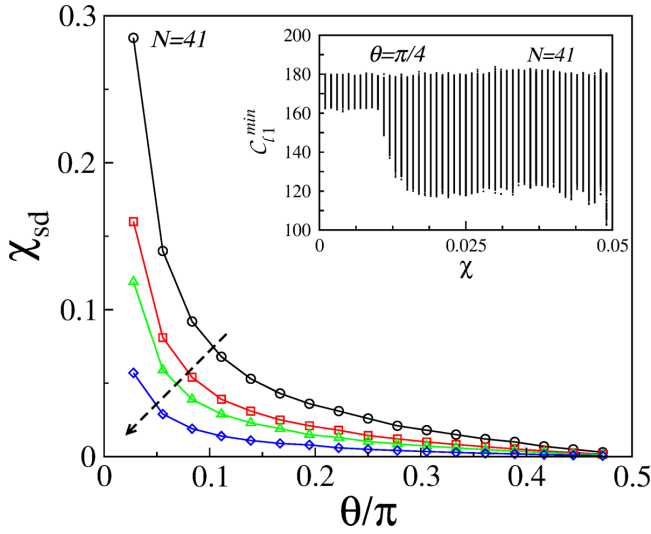


FIG. 3. Critical nonlinearity of the stationary state ( $\chi_{sd}$ ) as a function of  $\theta$  ( $\pi$  units) showing quantum gates close to Pauli-Z better able to sustain the stationary regime. A monotonic decreasing of  $\chi_{sd}$  as we move  $\theta$  towards the Pauli-X gate is also observed, regardless of the size  $N$  (arrow points to the growth of  $N$ ). Inset: All the minima of the coherence ( $C_{l1}^{\min}$ ) as a function of the nonlinear strength ( $\chi$ ) illustrating the critical point  $\chi_{sd}$ , signaled by the significant change in width of  $C_{l1}^{\min}$ , which comes from the lack of stability and the emerging breathing dynamics.

other hand, systems governed by quantum gates nearby to Pauli-X ( $\theta = \pi/2$ ) are more sensitive, with minor critical nonlinearities. Thus, quantum gates close to Pauli-Z are less liable to provide qubits with logical errors. The stationary regime threshold exhibits a monotonic decreasing as we move towards the Pauli-X quantum gates. Such scenario clearly demonstrates the sensitivity associated with the interference terms of the quantum gates, which has its influence amplified by the nonlinear component. The figure also shows a relationship between the critical nonlinearity and the size  $N$ , with the arrow pointing to the growth of  $N$ . The monotonic decline of  $\chi_{sd}$  as we leave systems ruled by Pauli-Z towards Pauli-X systems remains unchanged. However, the increase of lattice size makes the system more susceptible to instability, since the range of nonlinearities capable of sustaining the stationary regime decreases. The inset illustrates the critical point  $\chi_{sd}$ , above which the distribution becomes unstable. We recorded all the minima of  $l1$  norm coherence ( $C_{l1}^{\min}$ ) for every time step throughout the dynamic evolution of a system ruled by Hadamard quantum gates. By plotting  $C_{l1}^{\min}$  as a function of the nonlinear strength  $\chi$ , we observe a well-defined change in width of  $C_{l1}^{\min}$  which is consistent with the lack of stability and the emerging breathing dynamics [see Figs. 1(a), 1(b) 1(e), and 1(f)].

The dependence between the critical nonlinearity and the lattice size, which is suggested in Fig. 3, is shown for some representative quantum gates in Fig. 4. The  $\chi_{sd}$  vs  $N$  analysis exhibits the critical nonlinearity scaling with  $1/N$ , regardless of employed quantum gates. This behavior indicates the stationary regime disappearing with  $N \rightarrow \infty$  for any finite nonlinear strength, i.e., the stationary regime requires systems

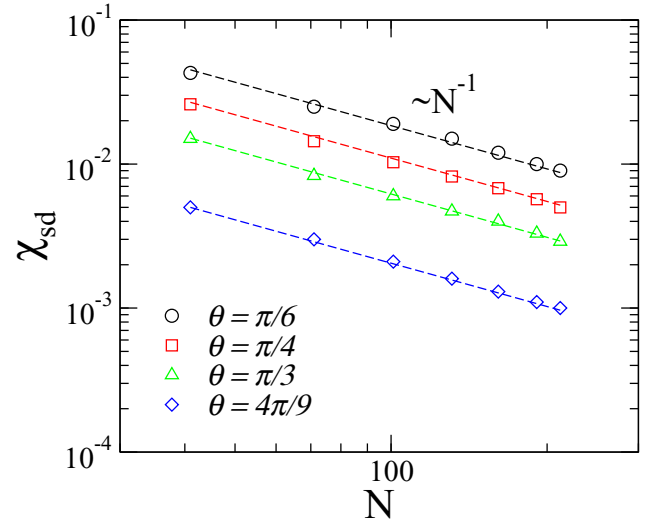


FIG. 4. Critical nonlinearity of the stationary state ( $\chi_{sd}$ ) computed for different lattice sizes and some representative quantum gates. The  $\chi_{sd}$  vs  $N$  analysis confirms the size dependence of the critical nonlinearities and reveals a gate-independent scaling  $\chi_{sd} \propto 1/N$ , which indicates the requirement for error-free operations to preserve the stable regime in the thermodynamic limit  $N \rightarrow \infty$ .

with error-free operations in the thermodynamic limit. Such feature can be analytically reached by using the connection between the dynamics of the discrete-time quantum walkers and the Dirac particles. In absence of noise, previous studies have shown a massive Dirac particle can be simulated on a discrete-time quantum walk, for both the linear [48–52] and nonlinear [33] systems. Interesting scenarios in which discrete-time quantum walkers exhibit behavior congruous to a massless Dirac fermion have also been reported [52–54]. Following the formalism employed in Refs. [33,51], which shortly consists in taking an effective Hamiltonian for the dynamics by defining a displacement operator using momentum  $\hat{p}$  as  $e^{\pm i\hat{p}\Delta x}\psi(x) = \psi(x \pm \Delta x)$  and relating it to the shift operator, the discrete-time quantum walk evolution can be written analogous to the 1 + 1-dimensional Dirac equation (in units of  $\hbar = 1$ ) as

$$i\partial_t\psi = (-i\alpha\partial_x + \beta mc^2 + \chi|\psi|^2)\psi. \quad (7)$$

The equivalent terms of mass, speed of light, and Dirac matrices are related with quantum gates and Pauli matrices. Although the familiar Dirac Hamiltonian exhibits a linear equation in momentum, terms quadratic in momentum can play an important role in characteristic scenarios, such as for the formation of topological insulators [55,56]. Here, our model also required quadratic corrections  $\propto p^2$  to the Dirac equation, justified from a second-order approximation in  $e^{\pm i\hat{p}\psi(t, x)}$  [33,51], which results in a modified Dirac equation as follows:

$$i\partial_t\psi = (-i\alpha\partial_x + \beta mc^2\partial_x^2 + \beta mc^2 + \chi|\psi|^2)\psi. \quad (8)$$

By considering the parametrization of Ref. [51], the mass and speed of light equivalent terms are  $m = \sin(\theta)$  and  $c = 1$ , respectively.  $x$  is the spatial coordinate,  $\alpha = -\cos(\theta)\sigma_3 +$

$\sin(\theta)\sigma_1$ , and  $\beta = \sigma_2$ , where  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) are Pauli matrices. Note that  $\alpha$  and  $\beta$  are Hermitian matrices satisfying

$$\alpha^2 = \beta^2 = \mathbb{I} \quad \text{and} \quad \alpha\beta + \beta\alpha = 0. \quad (9)$$

To perform a stability analysis of the stationary regime when subject to a perturbation, we start by observing that the continuous version of Eq. (8) supports a continuous-wave solution  $\psi(t) = \psi_0 e^{-i(\beta mc^2 + \chi |\psi_0|^2)t}$ , with  $\psi_0 \in \mathbb{R}$  without loss of generality. Just like in the numerical analysis, we impose a slight perturbation  $\epsilon(x, t)$  in its amplitude:

$$\psi(x, t) = [\psi_0 + \epsilon(x, t)] e^{-i(\beta mc^2 + \chi |\psi_0|^2)t}. \quad (10)$$

By considering a standard linearization as a function of the initial state of the qubit [ $\epsilon(x, t) \ll \psi_0$ ], we obtain the following time evolution equation for the perturbation:

$$i\partial_t \epsilon = -i\alpha \partial_x \epsilon + \beta mc^2 \partial_x^2 \epsilon + \chi |\psi_0|^2 (\epsilon + \epsilon^*). \quad (11)$$

Here,  $\epsilon^*$  denotes the complex conjugate of  $\epsilon$  and the abbreviation  $\epsilon = \epsilon(x, t)$  has been used. Since a white noise random perturbation exhibits a wide spectral range, which includes all harmonic contributions, we study solutions given by

$$\epsilon(x, t) = a_1 e^{i(kx - \Omega t)} + a_2 e^{-i(kx - \Omega t)}, \quad (12)$$

where  $a_1$  and  $a_2$  are the amplitudes of the weak modulation,  $k$  is the modulation wave number, and  $\Omega$  is the frequency. Substituting Eq. (12) into Eq. (11) and considering its nontrivial solution, we obtain the dispersion relation

$$\Omega = c\alpha k \pm \sqrt{\beta mc^2 k^2 (\beta mc^2 k^2 - 2\chi |\psi_0|^2)}. \quad (13)$$

This result shows the stability of the stationary regime for disturbances with large wave vectors, since  $\Omega$  remains real. In contrast,  $\Omega \in \text{Im}$  reveals an exponential amplification of all wave vectors with  $k < \sqrt{2\chi |\psi_0|^2 / \beta mc^2}$ , which results in breakup of continuous waves and thus describes the instability of the uniform distribution. Given the nature and the boundary conditions of the system, the allowed harmonic waves have wave numbers in the interval  $2\pi/N < k < 2\pi$ . Since the wave-function normalization for a uniform solution provides  $\psi_0 = 1/\sqrt{N}$ , we observe the characteristic nonlinear strength above which the solution is unstable as being  $\chi_{sd} \propto 1/N$ , in full agreement with Fig. 4.

By considering the implementation of a universal set of quantum gates as crucial for a quantum computing architecture, we extend our numerical experiments and show a  $\chi$  vs  $\theta$  diagram in Fig. 5. Here, we compute the long-time average of  $\overline{C_{l_1}}(t_\infty)$  for  $N = 101$  lattice sites. Data reveal the stationary regime surviving for weaker nonlinearities, prevailing for systems configured next to the Pauli-Z quantum gate, which is characterized by leaving the basis state  $|L\rangle$  unchanged and takes  $|R\rangle$  to  $-|R\rangle$ . Although Fig. 2 suggests the stationary, breathing, chaoticlike, and self-focusing regimes in ascending order of nonlinearity, the breathing regime persists for systems with quantum gates close to Pauli-Z even for strong nonlinearities. On the other hand, systems with quantum gates nearby to Pauli-X exhibit a fairly narrow range of  $\chi$  for breathing dynamics. The emergence of the chaoticlike regime is predominantly surrounding the ( $\theta = \pi/6$ ) quantum gates, which arises for an intermediate nonlinear strength. The self-focusing regime appears around the quantum gates

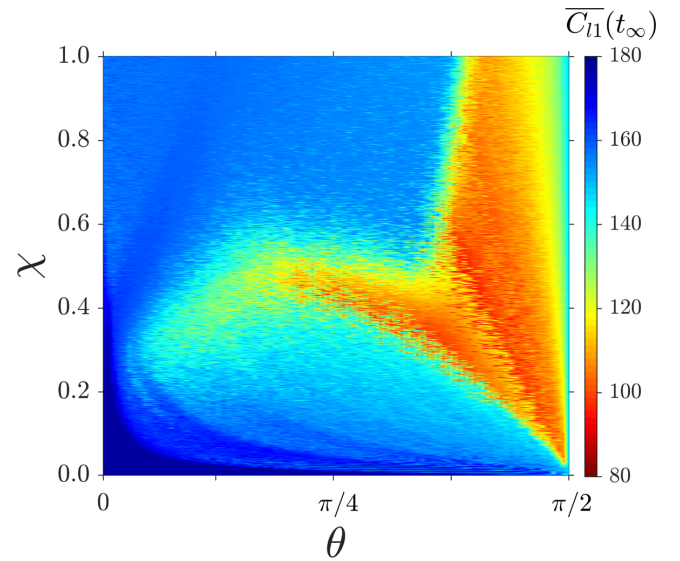


FIG. 5. Plot of  $\chi$  vs  $\theta$  for the long-time average of the  $l_1$  norm coherence. Quantum gates close to Pauli-Z are more liable to sustain the stationary distribution. As we increase  $\theta$  towards the Pauli-Z gate ( $\theta = \pi/2$ ), such propensity vanishes and different scenarios emerge as we change  $\chi$ : Breathing dynamics, chaoticlike, and self-focusing quantum walks. The last ones are predominant when  $\theta$  gets close to the Pauli-Z gate. An unusual aspect is reported for quantum gates close to Hadamard, in which an increment of  $\chi$  can remove the dynamics from the self-focusing regime.

of Hadamard, preceded by chaoticlike, breathing, and stationary regimes in decreasing order of nonlinearity. However, we observe an unusual threshold between the self-focusing and chaoticlike regimes: The increment on the nonlinear parameter is able to direct the system from the self-focusing to the chaoticlike regime, which persists as the nonlinearity increases. Such remarkable feature agrees with report of self-trapped quantum walks described for narrow qubits spreading in noiseless systems [38]. For systems ruled by quantum gates close to Pauli-X, which is characterized by mapping  $|L\rangle$  to  $|R\rangle$  and  $|R\rangle$  to  $|L\rangle$ , the self-focusing regime emerges for very weak nonlinearities and remains for the strongest nonlinearities. On the other hand, the self-focusing regime is absent as  $\theta$  gets very close to Pauli-Z.

#### IV. CONCLUSIONS

In summary, we have implemented a quantum protocol in order to rate the sensitivity to a short-time (instantaneous) noise while nonlinear components are present in a discrete-time quantum walk. The intensity-dependent nonlinearity is based on possible third-order nonlinear susceptibility in optical setups or emergent interatomic interactions in ultracold atomic systems, while the noise can represent a measurement process or other environmental intervention. Our results unveil optimal sets of operating parameters that favor a stable operation. Quantum gates close to Pauli-Z are more noise tolerant, contrary to the behavior exhibited by quantum gates near Pauli-X gates. When it loses stability, the system may present breathing dynamics and self-focusing quantum walks.

Numerical and analytical analysis exhibits the crossover from the uniform distribution to the unstable regime decaying as  $1/N$  reveals a fault-intolerant system in the thermodynamic limit ( $N \rightarrow \infty$ ), i.e., nonlinearities may be responsible for the inability to encode and decode qubits robustly. We consider optical systems as the most promising for a current experimental achievement, in which the use of Kerr-like optical media in the optical paths of experimental settings such as linear cavities [57], optical rings [58,59], Michelson interferometers [60], and optical lattices [61] would be responsible for nonlinear character. Another possibility consists of an optical network with a cascade of beam splitters, the adjustable transmission of which would be conditioned to the output of photodetectors for each path [32]. In addition

to contributing to the deeper fundamental understanding on discrete-time quantum walks, breathing and self-focusing quantum walks also bring applicability prospects for microresonators, lensinglike effects, and wave guiding, which arises from accumulated self-focusing.

#### ACKNOWLEDGMENTS




This work was partially supported by CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior), CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), and FAPCAL (Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado de Alagoas).

- 
- [1] A. M. Childs, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 180501 (2009).
- [2] D. Aharonov, A. Ambainis, J. Kempe, and U. Vazirani, in *Proceedings of the Thirty-Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing* (Association for Computing Machinery, New York, 2001), pp. 50–59.
- [3] A. M. Childs and J. Goldstone, *Phys. Rev. A* **70**, 022314 (2004).
- [4] L. Xiao, K. Wang, X. Zhan, Z. Bian, K. Kawabata, M. Ueda, W. Yi, and P. Xue, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 230401 (2019).
- [5] R. Vieira, E. P. M. Amorim, and G. Rigolin, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 180503 (2013).
- [6] D. Xie, T.-S. Deng, T. Xiao, W. Gou, T. Chen, W. Yi, and B. Yan, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 050502 (2020).
- [7] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, and W. K. Wootters, *Phys. Rev. A* **54**, 3824 (1996).
- [8] D. A. Lidar, I. L. Chuang, and K. B. Whaley, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 2594 (1998).
- [9] C. L. Degen, F. Reinhard, and P. Cappellaro, *Rev. Mod. Phys.* **89**, 035002 (2017).
- [10] J. J. Wallman and J. Emerson, *Phys. Rev. A* **94**, 052325 (2016).
- [11] E. T. Campbell, B. M. Terhal, and C. Vuillot, *Nature (London)* **549**, 172 (2017).
- [12] S. J. Beale, J. J. Wallman, M. Gutiérrez, K. R. Brown, and R. Laflamme, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 190501 (2018).
- [13] T. A. Brun, H. A. Carteret, and A. Ambainis, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 130602 (2003).
- [14] T. A. Brun, H. A. Carteret, and A. Ambainis, *Phys. Rev. A* **67**, 032304 (2003).
- [15] N. Konno, *Fluct. Noise Lett.* **05**, L529 (2005).
- [16] D. Shapira, O. Biham, A. J. Bracken, and M. Hackett, *Phys. Rev. A* **68**, 062315 (2003).
- [17] A. Romanelli, R. Siri, G. Abal, A. Auyuanet, and R. Donangelo, *Physica A* **347**, 137 (2005).
- [18] A. C. Oliveira, R. Portugal, and R. Donangelo, *Phys. Rev. A* **74**, 012312 (2006).
- [19] J. Košík, V. Bužek, and M. Hillery, *Phys. Rev. A* **74**, 022310 (2006).
- [20] M. A. Broome, A. Fedrizzi, B. P. Lanyon, I. Kassal, A. Aspuru-Guzik, and A. G. White, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 153602 (2010).
- [21] A. Schreiber, K. N. Cassemiro, V. Potoček, A. Gábris, I. Jex, and C. Silberhorn, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 180403 (2011).
- [22] A. Regensburger, C. Bersch, B. Hinrichs, G. Onishchukov, A. Schreiber, C. Silberhorn, and U. Peschel, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 233902 (2011).
- [23] C. V. C. Mendes, G. M. A. Almeida, M. L. Lyra, and F. A. B. F. de Moura, *Phys. Rev. E* **99**, 022117 (2019).
- [24] A. R. C. Buarque and W. S. Dias, *Phys. Rev. E* **100**, 032106 (2019).
- [25] M. A. Pires and S. M. Duarte Queirós, *Sci. Rep.* **11**, 4527 (2021).
- [26] V. Kendon and B. Tregenna, *Phys. Rev. A* **67**, 042315 (2003).
- [27] G. Alagic and A. Russell, *Phys. Rev. A* **72**, 062304 (2005).
- [28] P. C. Richter, *Phys. Rev. A* **76**, 042306 (2007).
- [29] V. Kendon, *Math. Struct. Comp. Sci.* **17**, 1169 (2007).
- [30] C. Liu and N. Petulant, *Phys. Rev. E* **81**, 031113 (2010).
- [31] S. E. Venegas-Andraca, *Quant. Info. Proc.* **11**, 1015 (2012).
- [32] Y. Shikano, T. Wada, and J. Horikawa, *Sci. Rep.* **4**, 4427 (2014).
- [33] C.-W. Lee, P. Kurzyński, and H. Nha, *Phys. Rev. A* **92**, 052336 (2015).
- [34] J. P. Mendonça, F. A. B. F. de Moura, M. L. Lyra, and G. M. A. Almeida, *Phys. Rev. A* **101**, 062335 (2020).
- [35] M. Maeda, H. Sasaki, E. Segawa, A. Suzuki, and K. Suzuki, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **38**, 3687 (2018).
- [36] Y. Gerasimenko, B. Tarasinski, and C. W. J. Beenakker, *Phys. Rev. A* **93**, 022329 (2016).
- [37] C. Navarrete-Benlloch, A. Pérez, and E. Roldán, *Phys. Rev. A* **75**, 062333 (2007).
- [38] A. R. C. Buarque and W. S. Dias, *Phys. Rev. A* **101**, 023802 (2020).
- [39] F. Lederer, G. I. Stegeman, D. N. Christodoulides, G. Assanto, M. Segev, and Y. Silberberg, *Phys. Rep.* **463**, 1 (2008).
- [40] F. Dalfó, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
- [41] O. Morsch and M. Oberthaler, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 179 (2006).
- [42] X.-Y. Xu, Q.-Q. Wang, W.-W. Pan, K. Sun, J.-S. Xu, G. Chen, J.-S. Tang, M. Gong, Y.-J. Han, C.-F. Li, and G.-C. Guo, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 260501 (2018).
- [43] S. Dadras, A. Gresch, C. Groiseau, S. Wimberger, and G. S. Summy, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 070402 (2018).
- [44] B. Tregenna, W. Flanagan, R. Maile, and V. Kendon, *New J. Phys.* **5**, 83 (2003).
- [45] T. Baumgratz, M. Cramer, and M. B. Plenio, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 140401 (2014).
- [46] Z. He, Z. Huang, L. Li, and H. Situ, *Quant. Info. Proc.* **16**, 271 (2017).

- [47] Y. Yuan, Z. Hou, J.-F. Tang, A. Streltsov, G.-Y. Xiang, C.-F. Li, and G.-C. Guo, *npj Quant. Info.* **6**, 46 (2020).
- [48] F. W. Strauch, *Phys. Rev. A* **73**, 054302 (2006).
- [49] C. M. Chandrashekar, S. Banerjee, and R. Srikanth, *Phys. Rev. A* **81**, 062340 (2010).
- [50] G. di Molfetta and F. Debbasch, *J. Math. Phys.* **53**, 123302 (2012).
- [51] C. M. Chandrashekar, *Sci. Rep.* **3**, 2829 (2013).
- [52] N. P. Kumar, R. Balu, R. Laflamme, and C. M. Chandrashekar, *Phys. Rev. A* **97**, 012116 (2018).
- [53] G. Di Molfetta, L. Honter, B. B. Luo, T. Wada, and Y. Shikano, *Quant. Stud.: Math. Found.* **2**, 243 (2015).
- [54] G. Di Molfetta, M. Brachet, and F. Debbasch, *Phys. Rev. A* **88**, 042301 (2013).
- [55] H. Zhang, C.-X. Liu, X.-L. Qi, X. Dai, Z. Fang, and S.-C. Zhang, *Nat. Phys.* **5**, 438 (2009).
- [56] C. W. Groth, M. Wimmer, A. R. Akhmerov, J. Tworzydło, and C. W. J. Beenakker, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 196805 (2009).
- [57] P. L. Knight, E. Roldán, and J. E. Sipe, *Phys. Rev. A* **68**, 020301 (2003).
- [58] P. L. Knight, E. Roldán, and J. Sipe, *Opt. Commun.* **227**, 147 (2003).
- [59] A. Schreiber, K. N. Cassemiro, V. Potoček, A. Gábris, P. J. Mosley, E. Andersson, I. Jex, and C. Silberhorn, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 050502 (2010).
- [60] D. Pandey, N. Satapathy, M. S. Meena, and H. Ramachandran, *Phys. Rev. A* **84**, 042322 (2011).
- [61] A. Crespi, R. Osellame, R. Ramponi, V. Giovannetti, R. Fazio, L. Sansoni, F. De Nicola, F. Sciarrino, and P. Mataloni, *Nat. Photonics* **7**, 322 (2013).



**Bloch-like superoscillations and unidirectional motion of  
phase-driven quantum walkers**

**Bloch-like superoscillations and unidirectional motion of phase-driven quantum walkers**A. R. C. Buarque , M. L. Lyra , and W. S. Dias *Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas, 57072-900 Maceió, Alagoas, Brazil*

(Received 8 August 2020; accepted 8 January 2021; published 25 January 2021)

We study the dynamics of a quantum walker simultaneously subjected to time-independent and -dependent phases. Such dynamics emulates a charged quantum particle in a lattice subjected to a superposition of static and harmonic electric fields. With proper settings, we investigate the possibility to induce Bloch-like superoscillations, resulting from a close tuning of the frequency of the harmonic phase  $\omega$  and that associated with the regular Bloch-like oscillations  $\omega_B$ . By exploring the frequency spectra of the wave-packet centroid, we are able to distinguish the regimes on which regular and super-Bloch oscillations are predominant. Furthermore, we show that under exact resonant conditions  $\omega = \omega_B$  unidirectional motion is established with the wave-packet average velocity being a function of the quantum coin operator parameter, the relative strengths of the static and harmonic terms, as well as the own phase of the harmonic field. We show that the average drift velocity can be well described within a continuous-time analogous model.

DOI: [10.1103/PhysRevA.103.012222](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.103.012222)**I. INTRODUCTION**

The classical random walk and its stochastic movement of particles form a well-known concept in physics, whose application extends to a wide variety of systems such as behavioral macroeconomics [1], image segmentation [2], animal dynamics [3,4], computer science [5], evolutionary ecology [6,7], and thermal conductivity of nanofluids [8,9]. Within the quantum context, discrete-time quantum walks (DTQWs) have received outstanding attention in recent years. In general lines, its dynamics concerns a quantum walker whose movement through the lattice is closely related to its internal state, which changes step by step [10]. Coherent superposition and quantum interference make DTQWs usually faster than their classical counterpart and, therefore, an interesting and versatile tool for the realization of quantum algorithms and quantum simulations [10–12].

Due to its promising character, DTQWs have been explored in different environments, such as linear optics [13–15], electrodynamic cavities [16], Bose-Einstein condensates [17,18], and integrated photonic waveguides [19,20]. Furthermore, studies in DTQWs have examined different ingredients such as disorder [15,20–22], nonlinearity [23,24], particle-particle interaction [25,26], and non-Hermiticity [27,28]. Here, we will focus on quantum walks whose addition of specific phases emulates the action of electric fields [29–32]. Considering a phase which depends linearly on position, Cedzich *et al.* described the long-time propagation properties of a quantum walker as very sensitive to the emulated electric field. Ballistic and localized quantum walks have been reported by employing rational and irrational phases, respectively [29]. An experimental realization of discrete-time quantum walks which simulate the effect of an electric field on a charged particle has been reported in Ref. [30]. Using single Cs atoms in spin-dependent optical lattices and measures by

fluorescence imaging, it has been shown that a quantum particle can exhibit features closely related to Bloch oscillations. By studying the phenomenology for a two-dimensional (2D) system, Bru *et al.* reported that the particle dynamics is easily affected by orientation of the field [31]. The analysis of conical intersections in the dispersion relations suggests suitable directions of the field for a perfect 2D trapping to occur.

A description analogous to Bloch oscillations has also been described by considering time-dependent phases on both single- and split-step DTQW protocols [32]. The refocusing behavior has been described as resulting from the interplay between dynamical and geometric phases, as well as nonadiabatic transitions. Other studies exploring DTQWs with time-dependent phases have described dynamical localization and quasiperiodic dynamics [33–37].

Previous results showed how time-independent or -dependent phases have been employed on DTQWs to obtain dynamical localization and/or Bloch oscillations. Here, our goal is to address the following question: How DTQWs behave with the simultaneous presence of both ingredients? Such a system corresponds to a quantum walker subject to the concomitant action of two artificial electric fields. The constant field is emulated by a phase with a linear dependence on position, while the time-dependent field comes from a phase which has a harmonic modulation. We show different quantum-walk dynamics owing to the tuning of the electric field characteristics. We observe the development of Bloch-like superoscillations, an oscillatory dynamics exhibiting characteristic frequencies which can be adjusted by controlling the artificial electric fields. The crossover from regular to super-Bloch oscillations is established. Furthermore, we demonstrate that, under resonant conditions, the walker can develop a unidirectional drift to a preferential side of the lattice. Both drift velocity and direction of movement are explicitly shown to depend on the electric fields settings

and the specific coin operator. Its overall behavior is shown to be well described by an analogous continuous-time approach.

## II. MODEL

The problem consists of a quantum walker moving in a one-dimensional discrete chain with  $N$  sites under the influence of superposed artificial dc and ac electric fields. Such a walker consists of a qubit (two-state quantum system) with the internal degree of freedom (e.g., spin [10] or polarization [15]). Its full Hilbert space is composed of two subspaces:  $H = H_P \otimes H_C$ .  $H_P$  denotes the position space spanned by a set orthonormal vectors  $\{|n\rangle_P: n \in \mathbb{N}^*\}$ .  $H_C$  is defined by a two-dimensional coin space spanned by orthogonal vectors  $|\uparrow\rangle_C = [1, 0]^T$ ,  $|\downarrow\rangle_C = [0, 1]^T$ , associated with the internal degree of freedom of the particle which determines the direction of the walk motion.

In general, the evolution step of a discrete-time quantum walk consists in two operations: We start by applying the unitary operator quantum gate (well known as a quantum coin)  $\hat{C}$  in the initial state of particle, followed by the conditional shift operator  $\hat{S}$ . Thereby, the state  $|\Psi_0\rangle$  of the particle after  $t$  steps can be described by  $|\psi_t\rangle = \hat{W}_0 \cdots \hat{W}_0 |\Psi_0\rangle = \prod \hat{W}_0 |\Psi_0\rangle$ . Here,  $\hat{W}_0 := \hat{S} \cdot (\hat{C} \otimes \mathbb{I}_P)$  describes the evolution operator of the walk, with  $\mathbb{I}_P$  representing the identity matrix over the subspace of the positions. The conditional shift operator  $\hat{S}$  has the form

$$\hat{S} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes \hat{S}_+ + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes \hat{S}_-, \quad (1)$$

with the operators  $\hat{S}_\pm = \sum_{x=1}^N |n \pm 1\rangle\langle n|$ . The quantum gate  $\hat{C}$  is an arbitrary SU(2) unitary operator given by

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2)$$

where  $\theta$  is an adjustable parameter which controls the variance of the probability distribution.

In order to simulate the electric field, we define an extra unitary operator [30]

$$\hat{F}_E = \sum_n \exp(iG\hat{n}) |n\rangle\langle n| \otimes \mathbb{I}_C. \quad (3)$$

$G$  is a function that represents the phase imprinted by the effective electric field that can be expressed in fractions of  $2\pi/m$ , with  $m \in \mathbb{R}$ . This operator only acts in the subspace of the positions  $H_P$ . By exploring Eq. (3), we observe quantum walks under the presence of electric fields with  $m = 1, 2$  showing a similar behavior to those without an electric field. In this work, we express  $G$  so that it simulates the superposition between two electric fields: a uniform (dc) and a harmonic (ac) component. Thus, we consider

$$G(t) = \Phi_0 + \Delta\Phi \sin(\omega t + \phi). \quad (4)$$

The first term represents the dc artificial field with magnitude  $\Phi_0 = 2\pi/m$ , while the second represents the ac artificial field with modulation  $\Delta\Phi$ , frequency  $\omega$ , and phase  $\phi$ . The time evolution of the system is now governed by the ‘‘electric-field’’ operator, given by  $\hat{W}_{el} := \hat{F}_E \cdot \hat{W}_0$ . Thus, by using the time-evolution protocol  $|\psi_t\rangle = \hat{W}_{el} |\psi_{t-1}\rangle$ , we can derive the

recursive evolution equations for the probability amplitudes:

$$\begin{aligned} \psi_{t+1,n}^\uparrow &= e^{iG_t(n-N/2)} (\cos \theta \psi_{t,n-1}^\uparrow + \sin \theta \psi_{t,n-1}^\downarrow), \\ \psi_{t+1,n}^\downarrow &= e^{iG_t(n-N/2)} (\sin \theta \psi_{t,n+1}^\uparrow - \cos \theta \psi_{t,n+1}^\downarrow), \end{aligned} \quad (5)$$

with  $\psi_{t,n}^\uparrow$  and  $\psi_{t,n}^\downarrow$  representing the probability amplitudes of obtaining the states  $|\uparrow\rangle$  and  $|\downarrow\rangle$  at position  $n$  and time step  $t$ .

Although quantum walks have been experimentally realized in diverse physical systems, we consider the experimental implementation feasible by using an optical feedback loop [15] or integrated waveguide circuits [20], since such systems have been used to enforce time-independent and time-dependent phases on the subspace of position of quantum walker. The first has the advantage of the demand for resources that remains constant as the number of steps in the quantum walk increases.

Our results were obtained following Eqs. (5) for a quantum particle initially localized at lattice center  $n_0 = N/2$ . We consider throughout the analysis open chains as the boundary condition, whose sizes  $N$  are large enough that the wave function does not reach its edges during the evaluated time.

## III. RESULTS AND DISCUSSION

We start our discussion illustrating the time evolution of the particle’s quantum wave packet under the effect of different configurations of artificial external fields. In Fig. 1, we show the profile of the probability density  $|\psi_n|^2$  as a density plot in the plane of the positions ( $n$ ) vs time steps for three representative cases of artificial fields. We consider the initial state of the quantum particle is a symmetric one of the form

$$|\Psi_0\rangle = 1/\sqrt{2}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle) \otimes |n_0\rangle, \quad (6)$$

with  $N = 10^3$  sites. We assume a weak artificial electric field with  $m = 100$  so that the uniform phase  $G$  has increments of  $\Phi_0 = 2\pi/100$ . In addition, we use a Hadamard gate ( $\theta = \pi/4$ ) for which such initial wave packet would evolve in time, developing symmetric wave fronts. Revisiting the case of a quantum walker under the action of a constant phase having a linear dependence on the position, the quantum walker performs oscillations around the initial position with a well-defined period and frequency  $\omega_B = \Phi_0$ , as shown in Fig. 1(a). Thanks to the presence of the  $\hat{F}_E$  operator, such behavior is usually associated with Bloch oscillations (BOs) [30,32,37], an emerging phenomenon of solid-state physics in which an electron is loaded in a periodic potential subjected to a constant electric field. This is a quasistationary dynamics for a quantum walker that persists over a long time whenever the phase increment  $\Phi_0 \ll 1$ . In the very-long-time regime, the oscillation becomes unstable, a characteristic feature of discrete-time quantum walks [29]. Bloch-like oscillations are inherent to the dynamics of quantum particles placed in a periodic potential under the action of a uniform field. The association of an external periodic driving can promote, under appropriate resonance conditions, the emergence of dynamical trends that cannot be extracted from the independent action of uniform and periodic emulated fields. To explore this, we add a harmonic component ( $\Delta\Phi = \Phi_0$ ) to the  $G(t)$  phase that plays a role similar to an external time-dependent field [see Eq. (4)]. As shown in Fig. 1(b), a different dynamics

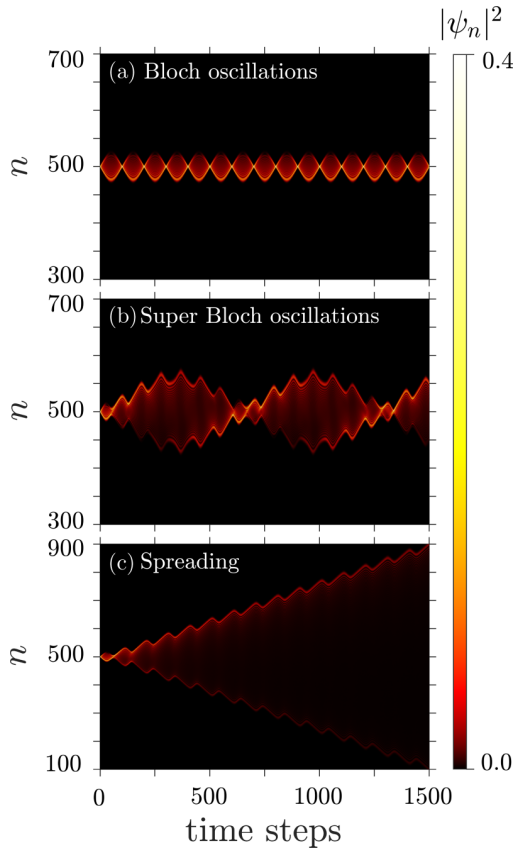


FIG. 1. Probability density profile in the plane of positions  $n$  vs time steps. (a) Under the presence of a uniform electric field  $G$  with  $m = 100$  ( $\Delta\Phi = 0$ ), the quantum walker shows Bloch-like oscillations. (b) When subjected to both constant and harmonic fields, with  $\omega$  very close to the Bloch frequency ( $\omega_B$ ), the quantum walker performs oscillations with large amplitudes. (c) When we tune the frequency  $\omega = \omega_B$  the quantum walker spreads, developing a preferential walk to one side of the chain.

emerges: the wave function oscillates with large amplitudes in the position space when the frequency of the harmonic field component ( $\omega$ ) is close to that of the Bloch-like oscillations ( $\omega_B$ ). Analogous to solid-state super-Bloch oscillations, such a phenomenon arises only when the harmonic field frequency,

$$\omega = \omega_B + \Delta\omega, \quad (7)$$

is slightly detuned ( $\Delta\omega \ll \omega_B$ ) from the Bloch oscillation frequency ( $\omega_B = \Phi_0$ ). This scenario that we label as Bloch-like superoscillations changes to a unidirectional drift when we adjust the frequencies for the case of exact resonance. In Fig. 1(c) we assume  $\Delta\omega \rightarrow 0$  so that  $\omega = \omega_B$ . The wave packet of the quantum walker develops a preferential walk direction, in close analogy to the dynamics of single-electron wave packets obeying a continuous-time Schrödinger equation under similar field conditions.

For a more detailed description of the interplay between regular and super-large-amplitude Bloch oscillations, we compute the time evolution of the centroid of the particle's quantum wave packet in order to understand the effects caused by the detuning  $\Delta\omega$  on its dynamics. The centroid is

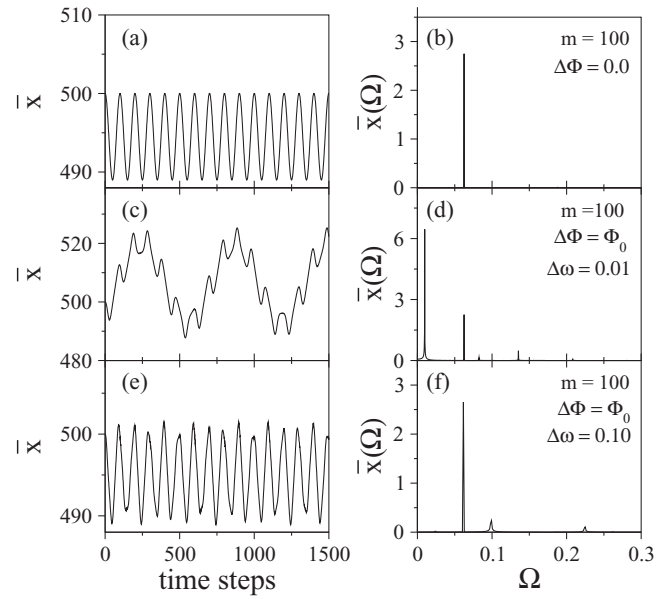


FIG. 2. Left panels show the centroid of a quantum walker initially localized at lattice center  $n_0 = 500$ , with distinct configurations of  $G(t)$ . Right panels show their respective Fourier transform. (a), (b) In the absence of harmonic modulation ( $\Delta\Phi = 0$ ), the centroid exhibits Bloch-like oscillations, whose frequency corresponds to the magnitude of the emulated field  $\Phi_0 = 2\pi/m$ . (c), (d) By connecting the harmonic component and tuning its frequency to a value very close to the Bloch frequency ( $\Delta\omega = \omega - \omega_B = 0.01$ ), we observe large oscillations described as a superposition of two main frequencies. (e), (f) Oscillations with similar pattern of Bloch-like oscillations are recovered as we increase the detuning  $\Delta\omega$ .

defined as

$$\bar{x}(t) = \sum_n n |\psi_n(t)|^2. \quad (8)$$

In the left column of Fig. 2, we show the evolution of the average position of the particle,  $\bar{x}$ , for three field settings  $G(t)$ . For all cases, the centroid exhibits an oscillatory pattern. However, changing the value of  $\Delta\omega$ , the dynamics visits two regimes. Figure 2(a) displays the case where the quantum particle is only under the action of a uniform artificial electric field,  $\Delta\Phi = 0.0$  and  $\Phi_0 = 2\pi/100$ . The centroid shows coherent oscillations with Bloch period  $T_B = m$ . The oscillation frequency is proportional to the acquired uniform phase,  $\Phi_0$ . The Fourier transform of the centroid over several oscillations  $\bar{x}(\Omega)$ , reported in Fig. 2(b), clearly shows that the centroid displays an oscillatory pattern with predominant frequency  $\omega_B = \Phi_0$ . The detailed dynamics depends closely on whether  $\Phi_0/2\pi$  is an irrational or a rational number, as discussed in Refs. [29–31]. When we turn on the harmonic component of the artificial electric field with modulation amplitude  $\Delta\Phi = \Phi_0$  and with a frequency very close to  $\omega_B$ , i.e.,  $\omega = \Delta\omega + \omega_B$ , the quantum particle develops a large-amplitude oscillation [see Fig. 2(c)], with a period  $T_{SBO} \approx 2\pi/\Delta\omega \gg T_B$ . The spectral decomposition of the centroid trace shows that its dynamics has two main components [see Fig. 2(d)]. The largest component represents the frequency of super-Bloch



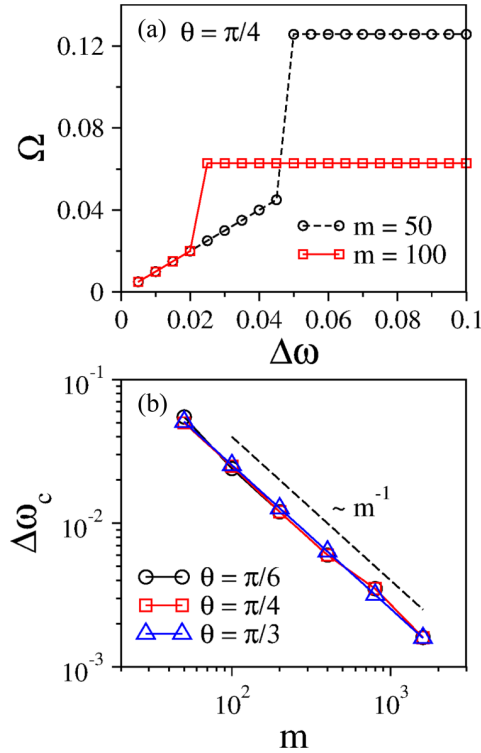


FIG. 3. (a) Quantitative analysis of the predominant spectral frequency ( $\Omega$ ) as a function of the detuning factor ( $\Delta\omega$ ) for distinct strengths of the emulated static field ( $\Phi_0 = 2\pi/m$ ). We consider the quantum gate phase  $\theta = \pi/4$ . For small detuning, the predominant frequency is associated with Bloch-like superoscillations. Above a characteristic  $m$ -dependent detuning, regular Bloch-like oscillations predominate. (b) The characteristic crossover frequency ( $\Delta\omega_c$ ) is inversely proportional to  $m$  and independent of the applied quantum gate.

oscillations (SBOs) ( $\Omega_{\text{SBO}} = \Delta\omega = 2\pi/m - \omega = 0.01$ ). The second component is the usual Bloch frequency, which depends only on the uniform dc component  $\Phi_0 = 2\pi/100$ . It is also possible to identify a small third frequency component which is the sum of the frequencies  $\omega_B + \omega + \Delta\omega$ . It is interesting to mention that the dynamics of SBOs is independent of the phase  $\phi$  of the artificial ac field. In Fig. 2(e), we consider a larger detuning by increasing the difference between the frequencies,  $\Delta\omega = 0.1$ . In this case, the influence of the harmonic component of the artificial electric field gives rise just to small-amplitude slow oscillations of the centroid. The predominant component of its spectral decomposition remains the standard Bloch frequency, as shown in Fig. 2(f).

The previous analysis allows us to identify two distinct dynamical regimes according to the detuning between the frequency of the harmonic artificial field and the frequency of the standard Bloch oscillations. These two regimes are characterized by the predominant spectral frequency  $\Omega$  of the centroid trace. In Fig. 3(a), we report  $\Omega$  as a function of  $\Delta\omega$  for the Hadamard gate and two distinct phase increments  $\Phi_0 = 2\pi/m$ . For low detuning values ( $\Delta\omega \leq \Delta\omega_c$ ), a linear dependence of the predominant frequency on  $\Delta\omega$  signals that it is associated with the SBO. On the other hand, when  $\Delta\omega > \Delta\omega_c$  the standard  $m$ -dependent Bloch frequency ( $\Omega = 2\pi/m$ )

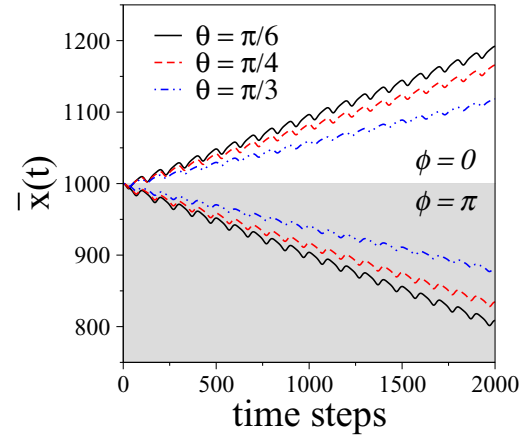


FIG. 4. Time evolution of the quantum-walker centroid for different quantum gates  $\theta = \pi/6, \pi/4$ , and  $\pi/3$ . Numerical experiments were performed using  $m = 100$ ,  $\Delta\Phi = \Phi_0$ , and  $\omega = \omega_B$ . We demonstrate the possibility of driving the quantum walker along the lattice (to the left or to the right) by controlling the parameter  $\phi$ .

predominates over the dynamics of the wave packet. By considering a chain with  $N = 2500$ ,  $t_{\text{max}} = 40N$  time steps, and three distinct quantum gates ( $\theta = \pi/6, \pi/4, \pi/3$ ), we report in Fig. 3(b) the characteristic detuning frequency separating two dynamical regimes as a function of  $m$ . We show the critical detuning dependent on  $1/m$ , but independent of the quantum gate. Thus, we unveil the crossover frequency being proportional to the standard Bloch-like oscillations. Our data support  $\Delta\omega_c/\omega_B \simeq 0.3979$ .

In the absence of frequency detuning  $\Delta\omega = 0$ , i.e., the frequency of the sinusoidal phase coinciding with the Bloch frequency ( $\omega = \omega_B$ ), the quantum particle develops a preferential walk. For a more quantitative description, we compute numerically the centroid of the quantum-walker wave packet under resonant field conditions. In Fig. 4, we plot the time evolution of the average position of the quantum walker for three different quantum gate configurations,  $\theta = \pi/6$  (continuous line),  $\pi/4$  (dashed line), and  $\pi/3$  (dash-dotted line). We used  $m = 100$ . A unidirectional modulated walk of the wave-packet centroid is obtained whose average velocity depends on the relative phase of the ac field and of the quantum gate parameter  $\theta$ . For  $\phi = 0$  the quantum particle performs a unidirectional walk to the left of the initial position. The opposite occurs when  $\phi = \pi$ . This effect can be used to manipulate the dynamics of the quantum particle by tuning the phase of the artificial harmonic field.

In order to explore the unidirectional walk induced by the resonance condition, we determined the phase dependence of the centroid's velocity. Figure 5 displays the average velocity ( $\bar{v}$ ) as a function of artificial harmonic field phase  $\phi$ . Here, we also consider the field amplitudes  $\Delta\Phi = \Phi_0$  and  $\Delta\Phi = 3\Phi_0$ . We unveil that, under the resonance condition associated to the ac and dc field components, the quantum particle dynamics, initially in the quantum state Eq. (6), undergoes a unidirectional motion with an oscillatory dependence of the average velocity on the phase of the ac component for all quantum gates. In the regime of small field increments  $\Phi_0$ , leading to Bloch oscillations with period  $T_B \gg 1$ , one expects a close

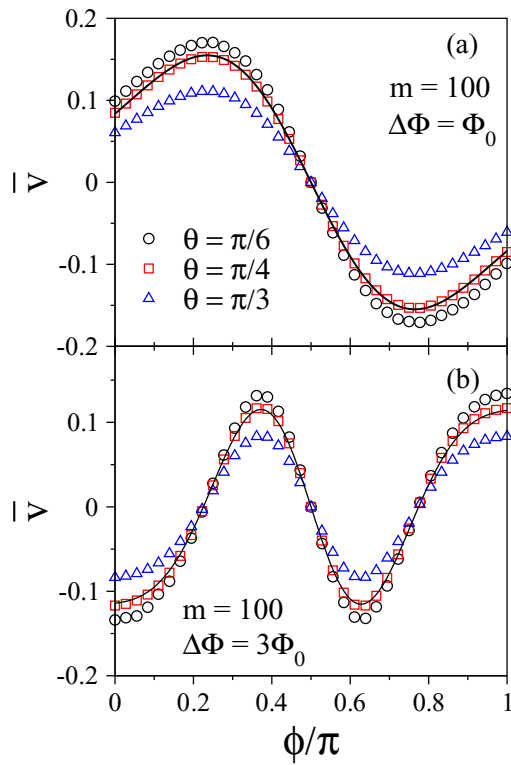


FIG. 5. Phase dependence of the quantum-walker centroid velocity for three distinct quantum gates:  $\theta = \pi/6$ ,  $\pi/4$ , and  $\pi/3$ . Both (a)  $\Delta\Phi = \Phi_0$  and (b)  $\Delta\Phi = 3\Phi_0$  exhibit similar trends, with overall amplitudes depending on the ratio  $\Delta\Phi/\Phi_0$  and  $\theta$ . Such dependencies corroborate the continuous-time theoretical result given by Eq. (9), represented by the solid line for the case  $\theta = \pi/4$ .

analogy between the quantum walk dynamics and that of a single-particle wave packet governed by a continuous-time Schrödinger equation within a tight-binding approximation. It has been demonstrated that the wave-packet net velocity of a noninteracting particle driven by an ac field in resonance with the BO is given by [38–40]

$$v = v_0 \cos(\delta\Phi \cos(\phi) - \phi), \quad (9)$$

where  $\delta\Phi = (\Delta\Phi/\Phi_0)$  and the velocity amplitude  $v_0 \propto J_1(\delta\Phi)$ , where  $J_1(x)$  corresponds to the Bessel function of the first kind and order 1. The above expression fits accurately the velocity dependence on  $\phi$ , as shown by the solid lines in Fig. 5. Results corroborate the velocity amplitude dependence in relation to  $\delta\Phi$ , as well as the maintenance of the overall behavior when varying it. For  $\delta\Phi = 1$ , maximum positive (negative) speed is reached at  $\phi_1 = \delta\Phi \cos \phi_1 \approx 0.739$  ( $\phi_2 = \pi - \phi_1 \approx 2.402$ ).

To better characterize the quantum-walker centroid velocity, we probe how the velocity amplitudes are related to the acquired phases  $\Delta\Phi$  and  $\Phi_0$ . Based on Eq. (9), we explore the average velocity and show  $v_0$  as a function of  $\delta\Phi$  (see Fig. 6). In full agreement with previous analysis, data reveal the velocity amplitudes ruled by the Bessel function  $J_1(\delta\Phi)$ . In the limit of  $\Phi_0 \ll 1$ , a continuous-time approximation provides  $v_0 = J_1(\delta\Phi) \cos \theta/2$ . Thus, specific ratios of  $\Delta\Phi/\Phi_0$  corresponding to the zeros of the Bessel function are also

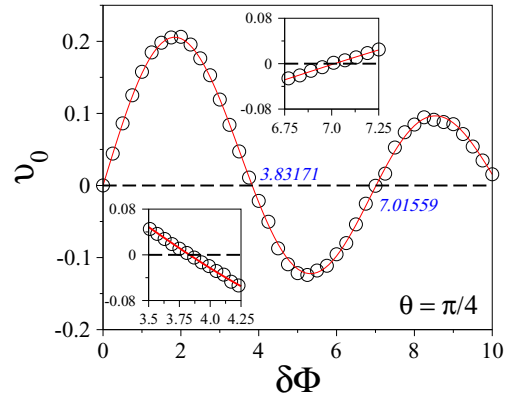


FIG. 6. By exploring the average velocity ( $\bar{v}$ ) in relation to the acquired phases  $\Delta\Phi$  and  $\Phi_0$  for  $\theta = \pi/4$ , we expose the relationship between the velocity amplitudes and  $\delta\Phi$  ruled by the Bessel function of the first kind and order 1. The solid line accounts for  $J_1(\delta\Phi) \cos \theta/2$ . The insets show amplifications close to the first two zeros of the Bessel function,  $\Delta\Phi/\Phi_0 = 3.83171$  and  $\Delta\Phi/\Phi_0 = 7.01559$ . Dashed lines are guides for the eye which identify  $v_0 = 0$ .

responsible for an absence of the centroid’s drift for all  $\theta$ . The insets in Fig. 6 show amplifications of  $v_0$  vs  $\delta\Phi$  close to first two zeros of the Bessel function,  $\Delta\Phi/\Phi_0 = 3.83171$  and  $\Delta\Phi/\Phi_0 = 7.01559$ . Dashed lines are guides for the eye which identify  $v_0 = 0$ .

The effective hopping of the quantum walker along the chain is directly influenced by the quantum gate parameter  $\theta$ . We extended our numerical experiments in order to offer a full diagram presenting the dependence of the wave-packet unidirectional centroid’s velocity at resonance regime as a function of  $\theta$  and  $\phi$ . Our results are shown as a density plot in Fig. 7. For  $\theta = 0$  and  $\pi$ , the wave packet spreads symmetrically, resulting in a stationary centroid. On the other hand, the wave packet remains trapped around the initial position for the Pauli-X gate  $\theta = \pi/2$ . Extremal drift velocities

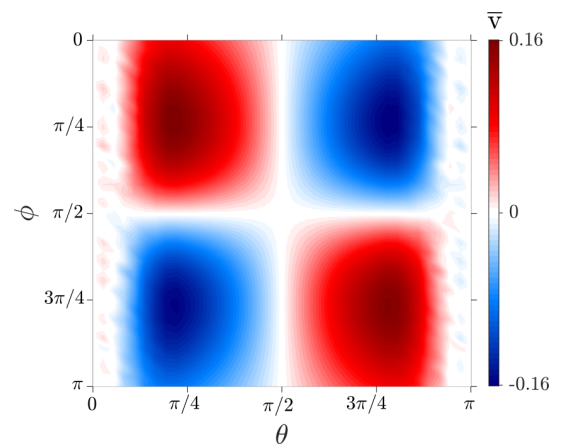


FIG. 7. Density plot of the centroid’s velocity in the plane  $\phi$  (ac field phase) vs  $\theta$  (quantum gate). We consider the resonance condition  $\omega = \omega_B$ , with  $\omega = \Phi_0$ ,  $m = 100$ , and  $\Delta\Phi = \Phi_0 = 2\pi/m$ . Notice that the centroid’s drift velocity can be controlled by tuning either the ac field phase or the quantum gate parameter.

(maximum and minimum) are achieved at finite  $\theta$  values. However, these extremal drift velocities are displaced towards  $\theta = 0$  (or  $\theta = \pi$ ) when smaller phase increments  $\Phi_0$  are considered. Therefore, the drift velocity of the wave-packet centroid can be controlled by tuning either the ac field phase or the gate parameter, thus opening a nice perspective for the manipulation of quantum walkers. The noise near  $\theta = 0$  and  $\pi$  is due to finite-time effects. Near these limiting values, the convergence towards the asymptotic dynamics becomes very slow and the continuous-time prediction of  $v_0 \propto \cos \theta$  breaks down. In the long-time regime, the dynamics of the quantum walk under a uniform field becomes unstable due to its discrete-time nature [29], thus degrading the resonance condition required to sustain the unidirectional motion.

#### IV. CONCLUDING REMARKS

In this work, we explored the dynamics of a quantum walker subjected to a superposition of emulated static and harmonic electric fields. The artificial constant field is related to a phase with a linear dependence on position, while the effective time-dependent field comes from a phase which exhibits a harmonic modulation. We show different quantum-walk dynamics by tuning the resulting electric field characteristics.

Under the action solely of a weak artificial constant field, the quantum walk develops quasistationary Bloch-like oscillations. Super-Bloch oscillations, with large amplitude and

low frequency  $\omega_{\text{SBO}}$ , can be achieved when the frequency of the harmonic phase field is closely tuned to the typical Bloch-oscillation frequency. We demonstrated that this low-frequency component on the quantum-walk dynamics is predominant whenever the detuning frequency  $\Delta\omega = \omega - \omega_B$  is below a characteristic fraction of  $\omega_B$ .

At exact resonance conditions,  $\omega = \omega_B$ , the quantum walk develops a unidirectional motion. Its average velocity and direction was shown to depend both on the field characteristics (amplitudes and phase) and the specific quantum gate implemented. In particular, the dependence of the wave-packet velocity on the field characteristics was shown to be well captured by a continuous-time approach. The coin operator parameter controls the range of possible values for the average velocity. Considering that discrete-time quantum walks can be implemented in several physical platforms, such as optical lattices, quantum cavities, and Bose-Einstein condensates, the present results show distinct ways to manipulate and drive quantum walkers by tuning either network characteristics governing the specific coin operator or the phase field parameters.

#### ACKNOWLEDGMENTS



This work was partially supported by CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior), CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), and FAPEAL (Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado de Alagoas).


- 
- [1] C. R. Nelson and C. R. Plosser, *J. Monetary Econ.* **10**, 139 (1982).
  - [2] L. Grady, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* **28**, 1768 (2006).
  - [3] G. M. Viswanathan, V. Afanasyev, S. V. Buldyrev, E. J. Murphy, P. A. Prince, and H. E. Stanley, *Nature* **381**, 413 (1996).
  - [4] E. A. Codling, M. J. Plank, and S. Benhamou, *J. R. Soc. Interface* **5**, 5813 (2008).
  - [5] P. Pons and M. Latapy, in *Computer and Information Sciences—ISCIS 2005*, edited by P. Yolum, T. Güngör, F. Gürgen, and C. Özturan (Springer, Berlin, 2005), pp. 284–293.
  - [6] U. Dieckmann and R. Law, *J. Math. Biol.* **34**, 579 (1996).
  - [7] J. A. J. Metz, R. M. Nisbet, and S. A. H. Geritz, *Trends Ecol. Evol.* **7**, 198 (1992).
  - [8] P. Koblinski, S. Phillpot, S. Choi, and J. Eastman, *Int. J. Heat Mass Transf.* **45**, 855 (2002).
  - [9] S. P. Jang and S. U. S. Choi, *Appl. Phys. Lett.* **84**, 4316 (2004).
  - [10] Y. Aharonov, L. Davidovich, and N. Zagury, *Phys. Rev. A* **48**, 1687 (1993).
  - [11] A. M. Childs, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 180501 (2009).
  - [12] N. Shenvi, J. Kempe, and K. Birgitta Whaley, *Phys. Rev. A* **67**, 052307 (2003).
  - [13] Q.-P. Su, Y. Zhang, L. Yu, J.-Q. Zhou, J.-S. Jin, X.-Q. Xu, S.-J. Xiong, Q. Xu, Z. Sun, K. Chen, F. Nori, and C.-P. Yang, *npj Quantum Inf.* **5**, 40 (2019).
  - [14] Q.-Q. Wang, X.-Y. Xu, W.-W. Pan, K. Sun, J.-S. Xu, G. Chen, Y.-J. Han, C.-F. Li, and G.-C. Guo, *Optica* **5**, 1136 (2018).
  - [15] A. Schreiber, K. N. Cassemiro, V. Potoček, A. Gábris, I. Jex, and Ch. Silberhorn, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 180403 (2011).
  - [16] B. C. Sanders, S. D. Bartlett, B. Tregenna, and P. L. Knight, *Phys. Rev. A* **67**, 042305 (2003).
  - [17] F. Zähringer, G. Kirchmair, R. Gerritsma, E. Solano, R. Blatt, and C. F. Roos, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 100503 (2010).
  - [18] H. Schmitz, R. Matjeschk, C. Schneider, J. Glueckert, M. Enderlein, T. Huber, and T. Schaetz, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 090504 (2009).
  - [19] M. Gräfe and A. Szameit, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **53**, 073001 (2020).
  - [20] A. Crespi, R. Osellame, R. Ramponi, V. Giovannetti, R. Fazio, L. Sansoni, F. De Nicola, F. Sciarrino, and P. Mataloni, *Nat. Photonics* **7**, 322 (2013).
  - [21] R. Vieira, E. P. M. Amorim, and G. Rigolin, *Phys. Rev. A* **89**, 042307 (2014).
  - [22] A. R. C. Buarque and W. S. Dias, *Phys. Rev. E* **100**, 032106 (2019).
  - [23] Y. Shikano, T. Wada, and J. Horikawa, *Sci. Rep.* **4**, 4427 (2014).
  - [24] A. R. C. Buarque and W. S. Dias, *Phys. Rev. A* **101**, 023802 (2020).
  - [25] S. D. Berry and J. B. Wang, *Phys. Rev. A* **83**, 042317 (2011).
  - [26] G. R. Carson, T. Loke, and J. B. Wang, *Quantum Inf. Process.* **14**, 3193 (2015).

- [27] K. Mochizuki, D. Kim, and H. Obuse, *Phys. Rev. A* **93**, 062116 (2016).
- [28] S. Longhi, *Opt. Lett.* **44**, 5804 (2019).
- [29] C. Cedzich, T. Rybár, A. H. Werner, A. Alberti, M. Genske, and R. F. Werner, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 160601 (2013).
- [30] M. Genske, W. Alt, A. Steffen, A. H. Werner, R. F. Werner, D. Meschede, and A. Alberti, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 190601 (2013).
- [31] L. A. Bru, M. Hinarejos, F. Silva, G. J. de Valcárcel, and E. Roldán, *Phys. Rev. A* **93**, 032333 (2016).
- [32] V. V. Ramasesh, E. Flurin, M. Rudner, I. Siddiqi, and N. Y. Yao, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 130501 (2017).
- [33] M. C. Bañuls, C. Navarrete, A. Pérez, E. Roldán, and J. C. Soriano, *Phys. Rev. A* **73**, 062304 (2006).
- [34] C. Cedzich and R. F. Werner, *Phys. Rev. A* **93**, 032329 (2016).
- [35] P. Xue, R. Zhang, H. Qin, X. Zhan, Z. H. Bian, J. Li, and B. C. Sanders, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 140502 (2015).
- [36] T. Oka, N. Konno, R. Arita, and H. Aoki, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 100602 (2005).
- [37] P. Arnault, B. Pepper, and A. Pérez, *Phys. Rev. A* **101**, 062324 (2020).
- [38] K. Kudo and T. S. Monteiro, *Phys. Rev. A* **83**, 053627 (2011).
- [39] R. Caetano and M. Lyra, *Phys. Lett. A* **375**, 2770 (2011).
- [40] M. L. Lyra and R. A. Caetano, *Phys. Status Solidi B* **254**, 1600805 (2017).

*E***Rogue waves in discrete-time quantum walks**

## Rogue waves in discrete-time quantum walks

A. R. C. Buarque , W. S. Dias, F. A. B. F. de Moura , M. L. Lyra, and G. M. A. Almeida  
*Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas, 57072-900 Maceió, Alagoas, Brazil*

 (Received 17 November 2021; revised 13 April 2022; accepted 27 June 2022; published 11 July 2022)

Rogue waves are rapid and unpredictable events of exceptional amplitude reported in various fields, such as oceanography and optics, with much of the interest being targeted towards their physical origins and likelihood of occurrence. Here, we use the all-round framework of discrete-time quantum walks to study the onset of those events due to a random phase modulation, unveiling its long-tailed statistics, survival time, and dependence upon the degree of randomness. We find the minimal disorder strength allowing for their occurrence to scale  $\propto N^{-1/2}$ ,  $N$  being the number of sites. Moreover, an extreme-value analysis converges to the Gumbel class of limiting distributions.

DOI: [10.1103/PhysRevA.106.012414](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.106.012414)

### I. INTRODUCTION

Rogue or freak waves, unpredictable and rare huge walls of water appearing from nowhere and vanishing without a trace, have been known and feared for centuries by seafarers. The first solid account of the phenomenon took place in 1995 when data collected on the Draupner oil platform in the North Sea revealed a 26-m wave rising out of a background with about half significant wave height [1]. Years later, analogies between such ocean wave phenomena and light propagation in optical fibers surged in the framework of the nonlinear Schrödinger equation [2]. Since then, interest in ubiquitous wave phenomena displaying long-tailed statistics, when outliers occur more often than expected from Gaussian statistics, has skyrocketed in various fields (for a recent review, see Ref. [3]). Optics, particularly, has been a powerful test bed for investigating rogue waves owing to the spatial and timescales involved and, in addition, optical rogue waves include an assortment of novel phenomena, not necessarily featuring a hydrodynamics counterpart [3].

One of the key challenges in the field is to find out precisely how those events emerge so as to be able to predict and control them. There is a long-standing debate on whether rogue waves are primarily driven by linear or nonlinear processes [4] and what is the role of noise and randomness [5]. It is natural to assume that nonlinearity plays an important role due to modulational instability [6,7], collisions between solitons [8], and so forth. On the other hand, some studies suggest that the linear interference of random fields is crucial [9–20], with nonlinear effects responsible for extra wave focusing [21–23]. Indeed, linear models can display rogue waves on their own when augmented with the right ingredients as shown in Ref. [10]. This has been shown experimentally in microwave transport in randomly distributed scatterers [9], two-dimensional (2D) photonic crystal resonators [13], and very recently by measuring linear light diffraction patterns in the presence of long-range spatial memory effects in the random input [18].

Interest in linear rogue waves has been increasing considerably over the past few years. Yet, it is surprising that

quantum mechanics has barely been taken into consideration. Even though the dynamics of a single quantum particle can be mapped into linear optics, investigating the onset of rogue-like events in the very domain of quantum mechanics has its own appeal. It could, for instance, shed new light on the dynamics of disordered systems and related features such as Anderson localization. With that in mind, we set about to explore the occurrence of *rogue quantum amplitudes* using the discrete-time quantum walk (DTQW) approach [24]. It is basically a cellular automaton [25] whose updating rules are run by a preset sequence of quantum gates. Given recent experimental advances in the field [26–28] as well as their wide range of applications, from quantum algorithms [29] to the simulation of involved phenomena in condensed matter physics [15,30–34], DTQWs make for a suitable starting point.

We report the manifestation of rogue waves in the Hadamard one-dimensional DTQW induced by random phase fluctuations. We do so by unveiling the long-tailed statistics of the occupation probability amplitudes (which is analogous to light intensity in optics) over the space-time set of events. We show that an intermediate level of disorder scaling as  $N^{-\nu}$  maximizes the likelihood of rogue events. That has to do with a fair balance between localization and mobility, for which the localization length  $\propto N^{2\nu}$ ,  $N$  being the number of sites. Furthermore, an extreme-value analysis is carried out for the amplitude block maximum over time and we find that the resulting distribution falls into the Gumbel class.

### II. QUANTUM WALK MODEL

We consider a single-particle DTQW in one dimension [24] defined by a two-level (coin) space  $H_C = \{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$  and a position space  $H_P = \{|n\rangle\}$ , such that the full Hilbert space reads  $H = H_C \otimes H_P$ . An arbitrary state at a given instant  $t$  can be written as  $|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^N [a_n(t)|\uparrow, n\rangle + b_n(t)|\downarrow, n\rangle]$ , satisfying the normalization condition  $\sum_n P_n(t) = \sum_n [|a_n(t)|^2 + |b_n(t)|^2] = 1$ .

The quantum walker evolves as  $|\Psi(t+1)\rangle = \hat{S}(\hat{C} \otimes I_P)\hat{D}|\Psi(t)\rangle$ , where the conditional shift operator  $\hat{S}$  is

responsible for the nearest-neighbor transitions  $\hat{S}|\uparrow, n\rangle = |\uparrow, n+1\rangle$  and  $\hat{S}|\downarrow, n\rangle = |\downarrow, n-1\rangle$  (assuming periodic boundary conditions),  $\hat{C} = (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|)/\sqrt{2}$  is the standard Hadamard coin,  $I_p$  is the identity operator acting on the  $N$ -dimensional position space, and

$$\hat{D} = \sum_c \sum_n e^{iF(c,n,t)} |c, n\rangle \langle c, n| \quad (1)$$

is the phase-gain operator, with  $F(c, n, t)$  being a real-valued arbitrary function [35] and  $c = \uparrow, \downarrow$ . Periodic boundary conditions are not essential for the generation of rogue waves and are set to filter out barrier reflections from the statistics. Given the flexibility in choosing  $F(c, n, t)$ , one is able to produce various dynamical regimes. Setting  $F = 0$  renders the standard Hadamard quantum walk in which walker spreads out ballistically [24]. Here, instead, we set a static random phase modulation such that  $F(c, n, t) = F(c, n) = 2\pi v$ , where  $v$  is a random number uniformly distributed within  $[-W, W]$ , with  $W$  being the disorder width. As this setting can lead to Anderson localization [15,32], we ought to inquire whether rogue waves can be supported given proper initial conditions and the amount of noise embedded in  $F(c, n)$ .

### III. RESULTS

In order to avoid ambiguity between an actual rogue event (a rare one) and the inevitable Anderson localization in the statistics, we initialize the system in a coin-unbiased [36], fully delocalized state  $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{n=1}^N (|\uparrow, n\rangle + i|\downarrow, n\rangle)$ . Note that an initial localized state would only invite a few modes to act in the evolution rendering narrow periodic beatings in time rather than the unpredictable transient nature of a rogue wave. Random phase modulation is applied at every step by gate  $\hat{D}$  [see Eq. (1)] so as to foster inhomogeneity and, as a result, fragmentation of the walker wave function. These two ingredients have been proved to be crucial for the development of linear rogue waves [10].

Let us now establish the criteria to identify the rogue waves. Following the standard procedure as in oceanography and optics [3,37], we define a occupation probability threshold  $P_{\text{th}}$  as the mean of the largest one third of values on a full space-time record. A rogue-wave event is counted whenever  $P_n(t) > 2P_{\text{th}}$ .

Figure 1 shows a snapshot of a typical rogue-wave event with  $P_n \approx 5P_{\text{th}}$  alongside a detailed look over the amplitude record over space and time. The peak shares all the standard characteristics of a rogue wave: Besides the large amplitude in comparison to the background, it is unpredictable and short lived.

In Fig. 2 we show normalized probability density functions (PDFs) of  $P_n$  generated by a large ensemble of quantum walk runs (space-time records with  $N \times$  steps values) for some representative strengths of disorder. Figure 2(b) clearly displays another key signature of the occurrence of rogue events [3], which is a positively skewed, L-shaped distribution. It features a significant number of outliers in the high-amplitude range, relatively rare among the total number of events yet more than what one would get from Gaussian statistics.

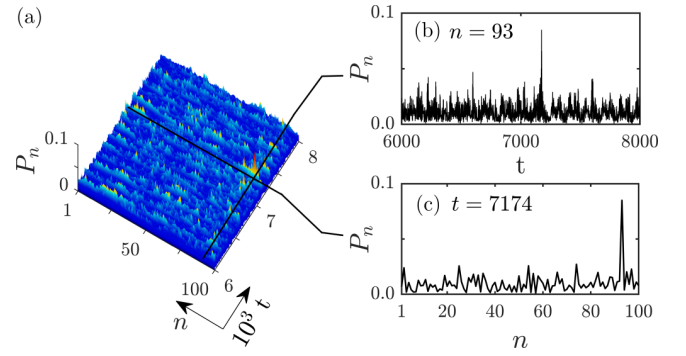


FIG. 1. (a) Snapshot of the space-time evolution of the occupation amplitude  $P_n$  in the Hadamard DTQW on a ring with  $N = 100$  sites and disorder strength  $W = 0.1$  (single realization). (b), (c) Time series and spatial profile extracted from (a). The rogue event is seen at  $t = 7174$ .

In order to analyze those distributions in a more quantitative level for the whole range of  $W$ , Fig. 3(a) shows the ensemble-averaged percentage of events fulfilling the condition  $P_n > 2P_{\text{th}}$ . Figure 3(b) shows the disorder level  $W_c$ ,

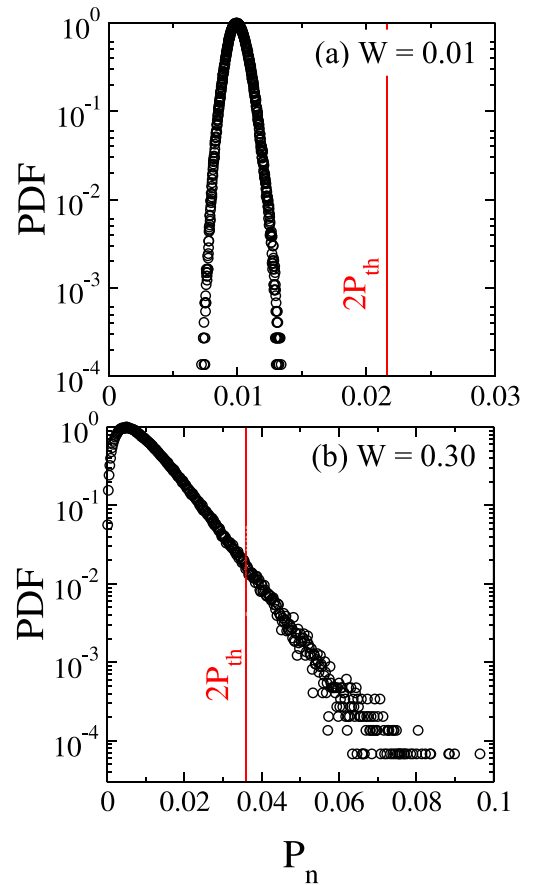


FIG. 2. Normalized PDFs for (a)  $W = 0.01$  (Gaussian profile) and (b)  $W = 0.30$  (exponential decay) in semilog scale for an ensemble of 5000 independent realizations of disorder and  $10^4$  steps on a cycle with  $N = 100$  sites. The vertical line marks the threshold above which the outcome is considered a rogue event.

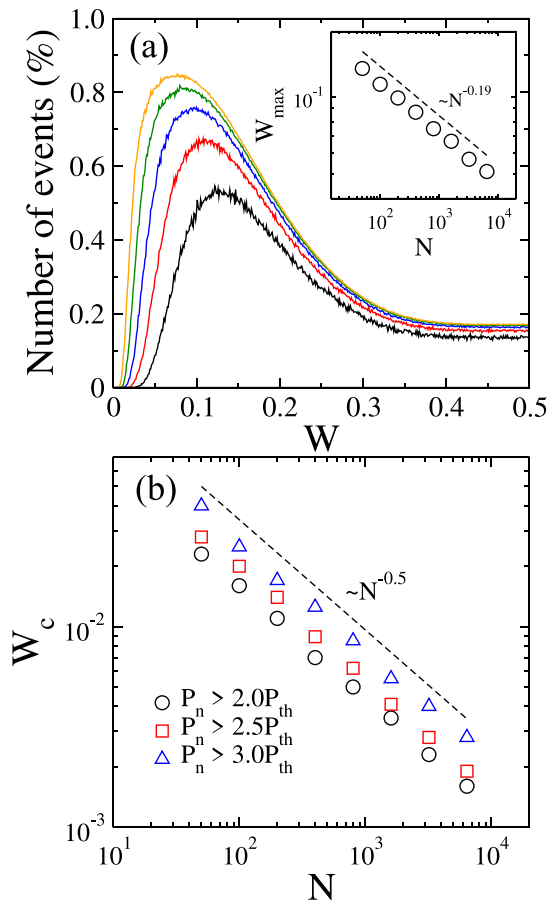


FIG. 3. (a) Number of rogue-wave events vs disorder strength  $W$  for  $N = 50, 100, 200, 400,$  and  $800$  sites [from the black (lower) line to the orange (upper) line], averaged over 5000 independent realizations of disorder, each running through  $10N$  time steps. This choice is arbitrary given the evolution is statistically stationary in time. What affects the localization behavior and the rogue-wave statistics is the spatial domain  $N$ . The inset shows the scaling of the disorder degree that maximizes the chances of measuring a rogue event  $W_{\max}$  with  $N$ . (b) Disorder strength  $W_c$  above which rogue waves have a finite occurrence probability for distinct threshold levels. The scaling  $W_c \propto N^{-1/2}$  unveils that at  $W_c$  the localization length  $\chi \propto 1/W^2$  is of the order of the chain size.

above which there is a finite chance that rogue waves take place, as a function of  $N$ . So as not to be led by the arbitrary threshold  $2P_{\text{th}}$ , we consider other levels as well. Irrespective of that, the minimal disorder strength leading to the occurrence of rogue waves  $W_c \propto N^{-1/2}$ . Such scaling behavior can be fully explained by stressing that the occurrence of rogue-wave events here is a disorder-induced phenomenon. Therefore, they set in when the associated Anderson localization length  $\chi$  becomes smaller than the system size  $N$ . In the opposite regime, the system is effectively disorder free. According to the above consideration, rogue waves will appear whenever  $\chi < N$ . In the weak disorder regime, the typical localization length of the eigenstates of quantum walks under random phase shifts depends quadratically on the inverse of the disorder width, i.e.,  $\chi = k/W^2$ , with  $k$  being a constant [15] (it simply saturates in the strong disorder limit). The condition

for the emergence of rogue waves is thus  $k/W^2 < N$ , or  $W > \sqrt{k/N}$ , in full agreement with the scaling law reported in Fig. 3(b). We highlight that such a scaling property as well as the overall behavior seen in Fig. 3 hold for much lower number of steps and system sizes within experimental feasibility [38].

Another curious feature is the optimal level of disorder  $W_{\max}$  that maximizes the chances of observing a rogue event somewhere along the system. This suggests that rogue events are more likely to develop when localization and mobility are properly balanced. The inset of Fig. 3(a) shows that  $W_{\max} \propto N^{-\nu}$ , with  $\nu \approx 0.19$  over the range of chain sizes considered. For such a disorder level, the typical localization length scales as  $\chi \propto N^{2\nu}$ .

An increased likelihood of the occurrence of rogue waves between weak and intermediate disorder strengths has been seen in recent experiments carried out on one-dimensional (1D) photonic lattices featuring both on-site and coupling disorder [17]. That also suggests that the interplay between localization and delocalization is a key ingredient for the generation of extreme events in linear systems. Furthermore, correlated fluctuations have been exploited to enhance the likelihood of occurrence of rogue waves [16,18], some of these largely exceeding the amplitude threshold (referred to as super rogue waves) [18].

Large fluctuations in  $F(c, n)$  [cf. Eq. (1)] tend to make the localization effects sharper but it does not necessarily mean that the occurrence of rogue waves will follow that up. We shall always keep in mind that a rogue wave is a rare and sudden event whose amplitude should exceed some threshold based on the average amplitude background. In order to produce such abnormal constructive interference at some location via linear dynamics, we need the proper synchronization of random waves undergoing different paths and thereby some degree of mobility. Figure 4 shows the evolution of branching patterns highlighting the distribution profile of the rogue events (red spots). In the case of weak disorder, we note that whenever synchronization conditions are met to form a rogue wave, it usually covers a few sites in the neighborhood before disappearing [Fig. 4(a)]. For intermediate disorder, the rogue events become sparse but more frequent, as a more complex branching profile emerges [Fig. 4(b)]. If we keep on increasing the disorder width  $W$ , there will be a stage above which mobility, if any, is restricted to shorter spatial domains given the onset of local resonances. This is seen in Fig. 4(c) in the form of well-defined amplitude domains, with a few of them giving rise to rogue waves now and then. That is why the rogue-wave likelihood saturates for large  $W$  and barely responds to the system size  $N$  [see Fig. 3(a)]. Each panel of Fig. 4 also shows the normalized inverse participation ratio  $\text{IPR}(t) = [N \sum_n P_n(t)^2]^{-1}$  so we can get a more global view of the dynamics. Although it does not really capture the rogue-wave statistics because it reads the entire wave function at a time, the IPR ultimately tells us that long-time evolution is not necessary to observe rogue waves because it displays stationary behavior following a very rapid transient time. To confirm this property (in the wide sense) we run Dickey-Fuller tests for an IPR series covering thousands of steps, all of which resulted in the null hypothesis that a unit root is present in a first-order autoregressive model of the



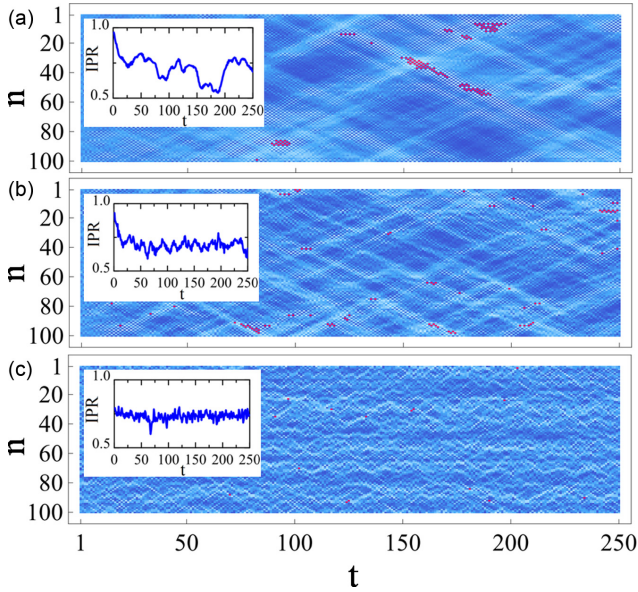


FIG. 4. Samples of space-time branching patterns of  $P_n(t)$  for disorder widths (a)  $W = 0.05$ , (b)  $W = 0.1$ , and (c)  $W = 0.5$ . Red (darker) spots are rogue-wave events. Insets show the evolution of the corresponding normalized IPR.

form  $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \epsilon_t$ , the last term denoting uncorrelated noise.

We have just seen that if a rogue wave is at time  $t$ , depending on  $W$  there is a good chance another one will be observed in the surroundings at  $t + 1$ . To account for this curious feature, let us do the following. For a given run, we track the appearance of rogue waves at a given time and count how many steps are covered before no rogue waves are to be seen. Two or more rogue waves occurring simultaneously at distinct locations count as one elapsed time. Counting resets as soon as another occurrence is detected and so forth. We define  $\tau$  as the mean of those observations. Figure 5 shows this quantity versus  $W$  for different sizes  $N$ . It immediately tells us the rogue-wave durability correlates with the likelihood of observing one [by randomly picking up an event from the ensemble; see Fig. 3(a)]. Whereas the process of

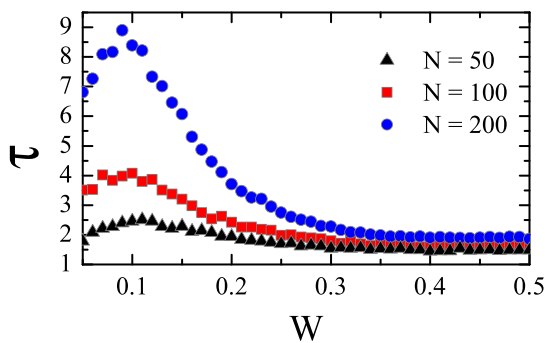


FIG. 5. Mean rogue-wave time span  $\tau$  over 3000 steps vs disorder strength  $W$ , averaged over 1000 independent realizations of disorder. For intermediate values of  $W$  chances are there will be other occurrences of rogue waves nearby in subsequent steps.

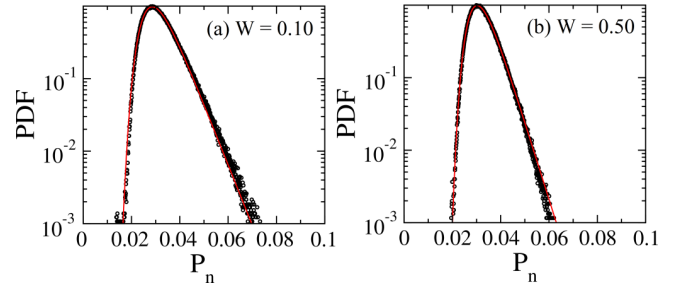


FIG. 6. Extreme-value PDFs in semilog scale for  $N = 100$  and  $10^4$  independent realizations of disorder. At each time step, the maximum probability amplitude  $P_{\max}$  is recorded. The red (solid) line is a Gumbel-type fitting given by  $f(z) \propto \exp[-\alpha z - \beta \exp(-\alpha z)]$ , with  $(\alpha, \beta)$  being  $(184.73, 106.12)$  for (a)  $W = 0.10$  and  $(232.51, 1002.07)$  for (b)  $W = 0.5$ .

rogue-wave generation here is statistically stationary in time, it is influenced by  $N$  as long as  $\chi \propto W^{-2}$  is reasonably smaller for constructive interference to build up, usually involving a number of neighboring sites.

Last but not least, let us perform an extreme-value analysis by selecting the maximum amplitude at each time step during the evolution. By doing this block maxima approach, we are able to establish, for all practical purposes, a set of identically distributed random variables  $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ , to which the Fischer-Tippett-Gnedenko theorem applies [39,40]. In short, it states that given the cumulative distribution of  $M = \max(y_1, y_2, \dots, y_k)$ ,  $F(y) = [\int_{-\infty}^y p(y') dy']^k$ , it is possible to reach an asymptotic limit for a particular sequence of scaling factors  $a_k$  and  $b_k$  such that  $\lim_{k \rightarrow \infty} F(a_k z + b_k) = G(z)$ . The key point is that  $G(z)$  comes in three distinct forms depending on the parent function  $p(y)$ . For the ones carrying faster-than-power-law decay (which is our situation; cf. Fig. 2), say  $p(y) \sim e^{-y^\mu}$ ,  $\mu > 0$ , the limiting cumulative distribution is found to be  $G(z) = e^{-e^z}$ . Then, the extreme-value PDF is the Gumbel distribution  $f(z) = G'(z) = e^{-z-e^z}$ , with  $z \in (-\infty, \infty)$ . Figure 6 shows that our extreme events indeed belong to the Gumbel class. For an intermediate degree of disorder, as in Fig. 6(a), the range of  $P_{\max}$  is visibly more stretched, which again indicates a pronounced likelihood of observing a rogue event.

#### IV. FINAL REMARKS

We reported rogue waves of linear origin in disordered DTQWs. Such events take place when the disorder strength breaks through  $W_c \propto N^{-1/2}$ . The highest likelihood of observing rogue waves is obtained for intermediate values of randomness that scale as  $W_{\max} \propto N^{-\nu}$ , due to a proper balance between trapping mechanisms and mobility for which the localization length  $\chi \propto N^{2\nu}$ . Further investigations are in order to build up on the intrinsic relationship between localization length and rogue-wave generation. We went over the long-tail profile to prove that disordered Hadamard DTQW falls within the Gumbel class of extreme-value limiting distributions.

The DTQW studied here offers the possibility of embedding nonlinearity into  $F(c, n, t)$ . In this context, solitonlike pulses and self-trapping have been reported in Refs. [33,35].

The stage is set for addressing the competition between linear and nonlinear mechanics in the generation of rogue waves in quantum walks.

From the experimental side, state-of-the-art photonic platforms [41] are able to perform the simulation efficiently up to several steps, especially given the quantum walk we investigated here relies on interference between single-particle states. To bypass problems with the scalability of resources, time multiplexing techniques are often employed [38,42–44]. In these, the quantum walker position is encoded in the arrival times of light pulses performing round trips through a couple of fiber loops of different lengths. Technological progress is such that those synthetic lattices are currently capable of running Bloch oscillations [45], forming solitons [43,44], and much more [46]. While noise can deteriorate the useful signal

after about 100 round trips [38], the rogue waves we found here can be generated in just a few time steps as the dynamics is statistically stationary.

In addition to delivering significant advances in the field of linear rogue waves, we hope our findings seed interest in quantum-mechanical extreme events in general. This is of high value in quantum information processing, where unexpected events of that nature could lead to potential hazards during the dynamics given the unavoidable presence of noise in quantum devices.

#### ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by CNPq, CAPES (Brazilian Federal Agencies), and FAPEAL (Alagoas State Agency).

- 
- [1] S. Harvey, in *Rogue Waves 2004*, edited by M. Olagnon and M. Prevosto (Ifremer, Brest, France, 2004).
- [2] D. R. Solli, C. Ropers, P. Koonath, and B. Jalali, Optical rogue waves, *Nature (London)* **450**, 1054 (2007).
- [3] J. M. Dudley, G. Genty, A. Mussot, A. Chabchoub, and F. Dias, Rogue waves and analogies in optics and oceanography, *Nat. Rev. Phys.* **1**, 675 (2019).
- [4] G. Dematteis, T. Grafke, M. Onorato, and E. Vanden-Eijnden, Experimental Evidence of Hydrodynamic Instantons: The Universal Route to Rogue Waves, *Phys. Rev. X* **9**, 041057 (2019).
- [5] C. Bonatto, M. Feyereisen, S. Barland, M. Giudici, C. Masoller, J. R. Rios Leite, and J. R. Tredicce, Deterministic Optical Rogue Waves, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 053901 (2011).
- [6] F. Baronio, M. Conforti, A. Degasperis, S. Lombardo, M. Onorato, and S. Wabnitz, Vector Rogue Waves and Baseband Modulation Instability in the Defocusing Regime, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 034101 (2014).
- [7] G. Xu, A. Chabchoub, D. E. Pelinovsky, and B. Kibler, Observation of modulation instability and rogue breathers on stationary periodic waves, *Phys. Rev. Research* **2**, 033528 (2020).
- [8] N. Akhmediev, J. M. Soto-Crespo, and A. Ankiewicz, How to excite a rogue wave, *Phys. Rev. A* **80**, 043818 (2009).
- [9] R. Höhmann, U. Kuhl, H.-J. Stöckmann, L. Kaplan, and E. J. Heller, Freak Waves in the Linear Regime: A Microwave Study, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 093901 (2010).
- [10] F. T. Arecchi, U. Bortolozzo, A. Montina, and S. Residori, Granularity and Inhomogeneity are the Joint Generators of Optical Rogue Waves, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 153901 (2011).
- [11] J. J. Metzger, R. Fleischmann, and T. Geisel, Statistics of Extreme Waves in Random Media, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 203903 (2014).
- [12] A. Mathis, L. Froehly, S. Toenger, F. Dias, G. Genty, and J. M. Dudley, Caustics and rogue waves in an optical sea, *Sci. Rep.* **5**, 12822 (2015).
- [13] C. Liu, R. E. C. van der Wel, N. Rotenberg, L. Kuipers, T. F. Krauss, A. Di Falco, and A. Fratilocchi, Triggering extreme events at the nanoscale in photonic seas, *Nat. Phys.* **11**, 358 (2015).
- [14] M. Mattheakis, I. Pitsios, G. Tsironis, and S. Tzortzakis, Extreme events in complex linear and nonlinear photonic media, *Chaos, Solitons Fractals* **84**, 73 (2016).
- [15] S. Derevyanko, Anderson localization of a one-dimensional quantum walker, *Sci. Rep.* **8**, 1795 (2018).
- [16] M. Peysokhan, J. Keeney, and A. Mafi, Impact of spatial correlation in fluctuations of the refractive index on rogue wave generation probability, *Opt. Lett.* **44**, 2244 (2019).
- [17] D. Rivas, A. Szameit, and R. A. Vicencio, Rogue waves in disordered 1D photonic lattices, *Sci. Rep.* **10**, 13064 (2020).
- [18] C. Bonatto, S. D. Prado, F. L. Metz, J. R. Schoffen, R. R. B. Correia, and J. M. Hickmann, Super rogue wave generation in the linear regime, *Phys. Rev. E* **102**, 052219 (2020).
- [19] H. Frostig, I. Vidal, R. Fischer, H. H. Sheinfux, and Y. Silberberg, Observation of rogue events in non-Markovian light, *Optica* **7**, 864 (2020).
- [20] R. da Silva and S. D. Prado, A simple study of the correlation effects in the superposition of waves of electric fields: The emergence of extreme events, *Phys. Lett. A* **384**, 126231 (2020).
- [21] M. Onorato, A. R. Osborne, M. Serio, and S. Bertone, Freak Waves in Random Oceanic Sea States, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5831 (2001).
- [22] L. H. Ying, Z. Zhuang, E. J. Heller, and L. Kaplan, Linear and nonlinear rogue wave statistics in the presence of random currents, *Nonlinearity* **24**, R67 (2011).
- [23] A. Safari, R. Fickler, M. J. Padgett, and R. W. Boyd, Generation of Caustics and Rogue Waves from Nonlinear Instability, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 203901 (2017).
- [24] J. Kempe, Quantum random walks: An introductory overview, *Contemp. Phys.* **44**, 307 (2003).
- [25] D. A. Meyer, Quantum mechanics of lattice gas automata: One-particle plane waves and potentials, *Phys. Rev. E* **55**, 5261 (1997).
- [26] Q.-P. Su, Y. Zhang, L. Yu, J.-Q. Zhou, J.-S. Jin, X.-Q. Xu, S.-J. Xiong, Q. Xu, Z. Sun, K. Chen, F. Nori, and C.-P. Yang, Experimental demonstration of quantum walks with initial superposition states, *npj Quantum Inf.* **5**, 40 (2019).
- [27] K. Wang, X. Qiu, L. Xiao, X. Zhan, Z. Bian, W. Yi, and P. Xue, Simulating Dynamic Quantum Phase Transitions in Photonic Quantum Walks, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 020501 (2019).
- [28] C. Huerta Alderete, S. Singh, N. H. Nguyen, D. Zhu, R. Balu, C. Monroe, C. M. Chandrashekar, and N. M. Linke, Quantum walks and Dirac cellular automata on a programmable trapped-ion quantum computer, *Nat. Commun.* **11**, 3720 (2020).

- [29] N. B. Lovett, S. Cooper, M. Everitt, M. Trevers, and V. Kendon, Universal quantum computation using the discrete-time quantum walk, *Phys. Rev. A* **81**, 042330 (2010).
- [30] H. Obuse, J. K. Asbóth, Y. Nishimura, and N. Kawakami, Unveiling hidden topological phases of a one-dimensional Hadamard quantum walk, *Phys. Rev. B* **92**, 045424 (2015).
- [31] T. Rakovszky and J. K. Asboth, Localization, delocalization, and topological phase transitions in the one-dimensional split-step quantum walk, *Phys. Rev. A* **92**, 052311 (2015).
- [32] C. V. C. Mendes, G. M. A. Almeida, M. L. Lyra, and F. A. B. F. de Moura, Localization-delocalization transition in discrete-time quantum walks with long-range correlated disorder, *Phys. Rev. E* **99**, 022117 (2019).
- [33] A. R. C. Buarque and W. S. Dias, Self-trapped quantum walks, *Phys. Rev. A* **101**, 023802 (2020).
- [34] J. P. Mendonça, F. A. B. F. de Moura, M. L. Lyra, and G. M. A. Almeida, Emergent nonlinear phenomena in discrete-time quantum walks, *Phys. Rev. A* **101**, 062335 (2020).
- [35] C. Navarrete-Benlloch, A. Pérez, and E. Roldán, Nonlinear optical Galton board, *Phys. Rev. A* **75**, 062333 (2007).
- [36] B. Tregenna, W. Flanagan, R. Maile, and V. Kendon, Controlling discrete quantum walks: Coins and initial states, *New J. Phys.* **5**, 83 (2003).
- [37] C. Kharif, E. Pelinovsky, and A. Slunyaev, *Rogue Waves in the Oceans* (Springer, Berlin, 2009).
- [38] I. D. Vatanik, A. Tikan, G. Onishchukov, D. V. Churkin, and A. A. Sukhorukov, Anderson localization in synthetic photonic lattices, *Sci. Rep.* **7**, 4301 (2017).
- [39] S. N. Majumdar, A. Pal, and G. Schehr, Extreme value statistics of correlated random variables: A pedagogical review, *Phys. Rep.* **840**, 1 (2020).
- [40] L. D. Haan and A. Ferreira, *Extreme Value Theory: An Introduction* (Springer, Berlin, 2007).
- [41] F. Flamini, N. Spagnolo, and F. Sciarrino, Photonic quantum information processing: A review, *Rep. Prog. Phys.* **82**, 016001 (2019).
- [42] A. Regensburger, M.-A. Miri, C. Bersch, J. Näger, G. Onishchukov, D. N. Christodoulides, and U. Peschel, Observation of Defect States in  $\mathcal{PT}$ -Symmetric Optical Lattices, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 223902 (2013).
- [43] M. Wimmer, A. Regensburger, M.-A. Miri, C. Bersch, D. N. Christodoulides, and U. Peschel, Observation of optical solitons in PT-symmetric lattices, *Nat. Commun.* **6**, 7782 (2015).
- [44] A. L. M. Muniz, M. Wimmer, A. Bisianov, U. Peschel, R. Morandotti, P. S. Jung, and D. N. Christodoulides, 2D Solitons in  $\mathcal{PT}$ -Symmetric Photonic Lattices, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 253903 (2019).
- [45] M. Wimmer, M.-A. Miri, D. Christodoulides, and U. Peschel, Observation of Bloch oscillations in complex PT-symmetric photonic lattices, *Sci. Rep.* **5**, 17760 (2015).
- [46] S. Barkhofen, T. Nitsche, F. Elster, L. Lorz, A. Gábris, I. Jex, and C. Silberhorn, Measuring topological invariants in disordered discrete-time quantum walks, *Phys. Rev. A* **96**, 033846 (2017).